SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS MARIE

1962/64

SCHEMAS EN GROUPES

(SGA 3)

Un séminaire dirigé par

M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK

avec la collaboration de

M. ARTIN, J.E. BERTIN, P. GABRIEL, M. RAYNAUD, J.P. SERRE

TOME I

(PROPRIETES GENERALES DES SCHEMAS EN GROUPES)

-.

AVERTISSEMENT

Nous présentons ici une réédition légèrement revisée du Séminaire original, dont le but et le contenu se trouvent indiqués dans l'Introduction. La révision a consisté pour l'essentiel dans la correction de fautes de frappe, l'addition (en notes de bas de page) de quelques remarques ou références supplémentaires, le découpage actuel en trois volumes munis chacun d'une table des matières détaillée et d'un index des notations, l'adjonction d'un index terminologique à la fin du volume 3. De plus, l'exposé VI_B de J.E. BERTIN a été partiellement réécrit par ses soins, notamment les paragraphes 5 et 10, de sorte que certaines références à cet exposé sont différentes des références à l'exposé originel. Le lecteur trouvera une liste des exposés du Séminaire au début du présent volume.

Depuis la parution de la première édition du présent Séminaire a paru la totalité des Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. IV, ce qui rend inutile certains passages du Séminaire ; nous avons signalé parfois en note de bas de page les références pertinentes à EGA IV qui permettent de court-circuiter de tels passages.

Pour un autre exposé sur les groupes algébriques utilisant systématiquement le langage des schémas, nous signalons le livre de M. DEMAZURE - P. GABRIEL, Groupes Algébriques (North-Holland-Masson et Cie). Contrairement au présent Séminaire, ce livre ne suppose aucune connaissance de Géométrie Algébrique, mais contient tous les préliminaires nécessaires de théorie des schémas, et sa lecture peut donc servir d'introduction à l'étude de notre Séminaire. (Il contient d'ailleurs des thèmes non couverts dans le Séminaire, comme la théorie de structure à la Dieudonné des groupes algébriques affines commutatifs, dans loc. cit. Chap. V.)

Bures-sur-Yvette, Mars 1970

INTRODUCTION

1. Le but du présent séminaire est double.

D'une part, nous visons à donner des fondements commodes pour la théorie des schémas en groupes en général. Les exposés I à IV donneront à cet égard les indispensables exercices préliminaires de syntaxe schématique et catégorique. Pour obtenir un langage qui "colle" sans effort à l'intuition géométrique, et éviter des circonlocutions insupportables à la longue, nous identifions toujours un préschéma X sur un autre S au foncteur $(\mathrm{Sch})_{/S}^{\circ} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ qu'il représente [(1)], et il est nécessaire de donner de nombreuses définitions de telle façon qu'elles s'appliquent à des foncteurs quelconques, représentable ou non. D'ailleurs, presque tous les foncteurs que nous aurons à utiliser seront des "faisceaux" (pour la "topologie fidèlement plate quasi-compacte"); l'exposé IV, qui ne traite des groupes que de façon accessoire, donne une esquisse du langage de la "localisation" et des faisceaux, qui s'avère également fort commode dans les questions de représentabilité des foncteurs. Cet exposé nous fournira surtout, pour les questions de passage au quotient, le cadre le plus commode pour la suite. L'exposé V donne quelques résultats généraux sur l'existence de quotients, repris dans l'exposé VI_A dans le cas du quotient d'un groupe algébrique sur un corps (ou plus généralement, sur un anneau artinien) par un sous-groupe [(2)]. Ce dernier exposé et l'exposé VI_B qui lui fait suite contiennent également divers résultats élémentaires spéciaux aux groupes algébriques sur un corps,

---

(1) Un tel point de vue semble avoir été envisagé pour la première fois il y a huit ou neuf ans à propos de la théorie des groupes formels par P. Cartier, qui n'a pas pris la peine malheureusement de le préciser et de le systématiser comme il le méritait.

(2) Pour une étude plus approfondie du passage au quotient, notamment par les groupes réductifs, voir l'importante étude de D. MUMFORD, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Mathematik, Bd 34, Springer 1965. Observons que sur un point important, la terminologie de ce livre ne concorde pas avec la nôtre, car sur un corps de caractéristique $p > 0$, les groupes que Mumford appelle "réductifs" sont les groupes lisses de type multiplicatif au sens du Séminaire. On peut sans doute considérer que l'acception de Mumford du sens du mot "réductif", qui perd sa signification sur une base qui n'est pas un corps, a été adoptée par lui à titre provisoire et comme une sorte de pis aller (et c'est aussi à peu près ce qu'explique Mumford pour d'autres motifs, dès le second alinéa de sa préface !).

couramment utilisés par la suite. L'exposé VII étudie certains faits liés à la caractéristique du corps de base et développe notamment avec la généralité qui convient la correspondance entre schémas en groupes radiciels de hauteur 1 et p-algèbres de Lie restreintes. Enfin, l'exposé XVIII contient la généralisation, en théorie des schémas, du théorème de Weil sur la définition "birationnelle" des groupes algébriques.

D'autre part, nous nous proposons de généraliser aux groupes sur un préschéma de base quelconque, la théorie de structure de Borel-Chevalley des groupes algébriques affines. Il est d'ailleurs apparu à l'occasion de la rédaction des notes du séminaire que l'hypothèse affine était inutile pour de nombreux résultats de la théorie. Les résultats les plus complets sont obtenus évidemment dans les cas des "schémas en groupes semi-simples" ou plus généralement "réductifs", dont nous nous occuperons exclusivement à partir de l'exposé XIX. Chevalley lui-même avait déjà donné la construction des groupes "de Tohoku" au-dessus de l'anneau des entiers, construction qui sera reprise dans le présent séminaire. Le théorème d'unicité principal donne une caractérisation simple des variantes "tordues" de ces groupes de Tohoku, sur un préschéma de base S : ce sont les groupes affines et lisses sur S , dont les fibres géométriques sont des groupes semi-simples connexes au sens habituel (3).

2. Comme dans le cas de la théorie connue sur un corps algébriquement clos, un rôle crucial est joué par les sous-tores des schémas en groupes envisagés. Aussi l'étude préliminaire des tores, et plus généralement des "schémas en groupes de type multiplicatif", (tant du point de vue intrinsèque que du point de vue des sous-groupes de type multiplicatif d'un groupe donné), prend une assez large place dans ce Séminaire (exposés VIII à XII). Leur remarquable rigidité (plus grande même à certains égards que celle des schémas abéliens, ou des schémas semi-simples) en fait des instruments de travail très efficaces pour l'étude de certains groupes plus généraux.

(3) C'est là le résultat essentiel de la thèse de M. Demazure (schémas en groupes réductifs, Bull. de la Soc. Math. de France, 1965, p.369-413).

3. A partir de l'exposé XII (à l'exclusion de l'exposé XVIII déjà mentionné) nous utiliserons couramment la théorie des groupes algébriques affines sur un corps algébriquement clos, que le lecteur trouvera dans le Séminaire CHEVALLEY 1956, plus particulièrement dans les exposés IV à IX de ce Séminaire. Nous utiliserons également, mais dans une moindre mesure, les exposés ultérieurs du Séminaire CHEVALLEY, consacrés à la structure des groupes algébriques semi-simples. En effet, nous reprendrons la théorie de CHEVALLEY directement dans le cadre des schémas : on verra que de cette façon (même sur un corps de base) l'exposé gagne en simplicité et en précision.

4. L'objet principal du présent Séminaire est évidemment de développer des techniques qui s'appliquent à l'étude des schémas en groupes sur une base quelconque, i.e. essentiellement à l'étude des <u>familles</u> de groupes algébriques. A ce titre, les propriétés infinitésimales de telles familles, et en particulier le cas d'un schéma de base artinien, jouent un rôle important. Ces propriétés interviennent même pour l'étude des groupes algébriques sur un corps k , dans le cas où ce dernier n'est pas parfait, pour pouvoir notamment appliquer la technique de descente dans le cas non galoisien. Parmi les résultats nouveaux obtenus dans ce cas, signalons l'existence de tores maximaux et de sous-groupes de Cartan dans un groupe algébrique lisse quelconque, la rationalité de la variété des tores maximaux, et divers résultats connexes (Exp. XIV), ou la correspondance entre les "formes" d'un groupe semi-simple et les fibrés principaux homogènes sous un groupe algébrique semi-simple (en général non connexe) convenable (Exp. XXIV). De façon générale, on peut dire que les méthodes requises pour travailler sur un corps de base non parfait sont essentiellement celles utilisées pour les préschémas de base quelconques, et par là sortent du cadre de la géométrie algébrique classique.

5. Il n'a pas semblé utile d'indiquer en tête des exposés rédigés la date ou les dates des exposés oraux correspondants du Séminaire. Contentons-nous de dire que l'ordre des exposés multigraphiés (de I à XXVI) correspond bien à l'ordre des exposés oraux. Par ailleurs, la rédaction du texte

définitif est parfois nettement postérieure à celle de l'exposé oral, et souvent en diffère assez substantiellement, le texte rédigé étant généralement plus détaillé et plus complet (tels les Exp. IV et VII_B), voire sensiblement plus général (tel l'Exp. XII ou VII_B) que l'exposé oral. D'autres exposés rédigés ne correspondent à aucun exposé oral (VI_B, VII_A, XV, XVI, XVII, et l'essentiel de XXVI), et ont été rédigés et insérés dans le Séminaire multigraphié, soit pour fournir des références commodes pour divers autres exposés (c'est notamment le cas de VI_B), soit parce qu'ils constituent un prolongement naturel des notions et techniques déjà développées. On notera comme conséquence que la lecture des exposés VII_A, VII_B, XV, XVI, XVII n'est pas nécessaire pour l'étude du reste du Séminaire, et notamment pour la partie de ce Séminaire consacrée aux schémas en groupes réductifs.

6. De la théorie des schémas, nous utiliserons surtout le langage général des schémas, exposé dans EGA I , les notions de morphisme plat, morphisme étale, morphisme lisse exposées dans SGA 1 I à V, enfin la théorie de la descente fidèlement plate de SGA 1 VIII.
Nous avons dans la mesure du possible évité de formuler des hypothèses noethériennes inutiles, ce qui nous a obligés en revanche à remplacer l'habituelle hypothèse "de type fini" par l'hypothèse "de présentation finie". Pour la notion de morphisme de présentation finie, le lecteur consultera EGA IV 1 (4). Les résultats de SGA 1 I à IV, énoncés le plus souvent dans le contexte noethérien, seront développés dans le cas général dans EGA IV, où seront développées également en détail des méthodes standard pour réduire certains types d'énoncés (faisant intervenir des hypothèses de présentation finie) au cas noethérien (EGA paragraphes 8, 9, 11). Le lecteur qui ne voudra pas admettre ces résultats de EGA IV pourra simplifier certains énoncés ou leur démonstration en supposant le préschéma de base localement noethérien. Il s'expose cependant à des difficultés dans les cas où la démonstration procède par descente de $\hat{A}$ à A , où $\hat{A}$ est le complété d'un anneau local noethérien A, car cette méthode amène à introduire l'anneau (en général non noethérien) $\hat{A}\otimes_A\hat{A}$.

---

(4) Depuis la rédaction de cette introduction, les quatre parties (§ 1 à 21) de EGA IV sont parues.

7. Les références se feront suivant le système décimal habituel : la référence 5.7.11 renvoie à la proposition (ou lemme, définition etc...) de ce nom dans le même exposé; dans la référence XVII 7.8 le chiffre romain indique le numéro de l'exposé. Nous utiliserons les sigles suivants pour nos références standard :

BIBLE = Séminaire CHEVALLEY "Groupes de Lie algébriques", 1956/58

EGA X.Y.Z. = J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK, Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. X, par Y, N° Z .

SGA X Y = Séminaire de Géométrie Algèbrique du Bois-Marie, année X, exposé Y.

TDTE = A. GROTHENDIECK, Techniques de descente et Théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, exposés dans le Séminaire Bourbaki entre 1959 et 1962,.

TABLE DES MATIERES

E X P O S É I

STRUCTURES ALGEBRIQUES - COHOMOLOGIE DES GROUPES

par M. DEMAZURE

Cet exposé se compose de deux parties; la première rassemble un certain nombre de définitions générales et pose des notations qui seront souvent utilisées par la suite, la seconde traite de la cohomologie des groupes et aboutit au théorème 5.3.3 (nullité de la cohomologie des groupes diagonalisables).

Nous choisissons une fois pour toutes un Univers. Toutes les définitions posées et toutes les constructions effectuées seront relatives à cet Univers. Nous nous permettrons systématiquement l'abus de langage suivant : pour définir un foncteur $f : \underline{C} \to \underline{C}'$, nous nous contenterons de définir l'objet $f(S)$ de $\underline{C}'$ pour tout objet S de $\underline{C}$, chaque fois qu'il n'y aura aucune ambiguité sur la manière de définir $f(h)$ pour une flèche h de $\underline{C}$. En pratique, nous dirons : soit $f : \underline{C} \to \underline{C}'$ le foncteur défini par $f(S) = \ldots.$

1. Généralités

1.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie. On notera $\hat{\underline{C}}$ la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}^{\circ},(\mathrm{Ens}))$ des foncteurs contravariants de $\underline{C}$ dans la catégorie (Ens) des ensembles. Il existe un foncteur canonique $h : \underline{C} \to \hat{\underline{C}}$ qui associe à tout $X \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$ le foncteur h_X tel que

$$h_X(S) = \mathrm{Hom}(S , X) .$$

Pour tout foncteur $\underline{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\underline{C}})$, on définit (cf. par exemple EGA 0.8.1) une bijection

$$\mathrm{Hom}(h_X , \underline{F}) \xrightarrow{\sim} \underline{F}(X) \qquad .$$

En particulier, pour tout couple X , X' d'objets de $\underline{C}$, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(X , X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(h_X , h_{X'})$$

est bijective; le foncteur h est pleinement fidèle. Il définit donc un isomorphisme de $\underline{C}$ sur une sous-catégorie pleine de $\widehat{\underline{C}}$, et une équivalence de $\underline{C}$ avec la sous-catégorie pleine de $\widehat{\underline{C}}$ formée des foncteurs représentables (i.e. isomorphes à un foncteur de la forme h_X). Dans la suite, nous identifierons souvent X et h_X . Les numéros suivants ont pour but de montrer que cette identification peut se faire sans danger.

1.2. Un monomorphisme de $\widehat{\underline{C}}$ n'est autre qu'un morphisme $\underline{F} \longrightarrow \underline{G}$ tel que pour $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$, l'application d'ensembles correspondante $\underline{F}(S) \longrightarrow \underline{G}(S)$ soit injective . On dira que $\underline{F}$ est un sous-objet (ou un sous-foncteur) de $\underline{G}$ si $\underline{F}(S)$ est un sous-ensemble de $\underline{G}(S)$ pour chaque S .

Dans $\widehat{\underline{C}}$ les limites projectives "quelconques" existent et se calculent par

$$(\varprojlim_i \underline{F}_i)(S) = \varprojlim_i \underline{F}_i(S) \qquad ,$$

en particulier les produits fibrés par

$$\underline{F} \times_{\underline{G}} \underline{F}' (S) = \underline{F}(S) \times_{\underline{G}(S)} \underline{F}'(S) \quad .$$

Nous choisirons comme objet final de $\widehat{\underline{C}}$ le foncteur $\underline{e}$ tel que $\underline{e}(S) = \{\emptyset\}$.

Tout $\underline{F} \in Ob(\hat{\underline{C}})$ possède un morphisme unique dans $\underline{e}$ et on pose

$$\underline{F} \times \underline{F}' = \underline{F} \times_{\underline{e}} \underline{F}' \quad .$$

Pour tout $\underline{F} \in Ob(\hat{\underline{C}})$ on pose

$$\Gamma(\underline{F}) = Hom(\underline{e},\underline{F}) \ ;$$

un élément de $\Gamma(\underline{F})$ est donc une famille $(\gamma_S)_{S \in Ob(C)}$, $\gamma_S \in \underline{F}(S)$ telle que pour toute flèche $f : S' \longrightarrow S''$ de C , on ait $\underline{F}(f)(\gamma_{S''}) = \gamma_{S'}$.

<u>Le foncteur</u> h <u>commute aux limites projectives:</u> en particulier pour que $X \times X'$ existe $(X, X' \in Ob(\underline{C}))$, resp. pour que $\underline{C}$ admette un objet final e , il faut et il suffit que $h_X \times h_{X'}$ soit représentable, resp. $\underline{e}$ soit représentable, et on a

$$h_X \times h_{X'} \simeq h_{X \times X'} \quad , \qquad h_e \simeq \underline{e} \quad .$$

On pose $\Gamma(X) = \Gamma(h_X)$ pour $X \in Ob(\underline{C})$. Si $\underline{C}$ à un objet final e , on a donc un isomorphisme $\Gamma(X) \simeq Hom(e,X)$.

1.3. Soit $S \in Ob(\underline{C})$. On dénote par $\underline{C}_{/S}$ la catégorie des objets de $\underline{C}$ au-dessus de S , c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les flèches $f : T \longrightarrow S$ de $\underline{C}$, l'ensemble $Hom(f,f')$ étant le sous-ensemble de $Hom(T,T')$ formé des u tels que $f = f' \circ u$.
Si $\underline{C}$ possède un objet final e , alors $\underline{C}_{/e}$ est isomorphe à $\underline{C}$. La catégorie $\underline{C}_{/S}$ possède un objet final : la flèche identique $S \longrightarrow S$.
Si $f: T \longrightarrow S$ est un objet de $\underline{C}_{/S}$, alors on peut former la catégorie $(\underline{C}_{/S})_{/f}$ que l'on note par abus de langage $(\underline{C}_{/S})_{/T}$ et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{C}_{/T} \simeq (\underline{C}_{/S})_{/T} \quad .$$

Cette construction s'applique en particulier aux catégories $\hat{\underline{C}}$, $\widehat{\underline{C}_{/S}}$, etc..., on définit en particulier la catégorie $\hat{\underline{C}}_{/h_S}$.

Si $f : T \to S$ est un objet de $\underline{C}_{/S}$, alors $\Gamma(f)$ s'identifie à l'ensemble $\Gamma(T/S)$ des sections de T au-dessus de S, c'est-à-dire des flèches $S \to T$ inverses à droite de f. Remarquons que $h_f : h_T \to h_S$ est alors un objet de $\widehat{\underline{C}}_{/h_S}$ et que l'on a :

$$\Gamma(h_f) \simeq \Gamma(h_T/h_S) \simeq \Gamma(T/S) \simeq \Gamma(f) \ .$$

1.4. On se propose maintenant de définir une <u>équivalence des catégories</u> $\widehat{\underline{C}_{/S}}$ <u>et</u> $\widehat{C}_{/h_S}$, c'est-à-dire de prouver que "se donner un foncteur sur la catégorie des objets de $\underline{C}$ au-dessus de S, c'est "la même chose" que se donner un foncteur sur $\underline{C}$ muni d'un morphisme dans h_S".

(i) <u>Construction de</u> $\alpha_S : \widehat{\underline{C}}_{/h_S} \longrightarrow \widehat{\underline{C}_{/S}}$.

Soit d'abord $H : \underline{F} \longrightarrow h_S$ un objet de $\widehat{\underline{C}}_{/h_S}$. On doit définir un foncteur $\alpha_S(H)$ sur $\underline{C}_{/S}$. Soit donc d'abord $f : T \longrightarrow S$ un objet de $\underline{C}_{/S}$; définissons $\alpha_S(H)(f)$ comme l'image inverse de $f \in h_S(T)$ par l'application $H(T) : \underline{F}(T) \longrightarrow h_S(T)$. Soit ensuite $u : f \longrightarrow f'$ une flèche de $\underline{C}_{/S}$; alors $\underline{F}(u) : \underline{F}(T') \longrightarrow \underline{F}(T)$ induit une application de $\alpha_S(H)(f')$ dans $\alpha_S(H)(f)$ que l'on note $\alpha_S(H)(u)$. On vérifie aussitôt que les applications

$$f \longmapsto \alpha_S(H)(f) \quad , \quad u \longmapsto \alpha_S(H)(u)$$

définissent bien un foncteur sur $\underline{C}_{/S}$, donc un objet de $\widehat{\underline{C}_{/S}}$.

Soient enfin $H : \underline{F} \longrightarrow h_S$ et $H' : \underline{F}' \longrightarrow h_S$ deux objets de $\widehat{\underline{C}}_{/h_S}$ et $U : H \longrightarrow H'$ un morphisme de $\widehat{\underline{C}}_{/h_S}$,

$$\begin{tikzcd} \underline{F} \arrow[rr, "U"] \arrow[dr, "H"'] & & \underline{F}' \arrow[dl, "H'"] \\ & h_S & \end{tikzcd}$$

Alors pour tout $f : T \longrightarrow S$, $U(T) : \underline{F}(T) \longrightarrow \underline{F}'(T)$ induit une application

$$\alpha_S(U)(f) : \alpha_S(H)(f) \longrightarrow \alpha_S(H')(f) \quad ,$$

ce qui définit un morphisme de foncteurs

$$\alpha_S(U) : \alpha_S(H) \longrightarrow \alpha_S(H') \quad .$$

On vérifie aisément que les applications

$$H \longmapsto \alpha_S(H) \qquad , \qquad U \longmapsto \alpha_S(U)$$

définissent bien un foncteur $\alpha_S : \widehat{\underline{C}}_{/h_S} \longrightarrow \widehat{\underline{C}_{/S}}$.

(ii) <u>Proposition</u> 1.4.1. <u>Le foncteur $\alpha_S : \widehat{\underline{C}}_{/h_S} \to \widehat{\underline{C}_{/S}}$ est une équivalence de catégories</u>.

Indiquons seulement le principe de la construction d'un foncteur **quasi-inverse** $\beta_S : \widehat{\underline{C}_{/S}} \longrightarrow \widehat{\underline{C}}_{/h_S}$: soit $\underline{G}$ un foncteur de $\underline{C}_{/S}$; pour tout **objet** T de $\underline{C}$, on pose

$$\beta_S(\underline{G})(T) = \text{somme des ensembles } \underline{G}(f) \text{ pour } f \in \mathrm{Hom}(T,S) = h_S(T) \quad ,$$

ce qui définit un foncteur $\beta_S(\underline{G})$ sur $\underline{C}$, qui est muni d'une projection évi**dente** sur h_S .

1.5. <u>L'équivalence α_S commute aux foncteurs Γ</u> . En d'autres termes, si $H : F \longrightarrow h_S$ est un objet de $\widehat{\underline{C}}_{/h_S}$ et $\alpha_S(H)$ l'objet correspondant de $\widehat{\underline{C}_{/S}}$, **on a**

$$\Gamma(\alpha_S(H)) \simeq \Gamma(H) \simeq \Gamma(F/h_S) \quad .$$

<u>L'équivalence α_S commute aux foncteurs</u> h : si $f : F \longrightarrow S$ est un objet de $\underline{C}_{/S}$, $h_f : h_T \to h_S$ est un objet de $\widehat{\underline{C}}_{/h_S}$ dont le transformé par α_S n'est **autre** que $h_{\underline{C}_{/S}}(f)$ où

$$h_{\underline{C}_{/S}} : \underline{C}_{/S} \longrightarrow \widehat{\underline{C}_{/S}}$$

est le foncteur canonique. En conséquence :

Proposition 1.5.1. *Soit $\underline{H}:\underline{F} \to h_S$ un objet de $\widehat{\underline{C}}_{/h_S}$. Pour que $\alpha_S(\underline{H}) : \underline{C}_{/S} \to (\mathrm{Ens})$ soit représentable, il faut et il suffit que $\underline{F} : \underline{C} \to (\mathrm{Ens})$ soit représentable; si $\underline{F} \simeq h_T$, alors $\alpha_S(\underline{H})$ est représentable par l'objet $T \to S$ de $\underline{C}_{/S}$.*

L'équivalence α_S est transitive en S : si $T \in \mathrm{Ob}(\underline{C}_{/S})$, on a un diagramme commutatif d'équivalence

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\underline{C}}_{/h_S})_{/h_T} \arrow[r, "\alpha_S/h_T"] \arrow[d, "\simeq"'] & (\widehat{\underline{C}_{/S}})_{/h_T} \arrow[r, "\alpha_{h_T}"] & \widehat{(\underline{C}_{/S})_{/T}} \\
\widehat{\underline{C}}_{/h_T} \arrow[rr, "\alpha_T"] & & \widehat{\underline{C}_{/T}} \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

où α_S/h_T désigne (provisoirement) la *restriction* (cf. 1.6) du foncteur α_S aux objets au-dessus de h_T .

1.6. Changement de base dans un foncteur .

Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$, on a un foncteur canonique

$$i_S : \underline{C}_{/S} \longrightarrow \underline{C}$$

défini par $i_S(f) = T$ si f est la flèche $T \to S$. Si $f : T \to S$ est un objet de $\underline{C}_{/S}$, on note $i_{T/S} = i_f$:

$$i_{T/S} : (\underline{C}_{/S})_{/T} \longrightarrow \underline{C}_{/S} \quad ,$$

et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\underline{C}_{/S})_{/T} \arrow[r, "i_{T/S}"] \arrow[dr, "\sim"'] & \underline{C}_{/S} \arrow[r, "i_S"] & \underline{C} \\
& \underline{C}_{/T} \arrow[ur, "i_T"'] &
\end{tikzcd} \quad ,$$

Ens)
ible

c'est-à-dire, <u>en identifiant</u> $(\underline{C}_{/S})_{/T}$ à $\underline{C}_{/T}$ <u>comme nous le ferons désormais</u>

$$i_S \circ i_{T/S} = i_T \quad .$$

De la même manière, si on identifie $\underline{C}$ et $\underline{C}_{/e}$, lorsque $\underline{C}$ possède un objet final e, alors $i_{S/e} : \underline{C}_{/S} \longrightarrow \underline{C}_{/e}$ s'identifie à i_S.

Pour $X \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$ (resp. $X \in \mathrm{Ob}(\underline{C}_{/S})$) soit $p_S(X)$ (resp. $p_{T/S}(X)$) l'objet de $\underline{C}_{/S}$ (resp. de $\underline{C}_{/T}$) lorsqu'il existe, défini par $X \times S$ (resp. $X \times_S T$) muni de sa deuxième projection :

$$\begin{array}{ccc} X \times S & \qquad\qquad & X \times_S T \\ p_S(X) \downarrow & & p_{T/S}(X) \downarrow \\ S & & T \end{array} \quad .$$

Le foncteur (partiellement défini) p_S (resp. $p_{T/S}$) s'appelle <u>foncteur de changement de base</u>. C'est par définition du produit (resp. du produit fibré) le foncteur adjoint du foncteur i_S (resp. $i_{T/S}$). On note également

$$p_S(X) = X_S \quad , \quad p_{T/S}(X) = X_T \quad .$$

Le foncteur i_S définit un foncteur <u>(restriction)</u>

$$i_S^* : \widehat{\underline{C}} \longrightarrow \widehat{\underline{C}_{/S}}$$

où on note $\underline{F}_S = i_S^*(\underline{F}) = \underline{F} \circ i_S^\circ$. On a évidemment

$$i_{T/S}^* \circ i_S^* = i_T^* \quad ,$$

c'est-à-dire pour tout foncteur $\underline{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\underline{C}})$

$$(\underline{F}_S)_T = \underline{F}_T \quad .$$

La notation demande une justification que voici :

<u>Proposition</u> 1.6.1. <u>Pour que le foncteur</u> $(h_X)_S : (\underline{C}_{/S})^\circ \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ <u>soit représentable, il faut et il suffit que le produit</u> $X \times S$ <u>existe</u> . <u>On a alors</u>

$$(h_X)_S \simeq h_{X_S} .$$

Ceci montre que $\underline{F}_S$ a deux interprétations : <u>restriction</u> du foncteur $\underline{F}$ à $\underline{C}_{/S}$, foncteur obtenu par <u>changement de base</u> $e \longleftarrow S$. Ceci conduit à la notation suivante

$$\begin{array}{ccccc} \underline{F} & — & \underline{F}_S & — & \underline{F}_T \\ | & & | & & | \\ e & \longleftarrow & S & \longleftarrow & T \end{array}$$

qui rend bien compte des deux interprétations précédentes .

Remarquons que l'on a

$$\Gamma(\underline{F}_S) \simeq \mathrm{Hom}(h_S, \underline{F}) \simeq \underline{F}(S) ,$$

en particulier

$$\Gamma(X_S) \simeq \mathrm{Hom}(S, X) .$$

1.7. <u>Objets</u> <u>Hom</u> , <u>Isom</u> ,...

Soient $\underline{F}$ et $\underline{G}$ deux objets de $\widehat{\underline{C}}$. Nous allons définir un autre objet de $\widehat{\underline{C}}$ de la manière suivante :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})(S) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\underline{C}_{/S}}}(\underline{F}_S, \underline{G}_S) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\underline{C}}_{/h_S}}(\underline{F} \times h_S, \underline{G} \times h_S) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\underline{C}}}(\underline{F} \times h_S, \underline{G})$$

L'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})$ défini ci-dessus possède les propriétés suivantes :

(i) $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{e},\underline{G}) \simeq \underline{G}$.

(ii) <u>La formation de</u> <u>Hom</u> <u>commute à l'extension de la base</u> :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F}_S,\underline{G}_S) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})_S \quad .$$

(iii) $(F,G) \longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}(F,G)$ <u>est un bifoncteur</u>, <u>contravariant en</u> F <u>et covariant en</u> G.

Ces trois propriétés sont évidentes sur les définitions.

Soit $\underline{E}$ un troisième objet de $\hat{\underline{C}}$. Nous allons définir un morphisme de trifoncteurs

$$\mathrm{Hom}(\underline{E}\mathrm{x}\underline{F},\underline{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{E},\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})) \quad .$$

Soit $f : \underline{E} \times \underline{F} \longrightarrow \underline{G}$; nous devons lui associer un morphisme de $\underline{E}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})$. Soit donc $S' \longrightarrow S$ une flèche de $\underline{C}$. On a des applications

$$\underline{E}(S) \times \underline{F}(S') \longrightarrow \underline{E}(S') \times \underline{F}(S') \xrightarrow{\quad f(S') \quad} \underline{G}(S')$$

Un élément de $\underline{E}(S)$ définit donc pour tout $S' \longrightarrow S$ une application de $\underline{F}(S') \longrightarrow \underline{G}(S')$ fonctorielle en S' , donc un élément de $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})(S)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on a bien construit ainsi un morphisme de trifoncteurs .

<u>Proposition</u> 1.7.1. <u>Le morphisme de foncteurs</u>

$$\mathrm{Hom}(\underline{E}\mathrm{x}\underline{F},\underline{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{E},\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G}))$$

<u>est un isomorphisme</u> .

Indiquons seulement un principe de démonstration. Considérons les deux membres comme des foncteurs en $\underline{E}$. Le résultat annoncé est vrai si $\underline{E} = h_X$; en effet, ce n'est autre en ce cas que la définition du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})$. D'autre part les deux membres comme foncteurs en $\underline{E}$ transforment limites inductives en limites projectives . Enfin, tout objet de $\hat{\underline{C}}$ est limite inductive d'objets de la forme h_X .

<u>Corollaire</u> . <u>On a</u> $\mathrm{Hom}\,(\underline{E}\,,\,\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})) \simeq \mathrm{Hom}\,(\underline{F}\,,\,\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{E},\underline{G}))$.

En particulier, faisant $E = \underline{e}$, et compte tenu de $\mathrm{Hom}(\underline{e},\underline{G}) \simeq \underline{G}$, on a

$$\Gamma\,(\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{F},\underline{G}) \quad .$$

Notons que la composition des Hom fournit des morphismes fonctoriels

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{H}) \quad .$$

Si $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont deux objets de $\underline{\widehat{C}}$, on note $\mathrm{Isom}(\underline{F},\underline{G})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\underline{F},\underline{G})$ formé des isomorphismes de $\underline{F}$ sur $\underline{G}$. On définit alors un sous-objet $\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{F},\underline{G})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G})$ par :

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{F},\underline{G})(S) = \mathrm{Isom}(\underline{F}_S,\underline{G}_S) \quad .$$

On a alors des isomorphismes

$$\Gamma\,(\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{F},\underline{G})) \simeq \mathrm{Isom}(\underline{F},\underline{G}) \quad ,$$

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{F},\underline{G}) \simeq \underline{\mathrm{Isom}}(\underline{G},\underline{F}) \quad .$$

Dans le cas particulier où $\underline{F} = \underline{G}$, on pose

$$\underline{\mathrm{End}}(\underline{F}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{F}) \quad , \quad \mathrm{End}(\underline{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{F},\underline{F}) \simeq \Gamma\,(\underline{\mathrm{End}}(\underline{F})) \quad ,$$

$$\underline{\mathrm{Aut}}(\underline{F}) = \underline{\mathrm{Isom}}(\underline{F},\underline{F}) \quad , \quad \mathrm{Aut}(\underline{F}) = \mathrm{Isom}(\underline{F},\underline{F}) \simeq \Gamma\,(\underline{\mathrm{Aut}}(\underline{F})) \quad .$$

La formation des objets <u>Hom</u> , <u>Isom</u> , <u>Aut</u> , <u>End</u> commute aux changements de base .

Remarquons que l'on peut construire un objet isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{F},\underline{G})$ de la manière suivante : on a un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\underline{F}) \quad ;$$

permutant $\underline{F}$ et $\underline{G}$, on déduit un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\underline{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\underline{G}) \quad .$$

D'autre part, le morphisme identique de $\underline{F}$ est un élément de $\mathrm{End}(F)$ et définit donc un morphisme $\underline{e} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\underline{F})$. Faisant de même avec $\underline{G}$ et effectuant le produit, on trouve un morphisme

$$\underline{e} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\underline{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\underline{G}) \quad .$$

Il est alors immédiat que le produit fibré de $\underline{e}$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{F},\underline{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{F})$ au-dessus de $\underline{\mathrm{End}}(\underline{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\underline{G})$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{F},\underline{G})$.

Toutes ces définitions s'appliquent en particulier au cas où $\underline{F} = h_X$, $\underline{G} = h_Y$. Dans le cas où $\underline{\mathrm{Hom}}(h_X,h_Y)$ est représentable par un objet de $\underline{C}$, on note cet objet $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$. Il possède la propriété suivante : si $Z \times X$ existe , alors

$$\mathrm{Hom}(\, Z \,,\, \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \simeq \mathrm{Hom}\,(\, Z \times X \,,\, Y \,) \quad .$$

Cette propriété le caractérise lorsque les produits existent dans $\underline{C}$.

On définit de même (lorsqu'ils veulent bien existen) des objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}(X,Y) \qquad , \qquad \underline{\mathrm{End}}(X) \qquad , \qquad \underline{\mathrm{Aut}}(X) \quad ;$$

remarquons simplement que d'après la construction donnée plus haut, $\underline{\mathrm{Isom}}(X,Y)$ existe chaque fois que les produits fibrés existent dans $\underline{C}$ et que $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$, $\underline{\mathrm{Hom}}(Y,X)$, $\underline{\mathrm{End}}(X)$ et $\underline{\mathrm{End}}(Y)$ existent .

Ceci s'applique également à des catégories de la forme $\underline{C}_{/S}$. Les objets correspondant seront notés de manière aussi explicite que possible par des symboles appropriés : par exemple, si T et T' sont deux objets de $\underline{C}$ au-dessus de S , on notera $\underline{\mathrm{Hom}}_S(T,T')$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{C}/S}(T/S,T'/S)$ qui sera donc un objet de $\underline{C}$ au-dessus de S ...

1.8. <u>Objets constants</u>

Soit $\underline{C}$ une catégorie où les sommes directes et les produits fibrés existent et où les sommes directes commutent aux changements de base (par exemple la catégorie des préschémas). Pour tout ensemble E et pour tout objet S de $\underline{C}$, soit E_S la somme directe d'une famille $(S_i)_{i \in E}$ d'objets de $\underline{C}$ tous isomorphes à S. Cet objet est caractérisé par la formule

$$\mathrm{Hom}(E_S\ , T) = \mathrm{Hom}\ (E\ , \mathrm{Hom}(S,T))\quad , T \in \mathrm{Ob}(\underline{C})\quad ,$$

où le second Hom est pris dans la catégorie des ensembles.

L'objet E_S est muni d'une projection canonique sur S, de telle façon que $E \mapsto E_S$ est en fait un foncteur de (Ens) dans $\underline{C}/_S$. Supposons que, $\emptyset$ désignant un objet initial de $\underline{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & S \arrow[dr] & \\ \emptyset \arrow[ur] \arrow[dr] & & S \amalg S \\ & S \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

soit cartésien (c'est le cas de la catégorie des préschémas). Alors le foncteur $E \mapsto E_S$ <u>commute aux limites projectives finies</u>. En particulier :

$$E_S \times_S F_S \ = \ (E \times F)_S \quad .$$

Si $S' \to S$ est une flèche de $\underline{C}$, on a

$$E_{S'} \ = \ (E_S)_{S'} \quad .$$

En particulier, si $\underline{C}$ possède un objet final e, on a

$$E_S \ = \ (E_e)_S \quad .$$

Un objet de la forme E_S sera dit <u>objet constant</u>. Remarquons que l'on a un monomorphisme fonctoriel en E :

$$E \longrightarrow \Gamma(E_S/S)$$

qui associe à chaque $i \in E$, la section de E_S sur S définie par l'isomorphisme de S sur S_i .

Si $\underline{C}$ est la catégorie des préschémas, alors $\Gamma\ (E_S/S)$ s'identifie aux applications localement constantes de l'espace topologique S dans l'ensemble

E , l'application précédente associant à chaque élément de E l'application constante correspondante . Remarquons qu'il résulte de ce qu'on vient de dire que E_S peut aussi être défini comme représentant le foncteur qui à tout S' au-dessus de S associe l'ensemble des fonctions localement constantes de l'espace topologique S' dans l'ensemble E .

2. Structures algébriques .

Etant donnée une espèce de structure algébrique dans la catégorie des ensembles, nous nous proposons de l'étendre à la catégorie $\underline{C}$. Traitons d'abord un exemple : le cas des groupes .

2.1. Structures de groupe .

Nous gardons les notations du paragraphe précédent .

Définition 2.1.1. Soit $\underline{G} \in \mathrm{Ob}(\hat{\underline{C}})$. On appelle structure de $\hat{\underline{C}}$-groupe sur $\underline{G}$ la donnée pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$ d'une structure de groupe sur l'ensemble $\underline{G}(S)$, de telle manière que pour toute flèche $f : S' \to S''$ de C , l'application $\underline{G}(f) : \underline{G}(S'') \to \underline{G}(S')$ soit un homomorphisme de groupes . Si $\underline{G}$ et $\underline{H}$ sont deux $\hat{\underline{C}}$-groupes , on appelle morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes de G dans H tout morphisme $u \in \mathrm{Hom}(\underline{G},\underline{H})$ tel que pour tout $S \in \mathrm{Ob}(C)$, l'application d'ensembles $u(S) : \underline{G}(S) \to \underline{H}(S)$ soit un homomorphisme de groupes .

On note $\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{C}}\text{-Gr.}}(\underline{G},\underline{H})$ l'ensemble des morphismes de $\hat{\underline{C}}$-groupes de $\underline{G}$ dans $\underline{H}$ et $(\hat{\underline{C}}\text{-Gr.})$ la catégorie des $\hat{\underline{C}}$-groupes .

Exemples : Soit $\underline{E} \in \hat{\underline{C}}$; l'objet $\underline{\mathrm{Aut}}(\underline{E})$ est muni de manière évidente d'une structure de $\hat{\underline{C}}$-groupe . L'objet final $\underline{e}$ possède une structure de $\hat{\underline{C}}$-groupe unique qui en fait un objet final de $(\hat{\underline{C}}\text{-Gr.})$.

Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$, soit $e_{\underline{G}}(S)$ l'élément unité de $\underline{G}(S)$. La famille des $e_{\underline{G}}(S)$ définit un élément $e_{\underline{G}} \in \Gamma(\underline{G}) = \mathrm{Hom}(\underline{e},\underline{G})$ qui est en fait un morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes $\underline{e} \to \underline{G}$ et que l'on appelle <u>section unité de</u> $\underline{G}$.

Remarquons que se donner une structure de $\hat{\underline{C}}$-groupe sur $\underline{G}$ revient à se donner une loi de composition sur $\underline{G}$, c'est-à-dire un $\hat{\underline{C}}$-morphisme

$$\pi_{\underline{G}} : \underline{G} \times \underline{G} \longrightarrow \underline{G}$$

telle que pour tout $S \in Ob(\underline{C})$, $\pi_{\underline{G}}(S)$ munisse $\underline{G}(S)$ d'une structure de groupe .

De la même manière, $u : \underline{G} \to \underline{H}$ est un morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{G} \times \underline{G} \arrow[r, "\pi_{\underline{G}}"] \arrow[d, "{(f,f)}"'] & \underline{G} \arrow[d, "f"'] \\
\underline{H} \times \underline{H} \arrow[r, "\pi_{\underline{H}}"] & \underline{H}
\end{tikzcd} .$$

Un sous-objet $\underline{H}$ de $\underline{G}$ tel que, pour tout $S \in Ob(C)$, $\underline{H}(S)$ soit un sous-groupe de $\underline{G}(S)$ possède évidemment une structure de $\hat{\underline{C}}$-groupe induite par celle de $\underline{G}$: c'est la seule pour laquelle le monomorphisme $\underline{H} \to \underline{G}$ soit un morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes . Le $\hat{\underline{C}}$-groupe $\underline{H}$ muni de cette structure est appelé <u>sous-$\hat{C}$-groupe</u> de $\underline{G}$.

Si $\underline{G}$ et $\underline{H}$ sont deux $\hat{\underline{C}}$-groupes, le produit $\underline{G} \times \underline{H}$ est muni d'une structure de $\hat{\underline{C}}$-groupe évidente : pour tout $S \in Ob(\underline{C})$, on munit $\underline{G}(S) \times \underline{H}(S)$ de la structure de groupe produit des structures de groupes données sur $\underline{G}(S)$ et $\underline{H}(S)$. Le $\hat{\underline{C}}$-groupe $\underline{G} \times \underline{H}$ muni de cette structure sera dit <u>$\hat{C}$ - groupe produit</u> de $\underline{G}$ et de $\underline{H}$ (ç'en est d'ailleurs le produit dans la catégorie des $\hat{\underline{C}}$-groupes) .

Si $\underline{G}$ est un $\hat{\underline{C}}$-groupe, alors pour tout $S \in Ob(\underline{C})$, $\underline{G}_S$ est un $\widehat{\underline{C}_{/S}}$-groupe . Si $\underline{G}$ et $\underline{H}$ sont deux $\hat{\underline{C}}$-groupes, on définira l'objet $\underline{Hom}_{\hat{C}\text{-Gr.}}(\underline{G},\underline{H})$ de $\hat{\underline{C}}$ par :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{C}\text{-Gr.}}(\underline{G},\underline{H})(S) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\underline{C}_{/S}}\text{-Gr.}}(\underline{G}_S,\underline{H}_S)$$

(Nota : $\underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{C}\text{-Gr.}}$ n'est pas en général un $\hat{C}$-groupe , ni a fortiori l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}$ dans la catégorie $(\hat{C}\text{-Gr.})$).

On définit de même les objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\hat{C}\text{-Gr.}}(\underline{G},\underline{H}) \quad , \quad \underline{\mathrm{End}}_{\hat{C}\text{-Gr.}}(\underline{G}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}_{\hat{C}\text{-Gr.}}(\underline{G}) \quad .$$

Définition 2.1.2. Soit $G \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$. On appelle structure de $\underline{C}$-groupe sur G une structure de $\hat{C}$-groupe sur $h_G \in \mathrm{Ob}(\hat{\underline{C}})$. On appelle morphisme du $\underline{C}$-groupe G dans le $\underline{C}$-groupe H un élément $u \in \mathrm{Hom}(G,H) \simeq \mathrm{Hom}(h_G,h_H)$ qui définit un morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes de h_G dans h_H .

On note $(\underline{C}\text{-Gr.})$ la catégorie des $\underline{C}$-groupes . Notons qu'il existe dans (Cat) un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
(\underline{C}\text{-Gr.}) \arrow[r] \arrow[d] & (\hat{\underline{C}}.\mathrm{Gr.}) \arrow[d] \\
\underline{C} \arrow[r, "h"] & \hat{\underline{C}}
\end{tikzcd} \quad .$$

Toutes les définitions et constructions précédentes se transportent donc aussitôt à $(\underline{C}\text{-Gr.})$ chaque fois que les foncteurs qu'elles font intervenir (produits, objets $\underline{\mathrm{Hom}}$,...) sont représentables . Elles s'appliquent aussi aux catégories $\underline{C}_{/S}$. En ce cas, nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-Gr.}}$ pour $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\underline{C}_{/S}}\text{-Gr.}}$, etc...

2.2. Plus généralement, si (T) est une espèce de structure sur n ensembles de base définie par limites projectives finies (par exemple, par des commutativités de diagrammes construits avec des produits cartésiens : structures de monoïde, groupe, d'ensemble à opérateurs, de module sur un anneau, d'algèbre de Lie sur un anneau...) la construction précédente permet de définir la notion de "structure d'espèce (T) sur n objets $\underline{F}_1,\ldots\underline{F}_n$ de $\hat{\underline{C}}$ " : une telle structure sera la donnée pour chaque S de $\underline{C}$, d'une structure d'espèce (T) sur les ensembles $\underline{F}_1(S),\ldots\underline{F}_n(S)$ de telle manière que pour toute flèche $S' \to S''$ de $\underline{C}$, la famille d'application $(\underline{F}_i(S'')) \longrightarrow (\underline{F}_i(S'))$ soit un poly-homomorphisme pour l'espèce de structure (T) . On définit de manière semblable les morphismes de l'espèce de structure (T) , d'où une catégorie $(\hat{\underline{C}} \times \hat{\underline{C}} \ldots . \times \hat{\underline{C}})^{(T)}$. Le foncteur pleinement fidèle $(h \times h \times \ldots \times h)$ permet alors de définir par image inverse la catégorie $(\underline{C} \times \underline{C} \ldots \times \underline{C})^{(T)}$, puis , comme il commute aux limites projectives, d'y transporter toutes les propriétés, notions et notations fonctorielles introduites dans $\hat{\underline{C}}$. Supposons maintenant que dans $\underline{C}$ les produits fibrés existent , et soit (T) une espèce de structure algébrique définie par la <u>donnée</u> de certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à des <u>axiomes</u> consistant en certaines commutativités de diagrammes construits à l'aide des flèches précédentes . Une structure d'espèce (T) sur une famille d'objets de $\underline{C}$ sera donc définie par certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à certaines conditions de commutations. Il en résulte que si $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ sont deux catégories possédant des produits et $f : \underline{C} \to \underline{C}'$ est un foncteur <u>commutant aux produits</u> , alors pour toute famille d'objets (F_i) de $\underline{C}$ munie d'une structure d'espèce (T) , la famille $(f(F_i))$ d'objets de C' sera par là-même munie elle aussi d'une structure d'espèce (T) . Tout $\underline{C}$-groupe sera transformé en $\underline{C}'$-groupe , tout couple ($\underline{C}$-anneau, $\underline{C}$-module sur ce $\underline{C}$-anneau) en un couple analogue dans $\underline{C}'$ ....

Soit en particulier $\underline{C}$ une catégorie satisfaisant aux conditions énoncées dans 1.8 ; le foncteur $E \longmapsto E_S$ défini <u>loc</u>.<u>cit</u>. commute aux limites projectives ; il transforme donc groupe en S-groupe (i.e. $\underline{C}_{/S}$ groupe) , anneau en S-anneau ...

<u>Remarque</u> : Il est bon de remarquer que le procédé de construction précédent appliqué à la catégorie $\hat{\underline{C}}$ redonne bien les notions que l'on y a déjà définies; en d'autres termes , il revient de même de se donner sur un objet de $\hat{\underline{C}}$ une structure d'espèce (T) quand on considère cet objet comme un foncteur sur $\underline{C}$, ou de se donner une structure d'espèce (T) sur le foncteur représentable sur $\hat{\underline{C}}$ défini par cet objet .

Nous allons encore traiter deux cas particuliers de la construction précédente, le cas des structures à groupe d'opérateurs et le cas des modules .

2.3. Structures à groupes d'opérateurs .

Définition 2.3.1. Soient $\underline{E} \in \mathrm{Ob}(\widehat{C})$ et $\underline{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{C}\text{-Gr.})$. Une structure d'objet à $\widehat{C}$-groupe d'opérateurs $\underline{G}$ (ou de $\underline{G}$-objet) sur $\underline{E}$ est la donnée sur $\underline{E}(S)$, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(C)$, d'une structure d'ensemble à groupes d'opérateurs $\underline{G}(S)$ de telle manière que, pour toute flèche $S' \to S''$ de C , l'application d'ensembles $\underline{E}(S'') \to \underline{E}(S')$ soit compatible avec l'homomorphisme d'opérateurs $\underline{G}(S'') \to \underline{G}(S')$.

Comme d'habitude, il revient au même de se donner un morphisme

$$\mu : \underline{G} \times \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$$

qui pour tout S munisse $\underline{E}(S)$ d'une structure d'ensemble à opérateurs $\underline{G}(S)$. Mais $\mathrm{Hom}(\underline{G} \times \underline{E}\ ,\ \underline{E}) \simeq \mathrm{Hom}\ (\underline{G},\ \underline{\mathrm{End}}\ (\underline{E}))$, donc μ définit un morphisme $\underline{G} \to \underline{\mathrm{End}}(\underline{E})$ et il est immédiat que celui-ci applique $\underline{G}$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}(\underline{E})$ et que c'est un morphisme de $\widehat{C}$-groupes . En conséquence : se donner sur $\underline{E}$ une structure d'objet à $\widehat{C}$-groupe d'opérateurs $\underline{G}$ est équivalent à se donner un morphisme de $\widehat{C}$-groupes

$$\rho : \underline{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\underline{E}) \quad .$$

En particulier , tout élément $g \in \underline{G}(S)$ définit un automorphisme $\rho\,(g)$ du foncteur $\underline{E}_S$, c'est-à-dire un automorphisme de $\underline{E} \times h_S$ commutant à la projection $\underline{E} \times h_S \to h_S$, et en particulier un automorphisme de l'ensemble $\underline{E}(S')$ pour tout $S' \longrightarrow S$.

Définition 2.3.2. On note $\underline{E}^{\underline{G}}$ le sous-objet de $\underline{E}$ défini comme suit :

$$\underline{E}^{\underline{G}}\ (S) = \left\{ x \in \underline{E}(S)\ ,\ \ x_{S'}\ \ \text{invariant sous}\ \ \underline{G}(S')\ \ \text{pour tout}\ \ S' \to S \right\}$$

où $x_{S'}$ désigne l'image de x par $\underline{E}(S) \longrightarrow \underline{E}(S')$.

Alors $\underline{E}^{\underline{G}}$ ("sous-objet des invariants de $\underline{G}$ ") est le plus grand sous-objet de $\underline{E}$ sur lequel $\underline{G}$ opère trivialement .

Définition 2.3.3. Soit $\underline{F}$ un sous-objet de $\underline{E}$. On note $\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{G}}\underline{F}$ et $\underline{\mathrm{Cent}}_{\underline{G}}\underline{F}$ les sous-$\widehat{C}$-groupes de $\underline{G}$ définis par

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{G}}\underline{F}(S) = \left\{ g \in \underline{G}(S) \ , \ \rho(g)\, \underline{F}_S \subset \underline{F}_S \right\}$$

$$= \left\{ g \in \underline{G}(S) \ , \ \rho(g)\, \underline{F}(S') \subset \underline{F}(S') \quad \text{pour tout} \quad S' \to S \right\}$$

$$\underline{\mathrm{Cent}}_{\underline{G}}\underline{F}(S) = \left\{ g \in \underline{G}(S) \ , \ \rho(g) \big| \underline{F}_S = \text{identité} \right\}$$

$$= \left\{ g \in \underline{G}(S) \ , \ \rho(g) \big| \underline{F}(S') = \text{identité pour tout } S' \to S \right\}$$

où la barre verticale désigne la restriction .

Définition 2.3.4. Si G est un C-groupe et E un objet de $\widehat{C}$ (resp. E un objet de C) une structure de G-objet sur $\underline{E}$ (resp. sur E) est une structure de h_G-objet sur $\underline{E}$ (resp. h_E) .

Vu cette définition, toutes les notions et notations définies ci-dessus se transportent à $\underline{C}$, lorsqu'elles ne font intervenir que des foncteurs représentables : par exemple si $\underline{\mathrm{Norm}}_{h_G}(\underline{E})$ est représentable , alors il existe un et un seul sous-objet de G qui le représente et qui est alors un sous-$\underline{C}$-groupe de G , on le note $\underline{\mathrm{Norm}}_G(\underline{E})$ ...

Définition 2.3.5. On dit que le $\widehat{C}$-groupe $\underline{G}$ opère sur le $\widehat{C}$-groupe $\underline{H}$ si $\underline{H}$ est muni d'une structure de $\underline{G}$-objet telle que, pour tout $g \in \underline{G}(S)$, l'automorphisme de H(S) défini par g soit un automorphisme de groupe .

Il revient au même de dire que pour tout $g \in \underline{G}(S)$, l'automorphisme $\rho(g)$ de $\underline{H}_S$ est un automorphisme de $\widehat{C_{/S}}$-groupes , ou encore que le morphisme de $\widehat{C}$-groupes $\underline{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(H)$ applique $\underline{G}$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{C}.\mathrm{Gr.}}(\underline{H})$.

Dans la situation ci-dessus, il existe sur le produit $\underline{H} \times \underline{G}$ une structure de $\widehat{C}$-groupe unique telle que , pour tout S , $\underline{H} \times \underline{G}\,(S)$ soit le produit semi-direct des groupes $\underline{H}(S)$ et $\underline{G}(S)$ relativement à l'opération donnée de $\underline{G}(S)$ sur $\underline{H}(S)$. On notera ce $\widehat{C}$-groupe $\underline{H}.\underline{G}$ et l'appellera produit semi-direct de $\underline{H}$ par $\underline{G}$. On a donc par définition

$$\underline{H}.\underline{G}(S) \quad = \quad \underline{H}(S) \,.\, \underline{G}(S) \quad .$$

Soit $\underline{G}$ un $\widehat{C}$-groupe . Pour toute flèche $S' \to S$ de $\underline{C}$ et tout $g \in \underline{G}(S)$, soit $\mathrm{Int}(g)$ l'automorphisme de $\underline{G}(S')$ défini par $\mathrm{Int}(g)h = ghg^{-1}$. Cette définition se prolonge en celle d'un morphisme de $\widehat{C}$-groupes

$$\mathrm{Int} : \ \underline{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{C}\text{-Gr.}}(\underline{G}) \ \subset \ \underline{\mathrm{Aut}}(\underline{G}) \ .$$

La définition 2.3.3 s'applique donc et on a des sous-$\widehat{C}$-groupes de $\underline{G}$

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{G}}(\underline{E}) \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{Cent}}_{\underline{G}}(\underline{E})$$

pour tout sous-objet $\underline{E}$ de $\underline{G}$.

Définition 2.3.6. On appelle centre de $\underline{G}$ et on note $\underline{\mathrm{Cent}}(\underline{G})$ le sous-$\widehat{C}$-groupe $\underline{\mathrm{Cent}}_{\underline{G}}(\underline{G})$ de $\underline{G}$. On dit que $\underline{G}$ est commutatif si $\underline{\mathrm{Cent}}(\underline{G}) = \underline{G}$ ou, ce qui revient au même, si $\underline{G}(S)$ est commutatif pour tout S. On dit que le sous-$\widehat{C}$-groupe $\underline{H}$ de $\underline{G}$ est invariant dans $\underline{G}$ si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{G}}(\underline{H}) = \underline{G}$, ou , ce qui revient au même si $\underline{H}(S)$ est invariant dans $\underline{G}(S)$ pour tout S .

Beaucoup de définitions et de propositions de la théorie élémentaire des groupes se transposent aisément. Signalons simplement la suivante qui nous sera utile :

Proposition 2.3.7. Soit $f : \underline{W} \to \underline{G}$ un morphisme de $\widehat{C}$-groupes . Posons $\underline{H}(S) = \mathrm{Ker}\, f(S)$. Soit $u : \underline{G} \to \underline{W}$ un morphisme de $\widehat{C}$-groupes qui soit une *section de* f *(et qui est alors nécessairement un monomorphisme)* . *Alors* $\underline{W}$ *s'identifie au produit semi-direct de* $\underline{H}$ *par* $\underline{G}$ *pour l'opération de* $\underline{G}$ *sur* $\underline{H}$ *définie par* $(g,h) \longmapsto \mathrm{Int}(u(g))h$ *pour* $g \in G(S)$, $h \in H(S)$, $S \in \mathrm{Ob}\ \underline{C}$.

L'ensemble de ces définitions et propositions se transporte comme d'habitude à $\hat{\underline{C}}$. On définit en particulier le produit semi-direct de deux $\hat{\underline{C}}$-groupes H et G (G opérant sur H) lorsque le produit cartésien $H \times G$ existe , et on a l'analogue de la proposition 2.3.7 sous la forme suivante :

Proposition 2.3.8. *Soit* $H \xrightarrow{i} W \xrightarrow{f} G$ *une suite de morphismes de* $\hat{\underline{C}}$-*groupes telle que pour tout* $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$, $(H(S), i(S))$ *soit un noyau de* $f(S) : W(S) \to G(S)$. *Soit* $u : G \to W$ *un morphisme de* $\hat{\underline{C}}$-*groupes qui soit une section de* f . *Alors* W *s'identifie au produit semi-direct de* H *par* G *pour l'opération de* G *sur* H *telle que si* $S \in \mathrm{Ob}\ \underline{C}$, *si* $g \in G(S)$ *et* $h \in H(S)$, *on ait* $\mathrm{Int}(u(g))i(h) = i\,({}^{g}h)$.

3. *La catégorie des* $\underline{\underline{O}}$-*modules* , *la catégorie des* $\underline{G}$ - $\underline{\underline{O}}$ - *modules* .

Définition 3.1. *Soient* $\underline{\underline{O}}$ et $\underline{F}$ *deux objets de* $\hat{\underline{C}}$. *On dit que* $\underline{F}$ *est un* $\hat{\underline{C}}$-*module sur le* $\hat{\underline{C}}$-*anneau* $\underline{\underline{O}}$, *ou en abrégé un* $\underline{\underline{O}}$-*module* , *si, pour tout* $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$, *on a muni* $\underline{\underline{O}}(S)$ *d'une structure d'anneau et* $\underline{F}(S)$ *d'une structure de module sur cet anneau de telle manière que pour toute flèche* $S' \to S''$ *de* $\underline{C}$, $\underline{\underline{O}}(S'') \to \underline{\underline{O}}(S')$ *soit un homomorphisme d'anneaux et* $\underline{F}(S'') \longrightarrow \underline{F}(S')$ *un homomorphisme de groupes abéliens compatible avec cet homomorphisme d'anneaux* .

Si $\underline{\underline{O}}$ est fixé, on définit de manière habituelle un morphisme des $\underline{\underline{O}}$-modules $\underline{F}$ et $\underline{F}'$, d'où le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{F},\underline{F}')$, et la catégorie de $\underline{\underline{O}}$-modules notée ($\underline{\underline{O}}$-Mod.) . Remarquons que si $\underline{\underline{O}}_o$ est le $\hat{\underline{C}}$-anneau défini par $\underline{\underline{O}}_o(S) = \underline{\underline{Z}}$ (qu'il ne faut pas confondre avec le foncteur associé à l'objet constant $\underline{\underline{Z}}$) , alors la catégorie des $\underline{\underline{O}}_o$-modules est isomorphe à la catégorie des $\hat{\underline{C}}$-groupes commutatifs. La catégorie ($\underline{\underline{O}}$-Mod.) est abélienne.

Remarquons que, si $\underline{F}$ est un $\underline{\underline{O}}$-module, alors pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$, $\underline{F}_S$ est un $\underline{\underline{O}}_S$-module. On peut donc définir un $\widehat{\underline{C}}$-groupe abélien $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{F},\underline{F}')$ par

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{F},\underline{F}')\ (S) = \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}_S}\ (\underline{F}_S,\underline{F}'_S) \quad .$$

On définira de même des objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{F},\underline{F}') \quad , \quad \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{F}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{F}) \quad ,$$

le dernier étant un $\widehat{\underline{C}}$-groupe pour la structure induite par la composition des automorphismes.

<u>Définition</u> 3.2. <u>Soient $\underline{\underline{O}}$ un $\widehat{\underline{C}}$-anneau, $\underline{F}$ un $\underline{\underline{O}}$-module et $\underline{G}$ un $\widehat{\underline{C}}$-groupe</u>. <u>On appelle structure de $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-module sur $\underline{F}$ une structure de $\underline{G}$-objet telle que pour</u> $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$ <u>et tout</u> $g \in \underline{G}(S)$, <u>l'automorphisme de $\underline{F}(S)$ défini par</u> g <u>soit un automorphisme de sa structure de $\underline{\underline{O}}(S)$-module</u>.

Il revient au même de dire que le morphisme de $\widehat{\underline{C}}$-groupes

$$\rho \ : \ \underline{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\underline{F})$$

défini en 2.3 applique $\underline{G}$ dans le sous-$\widehat{\underline{C}}$-groupe $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{F})$ de $\underline{\mathrm{Aut}}(\underline{F})$.
Se donner une <u>structure de $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-module</u> sur le $\underline{\underline{O}}$-module $\underline{F}$, c'est donc se donner un <u>morphisme de $\widehat{\underline{C}}$-groupes</u>

$$\rho \ : \ \underline{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}}(\underline{F}) \quad .$$

On définit de manière naturelle le groupe abélien

$$\mathrm{Hom}_{\underline{G}\text{-}\underline{\underline{O}}}(\underline{F},\underline{F}') \quad ,$$

donc la catégorie additive des $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-modules notée $(\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-Mod.$)$. Le lecteur remarquera que cette dernière peut également se définir comme la catégorie des $\underline{\underline{O}}[G]$-modules, où $\underline{\underline{O}}[G]$ est l'algèbre du $\widehat{\underline{C}}$-groupe G sur le $\widehat{\underline{C}}$-anneau $\underline{\underline{O}}$, dont la définition est claire.

Toutes les constructions de ce paragraphe se spécialisent aussitôt au cas où $\underline{G}$ (ou $\underline{\underline{O}}$, ou les deux) sont représentables par des objets de C qui sont par là-même munis des structures algébriques correspondantes.

Nous avons traité succinctement le cas des principales structures algébriques rencontrées dans la suite de ce séminaire. Pour les autres (structure de $\underline{\underline{O}}$-algèbre de Lie par exemple), nous croyons que le lecteur aura eu suffisamment d'exemples dans ce paragraphe pour pouvoir dans chaque cas particulier faire fonctionner lui-même le mécanisme général esquissé dans 2.2.

Nous allons maintenant appliquer ce que nous venons de faire à la catégorie des préschémas notée (Sch) et plus généralement aux catégories $(Sch)_{/S}$.

4. <u>Structures algébriques dans la catégorie des préschémas</u>.

Nous nous permettrons, chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguité, les abus de langage suivants : on désignera par T l'objet $T \xrightarrow{f} S$ de $\underline{C}_{/S}$, la donnée de f ("morphisme structural de T") étant sous-entendue, et on identifiera $\underline{C}$ à une sous-catégorie de $\widehat{\underline{C}}$. Compte tenu des compatibilités énoncées aux paragraphes précédents, ces identifications peuvent se faire sans danger.

Nous simplifierons d'autre part les appellations sur le modèle suivant : un (Sch)-groupe sera aussi appelé <u>préschéma en groupes</u>, un $(Sch)_{/S}$-groupe <u>préschéma en groupes sur</u> S, <u>ou</u> S-<u>préschéma en groupes</u>, ou S-<u>groupe</u>, ou A-<u>groupe</u> lorsque S sera le spectre de l'anneau A.

4.1. Préschémas constants

La catégorie des préschémas satisfait aux conditions exigées en 1.8. On peut donc y définir les objets constants ; pour tout ensemble E , on a un préschéma $E_{\underline{\underline{Z}}}$ et pour tout préschéma S , un S-préschéma $E_S = (E_{\underline{\underline{Z}}})_S$. Rappelons que pour tout préschéma T, $\mathrm{Hom}(T,E_S)$ est l'ensemble des applications localement constantes de l'espace topologique T dans E.

Le foncteur
$$E \longmapsto E_S$$
commute aux limites projectives finies. En particulier si G est un groupe, G_S est un S-préschéma en groupes; si O est un anneau, O_S est un S-préschéma en anneaux...

4.2. S-groupes affines .

Rappelons un certain nombre de choses sur les S-schémas affines (EGA II.1) . On dit que le S-préschéma T est affine sur S si l'image réciproque de tout ouvert affine de S est affine . La $\underline{O}_S$- algèbre $f_*(\underline{O}_T)$, que l'on désigne par $\underline{A}(T)$, est alors quasi-cohérente (f désigne le morphisme structural de T) . Réciproquement, à toute $\underline{O}_S$- algèbre quasi-cohérente $\underline{A}$, on peut faire correspondre un S-préschéma affine sur S noté $\mathrm{Spec}(\underline{A})$. Ces foncteurs $T \mapsto \underline{A}(T)$ et $\underline{A} \to \mathrm{Spec}\,\underline{A}$ sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des S-préschémas affines sur S et la catégorie opposée à celle des $\underline{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes.

Il en résulte que se donner une structure algébrique sur un S-préschéma affine T est équivalent à se donner la structure correspondante sur $\underline{A}(T)$ dans la catégorie opposée à celle des $\underline{O}_S$- algèbres quasi-cohérentes. En particulier, si G est un S-groupe affine sur S , $\underline{A}(G)$ est munie d'une structure de $\underline{O}_S$-bigèbre augmentée, c'est-à-dire que l'on a deux morphismes de $\underline{O}_S$-algèbres

$$\Delta \ : \underline{A}(G) \longrightarrow \underline{A}(G) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \qquad ,$$

$$\varepsilon \ : \underline{A}(G) \longrightarrow \underline{O}_S \qquad ,$$

correspondant aux morphismes de S-schémas

$$\pi \ : G \times G \longrightarrow G \qquad ,$$

$$e_G \ : \ S \longrightarrow G \qquad .$$

Les applications Δ et ε vérifient les conditions suivantes (qui expriment que G est un S-monoïde) :

(HA 1) : Δ <u>est co-associatif</u> : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \underline{A}(G) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"] & \underline{A}(G) \otimes \underline{A}(G) \otimes \underline{A}(G) \\
& A(G) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \arrow[ur, "\Delta \otimes \mathrm{Id}."'] &
\end{tikzcd} \qquad .$$

(HA 2) : Δ <u>est compatible avec</u> ε : les deux composés suivants sont l'identité

$$\underline{A}(G) \xrightarrow{\Delta} \underline{A}(G) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \varepsilon} \underline{A}(G) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_S \xrightarrow{\sim} \underline{A}(G) \qquad ,$$

$$\underline{A}(G) \xrightarrow{\Delta} A(G) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{Id}} \underline{O}_S \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{A}(G) \qquad .$$

Profitons de la circonstance pour remarquer une fois encore qu'il résulte de la définition d'une structure de S-groupe que pour se donner une telle structure sur un S-schéma G affine sur S , <u>il n'est pas nécessaire de vérifier quoi que ce soit sur</u> $\underline{A}(G)$, mais simplement de munir chaque $G(S')$ pour S' au-dessus de S d'une structure de groupe fonctorielle en S' . Cette remarque s'applique *mutatis mutandis* aux morphismes .

4.3. Les groupes $\underline{\underline{G}}_a$ et $\underline{\underline{G}}_m$. L'anneau $\underline{\underline{O}}$.

4.3.1. Soit $\underline{\underline{G}}_a$ le foncteur de $(Sch)^o$ dans (Ens) défini par

$$\underline{\underline{G}}_a(S) = \Gamma(S,\underline{O}_S)$$

muni de la structure de $\widehat{(Sch)}$-groupe définie par la structure de groupe additif de l'anneau $\Gamma(S,\underline{O}_S)$. Il est représentable par un schéma affine que l'on notera $\underline{\underline{G}}_a$, et qui est donc un schéma en groupes

$$\underline{\underline{G}}_a = \operatorname{Spec} \underline{\underline{Z}}[T] \quad .$$

En effet $\underline{\underline{G}}_a(S) = \operatorname{Hom}(S,\underline{\underline{G}}_a) = \operatorname{Hom}_{Alg.}(\underline{\underline{Z}}[T], \Gamma(S,\underline{O}_S)) \simeq \Gamma(S,\underline{O}_S)$.

Pour tout préschéma S , on a donc un S-groupe affine sur S $\underline{\underline{G}}_{a,S}$, qui correspond à la $\underline{O}_S$-bigèbre $\underline{O}_S[T]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T \; , \; \varepsilon T = 0 \quad .$$

4.3.2. Soit $\underline{\underline{G}}_m$ le foncteur de $(Sch)^o$ dans (Ens) défini par

$$\underline{\underline{G}}_m(S) = \Gamma(S,\underline{O}_S)^*$$

où $\Gamma(S,\underline{O}_S)^*$ désigne le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\Gamma(S,\underline{O}_S)$, muni de sa structure naturelle de $\widehat{(Sch)}$-groupe . Il est représentable par un schéma affine noté $\underline{\underline{G}}_m$

$$\underline{\underline{G}}_m = \text{Spec } \underline{\underline{Z}}[T,T^{-1}] = \text{Spec } \underline{\underline{Z}}[\underline{\underline{Z}}]$$

où $\underline{\underline{Z}}\,[\underline{\underline{Z}}]$ désigne l'algèbre du groupe $\underline{\underline{Z}}$ sur l'anneau $\underline{\underline{Z}}$. En effet
$\underline{\underline{G}}_m(S) = \text{Hom}_{\text{Alg.}}(\underline{\underline{Z}}[T,T^{-1}], \Gamma(S,\underline{O}_S)) \simeq \Gamma(S,\underline{O}_S)^*$.

Pour tout préschéma S , on a donc un S-groupe affine sur S noté $\underline{\underline{G}}_{m,S}$ qui correspond à la $\underline{O}_S$-algèbre $\underline{O}_S\,[\underline{\underline{Z}}]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(x) = x \otimes x \ , \ \varepsilon(x)=1, \ x\in\mathbb{Z} \ .$$

4.3.3. Soit $\underline{\underline{O}}$ le foncteur $\underline{\underline{G}}_a$ muni de sa structure de $\widehat{(Sch)}$-anneau . Il est représenté par le schéma Spec $\underline{\underline{Z}}\,[T]$ que l'on notera $\underline{O}$ lorsqu'on le considèrera comme muni de sa structure de <u>schéma d'anneaux</u> .

Pour tout S , on a donc un S-anneau affine sur S noté $\underline{\underline{O}}_S$.
(<u>Nota</u> : dans EGA II 1.7.13 , $\underline{\underline{O}}_S$ est noté $S\,[T]$) .

4.4. <u>Groupes diagonalisables</u> .

4.4.1. La construction de $\underline{\underline{G}}_m$ se généralise comme suit : soit M un groupe commutatif et $M_{\underline{\underline{S}}}$ le S-schéma en groupes qui lui est associé par le procédé de 4.1. Considérons le foncteur défini par

$$\underline{D}(M)(S) = \text{Hom}_{\text{groupes}}(M, \underline{\underline{G}}_m(S)) \simeq \text{Hom}_{S\text{-Gr.}}(M_S \, , \underline{\underline{G}}_{m,S}) \ .$$

C'est un $\widehat{(Sch)}$-groupe commutatif qui est représentable par un <u>schéma en groupes</u> que l'on notera D(M) ; on aura donc par définition :

$$D(M) \simeq \underline{\text{Hom}}_{(Sch)\text{-Gr.}}(M_{\underline{\underline{Z}}} \, , \underline{\underline{G}}_m) \ .$$

Posons en effet

$$D(M) = \operatorname{Spec} \underline{\underline{Z}} [M] ,$$

où $\underline{\underline{Z}} [M]$ est l'algèbre du groupe M sur l'anneau $\underline{\underline{Z}}$; on a

$$D(M)(S) = \operatorname{Hom}_{Alg.}(\underline{\underline{Z}} [M], \Gamma(S,\underline{O}_S)) \simeq \operatorname{Hom}_{groupes}(M , \Gamma(S,\underline{O}_S)^*)$$

par définition même de l'algèbre $\underline{\underline{Z}} [M]$.

4.4.2. Pour tout préschéma S on a donc un S-schéma en groupes affine sur S

$$D_S(M) = D(M)_S = \underline{\operatorname{Hom}}_{(Sch)-Gr.}(M_{\underline{\underline{Z}}} , \underline{\underline{G}}_m)_S = \underline{\operatorname{Hom}}_{S-Gr.}(M_S , \underline{\underline{G}}_{m,S})$$

Il est associé à la $\underline{O}_S$-bigèbre $\underline{O}_S [M]$, munie de l'application diagonale et de l'augmentation définies par

$$\Delta(x) = x \otimes x \quad \text{et } \varepsilon(x)=1, \quad x \in M .$$

4.4.3. Si $f : M \longrightarrow N$ est un homomorphisme de groupes commutatifs, on définit de manière évidente un morphisme de S-groupes

$$D_S(f) : D_S(N) \longrightarrow D_S(M) ,$$

d'où un <u>foncteur</u>

$$D_S : M \longmapsto D_S(M)$$

de la catégorie des <u>groupes abéliens</u> dans la catégorie des S-<u>groupes affines sur</u> S , que l'on peut aussi définir comme composé du foncteur $M \longmapsto M_S$ et du foncteur $M_S \longmapsto \underline{\operatorname{Hom}}_{S-Gr.}(M_S , \underline{\underline{G}}_{m, S})$. Ce foncteur <u>commute aux extensions de la base</u> .

Un S-groupe isomorphe à un groupe de la forme $D_S(M)$ est dit <u>diagonalisable</u> . Notons que les éléments de M s'interprètent comme certains caractères de $D_S(M)$, c'est-à-dire certains éléments de $\mathrm{Hom}_{S\text{-}Gr.}(D_S(M), \underline{\underline{G}}_{m,S})$. (<u>Confer</u> VIII 1).

4.4.4. Donnons quelques exemples de groupes diagonalisables . On a d'abord

$$D(\underline{\underline{Z}}) = \underline{\underline{G}}_m \quad , \quad D(\underline{\underline{Z}}^r) = (\underline{\underline{G}}_m)^r \quad .$$

On pose

$$\underline{\underline{\mu}}_n = D(\underline{\underline{Z}}/n\underline{\underline{Z}}) \quad ,$$

et on le nomme <u>groupe des racines</u> n-<u>ièmes de l'unité</u> . En effet, on a

$$\underline{\underline{\mu}}_n(S) = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\underline{\underline{Z}}/n\underline{\underline{Z}} , \Gamma(S,\underline{O}_S)^*) = \left\{ f \in \Gamma(S,\underline{O}_S) , f^n = 1 \right\} .$$

Le S-groupe $\underline{\underline{\mu}}_{n.S}$ correspond à la $\underline{O}_S$- algèbre $\underline{O}_S[T]/(T^n - 1)$. Supposons en particulier que S soit le spectre d'un corps k de caractéristique p = n . En posant T - 1 = s , on trouve

$$k[T]/(T^p - 1) = k[s]/(s^p) \quad ,$$

ce qui montre que l'espace topologique sous-jacent à $\underline{\underline{\mu}}_{p,k}$ est réduit à un point , l'anneau local de ce point étant la k-algèbre artinienne $k[s]/(s^p)$. (Dans le même ordre d'idées, signalons que les S-schémas $\underline{\underline{G}}_{a,S}$, $\underline{\underline{G}}_{m,S}$, $\underline{\underline{O}}_S$ sont <u>lisses</u> sur S , que $D_S(M)$ est <u>plat</u> sur S et qu'il est <u>lisse</u> sur S si et seulement si aucune caractéristique résiduelle de S ne divise la torsion de M) .

4.5. Autres exemples de groupes .

Le procédé précédent s'applique aux "groupes classiques" (GL_n , Sp_n , O_n ...) . On définira par exemple $\underline{\underline{GL}}_n$ comme représentant le foncteur $\underline{GL}_n$ tel que :

$$\underline{GL}_n(S) = GL(n, \Gamma(S,\underline{O}_S)) = Aut_{\underline{O}_S}(\underline{O}_S{}^n) \ .$$

On pourra le construire par exemple comme l'ouvert de Spec $\underline{\underline{Z}}[T_{ij}]$ $0 \leqslant i,j \leqslant n$ défini par la fonction $f = \det((T_{ij}))$, c'est-à-dire Spec $\underline{\underline{Z}}[T_{ij}, f^{-1}]$.

4.6. Foncteurs-modules dans la catégorie des préschémas .

Nous nous proposons d'associer à tout $\underline{O}_S$-module sur le préschéma S , un $\underline{\underline{O}}_S$-module (où $\underline{\underline{O}}_S$ désigne le foncteur-anneau introduit en 4.3.3. Ceci peut se faire de deux manières différentes . De façon précise

Définition 4.6.1. Soit S un préschéma . Pour tout $\underline{O}_S$- module F on note V(F) et W(F) les foncteurs sur $(Sch)_{/S}$ définis par :

$$V(F)(S') = Hom_{\underline{O}_{S'}}(F \otimes \underline{O}_{S'} , \underline{O}_{S'}) \qquad ,$$

$$W(F)(S') = \Gamma(S' , F \otimes \underline{O}_{S'})$$

(où $F \otimes \underline{O}_{S'}$ mis pour $F \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{S'}$ désigne l'image inverse sur S' du $\underline{O}_S$-Module F).

Alors V(F) et W(F) sont munis de manière évidente d'une structure de $\underline{\underline{O}}_S$-modules (on rappelle que $\underline{\underline{O}}_S(S') = \Gamma(S', \underline{O}_{S'}) = W(\underline{O}_S)(S')$), de telle façon que l'on a en fait défini deux foncteurs V et W de la catégorie des $\underline{O}_S$-modules dans la catégorie des $\underline{\underline{O}}_S$-modules, V étant contravariant et W covariant.

Nous nous restreignons dans la suite de ce paragraphe au cas où les $\underline{O}_S$-modules en question sont quasi-cohérents, c'est-à-dire que nous considérons

V et W comme des foncteurs de la catégorie $(\underline{O}_S\text{-Mod.q.c.})$ des $\underline{O}_S$-modules quasi-cohérents dans la catégorie des $\underline{\underline{O}}_S$-modules

$$V : (\underline{O}_S\text{-Mod.q.c.})^{\circ} \longrightarrow (\underline{\underline{O}}_S\text{-Mod}) \quad ,$$

$$W : (\underline{O}_S\text{-Mod.q.c.}) \longrightarrow (\underline{\underline{O}}_S\text{-Mod}) \quad .$$

(Nota : le lecteur remarquera que, dans la suite, toutes les propositions qui ne font intervenir que le foncteur W sont valables sans cette restriction) .

Proposition 4.6.2. (i) Les foncteurs V et W commutent à l'extension de la base : si S' est au-dessus de S et si F est un $\underline{O}_S$-Module quasi-cohérent, on a

$$V\,(F \otimes \underline{O}_{S'}) \simeq V(F)_{S'} \;,\; W\,(F \otimes \underline{O}_{S'}) \simeq W(F)_{S'} \quad .$$

(ii) Les foncteurs V et W sont pleinement fidèles : les applications canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(F,F') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}_S}(V(F'),\, V(F))$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(F,F') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}_S}(W(F)\;,\, W(F'))$$

sont bijectives .

(iii) Les foncteurs V et W sont additifs :

$$V(F \oplus F') \simeq V(F) \times_S V(F') \;,\; W\,(F \oplus F') \simeq W(F) \times_S W(F') \quad .$$

Les parties (i) et (iii) sont évidentes sur les définitions. Pour on prend pour S' des ouverts de S . Nous laissons la démonstration au lecteur (pour V , utiliser EGA II. 1.7.14) .

4.6.3. On a des morphismes canoniques dans ($\underline{\underline{O}}_S$-Mod) :

$$W(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S}(F,F')) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S}(W(F), W(F')) \quad ,$$

$$W(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S}(F,F')) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S}(V(F'), V(F)) \quad .$$

Cela résulte immédiatement de (i) et (ii) .

Considérons maintenant W(F) et V(F) comme des foncteurs au-dessus de S . On sait (EGA II.1.7.8) que V(F) est représentable par un S-préschéma affine sur S que l'on note $\underline{\underline{V}}(F)$ et que l'on appelle <u>fibré vectoriel</u> défini par F ,

$$\underline{\underline{V}}(F) = \mathrm{Spec}(\underline{\underline{S}}(F))$$

où $\underline{\underline{S}}(F)$ désigne l'Algèbre symétrique du $\underline{\underline{O}}_S$-module F .

<u>Proposition</u> 4.6.4. <u>Soient F et F' deux $\underline{\underline{O}}_S$-modules quasi-cohérents,</u> A <u>une $\underline{\underline{O}}_S$-algèbre quasi-cohérente. On a un isomorphisme fonctoriel</u> :

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}(A), \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S}(W(F),W(F'))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}_S}(F, A \otimes_{\underline{\underline{O}}_S} F') \ .$$

En effet, si on note S' = Spec(A), le premier membre est canoniquement isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S}(W(F),W(F')(S'))$, c'est-à-dire par définition à

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}_{S'}}(W(F)_{S'}, W(F')_{S'}) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}_{S'}}(W(F \otimes \underline{\underline{O}}_{S'}), W(F' \otimes \underline{\underline{O}}_{S'}))$$

(cf. 4.6.2 (i)), ce qui par 4.6.2 (ii) peut aussi s'écrire

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_{S'}}(F \otimes O_{S'}, F' \otimes \underline{O}_{S'}) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(F , f_*(f^*(F'))) ,$$

où on note $f : S' \longrightarrow S$ le morphisme structural. Mais, par EGA II , 1.4.7 , on a $f_*(f^*(F')) \simeq F' \otimes A$, ce qui achève la démonstration .

<u>Corollaire</u> . <u>On a un isomorphisme canonique</u>

$$W(A \otimes F) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_S(\underline{\mathrm{Spec}}(A), W(F)) .$$

En effet, on prend $F = \underline{O}_S$ dans la formule précédente; puis on fait varier S .

<u>Proposition</u> 4.6.5. <u>Si</u> F <u>et</u> F' <u>sont deux</u> <u>O_S-modules localement libres de type fini</u>, <u>les morphismes de</u> 4.6.3 <u>sont des isomorphismes</u> .

En effet, pour tout $S' \longrightarrow S$, on a

$$W(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(F,F'))(S') = \Gamma(S',\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(F,F')\otimes \underline{O}_{S'}) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{S'}}(F\otimes \underline{O}_{S'} , F'\otimes \underline{O}_{S'}) .$$

Mais, par 4.6.2 (i) et (ii) , le second membre est bien isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S}(W(F),W(F'))(S')$ et à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S}(V(F'),V(F))(S')$.

<u>Corollaire</u> . <u>Soit</u> F <u>un</u> <u>O_S-module localement libre de type fini</u>. <u>Posons</u> $\check{F} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(F,\underline{O}_S)$. <u>On a des isomorphismes canoniques</u> :

$$W(\check{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}_S}(W(F),\underline{\underline{O}}_S) \simeq V(F) \quad ,$$

$$V(\check{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{O}}_S}(V(F),\underline{\underline{O}}_S) \simeq W(F) \quad .$$

On a enfin la proposition suivante :

Proposition 4.6.6. *Soit* $f : F \to F'$ *un morphisme de* $\underline{\underline{O}}_S$*-modules localement libres de rang fini. Pour que* $W(f) : W(F) \to W(F')$ *soit un monomorphisme, il faut et il suffit que* f *identifie* F *localement à un facteur direct de* F'.

La proposition directe est essentiellement contenue dans (EGA 0.5.5.5). La proposition réciproque est pratiquement évidente.

4.7. La catégorie des G-$\underline{\underline{O}}_S$-Modules.

Soit G un S-groupe *affine* sur S et F un $\underline{\underline{O}}_S$-Module quasi-cohérent ; alors $W(F)$ est muni d'une structure de $\underline{\underline{O}}_S$-module.

Définition 4.7.1. *On appelle structure de* G-$\underline{\underline{O}}_S$-module *sur* F *une structure de* h_G-$\underline{\underline{O}}_S$*-module sur* $W(F)$. (cf. 3.2).

Un morphisme de G-$\underline{\underline{O}}_S$-Modules est par définition un morphisme des h_G-$\underline{\underline{O}}_S$-modules associés. On peut donc dire que l'on a construit la catégorie $(G$-$\underline{\underline{O}}_S$-Mod.$)$ que l'on vient de définir par le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
(G\text{-}\underline{\underline{O}}_S\text{-Mod.}) \arrow[r] \arrow[d] & (h_G\text{-}\underline{\underline{O}}_S\text{-Mod.}) \arrow[d] \\
(\underline{\underline{O}}_S\text{-Mod.}) \arrow[r, "W"] & (\underline{\underline{O}}_S\text{-Mod.})
\end{tikzcd}$$

La catégorie $(G$-$\underline{\underline{O}}_S$-Mod.$)$ est abélienne.

4.7.2. Se donner une structure de G-$\underline{O}_S$-Module sur F , c'est donc par 3.2 se donner un morphisme de $\widehat{(Sch)}_{/S}$-groupes

$$h_G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S}(W(F)) \quad .$$

En vertu de 4.6.4 , la donnée d'un morphisme de S-foncteurs

$$\rho : h_G \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S}(W(F))$$

équivaut à celle d'un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules

$$\mu : F \longrightarrow \underline{A}(G) \otimes_{\underline{O}_S} F \quad .$$

Dire que ρ est un morphisme de $\widehat{(Sch)}_{/S}$-groupes équivaut alors à dire que μ satisfait aux axiomes suivants :

(CM 1) <u>le diagramme suivant est commutatif</u>

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & F \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"] \\ F \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{Id}"'] & F \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}(G) \end{tikzcd} \quad .$$

(CM 2) <u>le composé</u>

$$F \xrightarrow{\mu} F \otimes \underline{A}(G) \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \varepsilon} F \otimes \underline{O}_S \longrightarrow F$$

<u>est l'identité</u> .

Ces axiomes (CM 1) et (CM 2) sont ceux de la structure de <u>comodule</u> sur la bigèbre $\underline{A}(G)$. En résumé :

Proposition 4.7.2. <u>La construction précédente fournit une équivalence de la catégorie des</u> G-$\underline{O}_S$ <u>modules quasi-cohérents</u> (resp. G-$\underline{O}_S$ modules) <u>sur la catégorie des comodules quasi-cohérents</u> (resp. comodules) <u>sur la</u> $\underline{O}_S$-<u>bigèbre</u> $\underline{A}(G)$.

4.7.3. Supposons maintenant que G soit un <u>groupe diagonalisable</u> , c'est-à-dire que $\underline{A}(G)$ soit l'algèbre d'un groupe commutatif M sur le faisceau d'anneaux $\underline{O}_S$. Si F est un $\underline{O}_S$-module, on a

$$F \otimes A(G) = \coprod_{m \in M} F \otimes m\,\underline{O}_S \quad .$$

Se donner un morphisme de $\underline{O}_S$-modules

$$\mu : F \longrightarrow F \otimes \underline{A}(G)$$

est donc équivalent à se donner des $\underline{O}_S$-endomorphismes $(\mu_m)_{m \in M}$ de F , tels que pour toute section x de F sur un ouvert de S , $(\mu_m(x))$ soit une section de la somme directe $\coprod_{m \in M} F$ (cela veut dire que sur tout ouvert suffisamment petit, il n'y ait qu'un nombre fini de restrictions des $\mu_m(x)$ qui soient non nulles).

Pour que μ définie par

$$\mu(x) = \sum_{m \in M} \mu_m(x) \otimes m$$

vérifie (CM 1) (resp. (CM 2)) il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu_m \circ \mu_{m'} = \delta_{m\,m'}\ \mu_m \ , \quad (\text{resp. } \sum_{m \in M} \mu_m = I_F) \ ,$$

ce qui signifie que les μ_m sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de somme l'identité . On a donc prouvé :

Proposition 4.7.3. Si $G = D_S(M)$ est un S-groupe diagonalisable , la catégorie des G-$\underline{O}_S$-modules quasi-cohérents (resp. des G-$\underline{O}_S$-modules) est équivalente à la catégorie des $\underline{O}_S$-Modules quasi-cohérents (resp. des $\underline{O}_S$-modules) gradués de type M .

Remarque : si F est muni d'une structure de $\underline{O}_S$-algèbre conservée par les opérations de G , alors la graduation de G est une graduation d'algèbre . Plus précisément :

Le foncteur $\underline{A} \longmapsto \operatorname{Spec} \underline{A}$ induit une équivalence entre la catégorie des $\underline{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes graduées de type M et la catégorie opposée à celle des S-schémas affines sur S à S-schéma en groupes d'opérateurs $G = D_S(M)$.

Proposition 4.7.4. Soit G un S-groupe diagonalisable. Si $0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$ est une suite exacte de G-$\underline{O}_S$-modules quasi-cohérents qui se scinde comme suite de $\underline{O}_S$-modules, alors elle se scinde également comme suite de G-$\underline{O}_S$-modules.

En effet chacun des F_i est gradué par des $(F_i)_m$ et pour chaque $m \in M$ la suite

$$0 \longrightarrow (F_1)_m \longrightarrow (F_2)_m \longrightarrow (F_3)_m \longrightarrow 0$$

de $\underline{O}_S$-modules est scindée. La proposition précédente entraîne alors le résultat.

5. Cohomologie des groupes .

5.1. Le complexe standard .

Soient $\underline{C}$ une catégorie , $\underline{G}$ un $\hat{\underline{C}}$-groupe , $\underline{\underline{O}}$ un $\hat{\underline{C}}$-anneau et $\underline{F}$ un $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-module . On pose

$$C^n(\underline{G},\underline{F}) = \mathrm{Hom}\,(\underline{G}^n,\underline{F}) \quad , \quad \underline{C}^n(\underline{G},\underline{F}) = \underline{\mathrm{Hom}}\,(\underline{G}^n,\underline{F}) \quad , \quad n \geqslant 0 \quad ,$$

où $\underline{G}^o$ est l'objet final $\underline{e}$. Alors $\underline{C}^n(\underline{G},\underline{F})$ (resp. $C^n(G,F)$) est muni de manière évidente d'une structure de $\underline{\underline{O}}$-module (resp. de $\Gamma(\underline{\underline{O}})$-module) et on a

$$C^n(\underline{G},F) \simeq \Gamma(\underline{C}^n(\underline{G},\underline{F})) \quad , \quad \underline{C}^n(\underline{G},\underline{F})(S) = C^n(\underline{G}_S,\underline{F}_S) \quad .$$

Se donner un élément de $C^n(\underline{G},\underline{F})$, c'est se donner pour chaque $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$ une n-cochaine de $\underline{G}(S)$ dans $\underline{F}(S)$, fonctoriellement en S . L'opérateur bord

$$\partial : C^n(\underline{G}(S),\underline{F}(S)) \longrightarrow C^{n+1}(\underline{G}(S),\underline{F}(S)) \quad ,$$

qui, rappelons-le, est donné par la formule

$$\partial f(g_1,\ldots g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\ldots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^n f(g_1,\ldots,g_i g_{i+1},\ldots,g_n)$$
$$+ (-1)^{n+1} f(g_1,\ldots,g_n) \quad ,$$

est fonctoriel en S et définit donc un homomorphisme :

$$\partial : C^n(\underline{G},\underline{F}) \longrightarrow C^{n+1}(\underline{G},\underline{F})$$

tel que $\partial \circ \partial = 0$. On a donc défini un complexe de groupes abéliens (et même de $\Gamma(\underline{\underline{O}})$-modules) noté $C^*(\underline{G},\underline{F})$. On définit de la même manière le complexe de $\underline{\underline{O}}$-modules $\underline{C}^*(\underline{G},\underline{F})$ et on a :

$$C^*(\underline{G},\underline{F}) = \Gamma(\underline{C}^*(\underline{G},\underline{F})) \quad .$$

On note $H^n(\underline{G},\underline{F})$ (resp. $\underline{H}^n(\underline{G},\underline{F})$) les groupes (resp. les $\widehat{\underline{C}}$-groupes) d'homologie du complexe $C^*(\underline{G},\underline{F})$ (resp. $\underline{C}^*(\underline{G},\underline{F})$) .

On a en particulier

$$\underline{H}^o(\underline{G},\underline{F}) = \underline{F}^{\underline{G}} \quad , \qquad H^o(\underline{G},\underline{F}) = \Gamma(\underline{F}^{\underline{G}}) \quad .$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que les foncteurs $\underline{H}^n$ (resp. H^n) sont bien les foncteurs dérivés de $\underline{H}^o$ (resp. H^o) . Soit $\underline{P}$ un $\underline{\underline{O}}$-module ; considérons l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{P})$ de $\widehat{\underline{C}}$. On peut le munir d'une structure de $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-module en faisant opérer $\underline{G}$ sur le premier facteur et $\underline{\underline{O}}$ sur le second .

De manière précise on a $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{P})(S) = \mathrm{Hom}_S(\underline{G}_S,\underline{P}_S)$, et on fait opérer $g \in \underline{G}(S)$ et $a \in \underline{\underline{O}}(S)$ par les formules :

$$(g\, f)(x) = f\,(xg) \quad , \quad (a\, f)(x) = a\, f(x) \quad , \quad x \in \underline{G}(S') \ .$$

Soit maintenant $\underline{F}$ un $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-module ; notons $E(\underline{F})$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{F})$ muni de sa structure de $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-module précédente . Il existe un morphisme de $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-module

$$\mu_{\underline{F}} : \ \underline{F} \longrightarrow E(\underline{F})$$

défini de la manière suivante : à toute flèche $S' \rightarrow S''$ de $\underline{C}$, il faut associer de manière fonctorielle une application de $\underline{F}(S')$ dans l'ensemble $\mathrm{Hom}(\underline{G}(S'),\underline{F}(S'))$; pour ce faire , on associe à tout $f \in \underline{F}(S')$ l'application k_f définie par $k_f(g) = g\, f$. On vérifie aussitôt que $\mu_{\underline{F}}$ est bien compatible avec les structures de $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-modules et que c'est même un <u>monomorphisme</u> .

Proposition 5.2.1. Supposons G représentable. Les foncteurs $H^n(\underline{G},\ )$ (resp. $\underline{H}^n(\underline{G},\ )$) sont les foncteurs dérivés du foncteur exact à gauche $H^o(\underline{G},\ )$ (resp. $\underline{H}^o(\underline{G},\ )$) sur la catégorie des $\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-modules.

En vertu des résultats généraux bien connus, il suffit de vérifier que les $H^n(\underline{G},\ )$ (resp. $\underline{H}^n(\underline{G},\ )$) forment un foncteur cohomologique effaçable en dimensions > 0. Or $\underline{C}^n(\underline{G},\ )$ considéré comme foncteur sur $(\underline{G}$-$\underline{\underline{O}}$-Mod.) à valeurs dans la catégorie des complexes de ($\underline{\underline{O}}$-Mod) est exact. Ceci montre que les $\underline{H}^n(\underline{G},\ )$ forment bien un foncteur cohomologique. Comme le foncteur Γ est exact, il en est de même pour les $H^n(\underline{G},\ )$. Il nous suffira maintenant de démontrer :

Lemme 5.2.2. Pour tout $P \in Ob(\underline{\underline{O}}$-Mod.), on a :

$$H^n(\underline{G}, \underline{Hom}(\underline{G},\underline{P})) = 0 \quad , \quad \underline{H}^n(\underline{G},\underline{Hom}(\underline{G},\underline{P})) = 0 \ , \ n > 0 \ .$$

Il nous suffit de démontrer que $\underline{C}^*(\underline{G},\underline{Hom}(\underline{G},\underline{P}))$ et $C^*(\underline{G},\underline{Hom}(\underline{G},\underline{P}))$ sont homotopiquement triviaux en dimensions > 0. Il suffit même de le faire pour le second, le résultat correspondant pour le premier s'en déduisant par changement de base. Or on a l'opérateur d'homotopie suivant :

$$s\, f\, (g_1,g_2\ ,\dots\ g_n)(g) \;=\; f\ (\ g\ ,\ g_o,g_1,\dots,g_n)(e)$$

où e désigne l'élément unité de $G(S)$ et f une (n+1)-cochaine de $\underline{G}(S)$ dans $\underline{Hom}(\underline{G},\underline{P})(S)$.

5.3. Cohomologie des G-$\underline{O}_S$-modules.

Soient S un préschéma, G un S-groupe affine sur S et F un G-$\underline{O}_S$-module quasi-cohérent. On définit les groupes de cohomologie de G à valeurs dans F par

$$H^n(G,F) = H^n(h_G,W(F)) \ .$$

(pour les notations, cf. 4.6).

Vu la proposition 4.6.4 , cette cohomologie se calcule de la façon suivante : $H^n(G,F)$ est le n-ième groupe d'homologie du complexe $C^n(G,F)$ défini comme suit :

$$C^n(G,F) = \Gamma(S, \underline{C}^n(G,F)) \quad , \quad \underline{C}^n(G,F) = F \otimes \underbrace{\underline{A}(G) \otimes \ldots \otimes \underline{A}(G)}_{n \text{ fois}} .$$

Si f (resp. a_i) est une section de F (resp. de $\underline{A}(G)$) sur un ouvert de S, on a

$$\begin{aligned} \partial(f \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = {} & \mu_F(f) \otimes a_1 \otimes a_2 \ldots \otimes a_n \\ & + \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i f \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes \Delta a_i \otimes \ldots \otimes a_n \\ & + (-1)^{n+1} f \otimes a_1 \otimes a_2 \ldots \otimes a_n \otimes 1 , \end{aligned}$$

où $\mu_F : F \longrightarrow F \otimes \underline{A}(G)$ et $\Delta : \underline{A}(G) \longrightarrow \underline{A}(G) \otimes \underline{A}(G)$ décrivent la structure de comodule de F . Remarquons en passant que la cohomologie de G à valeurs dans F ne dépend donc que de la structure de comodule de F , et en particulier que de la structure de S-monoïde de G .

On a en particulier

$$H^0(G,F) = \Gamma(S, F^G) \quad ,$$

où F^G , le faisceau des invariants de F , est défini comme le faisceau dont les sections sur l'ouvert U de S sont des sections de F sur U dont l'image inverse dans tout S' au-dessus de U est invariante par $G(S')$.

<u>Théorème</u> 5.3.1. <u>Soient</u> S <u>un schéma affine</u> , G <u>un</u> S-<u>groupe</u> affine <u>et plat sur</u> S . <u>Les foncteurs</u> $H^n(G,\ )$ <u>sont les</u> foncteurs dérivés <u>de</u> $H^o(G,\ )$ <u>sur la catégorie des</u> G-$\underline{O}_S$-<u>modules quasi-cohérents</u>.

Comme S est affine, et comme G est affine et plat, on voit aussitôt que $C^*(G,\ )$ est bien un foncteur exact sur la catégorie précédente.

Il ne reste plus qu'à construire pour tout F un monomorphisme de F dans un G-$\underline{O}_S$-module E(F) tel que $H^n(G,E(F)) = 0$, $n > 0$. Or considérons $E(F) = \underline{A}(G) \otimes F$ muni de la structure de G-$\underline{O}_S$-module définie par celle de $\underline{A}(G)$. Considérons l'homomorphisme canonique $\mu_F : F \longrightarrow E(F)$; l'axiome (CM 1) de 4.7.2 dit exactement que μ_F est un morphisme de G-$\underline{O}_S$-modules. Il suffit de remarquer maintenant que l'image de μ_F par le foncteur W n'est autre que l'effacement $\mu_{W(F)} : W(F) \longrightarrow E(W(F))$ défini dans 5.2 (comparer avec le corollaire 1 à la proposition 4.6.4).

Remarquons maintenant que l'axiome (CM 2) montre que considéré comme $\underline{O}_S$-module , F est un facteur direct de E(F) . Cela entraîne :

<u>Proposition</u> 5.3.2. <u>Soient</u> S <u>un schéma affine et</u> G <u>un</u> S-<u>groupe</u> affine <u>et plat</u>. <u>Supposons que toute suite exacte de</u> G-$\underline{O}_S$-<u>modules quasi-cohérents</u> $0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$ <u>qui se scinde comme suite de</u> $\underline{O}_S$-<u>modules se scinde également comme suite de</u> G-$\underline{O}_S$-<u>modules</u>. <u>Les foncteurs</u> $H^n(G,\ )$, $n > 0$, <u>sont nuls</u> (<u>ou ce qui revient au même</u>, <u>le foncteur</u> $H^o(G,\ )$ <u>est exact</u>).

En effet, d'après l'hypothèse, la suite $0 \to F \to E(F) \to E(F)/F \to 0$ est scindée ; F est donc facteur direct dans E(F) , or la cohomologie de ce dernier est nulle.

On tire immédiatement de là et de la proposition 4.7.4:

Théorème 5.3.3. Soient S un schéma affine et G un S-groupe diagonalisable. Pour tout G-$\underline{O}_S$-module quasi-cohérent F, on a $H^n(G,F) = 0$, $n > 0$.

Remarque. La proposition 5.3.2 reste valable, lorsque G n'est pas nécessairement plat sur S ; la démonstration fait alors appel à la cohomologie relative.

EXPOSÉ II

FIBRÉS TANGENTS - ALGEBRES DE LIE

par M. DEMAZURE

Nous nous proposons dans cet exposé de construire l'analogue en théorie des schémas des fibrés tangents et algèbres de Lie de la théorie classique. Il sera cependant utile de ne pas se restreindre aux préschémas proprement dits, mais de s'intéresser aux foncteurs sur la catégorie des préschémas qui ne sont pas nécessairement représentables (par exemple foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Norm}}$, etc...). Comme il a été annoncé dans l'exposé précédent I 1.1, nous identifierons un préschéma avec le foncteur qui lui est associé.

D'un autre côté, les constructions exposées ci-après dépassent le cadre de la théorie des schémas. Elles sont également valables, par exemple, en théorie des espaces analytiques avec éléments nilpotents, modulo quelques modifications de détail.

Avant de commencer cette construction, il nous faut poser quelques définitions générales qui complètent celles de I 1.7.

1. Les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)$.

Reprenons les notations de I 1.1. On identifie la catégorie $\underline{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\underline{C}} = \underline{\mathrm{Hom}}(C^{\circ},(\mathrm{Ens}))$ (en particulier on supprime les soulignements qui nous permettaient de distinguer graphiquement un objet de $\widehat{C}$ d'un objet de $\underline{C}$) . Considérons la situation suivante : quatre objets de $\widehat{\underline{C}}$, notés S, X,Y, Z , le premier étant en fait un objet de $\underline{C}$, X et Y au-dessus de Z ,

Z au-dessus de S :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "p_X"'] & & Y \arrow[dl, "p_Y"] \\ & Z \arrow[d] & \\ & S & \end{tikzcd} .$$

Définissons alors un objet de $\widehat{\underline{C}/_S}$, noté $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)$ par

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)\ (S') = \mathrm{Hom}_{Z_{S'}}(X_{S'}, Y_{S'}) .$$

On voit aussitôt que $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)$ n'est autre que le sous-objet de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ formé des morphismes compatibles avec p_X et p_Y , c'est-à-dire le noyau du couple de morphismes

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y) \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Z)$$

définis, le premier par la composition avec p_Y , le second comme étant le morphisme constant dont "l'image" est p_X . Il résulte de la définition que l'on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(S', \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)) &\simeq \mathrm{Hom}_Z(X \times_S S' , Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_Z(Z \times_S S' , \underline{\mathrm{Hom}}_Z(X,Y)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_Z(X , \underline{\mathrm{Hom}}_Z(Z \times_S S', Y)) . \end{aligned}$$

Notons en passant que les deux derniers isomorphismes se prolongent au cas où S' n'est plus dans $\underline{C}$ par le procédé indiqué en 1.7.1.

Signalons deux cas particuliers de la définition . Si $Z = S$, on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S/S}(X,Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y) .$$

D'autre part, on pose

$$\prod_{Z/S} Y = \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(Z,Y) .$$

on a donc par définition

$$\prod_{Z/S} Y \quad (S') \simeq \Gamma(Y_{S'}/Z_{S'}) \quad .$$

Notons également que l'on a un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}(X, Y \times_Z X) = \prod_{X/S} Y \times_Z X \quad ,$$

qui donne en particulier pour $Z = S$ un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y) \simeq \prod_{X/S} Y_X \quad .$$

Une dernière remarque : le foncteur $Y \rightsquigarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)$ commute au produit au sens suivant : on a un isomorphisme fonctoriel

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X , Y \times_Z Y') \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y) \times_S \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y') \quad .$$

Il en résulte que si Y est un Z-groupe , resp. un Z-anneau,... alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)$ est un S-groupe, resp. un S-anneau,... .

2. Les préschémas $I_S(M)$.

Définition 2.1. Soient S un préschéma et M un $\underline{O}_S$-module quasi-cohérent. On note $D_{\underline{O}_S}(M)$ la $\underline{O}_S$-algèbre quasi-cohérente $\underline{O}_S \oplus M$ (où M est considéré comme un idéal de carré nul) . On note $I_S(M)$ le S-schéma $\mathrm{Spec}\, D_{\underline{O}_S}(M)$. En particulier on note $D_{\underline{O}_S} = D_{\underline{O}_S}(\underline{O}_S)$, $I_S = I_S(\underline{O}_S)$ et on les nomme respectivement algèbre des nombres duaux sur S et schéma des nombres duaux sur S.

Alors $M \longmapsto I_S(M)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des $\underline{O}_S$-modules quasi-cohérents dans celle des S-préschémas . En particulier les morphismes $0 \longrightarrow M$ et $M \longrightarrow 0$ définissent respectivement le morphisme structural $I_S(M) \longrightarrow I_S(0) = S$ et une section ε_M de celui-ci que l'on appelle section zéro .

D'autre part $\underline{\underline{O}}(S) = \Gamma(S,\underline{O}_S)$ est un <u>ensemble d'opérateurs</u> du module M , donc du S-préschéma $I_S(M)$ et les opérations de $\underline{\underline{O}}(S)$ commutent aux S-morphismes $I_S(M) \longrightarrow I_S(M')$ provenant de morphismes $M' \longrightarrow M$ par la fonctorialité précédente; en particulier ces opérations conservent la section zéro de $I_S(M)$.

La formation des $I_S(M)$ <u>commute à l'extension de la base</u> : on a des isomorphismes canoniques

$$(I_S(M))_{S'} \simeq I_{S'}(M \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{S'}) \ .$$

Soient maintenant M et N deux $\underline{O}_S$-modules quasi-cohérents . Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \oplus N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M \arrow[dr] & & N \arrow[dl] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

définit un diagramme commutatif de S-schémas

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & I_S(M \oplus N) & \\ I_S(M) \arrow[ur] & & I_S(N) \arrow[ul] \\ & S \arrow[ul, "\varepsilon_M"] \arrow[ur, "\varepsilon_N"'] & \end{tikzcd} \ .$$

<u>Proposition</u> 2.2. <u>Pour tout</u> S-<u>préschéma</u> X , <u>le diagramme de foncteurs au-dessus de</u> S <u>obtenu en appliquant le foncteur</u> $\underline{\mathrm{Hom}}_S(-,X)$ <u>au diagramme</u> (*) <u>est cartésien</u> :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(M \oplus N),X) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(M),X) \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(N),X) \arrow[dl] \\ & \underline{\mathrm{Hom}}_S(S,X) = X & \end{tikzcd} .$$

Il faut vérifier que pour tout $S' \longrightarrow S$, le diagramme d'ensembles obtenu en prenant la valeur des foncteurs sur S' est cartésien . Comme la formation de $I_S(P)$ commute à l'extension de la base au sens explicité plus haut, il suffit de le faire pour $S' = S$, donc de vérifier que le diagramme d'ensembles suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X(\ I_S(M \oplus N)\ ) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X(\ I_S(M)\ ) \arrow[dr, "X(\mathcal{E}_M)"'] & & X(\ I_S(N)\ ) \arrow[dl, "X(\mathcal{E}_N)"] \\ & X(S) & \end{tikzcd} .$$

Or, si $x \in X(S)$, il résulte de (SGA 1 III 5.1) que $X(\mathcal{E}_M)^{-1}(x)$ est isomorphe, fonctoriellement en M, à

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}\ (\ x^*\ (\underline{\Omega}^1_{X/S}),\ M\ )\quad ,$$

où $\underline{\Omega}^1_{X/S}$ désigne le faisceau des différentielles relatives de X par rapport à S . Or ce dernier foncteur (en M) transforme évidemment une somme directe de $\underline{O}_S$-modules en le produit des ensembles correspondant, d'où le résultat .

Corollaire . Si M est libre de type fini, le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(M),X)$ est isomorphe (comme foncteur au-dessus de X) à un produit fini (au-dessus de X) de copies de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S\ ,X)$.

__Nota__ . Il résulte de la démonstration de la proposition que $\underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S, X)$ est isomorphe comme X-foncteur à $V(\underline{\Omega}^1_{X/S})$ (I 4.6.1) donc __représentable__ par le fibré vectoriel $\underline{\underline{V}}(\underline{\Omega}^1_{X/S})$.

3. __Le fibré tangent, la condition__ (E) .

Dans ce paragraphe, sauf notification contraire, les lettres M, M', N ... désigneront toujours des __$\underline{O}_S$-modules libres de type fini__ (c'est-à-dire isomorphes à une somme directe finie de copies de $\underline{O}_S$) .

Nous utiliserons systématiquement les identifications justifiées dans l'exposé I ; c'est ainsi que nous dirons "foncteur au-dessus de S" pour désigner indifféremment un foncteur muni d'un morphisme dans S ($=h_S$) ou un foncteur sur la catégorie des objets au-dessus de S . On dira de même "foncteur en groupes au-dessus de S " ...

__Définition__ 3.1. __Soient__ S __un préschéma et__ M __un__ __$\underline{O}_S$-module libre de type fini__ . __Soit__ X __un foncteur au-dessus de__ S . __On appelle fibré tangent à__ X __au-dessus de__ S __relativement au__ __$\underline{O}_S$-module__ M __et on note__ $T_{X/S}(M)$ __le__ S-__foncteur__

$$T_{X/S}(M) = \underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(M), X) .$$

__En particulier, on appelle__ fibré tangent à X au-dessus de S __et on note__ $T_{X/S}$ __le foncteur__

$$T_{X/S} = T_{X/S}(\underline{O}_S) = \underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S, X) .$$

Alors $M \mapsto T_{X/S}(M)$ est un __foncteur covariant__ de la catégorie des $\underline{O}_S$-modules libres de type fini dans la catégorie des S-foncteurs . En particulier les morphismes $0 \longrightarrow M$ et $M \longrightarrow 0$ définissent respectivement un S-morphisme

$$T_{X/S}(M) \longrightarrow T_{X/S}(0) \simeq X$$

et une section de celui-ci appelée section zéro .

Il résulte de ceci que $M \longmapsto T_{X/S}(M)$ est un foncteur covariant de la catégorie des $\underline{O}_S$-modules libres de type fini dans celle des foncteurs au-dessus de X . En particulier $\underline{\underline{O}}(S)$ est un ensemble d'opérateurs du X-foncteur $T_{X/S}(M)$ qui respecte "la fonctorialité en M " .

Définition 3.2. Soit $u \in X(S) = \mathrm{Hom}_S(S,X) = \Gamma(X/S)$. On appelle espace tangent à X au-dessus de S au point u relativement à M , et on note $L^u_{X/S}(M)$, le S-foncteur obtenu à partir du X-foncteur $T_{X/S}(M)$ par image réciproque par le morphisme $u : S \to X$.

$$\begin{tikzcd} L^u_{X/S}(M) \arrow[r] \arrow[d] & T_{X/S}(M) \arrow[d] \\ S \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}$$

En particulier $L^u_{X/S}(\underline{O}_S)$ est noté $L^u_{X/S}$. C'est l'espace tangent à X au-dessus de S au point u .

Notons immédiatement la

Proposition 3.3. Si X est représentable par un S-préschéma noté $\widetilde{X}$, alors $T_{X/S}(M)$ et $L^u_{X/S}(M)$ sont représentables . En particulier $T_{X/S}$ et $L^u_{X/S}$ sont représentables par des fibrés vectoriels sur $\widetilde{X}$ et sur S qui sont respectivement $\underline{\underline{V}}(\Omega^1_{\widetilde{X}/S})$ et $\underline{\underline{V}}(u^* (\Omega^1_{\widetilde{X}/S}))$.

Il suffit évidemment de démontrer la proposition pour $T_{X/S}(M)$, les résultats analogues pour $L^u_{X/S}(M)$ s'en déduisant par image réciproque . D'après 2.2 , corollaire, il suffit même de le faire pour $T_{X/S}$, et en ce cas, elle n'est autre que la remarque signalée en note après 2.2.

Il résulte de cette proposition une description particulièrement simple du fibré vectoriel représentant $L^u_{X/S}$: l'image de la section u de X

sur S est localement fermée, donc définie par un idéal quasi-cohérent $\underline{m}$ d'un préschéma induit sur un ouvert de X. Le quotient $\underline{m}/\underline{m}^2$ peut être considéré comme un module quasi-cohérent sur S. C'est celui-ci qui définit le fibré vectoriel cherché. Soit par exemple X un préschéma algébrique sur un corps k et u un point de X rationnel sur k. Alors $L^u_{X/k} = \underline{\underline{V}}(t)$ où t est le k-espace vectoriel tangent de Zariski de l'anneau local $\underline{O}_{X,u}$.

Cette parenthèse fermée, revenons à la situation générale. Remarquons d'abord que $L^u_{X/S}(M)$ est un <u>foncteur covariant de la catégorie des $\underline{O}_S$-modules libres de type fini dans celle des foncteurs au-dessus de</u> S. En particulier $\underline{\underline{O}}(S)$ est un <u>ensemble d'opérateurs</u> du S-foncteur $L^u_{X/S}(M)$ qui respecte la fonctorialité en M.

<u>Proposition</u> 3.4. <u>La formation de</u> $T_{X/S}(M)$ <u>et</u> $L_{X/S}(M)$ <u>commute à l'extension de la base</u> : <u>soit</u> S' <u>un préschéma au-dessus de</u> S, <u>on a des isomorphismes fonctoriels en</u> M

$$T_{X_{S'}/S'}(M \otimes \underline{O}_{S'}) \xrightarrow{\sim} (T_{X/S}(M))_{S'} \quad ,$$

$$L^{u'}_{X_{S'}/S'}(M \otimes \underline{O}_{S'}) \xrightarrow{\sim} (L^u_{X/S}(M))_{S'} \quad , \qquad u' = (u)_{S'} \quad .$$

Cela résulte immédiatement du fait que les <u>Hom</u> commutent à l'extension de la base.

<u>Corollaire</u>. <u>Le</u> X-<u>foncteur</u> $T_{X/S}(M)$ (<u>resp</u>. <u>le</u> S-<u>foncteur</u> $L^u_{X/S}(M)$) <u>est muni naturellement d'une structure d</u>'objet à opérateurs $\underline{\underline{O}}_X$ (resp. $\underline{\underline{O}}_S$), <u>cette structure étant fonctorielle en</u> M.

Montrons-le d'abord pour $L^u_{X/S}(M)$. Pour chaque S' au-dessus de S, $\underline{\underline{O}}(S')$ opère sur $M \otimes \underline{O}_{S'}$, donc sur $L^{u'}_{X_{S'}/S'}(M \otimes \underline{O}_{S'}) = L^u_{X/S}(M)_S$; or on vérifie que cette opération est fonctorielle en S' ; elle munit donc comme annoncé $L^u_{X/S}(M)$ d'une structure de foncteur à opérateurs $\underline{\underline{O}}_S$.

Pour $T_{X/S}(M)$ c'est un peu plus compliqué. Il faut munir chaque $(T_{X/S})_{X'}(X')$ (X' au-dessus de X) d'une structure d'ensemble à ensemble d'opérateurs $\underline{O}(X')$ de manière fonctorielle en X'. Pour cela on construit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & T_{X_{X'}/X'}(M) \arrow[dl] \arrow[dd] & \\
T_{X/S}(M) \arrow[dd] & & (T_{X/S}(M))_{X'} \arrow[ll] \arrow[ul] \arrow[dd] \\
 & X_{X'} \arrow[dl] & \\
X \arrow[dr] & & X' \arrow[ll, "f"] \arrow[ul, "f'"'] \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

où $X_{X'}$ dénote $X \times_S X'$ et f' la section de $X_{X'}$ sur X' définie par $f : X' \longrightarrow X$.

Ce diagramme montre que $(T_{X/S}(M))_{X'}(X')$ s'identifie à $L^{f'}_{X_{X'}/X'}(X')$ où opère $\underline{O}(X')$. Il ne reste plus qu'à vérifier que cette construction est fonctorielle en X', ce qui se fait sans difficulté.

Les isomorphismes de la proposition précédente sont alors par construction des isomorphismes pour les structures de $\underline{O}_{X_{S'}}$-objets, resp. $\underline{O}_{S'}$-objets.

__Définition__ 3.5. __Soient__ S __un préschéma et__ X __un__ S-__foncteur__. __On dit que__ X __vérifie la condition__ (E) __relativement à__ S __si, pour tout__ S' __au-dessus de__ S __et tous__ $\underline{O}_{S'}$-__Modules libres de type fini__ M __et__ N, __le diagramme d'ensembles__

$$\begin{tikzcd}
 & X(I_{S'}(M \oplus N)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X(I_{S'}(M)) \arrow[dr] & & X(I_{S'}(N)) \arrow[dl] \\
 & X(S') &
\end{tikzcd},$$

obtenu en appliquant X au diagramme (*) défini dans 2.1, est cartésien.

3.5.1. Il revient au même de dire que le foncteur $M \mapsto T_{X/S}(M)$ transforme sommes directes de $\underline{\underline{O}}_S$-modules libres de type fini en produits de X-foncteurs. La proposition 2.2 montre que tout foncteur représentable vérifie la condition (E). Si X vérifie la condition (E) par rapport à S, le foncteur $M \mapsto T_{X/S}(M)$ commutant au produit transforme groupes en groupes. En particulier $T_{X/S}(M)$ est un X-groupe commutatif. Pour la même raison, $L^u_{X/S}(M)$ est un S-groupe commutatif.

Proposition 3.6. Si X/S vérifie (E), la structure de groupe abélien sur $T_{X/S}(M)$ (resp. $L^u_{X/S}(M)$) et l'opération de $\underline{\underline{O}}_X$ (resp. $\underline{\underline{O}}_S$) munissent $T_{X/S}(M)$ (resp. $L^u_{X/S}(M)$) d'une structure de $\underline{\underline{O}}_X$-module (resp. $\underline{\underline{O}}_S$-module).

L'opération de $\underline{\underline{O}}_X$ (resp. $\underline{\underline{O}}_S$) est fonctorielle en M ; elle respecte donc la structure de groupe abélien qui est déduite par fonctorialité de celle de M.

Remarque. Si X est représentable, auquel cas, d'une part il vérifie (E), d'autre part $T_{X/S}$ et $L^u_{X/S}$ sont représentables par des fibrés vectoriels, les lois précédentes sont les mêmes que celles qui se déduisent des structures de fibré vectoriel (cf. I 4.6).

Proposition 3.4. bis. Si X vérifie la condition (E) par rapport à S, alors $X_{S'}$ vérifie la condition (E) par rapport à S' et les isomorphismes de 3.4 respectent les structures de $\underline{\underline{O}}_{X_{S'}}$-modules, resp. de $\underline{\underline{O}}_{S'}$-modules.

Sans commentaires.

Abréviation : au lieu de dire " X vérifie la condition (E) par rapport à S ", on dira parfois "X/S vérifie la condition (E)".

Proposition 3.7. Les foncteurs $T_{X/S}(M)$ et $L^u_{X/S}(M)$ sont fonctoriels en X : si $f : X \to X'$ est un S-morphisme, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} T_{X/S}(M) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d] & T_{X'/S}(M) \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X' \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} L^u_{X/S}(M) \arrow[rr, "L(f)"] \arrow[dr] & & L^{fou}_{X/S}(M) \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} \quad .$$

Les morphismes $T(f)$ et $L(f)$ se déduisent immédiatement des définitions. La commutativité des diagrammes résulte alors de la fonctorialité de ces morphismes par rapport à M et du fait que $T_{X/S}(0) = X$.

Remarque : le carré ci-dessus est cartésien lorsque f est une immersion ouverte , plus généralement lorsque f est étale . Il définit en général un morphisme de X-foncteurs

$$\begin{tikzcd} T_{X/S}(M) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (T_{X'/S}(M))_X \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \quad .$$

Proposition 3.7. bis . Si X et X' vérifient (E) par rapport à S , alors $T_{X/S}(M) \longrightarrow (T_{X'/S}(M))_X$ (resp. $L^u_{X/S}(M) \longrightarrow L^{fou}_{X'/S}(M)$) est un morphisme de $\underline{O}_X$-modules (resp. de $\underline{O}_S$-modules) .

Résulte de la proposition 3.7 par fonctorialité en M.

Proposition 3.8. Soient X et Y deux foncteurs au-dessus de S . On a des isomorphismes fonctoriels en M :

$$T_{X \times_S Y/S}(M) \xrightarrow{\sim} T_{X/S}(M) \times_S T_{Y/S}(M) \quad ,$$

$$L^{(u,v)}_{X \times_S Y/S}(M) \xrightarrow{\sim} L^u_{X/S}(M) \times_S L^v_{Y/S}(M) \quad .$$

Evident sur les définitions.

Remarquons que le premier isomorphisme peut aussi s'interpréter comme un isomorphisme de XxY-foncteurs

$$T_{X\times Y/S}(M) \xrightarrow{\sim} (T_{X/S}(M) \times_X (X\times Y)) \times_{X\times Y} (T_{Y/S}(M) \times_Y (X\times Y)) \quad .$$

<u>Corollaire</u> . <u>Si</u> X/S <u>est muni d'une structure algébrique définie par produits cartésiens finis, alors</u> $T_{X/S}(M)$ <u>est muni d'une structure de même espèce et la projection</u> $T_{X/S}(M) \longrightarrow X$ <u>est un morphisme de cette espèce de structure</u>

<u>Proposition</u> 3.8.bis . <u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>satisfont à la condition</u> (E) <u>par rapport à</u> S , <u>alors</u> $X \times_S Y$ <u>y satisfait aussi et les isomorphismes de</u> 3.8 <u>respectent les structures de modules</u> .

Pour énoncer commodément les propriétés qui vont suivre, introduisons la terminologie suivante : un H-<u>ensemble</u> est un ensemble muni d'une loi de composition à unité bilatère; un H-<u>objet</u> dans une catégorie <u>C</u> se définit de la manière habituelle : c'est donc un objet X de <u>C</u> , muni d'un morphisme $X \times X \longrightarrow X$ tel qu'il existe une section de X (au-dessus de l'objet final) possédant les propriétés d'une unité bilatère. Tout <u>C</u>-monoïde, en particulier tout <u>C</u>-groupe est donc un <u>C</u>-H-objet . En particulier, un H-objet de la catégorie des foncteurs au-dessus du préschéma S sera appelé S-H-<u>foncteur</u>. Si X est un S-H-foncteur, alors $T_{X/S}(M)$ est un S-H-foncteur , et si on note

$$\mathrm{Lie}(X/S,M) = L^e_{X/S}(M) \quad ,$$

$$\mathrm{Lie}(X/S) = \mathrm{Lie}(X/S,\underline{O}_S) \quad ,$$

où e désigne la section unité de X , alors Lie(X/S,M) est lui aussi un S-H-foncteur .

<u>Proposition</u> 3.9. <u>Soit</u> X <u>un</u> S-H-<u>foncteur vérifiant</u> (E) <u>par rapport à</u> S . <u>La structure de</u> S-H-<u>foncteur de</u> Lie(X/S,M) <u>provenant de celle de</u> X <u>coïncide avec la structure de</u> S-<u>groupe définie en</u> 3.5.1.

Il résulte de ce qu'on a dit plus haut que Lie(X/S,M) est un H-objet dans la catégorie des $\underline{\underline{O}}_S$-modules . La proposition résultera alors du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 3.10. <u>Soit</u> <u>C</u> <u>une catégorie</u> . <u>Soit</u> G <u>un</u> H-<u>objet dans la catégorie des</u> <u>C</u>-H-<u>objets</u> ; G <u>est donc un</u> <u>C</u>-H-<u>objet</u> (dont nous noterons la loi de composition $f : G \times G \longrightarrow G$) <u>muni d'un morphisme de</u> <u>C</u>-H-<u>objets</u> $h : G \times G \longrightarrow G$. <u>Alors</u> $f = h$ <u>et</u> f <u>est commutative</u> .

En prenant les valeurs des foncteurs sur un argument variable, on se ramène à la manière habituelle à vérifier le lemme lorsque <u>C</u> est la catégorie des ensembles . On a donc un ensemble G et deux applications $f, h : G \times G \longrightarrow G$ telles que $h(f(x,y),f(z,t)) = f(h(x,z),h(y,t))$. On a d'autre part deux éléments de G , soient e et u , avec $f(e,x) = f(x,e) = x$, $h(u,x) = h(x,u) = x$. On voit d'abord que

$$h(f(u,y),f(x,u)) = h(f(x,u),f(u,y)) = f(x,y) \quad .$$

En particulier , pour $y = e$, on obtient

$$x = f(x,e) = h(f(u,e),f(x,u)) = h(u,f(x,u)) = f(x,u) \quad ,$$

d'où en reportant dans l'égalité originelle

$$f(x,y) = h(x,y) = h(y,x) \quad .$$

<u>Corollaire</u> 1 . <u>Si</u> X <u>est un</u> S-H-<u>foncteur vérifiant</u> (E) <u>par rapport à</u> S , <u>tout élément de</u> $X(I_S(M))$ <u>qui se projette sur l'élément unité de</u> X(S) <u>est inversible</u>.

<u>Corollaire</u> 2 . <u>Si</u> X <u>est un</u> S-<u>monoïde vérifiant</u> (E) <u>par rapport à</u> S , <u>un élément de</u> $X(I_S(M))$ <u>est inversible si et seulement si son image dans</u> X(S) <u>l'est</u>.

Corollaire 3 . Si X est un S-groupe vérifiant (E), par rapport à S les deux lois de S-groupe sur Lie(X/S,M) coïncident .

Avant de tirer d'autres conséquences de la proposition précédente, démontrons un autre résultat de fonctorialité :

Proposition 3.11. Dans la situation du paragraphe 1 , on a un isomorphisme fonctoriel en M

$$T_{\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,\ T_{Y/Z}(M)) \ .$$

Cela résulte immédiatement des définitions, compte tenu de l'isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(T,\ \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)\ ) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,\ \underline{\mathrm{Hom}}_Z(Z\times_S T,Y)$$

Corollaire 1 . Si Y/Z vérifie (E) , alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)/S$ vérifie (E) et l'isomorphisme de 3.11 respecte les structures de modules .

Corollaire 2 . On a un isomorphisme fonctoriel en M

$$T_{\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,\ T_{Y/S}(M)) \quad ;$$

si Y/S vérifie (E) , alors $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)/S$ vérifie (E) et l'isomorphisme précédent respecte les structures de $\underline{\underline{O}}$-modules au-dessus de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$.

Corollaire 3 . On a un isomorphisme fonctoriel en M

$$L^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{Y/S}(X,\ T_{Y/S}(M)\ )$$

où X est considéré comme foncteur au-dessus de Y par l'intermédiaire de $u: X \to Y$.

Corollaire 4 . On a un isomorphisme fonctoriel en M

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{End}}_S(X)/S,M) \xrightarrow{\sim} \prod_{X/S} T_{X/S}(M) .$$

Nous allons maintenant interpréter géométriquement la définition du fibré tangent . Soit T un préschéma au-dessus de S ; on a des isomorphismes fonctoriels en M

$$T_{X/S}(M)(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(T,T_{X/S}(M)) = \mathrm{Hom}_S(T,\underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(M),X))$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(I_S(M),\underline{\mathrm{Hom}}(T,X)) = T_{\underline{\mathrm{Hom}}_S(T,X)/S}(M)(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{I_S(M)}(T_{I_S(M)},X_{I_S(M)})$$

En particulier le morphisme $M \longrightarrow 0$ donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_S(T,T_{X/S}(M)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{I_S(M)}(T_{I_S(M)},X_{I_S(M)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_S(T,X) & \xrightarrow{\text{identité}} & \mathrm{Hom}_S(T,X)
\end{array}$$

où la première flèche verticale est obtenue par la projection $T_{X/S}(M) \longrightarrow X$, la seconde par le changement de base $S \hookrightarrow I_S(M)$. En conséquence :

Proposition 3.12. Soit T au-dessus de X par $h_o : T \rightarrow X$. L'ensemble $\mathrm{Hom}_X(T,T_{X/S}(M))$ s'identifie à l'ensemble des $I_S(M)$-morphismes de $T_{I_S(M)}$ dans $X_{I_S(M)}$ qui se restreignent à h_o sur $S \subset I_S(M)$.

Corollaire . L'ensemble $\Gamma(T_{X/S}(M)/X)$ s'identifie à l'ensemble des $I_S(M)$-endomorphismes de $X_{I_S(M)}$ qui induisent l'identité sur X .

Remarquons maintenant que ce dernier ensemble s'identifie également par les isomorphismes précédents à $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{End}}_S(X)/S,M)(S)$. Si X/S vérifie (E) , alors $\underline{\mathrm{End}}_S(X)/S$ vérifie (E) (prop. 3.11 , cor. 2) . Appliquant 3.10 , cor. 2 et 3.9 , on en déduit la

Proposition 3.13. *Si X/S vérifie (E) , tout $I_S(M)$-endomorphisme de $X_{I_S(M)}$ qui induit l'identité sur X est un automorphisme . Le groupe $\Gamma(T_{X/S}(M)/X)$ s'identifie au groupe de ces automorphismes .*

Corollaire 1 . *Soit $u : X \to Y$ un S-isomorphisme , Y/S vérifiant (E) . Tout $I_S(M)$-morphisme de $X_{I_S(M)}$ dans $Y_{I_S(M)}$ qui prolonge u est un isomorphisme .*

Corollaire 2 . *Soit $u \in \mathrm{Isom}_S(X,Y)$, Y/S vérifiant (E) . Le monomorphisme $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ induit un isomorphisme*

$$L^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_S(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} L^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)/S}(M)$$

Corollaire 3 . *Soit $u \in \underline{\mathrm{Aut}}_S(X)$, X/S vérifiant (E) . Le monomorphisme $\underline{\mathrm{Aut}}_S(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_S(X)$ induit un isomorphisme $L^u_{\underline{\mathrm{Aut}}_S(X)/S}(M) \xrightarrow{\sim} L^u_{\underline{\mathrm{End}}_S(X)/S}(M)$.*

En particulier, on a

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_S(X)/S,M)(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{End}}_S(X)/S,M)(S) \xrightarrow{\sim} \prod_{X/S}(T_{X/S}(M)).$$

3.14. Supposons pour terminer X représentable. On a vu qu'une section de $T_{X/S}$ au-dessus de X s'identifie à un I_S-automorphisme de X_{I_S} induisant l'identité sur X. Or X_{I_S} et X ont le même espace topologique sous-jacent, les faisceaux d'anneaux correspondants étant $D_{\underline{O}_X}$ et $\underline{O}_X$. Il en résulte aussitôt qu'un automorphisme infinitésimal de X s'identifie à une dérivation du faisceau d'anneaux $\underline{O}_X$ au-dessus du faisceau $\underline{O}_S$. On a donc fabriqué un isomorphisme

$$\Gamma(T_{X/S}/X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\underline{O}_S}(\underline{O}_X)$$

qui, en vertu de 3.13 , respecte les structures de groupes (et même de $\underline{O}(S)$-modules) ce qui redonne l'interprétation classique des champs de vecteurs tangents en termes de dérivations du faisceau structural. Remarquons d'ailleurs que $\Gamma(T_{X/S}/X)$ est égal à $H^0(X, \underline{\mathcal{G}}_{X/S})$ où $\underline{\mathcal{G}}_{X/S}$ est le dual de $\underline{\Omega}^1_{X/S}$.

4. Espace tangent à un groupe . Algèbres de Lie .

4.1. Soit G un foncteur en groupes au-dessus de S . On a vu que $T_{G/S}(M)$ et $\mathrm{Lie}(G/S,M)$ sont dès lors munis de structures de groupes au-dessus de S . On a des morphismes de groupes (3.1)

$$\mathrm{Lie}(G/S,M) \xrightarrow{\ i\ } T_{G/S}(M) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} G \quad ;$$

par définition i est un isomorphisme de $\mathrm{Lie}(G/S)$ sur le noyau de p et s est une section de p . Il résulte alors de I 2.3.7 que cette suite de morphismes permet d'identifier $T_{G/S}(M)$ au produit semi-direct de G par $\mathrm{Lie}(G/S,M)$. L'opération correspondante de G sur $\mathrm{Lie}(G/S,M)$ est notée Ad et appelée <u>représentation adjointe</u> de G ; on a donc par définition

$$\mathrm{Ad}(x)\ X = i^{-1}(s(x)i(X)s(x)^{-1}) \quad , \quad x \in G(S') \ , \quad X \in \mathrm{Lie}(G/S,M)(S') \quad .$$

Si G est commutatif, alors $T_{G/S}(M)$ l'est aussi et $\mathrm{Ad}(x)X = X$.

Si G et H sont deux foncteurs en groupes au-dessus de S et si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes , il s'en déduit par fonctorialité un morphisme de suites exactes compatible avec les sections canoniques :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G/S,M) \arrow[r] \arrow[d, "L(f)"'] & T_{G/S}(M) \arrow[r] \arrow[d, "T(f)"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Lie}(H/S,M) \arrow[r] & T_{H/S}(M) \arrow[r] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \quad ;$$

$L(f)$ que l'on notera également $\mathrm{Lie}(f)$ est le morphisme dérivé de f .

Proposition 4.1.1. Soit $g \in G(S)$. Alors $\mathrm{Ad}(g) : \mathrm{Lie}(G/S,M) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G/S,M)$ est le morphisme dérivé de $\mathrm{Int}(g) : G \longrightarrow G$.

En effet $\mathrm{Ad}(g)X = i^{-1}(\mathrm{Int}(g)i(X))$, ce qui n'est autre que $L(\mathrm{Int}(g))(X)$ par la définition même du morphisme dérivé .

Corollaire . Supposons que G/S vérifie (E) . Alors on sait (3.10 cor.1) que la structure de groupe de $\mathrm{Lie}(G/S,M)$ définie comme plus haut n'est autre que la structure induite par sa structure de $\underline{\underline{O}}_S$-module (définie grâce à (E)) .

Il résulte de la proposition précédente que les $\mathrm{Ad}(g)$ respectent la structure de $\underline{\underline{O}}_S$-module de $\mathrm{Lie}(G/S,M)$:

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(\mathrm{Lie}(G/S,M))$$

autrement dit que Ad est une représentation linéaire de G dans le $\underline{\underline{O}}_S$-module $\mathrm{Lie}(G/S,M)$.

Remarques 1) Pour que G/S vérifie (E) , il faut et il suffit que pour tout couple (M,N) de $\underline{\underline{O}}_S$-modules libres de type fini , le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Lie}(G/S, M \oplus N) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Lie}(G/S,M) \arrow[dr] & & \mathrm{Lie}(G/S,N) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Lie}(G/S,0) = S & \end{tikzcd} ,$$

obtenu en appliquant le foncteur $\mathrm{Lie}(G/S,\ )$ au diagramme (*) de 2.1 , soit cartésien .

2) Si G/S vérifie (E) , le morphisme dérivé de la loi de groupe $\pi : G \times_S G \longrightarrow G$ n'est autre que la loi d'addition dans $\mathrm{Lie}(G/S,M)$.

(Nota : π n'est pas un morphisme de groupes, mais $\pi(e,e) = e$, ce qui suffit pour définir $L(\pi)$ (cf. 3.7)) .

Etudions maintenant l'ensemble $\Gamma(T_{G/S}(M)/G)$. Notons d'abord que l'on a un isomorphisme

$$\Gamma(T_{G/S}(M)/G) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G,\mathrm{Lie}(G/S,M))$$

défini de la manière suivante : à $f : G \longrightarrow \mathrm{Lie}(G/S,M)$, on associe la section $s_f : G \longrightarrow T_{G/S}(M)$ telle que

$$s_f(g) = i(f(g))\ s(g)\ ,\quad g \in G(S'),\ S' \in S\ .$$

Soit h un automorphisme du foncteur G au-dessus de S , ne respectant pas nécessairement la structure de groupe . A toute section t de $T_{G/S}(M)$, on peut associer $h(t)$ définie par transport de structure : c'est par exemple la seule section de $T_{G/S}(M)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{t} & T_{G/S}(M) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(h)} \\ G & \xrightarrow{h(t)} & T_{G/S}(M) \end{array} \quad .$$

En particulier, prenons pour h la translation à droite par un élément x de $G(S)$.

$$h(g) = t_x(g) = g.x \quad , \quad g \in G(S') \quad , \quad S' \to S \quad .$$

On a immédiatement

$$t_x(s_f) = s_{t_x(f)}$$

où $t_x(f)$ désigne le morphisme de G dans $\mathrm{Lie}(G/S,M)$ défini par

$$t_x(f)(g) = f(g.x^{-1}) \quad , \quad g \in G(S') \ , \quad S' \to S \quad .$$

Il en résulte que si l'on fait opérer G par translations à droite dans $\Gamma(T_{G/S}(M)/G)$ et $\mathrm{Hom}(G,\mathrm{Lie}(G/S,M))$, l'isomorphisme défini plus haut respecte les opérations de G. En particulier les sections de $T_{G/S}(M)$ invariantes par translation à droite correspondent dans cet isomorphisme aux morphismes constants de G dans $\mathrm{Lie}(G/S,M)$ (i.e. se factorisant par la projection $G \to S$) ou encore aux éléments de $\mathrm{Lie}(G/S,M)(S)$. En d'autres termes :

Proposition 4.1.2.(*) *L'application $\mathrm{Lie}(G/S,M)(S) \longrightarrow \Gamma(T_{G/S}(M)/G)$ qui associe à $X \in \mathrm{Lie}(G/S,M)(S)$ la section $x \longmapsto X.x$ est un isomorphisme de $\mathrm{Lie}(G/S,M)(S)$ sur la partie de $\Gamma(T_{G/S}(M)/G)$ formée des sections invariantes par translation à droite.*

Compte tenu de 3.12, corollaire, on obtient :

Proposition 4.1.3.(*) *Il existe un isomorphisme fonctoriel en G entre l'ensemble $\mathrm{Lie}(G/S,M)(S)$ et l'ensemble des $I_S(M)$-endomorphismes de $G_{I_S(M)}$ induisant l'identité sur G et commutant aux translations à droite de G.*

Tenant maintenant compte de 3.13 :

Théorème 4.1.4.(*) *Soit G un foncteur en groupes sur S vérifiant (E) par rapport à S. Le groupe $\mathrm{Lie}(G/S,M)(S)$ s'identifie, fonctoriellement en G, au groupe des $I_S(M)$-automorphismes de $G_{I_S(M)}$ induisant l'identité sur G et commutant aux translations à droite.*

On retrouve ainsi (dans le cas $M = \underline{O}_S$) une des définitions classiques de l'algèbre de Lie d'un groupe.

4.2. Avant d'aller plus loin, établissons de nouveaux corollaires à 3.11. On a vu en *loc. cit.* que **l'on a un isomorphisme canonique :**

---

* Les énoncés 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4 s'obtiennent plus simplement en remarquant que les automorphismes de G invariants par translations à droite sont les translations à gauche.

$$L^{u}_{\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{Y/S}(X, T_{Y/S}(M)) \quad ;$$

supposons que Y soit un groupe; on a alors $T_{Y/S}(M) = \mathrm{Lie}(Y/S,M).Y$ $= \mathrm{Lie}(Y/S,M)_Y$; il en résulte un isomorphisme

$$L^{u}_{\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_S(X, \mathrm{Lie}(Y/S,M)) \quad .$$

Proposition 4.2. <u>Soit</u> $u : X \to Y$ <u>un morphisme de</u> S-<u>groupes . On a un isomorphisme</u> <u>fonctoriel</u>

$$L^{u}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{Z}^1_S(X, \mathrm{Lie}(Y/S,M)) \quad .$$

[$\underline{Z}^1_S$ désigne le "foncteur des homomorphismes croisés" défini de manière analogue au foncteur <u>Hom</u>. On fait opérer X sur Lie(Y/S,M) par le morphisme

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\mathrm{ad}} \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\mathrm{Lie}(Y/S,M)) \quad] \ .$$

Ceci résulte de l'isomorphisme

$$L^{u}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{(Y/S)\mathrm{gr.}}(X, \mathrm{Lie}(Y/S,M).Y)$$

et de l'identification bien connue des sections d'un produit semi-direct aux cocycles du quotient dans le noyau (voir par exemple III 1.2.2).

Appliquant 3.10, Corollaire 1, on en **déduit :**

Corollaire 1 . <u>Si</u> Y/S <u>vérifie</u> (E) , <u>on a des isomorphismes fonctoriels</u> :

$$L^{u}_{\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr.}}(X,Y)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{Z}^1_S(X, \mathrm{Lie}(Y/S,M)) \quad .$$

Corollaire 2 . <u>Si</u> X/S vérifie (E) , <u>on a des isomorphismes fonctoriels</u>

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(X)/S,M) \xrightarrow{\sim} \underline{Z}^1_S(X, \mathrm{Lie}(X/S,M)) \quad .$$

Corollaire 3 . Si Y est commutatif, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{L}^{u}\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(X,Y)/S^{(M)} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(X,\mathrm{Lie}(Y/S,M)) .$$

4.3. Considérons maintenant le cas où X et Y sont des $\underline{\underline{O}}_S$-modules. Si Y est un $\underline{\underline{O}}_S$-module , le foncteur $\mathrm{Lie}(Y/S,M)$ est muni d'une structure de $\underline{\underline{O}}_S$-module déduite de celle de Y . Muni de cette structure, on le notera provisoirement $\mathrm{Lie}'(Y/S,M)$.

Lorsque Y/S vérifie (E), on notera toujours $\mathrm{Lie}(Y/S,M)$ le foncteur $\mathrm{Lie}(Y/S,M)$ muni de la structure de $\underline{\underline{O}}_S$-module définie pour tout foncteur vérifiant (E). Nous savons que les structures de groupes abéliens de $\mathrm{Lie}(Y/S,M)$ et $\mathrm{Lie}'(Y/S,M)$ coïncident, mais il n'en est pas de même a priori pour celles de module (voir un contre-exemple au paragraphe 6).

On a comme conséquence immédiate du corollaire précédent:

Proposition 4.3. On a un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{L}^{u}\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(X,Y)/S^{(M)} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(X,\mathrm{Lie}'(Y/S,M)) .$$

Corollaire . Si X/S vérifie (E) , on a des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(X)/S,M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(X,\mathrm{Lie}'(X/S,M)) .$$

Avant de continuer dans cette direction, examinons de plus près les relations entre Y , $\mathrm{Lie}(Y/S)$ et $\mathrm{Lie}'(Y/S)$. Remarquons d'abord que $\mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S,M) = \mathrm{Lie}'(\underline{\underline{O}}_S/S,M) = W(M)$ (I 4.6) et que l'on a donc un isomorphisme canonique

$$d : \underline{\underline{O}}_S \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S) .$$

Soit maintenant F un $\underline{\underline{O}}_S$-module . Pour tout S' au-dessus de S , on a un dihomomorphisme ,

$$F(S) \longrightarrow F(S')$$

$$\underline{\underline{O}}(S) \longrightarrow \underline{\underline{O}}(S'') \qquad ,$$

d'où un morphisme de $\underline{\underline{O}}(S')$-modules

$$F(S) \otimes_{\underline{\underline{O}}(S)} \underline{\underline{O}}(S') \longrightarrow F(S') \ .$$

En particulier, pour $S' = I_S(M)$, on en déduit des morphismes fonctoriels en M

$$F(S) \otimes_{\underline{\underline{O}}(S)} T_{\underline{\underline{O}}_S/S}(M)(S) \longrightarrow T_{F/S}(M)(S) \ ,$$

ce qu'en faisant varier S on pourra noter

$$F \otimes_{\underline{\underline{O}}_S} T_{\underline{\underline{O}}_S/S}(M) \longrightarrow T_{F/S}(M) \ .$$

Ces morphismes sont fonctoriels en M , donc compatibles avec les projections des fibrés tangents sur leurs bases. Ils définissent alors des morphismes

$$F \otimes_{\underline{\underline{O}}_S} \mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S,M) \longrightarrow \mathrm{Lie}(F/S,M) \ .$$

Remarquons que ces derniers morphismes sont fonctoriels en F , et par construction respectent les structures de modules déduites de celle de F (ce que nous avons appelé $\mathrm{Lie}'(F/S,M)$ au second membre). Si F/S vérifie (E) , comme ces morphismes sont également fonctoriels en M , ils respectent également les structures de modules déduites de celle de M à l'aide de la condition (E) , c'est-à-dire celles notées Lie .

Notons enfin que par tensorisation avec $d : \underline{\underline{O}}_S \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S)$, on déduit un morphisme

$$F \xrightarrow{\sim} F \otimes_{\underline{\underline{O}}_S} \mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S) \longrightarrow \mathrm{Lie}(F/S)$$

noté également $d : F \longrightarrow \mathrm{Lie}(F/S)$.

<u>Définition</u> 4.4. <u>On dit que</u> F <u>est un</u> bon-$\underline{\underline{O}}_S$-module <u>si les morphismes</u>

$$F \otimes T_{\underline{\underline{O}}_S/S}(M) \longrightarrow T_{F/S}(M)$$

<u>sont des isomorphismes</u> .

<u>Corollaire</u> : <u>Si</u> F <u>est bon, alors</u>

(i) F/S <u>vérifie</u> (E) ,

(ii) $\mathrm{Lie}(F/S,M) = \mathrm{Lie}'(F/S,M)$,

(iii) $d : F \longrightarrow \mathrm{Lie}(F/S)$ <u>est un isomorphisme de</u> $\underline{\underline{O}}_S$<u>-modules</u> .

En effet :

(i) Il suffit de vérifier que $\mathrm{Lie}(F/S,M \oplus N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(F/S,M) \times_S \mathrm{Lie}(F/S,N)$. Or si F est bon , $F \otimes \mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S,M) \longrightarrow \mathrm{Lie}(F/S,M)$ est un isomorphisme . Il n'y a plus qu'à remarquer que la propriété à démontrer est vraie pour $\underline{\underline{O}}_S$ et que $\mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S,M)$ est isomorphe au produit d'un nombre fini de copies de $\underline{\underline{O}}_S$, donc $F \otimes \mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S,M)$ isomorphe au produit correspondant de copies de F .

(ii) L'isomorphisme $F \otimes \mathrm{Lie}(\underline{\underline{O}}_S/S,M) \longrightarrow \mathrm{Lie}(F/S,M)$ respecte les deux structures de modules définies plus haut, or ce sont les mêmes au premier membre.

(iii) d est composé de deux isomorphismes .

Exemples de bons $\underline{\underline{O}}_S$-modules : pour tout $\underline{\underline{O}}_S$-Module quasi-cohérent $\underline{\underline{E}}$, les $\underline{\underline{O}}_S$-modules $V(\underline{\underline{E}})$ et $W(\underline{\underline{E}})$ définis en I 4.6 sont bons .

Proposition 4.5. *Soit F un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module . On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)/S,M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F,\mathrm{Lie}(F/S,M))$$

qui respecte les structures de $\underline{\underline{O}}_S$-modules . En particulier, on a un isomorphisme de $\underline{\underline{O}}_S$-modules

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)/S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F) \quad .$$

Cela résulte immédiatement de 4.3 et de (i), (ii), (iii).

Posons alors la définition suivante :

Définition 4.6. *On dit que le foncteur en groupes G au-dessus de S est bon si G vérifie la condition (E) par rapport à S et si Lie(G/S) est un bon* $\underline{\underline{O}}_S$-module.

Exemple : Si G est représentable, il est bon : G vérifie (E) et Lie(G/S) est de la forme $V(\underline{\underline{E}})$ donc bon.

Théorème 4.7. *Si F est un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module, le S-groupe $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}}(F)$ est bon .*

On a de toutes façons un isomorphisme

$$T_{\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)/S}(M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F,T_{F/S}(M))$$

si F/S vérifie (E) et si on munit $T_{F/S}(M)$ de la structure de $\underline{\underline{O}}_S$-module déduite de celle de F . Si F est bon, alors il vérifie (E) et on a des isomorphismes

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F, T_{F/S}(M)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F, F \otimes T_{\underline{\underline{O}}_S/S}(M)) \quad .$$

Il en résulte d'abord que $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)$ vérifie (E) par rapport à S . On a d'autre part $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)/S) \simeq \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)$ et ce dernier module est bon si F est bon (car $T_{\underline{\underline{O}}_S/S}(M)$ est "libre de type fini" sur $\underline{\underline{O}}_S$).

Soit maintenant G un S-groupe et F un <u>bon</u> $\underline{\underline{O}}_S$-module . Supposons donnée une <u>représentation linéaire de</u> G <u>dans</u> F , c'est-à-dire (I 4.7.1), un morphisme de S-groupes

$$\rho : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F) \quad .$$

On en déduit par 4.5 un morphisme

$$\rho' : \mathrm{Lie}(G/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)$$

qui (si G/S vérifie (E)) est un morphisme de $\underline{\underline{O}}_S$-modules .
Soit en particulier G un <u>bon</u> S-groupe . Alors $\mathrm{Lie}(G/S)$ est un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module, et on a un morphisme de S-groupes

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(\mathrm{Lie}(G/S)) \quad .$$

On en déduit par la construction précédente un morphisme de $\underline{\underline{O}}_S$-modules

$$\mathrm{ad} : \mathrm{Lie}(G/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}}(\mathrm{Lie}(G/S)) \ ,$$

où, ce qui revient au même, un morphisme bilinéaire :

$$\mathrm{Lie}(G/S) \times_S \mathrm{Lie}(G/S) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G/S) \quad ,$$

que l'on notera $(x,y) \longmapsto [x,y] = \mathrm{ad}\,(x).y$ (où x et y désignent deux éléments arbitraires de $\mathrm{Lie}(G/S)(S') = \mathrm{Lie}(G_{S'}/S')(S'))$. Si G est commutatif, alors $[x,y] = 0$.

On peut donner du crochet une définition équivalente comme suit : remarquons d'abord qu'il suffit de le faire pour $x,y \in \mathrm{Lie}(G/S)(S)$. Remarquons ensuite qu'il y a un isomorphisme canonique $I_S \times_S I_S \simeq I_{I_S}$; pour éviter des confusions, notons I et I' deux exemplaires de I_S . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I \times I' & \longrightarrow & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ I' & \longrightarrow & S \end{array} ,$$

les deux flèches partant de $I \times I'$ identifiant celui-ci au schéma des nombres duaux sur I ou sur I' . Il en résulte un diagramme commutatif de groupes (où on note $L = \mathrm{Lie}(G/S)$)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & L(I) & & L(S) & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & L(I') & \longrightarrow & G(I \times I') & \longrightarrow & G(I') & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & L(S) & \longrightarrow & G(I) & \longrightarrow & G(S) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \end{array} .$$

La neuvième pièce du puzzle n'est autre que $\mathrm{Lie}(L/S)(S)$. Si G est <u>bon</u> , c'est $L(S)$ et on a donc un diagramme commutatif où les lignes et les colonnes sont des suites exactes de groupes et où les cinq $L(\ )$ sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} z \in L(S) & \longrightarrow & L(I) & \longrightarrow & x \in L(S) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L(I') & \longrightarrow & G(I\times I') & \longrightarrow & G(I') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y \in L(S) & \longrightarrow & G(I) & \longrightarrow & G(S) \end{array} .$$

Or dans un tel diagramme, si on prend deux éléments x et y comme noté, et qu'on les relève arbitrairement en x' et y' dans $G(I\times I')$, le commutateur $x'\,y'\,x'^{-1}\,y'^{-1}$ des deux éléments obtenus ne dépend pas des relèvements choisis et est l'image d'un élément z comme noté . Le lecteur vérifiera que l'on a $z = [x,y]$ (*).

Sur cette construction apparaissent les deux propriétés suivantes :

(i) le crochet est "fonctoriel en G" : de manière précise, $G \mapsto \mathrm{Lie}(G/S)$ est un foncteur de la catégorie des bons S-groupes dans la catégorie des bons $\underline{\underline{O}}_S$-modules munis d'une loi de composition bilinéaire .

(ii) On a $[x,y] + [y,x] = 0$: en effet le diagramme est symétrique par rapport à la première diagonale .

<u>Proposition</u> 4.8. <u>Soit</u> F <u>un bon</u> <u>$\underline{\underline{O}}_S$-module . Dahs l'identification</u>

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)/S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)$$

$\mathrm{Ad}(x).X$ <u>est transformé en</u> $x \circ X \circ x^{-1}$ <u>et</u> $[X\,,\,Y]$ <u>en</u> $X \circ Y - Y \circ X$.

Considérons d'abord $\mathrm{Aut}_{\underline{\underline{O}}_{I_S}\text{-mod.}}(F_{I_S})$. Un élément x de ce groupe est, par définition du changement de base pour les foncteurs, la donnée pour tout $S' \longrightarrow I_S$ d'un $\underline{\underline{O}}(S')$-automorphisme de $F(S')$, soit $x_{S'}$. Or , remarquons que se donner un $S' \longrightarrow I_S$ est équivalent à se donner un $S' \longrightarrow S$ muni d'une section $s : S' \longrightarrow I_{S'}$. On voit alors aussitôt que $x_{S'}$ est déterminé

Le rédacteur reconnaît, à la demande de Gabriel, que l'exercice n'est pas immédiat ; c'est d'ailleurs la raison pour laquelle il n'est pas dans le texte.

par $x_{I_{S'}}$ et que donc il suffit pour vérifier les formules exigées de les vérifier sur les $F(I_{S'})$. Or $F(I_{S'}) = F(S').\mathrm{Lie}(F/S)(S') = F(S').F(S')$ puisque F est bon . Notons $\underline{\underline{O}}(I_{S'}) = \underline{\underline{O}}(S')\ [\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$. Il est immédiat de voir que l'endomorphisme X de F correspond par l'identification donnée à l'automorphisme $I + \varepsilon X$ de $F(I_{S'})$. Il n'y a plus qu'à traduire les définitions pour ramener les formules annoncées à

$$x \circ (I + \varepsilon X) \circ x^{-1} = I + \varepsilon\, x \circ X \circ x^{-1} \quad \text{et}$$

$$(I + \varepsilon X)\circ(I + \varepsilon' Y)\circ(I + \varepsilon X)^{-1}\circ(I + \varepsilon' Y)^{-1} = I + \varepsilon\varepsilon'(X\circ Y - Y\circ X)$$

lorsque $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 0$.

<u>Corollaire</u> 1 . <u>Soient</u> G <u>un bon</u> S-<u>groupe et</u> $x,y,z \in \mathrm{Lie}(G/S)(S')$. <u>On a</u> :

$$[x, [y,z]] + [y, [z,x]] + [z, [x,y]] = 0$$

En effet, si G est bon, alors Lie(G/S) est un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module et le morphisme de S-groupes

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(\mathrm{Lie}(G/S))$$

donne par fonctorialité

$$[\mathrm{ad}\, x , \mathrm{ad}\, y] = \mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y - \mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, [x,y] ,$$

ce qui, appliqué à un élément z , donne la relation de Jacobi .

<u>Corollaire</u> 2 . <u>Soit</u> G <u>un bon</u> S-<u>groupe opérant linéairement sur un bon</u> <u>$\underline{\underline{O}}_S$-module</u> F (i.e. soit F un G-$\underline{\underline{O}}_S$-module , G et F bons) . <u>Alors l'application linéaire</u> $\rho' : \mathrm{Lie}(G/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F)$ <u>est une représentation, c'est-à-dire que l'on a</u>

$$\rho'([x,y]) = \rho'(x) \circ \rho'(y) - \rho'(y) \circ \rho'(x) .$$

Scholie 4.9. A tout bon S-groupe (par exemple représentable), on a associé un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module Lie(G/S) muni fonctoriellement d'une application bilinéaire vérifiant

$$[x , y] + [y , x] = 0 \quad [x , [y , z]] + [y , [z , x]] + [z , [x , y]] = 0 .$$

Nous appellerons Lie(G/S) muni de cette structure l'"algèbre de Lie" de G sur S (les guillemets étant justifiés par le fait que Lie(G/S) n'est pas à strictement parler une $\underline{\underline{O}}_S$-algèbre de Lie). A toute représentation linéaire de G dans un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module F est associée une représentation de son "algèbre de Lie". En particulier, à la représentation adjointe de G est associée la représentation adjointe de son "algèbre de Lie".

Définition 4.10. Un foncteur en groupes G au-dessus de S est dit très bon s'il est bon et si Lie(G/S) est une $\underline{\underline{O}}_S$-algèbre de Lie (c'est-à-dire si on a identiquement $[x , x] = 0$).

Exemples de très bons S-groupes. Le groupe $\underline{Aut}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}}(F)$ pour tout bon $\underline{\underline{O}}_S$-module F. Tout groupe représentable (voir ci-après). Tout bon S-groupe admettant un monomorphisme dans un très bon S-groupe, par exemple tout bon sous-foncteur en groupes d'un groupe représentable, ou tout bon-S-groupe admettant une représentation linéaire fidèle dans un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module, par exemple tout bon S-groupe tel que Ad soit un monomorphisme ...

4.11. Supposons maintenant que G soit un préschéma en groupes sur S. D'après 4.1.4, Lie(G/S)(S) s'identifie au groupe des automorphismes infinitésimaux de G/S invariants à droite, c'est-à-dire par 3.14 au groupe des dérivations de $\underline{O}_G$ au-dessus de $\underline{O}_S$ invariantes par translation à droite. De plus cette identification respecte la structure de module et même d'algèbre de Lie, le crochet dans Lie(G/S)(S) correspondant au crochet des dérivations, comme on le voit en raisonnant comme dans la proposition 4.8 : il faut calculer le commutateur des automorphismes u et v de $\underline{O}_{X_{I_S \times I_S}}$ définis par

$$u = I + \varepsilon d \qquad v = I + \varepsilon' d' \quad ; \quad \varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 0 \quad .$$

on trouve immédiatement $u\,v\,u^{-1}\,v^{-1} = I + \varepsilon\,\varepsilon'\,(dd' - d'd)$.

On retrouve alors la définition classique : Lie(G/S) est le foncteur qui à tout S' au-dessus de S , associe la $\underline{\underline{O}}(S')$-algèbre de Lie des dérivations de $G_{S'}$ par rapport à S' invariantes par translation à droite . Il en résulte en particulier que tout groupe représentable est très bon .

Rappelons d'autre part (3.3) que Lie(G/S) est représentable par le fibré vectoriel $\underline{\underline{V}}(\underline{\omega}^1_{G/S})$ où $\underline{\omega}^1_{G/S}$ est l'image réciproque par la section unité de G du faisceau $\underline{\Omega}^1_{G/S}$ des différentielles relatives de G par rapport à S . Les propriétés qui précèdent montrent que le $\underline{O}_S$-module $\underline{\omega}^1_{G/S}$ s'identifie au faisceau des différentielles de G par rapport à S invariantes à droite, c'est-à-dire au faisceau dont les sections sur un ouvert U de S sont les sections de $\underline{\Omega}^1_{G/S}$ sur l'image réciproque de U invariantes par translation à droite.

Notons enfin qu'il résulte de la décomposition du fibré tangent en produit semi-direct que le $\underline{O}_G$-Module $\underline{\Omega}^1_{G/S}$ est l'image réciproque par la projection $G \longrightarrow S$ du $\underline{O}_S$-Module $\underline{\omega}^1_{G/S}$. Il en résulte par exemple que $\underline{\Omega}^1_{G/S}$ est localement libre (resp. localement libre de type fini) si $\underline{\omega}^1_{G/S}$ l'est, ce qui est en particulier le cas si S est le spectre d'un corps (resp. si S est le spectre d'un corps et G localement de type fini sur S).

On a donc associé fonctoriellement à tout S-préschéma en groupes G sur S un fibré vectoriel Lie(G/S) sur S muni d'une structure de S-schéma en algèbres de Lie sur le S-schéma d'anneaux $\underline{\underline{O}}_S$. Rappelons (3.4 et 3.8) que cette construction commute aux produits finis et à l'extension de la base.

Soit $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ le faisceau des sections de ce fibré vectoriel (EGA II 1.7.9). Il est muni d'une structure de $\underline{O}_S$-Algèbre de Lie. Comme cette construction ne commute pas à l'extension de la base (en général), la structure d'Algèbre de Lie sur ce Module ne permet pas de reconstituer la structure de schéma en algèbres de Lie sur $\mathrm{Lie}(G/S)$. Il en est cependant ainsi lorsque $\underline{\omega}^1_{G/S}$ est <u>localement libre de type fini</u> [ce qui se produit en particulier si G est <u>lisse</u> sur S ou si S est le spectre d'un corps et G localement de type fini sur S], car on a alors

$$\mathrm{Lie}(G/S) = V(\underline{\omega}^1_{G/S}) = W(\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)) \text{ . (I 4.6.5, Cor.)}$$

Notons enfin que si $G \to H$ est un monomorphisme de foncteurs en groupes, alors $\mathrm{Lie}(G/S) \to \mathrm{Lie}(H/S)$ est également un monomorphisme. Si G et H sont représentables, alors $\underline{\omega}^1_{H/S} \to \underline{\omega}^1_{G/S}$ est un épimorphisme et $\mathrm{Lie}\,(G/S) \to \mathrm{Lie}(H/S)$ est une immersion fermée ; en effet un monomorphisme vectoriel de fibrés vectoriels est une immersion fermée. On a en particulier le résultat suivant : soit $G \to H$ un <u>monomorphisme de préschémas en groupes sur</u> S ; si $\underline{\omega}^1_{G/S}$ est <u>localement libre de type fini</u>, alors le morphisme correspondant $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S) \to \underline{\mathrm{Lie}}(H/S)$ est un isomorphisme de $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ sur un sous-module de $\underline{\mathrm{Lie}}(H/S)$ <u>localement facteur direct</u>.

5. <u>Calcul de quelques algèbres de Lie</u>.

5.1. <u>Exemples d'algèbres de Lie : les groupes diagonalisables</u>.

Soit $G = D_S(M)$ un groupe diagonalisable sur S (I 4.4). La formation de $\mathrm{Lie}(G/S)$ commutant à l'extension de la base, il suffit de faire la construction pour $G = D(M)$. On a alors :

$$G(I_S) = \mathrm{Hom}_{Gr.}(M, \Gamma(I_S, \underline{O}_{I_S})^*) = \mathrm{Hom}_{Gr.}(M, \Gamma(S, D_{\underline{O}_S})^*).$$

Or on a une suite exacte scindée

$$1 \to \Gamma(S, \underline{O}_S) \to \Gamma(S, D_{\underline{O}_S})^* \to \Gamma(S, \underline{O}_S)^* \to 1 \text{ ,}$$

ce qui donne

$$\mathrm{Lie}(G)(S) \simeq \mathrm{Hom}_{Gr.}(M, \underline{\underline{O}}(S))$$

muni de sa structure de $\underline{\underline{O}}(S)$-module évidente . On obtient donc après changement de base:

Proposition 5.1. <u>On a des isomorphismes</u>

$$\mathrm{Lie}(D_S(M)/S) \xleftarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}Gr.}(M_S, \underline{\underline{O}}_S) \quad ,$$

$$\underline{\mathrm{Lie}}(D_S(M)/S) \xleftarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}\,(\underline{M}_S, \underline{O}_S) \quad ,$$

[où, dans le second isomorphisme, $\underline{M}_S$ désigne le faisceau de groupes constant sur S défini par M, et <u>Hom</u> le faisceau des homomorphismes de faisceaux de groupes].

Corollaire . <u>Si</u> M <u>est libre de type fini</u> (ou,comme nous dirons plus tard, si $D_S(M)$ est un tore trivial) <u>alors</u>

$$\mathrm{Lie}(D_S(M)/S) \xleftarrow{\sim} W(\underline{\mathrm{Lie}}(D_S(M)/S)) \qquad \text{(voir I 4.6.5),}$$

$$\underline{\mathrm{Lie}}(D_S(M)/S) \xleftarrow{\sim} \check{M}_S \otimes_{\underline{\underline{Z}}} \underline{O}_S \quad ,$$

<u>où</u> $\check{M}$ <u>désigne le dual du groupe abélien</u> M . <u>En particulier</u>

$$\mathrm{Lie}(\underline{\underline{G}}_{m,S}/S) \xleftarrow{\sim} \underline{\underline{O}}_S \quad , \qquad \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\underline{G}}_{m,S}/S) \xleftarrow{\sim} \underline{O}_S \quad .$$

5.2. Normalisateurs et centralisateurs .

Démontrons d'abord quelques lemmes sur les $\underline{\underline{O}}_S$-modules .

Lemme 5.2.1. <u>Une suite</u> $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ <u>de</u> $\underline{\underline{O}}_S$<u>-modules est exacte si et seulement si pour tout</u> S' <u>au-dessus de</u> S <u>la suite</u>

$0 \longrightarrow F'(S') \longrightarrow F(S') \longrightarrow F''(S') \longrightarrow 0$ de $\underline{\underline{O}}(S')$-modules est exacte.
Les suites $0 \longrightarrow T_{F'/S}(M) \longrightarrow T_{F/S}(M) \longrightarrow T_{F''/S}(M) \longrightarrow 0$ et
$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(F'/S,M) \longrightarrow \mathrm{Lie}(F/S,M) \longrightarrow \mathrm{Lie}(F''/S,M) \longrightarrow 0$ sont alors exactes.
Si deux des modules en cause sont bons, le troisième l'est aussi. Si les suites
$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow 0$ sont exactes,
alors la suite $0 \longrightarrow F' \times_S H' \longrightarrow F \times_S H \longrightarrow F'' \times_S H'' \longrightarrow 0$ l'est aussi.

Les démonstrations (immédiates) sont laissées au lecteur (pour l'avant-dernière assertion, utiliser le lemme des cinq et le fait que $T_{\underline{\underline{O}}_S/S}(M)$ est libre).

Lemme 5.2.2. Soient F et H deux G-$\underline{\underline{O}}_S$-modules. L'homomorphisme canonique $F^G \times_S H^G \longrightarrow (F \times_S H)^G$ est un isomorphisme. Si F est bon, F^G l'est aussi.

Démontrons la seconde assertion. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F^G(I_S(M)) \arrow[r] & F(I_S(M)) \\
F^G(S) \otimes_{\underline{\underline{O}}(S)} \underline{\underline{O}}(I_S(M)) \arrow[u, "f"] \arrow[r] & F(S) \otimes_{\underline{\underline{O}}(S)} \underline{\underline{O}}(I_S(M)) \arrow[u, "f_1"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

et l'on doit démontrer que f est bijectif; or il est évidemment injectif; montrons qu'il est surjectif. Soit donc $u \in F(S) \otimes \underline{\underline{O}}(I_S(M))$ tel que $f_1(u)$ soit invariant par $G(I_S(M))$. Considérons S comme au-dessus de $I_S(M)$ par la section zéro. Si S' est au-dessus de S, alors $U \in F(S)^{G(S')} \otimes \underline{\underline{O}}(I_S(M))$, $\underline{\underline{O}}(I_S(M))$ étant libre sur $\underline{\underline{O}}(S)$. Faisant varier S', on en déduit que $u \in F^G(S) \otimes O(I_S(M))$.

Théorème 5.2.3. Soient G un S-groupe et K un sous-S-groupe de G.

Notons $\underline{\mathrm{Norm}_G}(K) = N$, $\underline{\mathrm{Cent}_G}(K) = K$ (I 2.3.3).

Faisons opérer K sur Lie(G/S,M) par l'intermédiaire de la représentation adjointe de G .

(i) Si la loi de groupe de Lie(G/S,M) est commutative (*), alors

$$\mathrm{Lie}(N/S,M)/\mathrm{Lie}(K/S,M) = \left[\mathrm{Lie}(G/S,M)/\mathrm{Lie}(K/S,M)\right]^K$$

(si E et F sont deux S-groupes commutatifs, on note E/F le S-groupe commutatif défini par $(E/F)(S') = E(S')/F(S')$).

(ii) Si la loi de groupe de Lie(G/S,M) est commutative (*), alors

$$\mathrm{Lie}(Z/S,M) = \mathrm{Lie}(G/S,M)^K .$$

(iii) Si G vérifie (E) (resp. si G et K vérifient (E)), alors Z vérifie (E) (resp. N vérifie (E)).

(iv) Si G est bon (resp. si G et K sont bons), alors Z est bon (resp. N est bon). Si de plus G est très bon, alors Z (resp. N) est très bon .

Prouvons (i) et (ii). Soit H = N (resp. Z). On a

$$\mathrm{Lie}(H/S,M)(S) = \Big\{ X \in \mathrm{Lie}(G/S,M)(S) \subset G(I_S(M)) \;\Big|\; X.u.X^{-1}.u^{-1} \in K(S') \ (\underline{\text{resp.}} = 1) \text{ pour tout } u \in K(S'), S' \to I_S(M) \Big\}.$$

Soit $X \in \mathrm{Lie}(G/S,M)(S)$. Pour que X appartienne à Lie(H/S,M)(S), il suffit de vérifier la condition précédente pour tous les S' de la forme $I_{S_1}(M)$, le morphisme structural provenant par extension de

(*) Condition automatiquement vérifiée si G vérifie (E) (cf. 3.9) par exemple si G est représentable.

la base d'un morphisme $S_1 \longrightarrow S$. On a en effet un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & I_{S'}(M) \arrow[dl] \\ I_S(M) \arrow[dd] & \\ & S' \arrow[uu, "h"'] \arrow[ul] \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd} ,$$

qui montre que se donner un S' au-dessus de $I_S(M)$ est équivalent à se donner un S' au-dessus de S muni d'une section h de $I_{S'}(M)$ au-dessus de S'; Or si la propriété exigée est vraie pour tout u de $K(I_{S'}(M))$, elle le sera aussi pour tout $u \in K(S')$ car $K(h) : K(I_{S'}(M)) \longrightarrow K(S')$ est surjectif .

Or tout $u \in K(I_{S'}(M))$ s'écrit de manière unique $Y.k$ où $k \in K(S')$ et $Y \in \mathrm{Lie}(K/S,M)(S')$. L'expression $X.u.X^{-1}.u^{-1}$ devient alors $X\,Y\,k\,X^{-1}\,k^{-1}\,Y^{-1}$ qui, si $\mathrm{Lie}(G/S,M)$ est commutatif, s'écrit $X\,\mathrm{Ad}(k)X^{-1}$. Mais celui-ci est a priori dans $\mathrm{Lie}(G/S,M)(S')$. La condition sur X s'écrit donc $X\,\mathrm{Ad}(k)X^{-1} \in \mathrm{Lie}(K/S,M)(S')$ (resp. $= 1$) pour tout $k \in K(S')$. Ceci prouve (ii) . Dans le cas où $H = N$, si on note $\dot{X}$ l'image de X dans $F(S)$ (où on pose $\mathrm{Lie}(G/S,M)/\mathrm{Lie}(K/S,M) = F$) , la condition s'écrit $\mathrm{Ad}(k)\underline{X}^{-1} = \underline{X}^{-1}$, où $\underline{X}$ est l'image de X dans $F(S')$, ce qui démontre (i) .

(iii) se prouve alors immédiatement . (iv) résulte des lemmes 5.2.1 et 5.2.2.

Corollaire 1 . Si la loi de groupe de $\mathrm{Lie}(G/S)$ est commutative, on a $\mathrm{Lie}(\mathrm{Cent}(G)/S) = \mathrm{Lie}(G/S)^G$.

Corollaire 2. Si la loi de groupe de $\mathrm{Lie}(G/S)$ est commutative et si K est un sous-groupe invariant de G, alors

$$[\, \mathrm{Lie}(G/S)/\mathrm{Lie}(K/S)]^K = \mathrm{Lie}(G/S)/\mathrm{Lie}(K/S) \quad .$$

5.3. Représentations linéaires.

Soit G un bon-S-groupe opérant linéairement sur un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module F

$$\rho : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F) \quad .$$

On a défini (4.8, cor. 2) une représentation linéaire correspondante

$$\rho' : \mathrm{Lie}(G/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod.}}(F) \quad .$$

Les sous-S-groupes $\underline{\mathrm{Norm}}_G(E)$ et $\underline{\mathrm{Cent}}_G(E)$ sont définis pour toute partie E de F, par exemple pour tout sous-$\underline{\underline{O}}_S$-module E de F. On posera de manière analogue

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Lie}(G/S)}(E)(S') = \left\{ X \in \mathrm{Lie}(G/S)(S') \;,\; \rho'(X)E_{S'} \subset E_{S'} \right\} .$$

$$\underline{\mathrm{Cent}}_{\mathrm{Lie}(G/S)}(E)(S') = \left\{ X \in \mathrm{Lie}(G/S)(S') \;,\; \rho'(X)E_{S'} = 0 \right\} .$$

(Notons que cette construction se fait pour toute représentation linéaire d'une $\underline{\underline{O}}_S$-"algèbre de Lie" et que les deux sous-objets construits sont des sous-$\underline{\underline{O}}_S$-modules stables par le crochet).

Théorème 5.3.1. Soient G un bon S-groupe opérant linéairement sur un bon $\underline{\underline{O}}_S$-module F et E un sous-$\underline{\underline{O}}_S$-module de F.

(i) On a $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Norm}}_G(E)/S) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Lie}(G/S)}(E)$,

$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Cent}}_G(E)/S) = \underline{\mathrm{Cent}}_{\mathrm{Lie}(G/S)}(E)$.

(ii) $\underline{\mathrm{Cent}}_G(E)$ est bon ; si E est bon, alors $\underline{\mathrm{Norm}}_G(E)$ est bon. Si de plus G est très bon, alors $\underline{\mathrm{Cent}}_G(E)$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_G(E)$ sont très bons.

La démonstration est facile et laissée au lecteur.

5.3.2. Ceci s'applique en particulier au cas où on prend pour ρ la représentation adjointe de G . A tout sous-module E de Lie(G/S) on associe donc deux sous-groupes de G , son centralisateur et son normalisateur, dont les algèbres de Lie sont respectivement le centralisateur et le normalisateur de E dans Lie(G/S) calculés comme d'habitude à l'aide du crochet :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Lie}(G/S)}(E)(S') = \left\{ X \in \mathrm{Lie}(G/S)(S') \ , \ [X, E_{S'}] \subset E_{S'} \right\} \ .$$

$$\underline{\mathrm{Cent}}_{\mathrm{Lie}(G/S)}(E)(S') = \left\{ X \in \mathrm{Lie}(G/S)(S') \ , \ [X, E_{S'}] = 0 \right\} \ .$$

5.3.3. Soit alors K un sous-S-groupe de G . Alors Lie(K/S) est un sous-$\underline{\underline{O}}_S$-module de Lie(G/S) et on a évidemment

$$\underline{\mathrm{Norm}}_G(K) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathrm{Lie}(K/S))$$

$$\underline{\mathrm{Cent}}_G(K) \subset \underline{\mathrm{Cent}}_G(\mathrm{Lie}(K/S)) \quad ,$$

d'où

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Norm}}_G(K)/S) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Lie}(G/S)}(\mathrm{Lie}(K/S))$$

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Cent}}_G(K)/S) \subset \underline{\mathrm{Cent}}_{\mathrm{Lie}(G/S)}(\mathrm{Lie}(K/S)) \quad ,$$

mais aucune de ces quatre inclusions n'est a priori une identité; nous en verrons par la suite bien des exemples .

Il résulte en particulier de ces inclusions que si K est un <u>sous-groupe invariant</u> de G , alors Lie(K/S) est un <u>idéal</u> de Lie(G/S) .

6. <u>Remarques diverses</u> .

6.1. On peut définir le crochet de deux automorphismes infinitésimaux pour un S-foncteur X qui ne soit pas nécessairement un groupe. Il suffit d'appliqu les résultats de cet exposé au groupe $\underline{\mathrm{Aut}}_S(X)$. Pour pouvoir aboutir à un formalisme agréable, on est conduit à supposer X <u>bon</u>, c'est-à-dire à supposer que le $\underline{\underline{O}}_X$-module $T_{X/S}$ est bon (si X est un S-groupe, cette définition coïncide évidemment avec la définition 4.6).

6.2. Il existe des foncteurs possédant des endomorphismes infinitésimaux qui ne soient pas des automorphismes, donc <u>a fortiori</u> ne vérifiant pas la condition (E). Prenons par exemple pour $X(S)$ le monoïde abélien libre engendré par les éléments de $\underline{\underline{O}}(S)$. Chaque morphisme $S \rightarrow I_{\underline{\underline{Z}}}$ définit un élément de carré nul de $\underline{\underline{O}}(S)$, soit u, donc un endomorphisme de $X(S)$ par $x \mapsto x + u$ (somme dans le monoïde libre). Il est immédiat que l'on a construit ainsi un endomorphisme de $X_{I_{\underline{\underline{Z}}}}$. Si $S \rightarrow I_{\underline{\underline{Z}}}$ se factorise par la section zéro de $I_{\underline{\underline{Z}}}$, alors cet endomorphisme est l'identité. C'est donc un endomorphisme infinitésimal de X qui n'est évidemment pas un automorphisme.

6.3. Il existe des modules qui ne sont pas bons. On peut par exemple modifier légèrement le contre-exemple précédent, mais on peut aussi en donner un comme suit : soit $S = \mathrm{Spec}(k)$, k corps de caractéristique p, et soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie. Considérons le fibré vectoriel $W(E)$ et munissons de la structure de $\underline{\underline{O}}(S)$-module obtenue en faisant opérer les scalaires par l'intermédiaire de la puissance p-ième. Notons F le $\underline{\underline{O}}(S)$-module obtenu. Il est représentable, donc vérifie (E). Son algèbre de Lie est évidemment $W(E)$ et le morphisme canonique $\mathrm{Lie}(F/S) \longrightarrow F$ respecte bien la structure de groupe abélien (il aurait du mal à faire autrement) mais pas la structure de module. Le $\underline{\underline{O}}_S$-module F n'est donc pas bon, bien qu'il soit représentable.

6.4. Soit G un foncteur en groupes sur S. On a par définition les implications suivantes

$$(G/S \text{ vérifie } (E)) \Leftarrow (G \text{ est bon}) \Leftarrow (G \text{ est très bon}) \quad .$$

Il serait intéressant de démontrer ou de contre-exempler les implications en sens inverse .

EXPOSÉ III

EXTENSIONS INFINITESIMALES

par M. DEMAZURE

Dans cet exposé, on se place dans la situation générale suivante. On a un préschéma S et un idéal cohérent nilpotent $\underline{I}$ sur S. On désigne par S_n le sous-préschéma fermé de S défini par l'idéal $\underline{I}^{n+1}$ $(n \geqslant 0)$. En particulier S_o est défini par $\underline{I}$. Comme $\underline{I}$ est nilpotent, S_n est égal à S pour n assez grand et les S_i ont même espace topologique sous-jacent. Un exemple typique de cette situation est le suivant : S est le spectre d'un anneau artinien local A, $\underline{I}$ est l'idéal défini par le radical de A, donc S_o est le spectre du corps résiduel de A.

Dans la situation précédente, on se donne un certain nombre de données au-dessus de S_o et on cherche au-dessus de S des données qui les relèvent, c'est-à-dire qui les redonnent par changement de base de S à S_o. Ceci se fait de proche en proche, par l'intermédiaire des S_n. A chaque pas, on se propose de définir les obstructions rencontrées et de classifier, lorsqu'elles existent, les solutions obtenues.

Le passage de S_n à S_{n+1} peut se généraliser ainsi : on a un préschéma S, deux idéaux $\underline{I}$ et $\underline{J}$ avec $\underline{I} \supset \underline{J}$, $\underline{I} \cdot \underline{J} = 0$ (dans le cas précédent S, $\underline{I}$ et $\underline{J}$ sont respectivement S_{n+1}, $\underline{I}/\underline{I}^{n+2}$, $\underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2}$). On note S_o (resp. $S_{\underline{J}}$) le sous-préschéma fermé de S défini par $\underline{I}$(resp. $\underline{J}$) et on se pose un problème d'extension de $S_{\underline{J}}$ à S.

Dans SGA 1 III ont été traités les problèmes d'extension de morphismes de préschémas et d'extension de préschémas . Nous nous poserons ici les problèmes d'extension de morphismes de groupes, d'extension de structures de groupes et d'extension de sous-groupes .

Nous avons rassemblé dans un n° 0 les résultats de SGA 1 III qui nous seront utiles , pour les mettre sous la forme la plus pratique pour notre propos, et pour éviter au lecteur d'avoir à se reporter constamment à SGA 1 III . Le n° 1 rassemble des calculs de cohomologie des groupes utiles par la suite et qui n'ont rien à voir avec la théorie des schémas . Les numéros 2 et 3 traitent respectivement de l'extension des morphismes de groupes et de l'extension des structures de groupes . Dans le n° 4 , nous avons rappelé rapidement la démonstration d'un résultat énoncé dans TDTE IV concernant l'extension des sous-préschémas et appliqué ce résultat au problème d'extension des sous-groupes . Pour la suite du Séminaire, seul le résultat du n° 2 , concernant l'extension des morphismes de groupes, sera indispensable .

L'idée de ramener les problèmes d'extensions infinitésimales aux calculs habituels de cohomologie dans les extensions de groupes a été suggérée par J. GIRAUD lors de l'exposé oral (dont les calculs étaient nettement plus compliqués et moins transparents) . Malheureusement, il semble que cette méthode ne s'applique bien qu'aux deux premiers problèmes étudiés, et nous n'avons pu échapper à des calculs assez pénibles dans le cas des extensions de sous-groupes .

Pour simplifier le langage, nous appellerons Y-foncteur, resp. Y-préschéma,..., un foncteur, resp. préschéma... muni d'un morphisme dans le foncteur Y, étendant ainsi les définitions de l'exposé I (qui ne concernaient que le cas d'un Y représentable).

0. Rappels de SGA 1 III. Remarques diverses .

Enonçons d'abord une définition générale .

Définition 0.1. Soient C une catégorie , X un objet de $\hat{C}$, G un $\hat{C}$-groupe opérant sur X . On dit que X est formellement principal homogène sous G si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) pour chaque objet S de C , l'ensemble $X(S)$ est vide ou principal homogène sous $G(S)$;

(ii) le morphisme de foncteurs $G \times X \longrightarrow X \times X$ défini ensemblistement par $(g,x) \longmapsto (gx,x)$ est un isomorphisme .

Ceci fait , nous allons mettre les résultats de SGA 1 III sous la forme qui nous sera la plus utile . Nous emploierons les notations générales suivantes dans tout ce numéro . On a un préschéma S et sur S deux idéaux quasi-cohérents $\underline{I}$ et $\underline{J}$ tels que

$$\underline{I} \supset \underline{J} \qquad \text{et} \qquad \underline{I} \cdot \underline{J} = 0 .$$

On aura donc en particulier $\underline{J}^2 = 0$. On notera S_o (resp. $S_{\underline{J}}$) le sous-préschéma fermé de S défini par l'idéal $\underline{I}$ (resp. $\underline{J}$) . Pour tout S-foncteur X , on désignera systématiquement par X_o et $X_{\underline{J}}$ les foncteurs obtenus par changement de base de S à S_o et $S_{\underline{J}}$. Mêmes notations pour un morphisme .

Soit X un S-foncteur . Définissons un foncteur X^+ au-dessus de S par la formule :

$$\mathrm{Hom}_S(Y,X^+) = \mathrm{Hom}_{S_{\underline{J}}}(Y_{\underline{J}}, X_{\underline{J}})$$

pour un S-préschéma variable Y . Dans les notations de Exp. II , 1 , on a

$$X^+ \simeq \prod_{S_{\underline{J}}/S} X_{\underline{J}} .$$

Le morphisme identique de $X_{\underline{J}}$ définit par construction un S-morphisme

$$p_X : X \longrightarrow X^+ \quad .$$

Remarquons maintenant que si X est un S-foncteur en groupes , alors $X_{\underline{J}}$ est un $S_{\underline{J}}$-foncteur en groupes , et la formule de définition de X^+ le munit d'une structure de S-foncteur en groupes . On a alors

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(Y,X^+) = \mathrm{Hom}_{S_{\underline{J}}\text{-gr.}}(Y_{\underline{J}},X_{\underline{J}})$$

pour tout S-foncteur en groupes Y . Le morphisme p_X est donc un morphisme de S-foncteur en groupes .

Revenons maintenant au cas général, mais supposons que X soit un S-<u>préschéma</u> . Un S-morphisme d'un S-préschéma variable Y dans X^+ étant par définition un $S_{\underline{J}}$-morphisme $g_{\underline{J}}$ de $Y_{\underline{J}}$ dans $X_{\underline{J}}$, on définit un X^+-foncteur en groupes abéliens L_X , en posant pour tout X^+-préschéma Y

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Y,L_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(g_o^*(\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}) , \underline{J}\,\underline{O}_Y) \quad ,$$

où $\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}$ désigne le Module des différentielles relatives de X_o par rapport à S_o (SGA 1 I 1), et où on regarde $\underline{J}\,\underline{O}_Y$ comme un $\underline{O}_{Y_o}$-module grâce au fait qu'il est annulé par $\underline{I}$.

Le X^+-foncteur L_X est un X^+-groupe abélien . De plus il dépend fonctoriellement de X : soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

un S-morphisme ; on en déduit par fonctorialité un S-morphisme

$$f^+ : X^+ \longrightarrow Y^+$$

compatible avec f , c'est-à-dire tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_Y} \\ X^+ & \xrightarrow{f^+} & Y^+ \end{array} .$$

Définissons un S-morphisme $L_f : L_X \longrightarrow L_Y$ compatible avec f^+ , donc tel que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_X & \xrightarrow{L_f} & L_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^+ & \xrightarrow{f^+} & Y^+ \end{array} ;$$

on a un morphisme de $\underline{O}_{X_o}$-Modules (SGA 1 II, 4)

$$f_o^* (\underline{\Omega}^1_{Y_o/S_o}) \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}$$

qui pour tout X^+-préschéma Z définit un morphisme de groupes abéliens , fonctoriel en Z

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Z,L_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Y^+}(Z,L_Y) ,$$

qui nous donne le morphisme cherché .

Si X et X' sont deux S-préschémas, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_X \times_S L_{X'} & \simeq & L_{X \times_S X'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^+ \times_S X'^+ & \simeq & (X \times_S X')^+ \end{array} .$$

Nous pouvons maintenant énoncer :

Proposition 0.2. *Pour tout S-préschéma X, on peut définir une opération du X^+-groupe abélien L_X sur le X^+-objet X (à gauche), telle que :*

(i) *cette opération fasse de X un objet formellement principal homogène sous L_X au-dessus de X^+ : le morphisme*

$$L_X \times_{X^+} X \longrightarrow X \times_{X^+} X$$

est un isomorphisme ;

(ii) *cette opération soit fonctorielle en le S-préschéma X : pour tout S-morphisme $f : X \longrightarrow Y$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
L_X \times_{X^+} X \arrow[r] \arrow[d, "L_f \times_{f^+} f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
L_Y \times_{Y^+} Y \arrow[r] & Y
\end{tikzcd} \quad ;$$

(iii) *cette opération "commute au produit fibré" : pour tous S-préschémas X et X', le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
(L_{X'} \times_{X'^+} X') \times_S (L_X \times_{X^+} X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & X' \times_S X \\
(L_{X'} \times_S L_X) \times_{(X'^+ \times_S X^+)} (X' \times_S X) \arrow[r, "\simeq"] & L_{X' \times_S X} \times_{(X' \times_S X)^+} (X' \times_S X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dans SGA III 5.1, il est démontré la chose suivante : pour tout S-préschéma Y et tout S_J-morphisme $g_{\underline{J}} : Y_{\underline{J}} \longrightarrow X_{\underline{J}}$, l'ensemble des S-morphismes $g : Y \longrightarrow X$ se réduisant suivant $g_{\underline{J}}$ est vide ou principal homogène sous le groupe commutatif

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_{\underline{J}}}}(h^*(\underline{\Omega}^1_{X/S}), \underline{J}\,\underline{O}_Y),$$

où h est le morphisme composé $Y_{\underline{J}} \xrightarrow{g_{\underline{J}}} X_{\underline{J}} \longrightarrow X$.

Traduit dans notre langage, cela veut exactement dire que pour tout X^+-préschéma Y , l'ensemble $\mathrm{Hom}_{X^+}(Y,X)$ est vide ou principal homogène sous le groupe ci-dessus . Montrons d'abord que ce groupe n'est autre que

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Y, L_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(g_o^*(\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}), \underline{J}\,\underline{O}_Y) .$$

Il suffit pour cela de remarquer que $\underline{J}.\underline{O}_Y$ est annulé par $\underline{I}\,\underline{O}_Y$, donc que l'on peut remplacer $h^*(\underline{\Omega}^1_{X/S})$ par le faisceau qu'il induit sur Y_o , que l'on voit sans peine être isomorphe à $g_o^*(\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o})$.

Ceci fait, il faudrait pour achever la démonstration vérifier que la construction de SGA 1 III, 5.1 est fonctorielle en le X^+-préschéma Y , puis que l'opération ainsi définie jouit bien des propriétés fonctorielles exigées en (ii) et (iii) . Nous ne le ferons pas ; le lecteur sceptique consultera à ce sujet EGA IV où il trouvera peut-être quelques éléments de démonstration.

<u>Remarque</u> 0.3. Supposons le X^+-préschéma Y <u>plat</u> sur S (SGA IV) . On peut écrire alors

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Y,L_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(g_o^*(\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}) \, , \, \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o}) \quad .$$

<u>Remarque</u> 0.4. Supposons que $\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}$ soit l'image réciproque sur X_o d'un $\underline{O}_{S_o}$-Module noté $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}$ (le cas se présentera en particulier lorsque X_o sera un S_o-groupe , cf. II 4.11) . Si on définit un foncteur L'_X au-dessus de S par la formule

$$\mathrm{Hom}_S(Y,L'_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o} \, , \, \underline{J}\,\underline{O}_Y) \, ,$$

on aura

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Y,L_X) = \mathrm{Hom}_S(Y,L'_X)$$

pour tout X^+-préschéma Y , c'est-à-dire

$$L_X = L'_X \times_S X^+ \quad .$$

Le morphisme de X^+-foncteur en groupes $L_X \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{X^+}(X)$ se traduira par un morphisme de S-foncteur en groupes $L'_X \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_S(X)$, les opérations de L'_X sur X respectant le morphisme $p_X : X \to X^+$.

Remarque 0.5. Sous les conditions précédentes, supposons de plus que Y soit un S-préschéma plat sur S. On a alors

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Y,L_X) = \mathrm{Hom}_S(Y,L_X^!) = \mathrm{Hom}_{S_o}(Y_o,L_{oX}) \quad ,$$

où le S_o-foncteur en groupes abéliens L_{oX} est défini par l'identité (par rapport au S_o-préschéma variable T) suivante :

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(T,L_{oX}) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_T}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_T \ , \ \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_T) \ .$$

Dans les notations de II, 1, on a donc montré que les foncteurs $L_X^!$ et $\prod_{S_o/S} L_{oX}$ ont même restriction à la sous-catégorie pleine de $(Sch)_{/S}$ dont les objets sont les S-préschémas Y plats sur S.

Remarque 0.6. Supposons maintenant que $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}$ admette une présentation finie (EGA 0.5.2.5), ce qui sera en particulier le cas si X_o est localement de présentation finie sur S_o. On peut écrire

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(T,L_{oX}) = \Gamma(T \ , \ \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_T}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o} \otimes \underline{O}_T \ , \ \underline{J} \otimes \underline{O}_T))$$

(les produits tensoriels étant pris sur $\underline{O}_{S_o}$). Si T est plat sur S_o, il résulte de EGA 0, 6.7.6 que ceci peut aussi s'écrire

$$\Gamma(T \ , \ \underline{\mathrm{Hom}}_{O_{S_o}}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J}) \otimes \underline{O}_T) \quad .$$

Introduisant la notation $W(\ )$ de I, 4.6.1, on a donc prouvé que pour tout S_o-préschéma T plat sur S_o, on a

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(T,L_{oX}) = \mathrm{Hom}_{S_o}(T \ , \ W(\underline{\mathrm{Hom}}_{O_{S_o}}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J}))) \quad .$$

En résumé , si $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}$ admet une présentation finie , et si on se restreint à la catégorie des S-préschémas plats sur S , on a

$$L'_X = \prod_{S_o/S} W\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J})\right) .$$

(le faisceau dont on prend le W étant quasi-cohérent par EGA I , 9.1.1) . Remarquons enfin que si $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}$ est en outre localement libre (de rang fini), par exemple si X_o est lisse sur S_o (auquel cas il est automatiquement localement de présentation finie sur S_o), on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J} ,$$

où on note par abus de langage (X_o n'étant pas nécessairement un S_o-groupe) $\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)$ le dual du $\underline{O}_{S_o}$-Module $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}$.

La proposition précédente a un corollaire important :

Corollaire 0.7. Soit X un S-préschéma . Tout S-endomorphisme de X induisant l'identité sur $X_{\underline{J}}$ est un automorphisme . On a une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{X_o}}(\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J}\,\underline{O}_X) \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{S_{\underline{J}}}(X_{\underline{J}}) .$$

De plus, si on fait opérer $\mathrm{Aut}_S(X)$ sur le premier groupe par transport de structure, on a la relation suivante

$$i(u\,m) = u\; i(m)\; u^{-1}$$

pour tous $u \in \mathrm{Aut}_S(X)$ et $m \in \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{X_o}}(\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J}\,\underline{O}_X)$.

D'après (i) , $\mathrm{Hom}_{X^+}(X,X)$ est un ensemble principal homogène sous $\mathrm{Hom}_{X^+}(X,L_X)$, car il est certainement non vide ; il contient en effet un point marqué : l'automorphisme identique de X . Grâce à ce point marqué, on définit un isomorphisme d'ensembles

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(X,L_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X^+}(X,X) \quad .$$

Appliquant maintenant (ii) à un endomorphisme de X au-dessus de X^+ , c'est-à-dire un S-endomorphisme de X induisant l'identité sur $X_{\underline{J}}$, on voit aisément que l'application précédente respecte les lois de composition des deux membres . Il en résulte d'abord que tout élément de $\mathrm{Hom}_{X^+}(X,X)$ est inversible, ce qui est la première assertion de l'énoncé, puis que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X^+}(X,L_X) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{Aut}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{S_{\underline{J}}}(X_{\underline{J}}) \quad ,$$

ce qui est la seconde .
Remarquons maintenant que le morphisme i défini ci-dessus est fonctoriel en X pour les isomorphismes, car il est défini en termes structuraux à partir de l'opération de L_X sur X au-dessus de X^+ , elle-même fonctorielle en X d'après l'assertion (ii) de la proposition 0.2. Soit alors u un automorphisme de X au-dessus de S. Il définit une application

$$h : \mathrm{Hom}_{X^+}(X,L_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X^+}(X,L_X)$$

par transport de structure et une application

$$f : \mathrm{Aut}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}_S(X)$$

également par transport de structure, c'est-à-dire par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "f(h)"] & X \end{tikzcd} .$$

En écrivant $i(h(m)) = f(i(m))$, on trouve la formule cherchée .

Soit maintenant X un S-préschéma tel que $X_{\underline{J}}$ soit un $S_{\underline{J}}$-groupe . Supposons qu'il existe un S-morphisme

$$P : X \times_S X \longrightarrow X$$

tel que le morphisme obtenu par changement de base

$$P_{\underline{J}} : X_{\underline{J}} \times_{S_{\underline{J}}} X_{\underline{J}} \longrightarrow X_{\underline{J}}$$

soit la loi de groupe de $X_{\underline{J}}$. (Un cas particulier important de la situation précédente sera le cas où X est un S-groupe et où on prend pour P sa loi de groupe) .

On en déduit un morphisme

$$L_P : L_X \times_S L_X \longrightarrow L_X$$

qui, en fait, ne dépend pas de P , car il se calcule à l'aide de la loi de groupe $P_{\underline{J}}$ de $X_{\underline{J}}$ comme nous allons le voir maintenant. Le morphisme

$$P_o^*(\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}) \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X_o \times_{S_o} X_o/S_o}$$

se traduit dans T_{X_o/S_o} (II 4.1) par la loi de groupe de ce dernier que l'on écrit immédiatement à l'aide de la décomposition de T_{X_o/S_o} en produit semi-direct de $Lie(X_o/S_o)$ par X_o. Utilisant (ii) et (iii) de 0.2, il vient, tous calculs faits :

Proposition 0.8. Soit $P : X \times_S X \longrightarrow X$ un S-morphisme tel que P_J munisse X_J d'une structure de S_J-groupe. Notons $(m,x) \longmapsto mx$ le morphisme

$$L_X^! \times_S X \longrightarrow X$$

définissant l'action de $L_X^!$ (défini dans 0.4) sur X. Notons

$$Ad : X^+ \longrightarrow Aut_{S\text{-}gr.}(L_X^!)$$

l'opération de X^+ sur $L_X^!$ déduite de l'opération adjointe de X_o sur $\omega^1_{X_o/S_o}$. Pour tout $S' \to S$ et tous $x,x' \in X(S')$, $m,m' \in L_X^!(S')$, on a :

$$P(mx, m'x') = (m.\ Ad\ p_X(x)\ m')\ P(x, x')$$

Corollaire 0.9. Soit X un S-groupe. Alors X^+ est muni naturellement d'une structure de S-groupe, p_X est un morphisme de S-groupes et le S-morphisme

$$i : L_X^! \longrightarrow X$$

défini ensemblistement par $m \longmapsto m\,e$ (où e est la section unité de G) est un isomorphisme de S-groupes de $L_X^!$ sur le noyau de $p_X : X \longrightarrow X^+$.

Les deux premières assertions ont déjà été démontrées. Comme X est formellement principal homogène au-dessus de X^+ sous $L_X = L_X^! \times_S X^+$, le morphisme énoncé est bien un isomorphisme (de S-foncteurs) de $L_X^!$ sur le noyau de p_X. Le fait qu'il respecte les structures de groupes résulte de la formule explicite de 0.8.

__Corollaire__ 0.10. __Avec les notations précédentes, pour tout__ $S' \longrightarrow S$ __et tous__ $x \in X(S')$ __et__ $m \in L'_X(S')$, __on a__

$$x\, i(m)\, x^{-1} = i\,(\,\mathrm{Ad}\, p_X(x)\, m\,)\ .$$

Cela résulte de la formule donnée plus haut et de $i(m)\, x = m\, x$.

Lorsque X est un S-groupe, nous avons donc déterminé explicitement le noyau de $X \longrightarrow X^+$ et l'opération des automorphismes intérieurs de X sur ce noyau. Nous allons maintenant voir que l'on peut faire de même pour certains S-foncteurs en groupes non nécessairement représentables. Un cas nous sera utile, celui des foncteurs __Aut__ (I 1.7) .

Enonçons tout de suite :

__Proposition__ 0.11. __Soit__ E __un__ S-__préschéma__ . __Notons__ $X = \underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$. __Le noyau du morphisme de__ S-__foncteurs en groupes__

$$p_X : X \longrightarrow X^+$$

__s'identifie canoniquement au__ S-__foncteur en groupes commutatifs__ L'_X __défini par__

$$\mathrm{Hom}_S(Y, L'_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{E_o \times_{S_o} Y_o}}\left(\underline{\Omega}^1_{E_o/S_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o}\ ,\ \underline{J}\, \underline{O}_{E \times_S Y}\right)$$

__où__ Y __désigne un__ S-__préschéma variable__ .

En effet, si Y est un S-préschéma variable, on a

$$\mathrm{Hom}_S(Y, X) = \mathrm{Aut}_Y(E \times_S Y)\ ,$$

$$\mathrm{Hom}_S(Y, X^+) = \mathrm{Hom}_{S_{\underline{J}}}(Y_{\underline{J}}, X_{\underline{J}}) = \mathrm{Aut}_{Y_{\underline{J}}}(E \times_S Y_{\underline{J}}) = \mathrm{Aut}_{Y_{\underline{J}}}((E \times_S Y) \times_Y Y_{\underline{J}})\ .$$

En appliquant 0.7 au Y-préschéma $E \times_S Y$, on obtient un isomorphisme de S-groupes

$$\mathrm{Hom}_S(Y, L^!_X) \simeq \mathrm{Ker}(\,\mathrm{Hom}_S(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Y,X^+)\,)\ ,$$

isomorphisme que l'on vérifie aisément être fonctoriel en le S-préschéma Y , ce qui achève la démonstration .

<u>Remarque</u> 0.12. On a une opération naturelle f de X sur $L^!_X$ définie de la manière suivante : pour tout $Y \longrightarrow S$, on a

$$\mathrm{Hom}_S(Y,X) = \mathrm{Aut}_Y(F)$$

et

$$\mathrm{Hom}_S(Y, L^!_X) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{F_o}}(\underline{\Omega}^1_{F_o/Y_o}\ ,\ \underline{J}\ \underline{O}_F)\ ,$$

où F est le Y-préschéma $E \times_S Y$; le premier groupe opère sur le second par transport de structure et cette opération est bien fonctorielle en Y .
On a alors la formule

$$x\ i(m)\ x^{-1} = i(f(x)\ m)\ ,$$

pour tout $Y \rightarrow S$ et tous $x \in \mathrm{Hom}_S(S',X)$, $m \in \mathrm{Hom}_S(S', L^!_X)$; il suffit en effet d'appliquer 0.7 au Y-préschéma F .

<u>Rappel</u> 0.13. L'image directe d'un module quasi-cohérent par un morphisme de <u>présentation finie</u> est quasi-cohérente . Sous les mêmes conditions, la formation de l'image directe commute au changement de base <u>plat</u> : dans la situation

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{\ g'\ } & T' = T \times_S S' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow{\ g\ } & S' \end{array}\ ,$$

si on suppose f (et donc f') de présentation finie et g (et donc g') plat, on a pour tout $\underline{O}_T$-module quasi-cohérent $\underline{F}$

$$f_* (\underline{F}) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{S'} = f'_* (\underline{F} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{S'}) ,$$

ou,de manière plus esthétique

$$g^* (f_* (\underline{F})) = f'_* (g'^* (\underline{F})) .$$

Ces deux faits sont plus généralement valables pour un morphisme quasi-compact et quasi-séparé (cf. EGA III 1.4.15 dans le cas quasi-compact séparé et EGA III 6.9.10) .

<u>Remarque</u> 0.14. Dans les notations de 0.11 , supposons E de présentation finie sur S et Y plat sur S . On a alors successivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_S(Y, L_X^!) &= \Gamma (E \times_S Y , \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_E} (\underline{\Omega}^1_{E/S}, \underline{J}\, \underline{O}_E) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_Y) \\
&= \Gamma (Y , g_* (\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_E} (\underline{\Omega}^1_{E/S}, \underline{J}\, \underline{O}_E) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_Y)) \\
&= \Gamma (Y , f_* (\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_E} (\underline{\Omega}^1_{E/S}, \underline{J}\, \underline{O}_E)) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_Y) \\
&= W (f_*(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_E} (\underline{\Omega}^1_{E/S} , \underline{J}\, \underline{O}_E)) (Y)
\end{aligned}$$

où f et g sont les morphismes structuraux

$$g : E \times_S Y \longrightarrow Y$$

$$f : E \longrightarrow S .$$

On a donc montré que l'on a

$$L'_X = W(f_*(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_E}(\underline{\Omega}^1_{E/S}, \underline{J}\,\underline{O}_E)))$$

sur la catégorie des S-préschémas <u>plats</u> sur S . Notons de plus que le Module dont on prend le W est <u>quasi-cohérent</u> .

Extrayons enfin de SGA 1 III les deux propositions suivantes.

<u>Proposition</u> 0.15. (SGA 1 III, 6.8) <u>Pour tout</u> $S_{\underline{J}}$-<u>préschéma</u> lisse <u>sur</u> $S_{\underline{J}}$ <u>et</u> affine, <u>il existe un</u> S-<u>préschéma</u> X lisse <u>sur</u> S <u>se réduisant suivant</u> $X_{\underline{J}}$, <u>et un tel</u> X <u>est unique à isomorphisme</u> (<u>non unique</u>) <u>près</u> .

<u>Proposition</u> 0.16. (SGA 1 III, 5.5) <u>Soit</u> X <u>un</u> S-<u>préschéma</u> lisse <u>sur</u> S . <u>Pour tout</u> S-<u>préschéma</u> Y affine , <u>l'application canonique</u>

$$\mathrm{Hom}_S(Y,p_X) : \mathrm{Hom}_S(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Y,X^+) = \mathrm{Hom}_{S_{\underline{J}}}(Y_{\underline{J}},X_{\underline{J}})$$

<u>est surjective</u> .

<u>Corollaire</u> 0.17. <u>Soit</u> E <u>un</u> S-<u>préschéma</u> affine <u>sur</u> S <u>et</u> lisse <u>sur</u> S ; <u>notons</u> $X = \underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$. <u>Pour tout</u> S-<u>préschéma</u> Y affine , <u>l'application canonique</u>

$$\mathrm{Hom}_S(Y,p_X) : \mathrm{Hom}_S(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Y,X^+)$$

<u>est surjective</u> .

En effet, $Y \times_S E$ est affine sur Y , lui-même affine, donc affine . Appliquant 0.16 , on en déduit que tout $S_{\underline{J}}$-morphisme $Y_{\underline{J}} \times_{S_{\underline{J}}} E_{\underline{J}} \longrightarrow E_{\underline{J}}$ se prolonge en un S-morphisme $Y \times_S E \longrightarrow E$.

En d'autres termes, tout $\underline{S}_{\underline{J}}$-morphisme $Y_{\underline{J}} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{S_{\underline{J}}}(E)$ se prolonge en un S-morphisme $Y \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_S(E)$.

Mais 0.7. montre qu'il en est de même en remplaçant $\underline{\mathrm{End}}_S(E)$ par $\underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$, ce qui est la propriété annoncée.

1. Extensions et cohomologie.

1.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie. Soient S un objet de $\underline{C}$, G un S-groupe (représentable) et F un S-foncteur en groupes commutatifs sur lequel G opère. On a défini en I, 5.1 les groupes de cohomologie $H^n(G,F)$. On rappelle que ce sont les groupes d'homologie d'un complexe noté $C^*(G,F)$ où

$$C^n(G,F) = \mathrm{Hom}_S((G/S)^n,F) \quad .$$

Comme G est représentable, on a aussi

$$C^n(G,F) = F((G/S)^n) \quad ;$$

de ceci, et de la définition de l'opérateur bord, on voit que le complexe $C^*(G,F)$ ne dépend que de la restriction de F à la sous-catégorie pleine de $\underline{C}_{/S}$ dont les objets sont les puissances cartésiennes de G sur S.

En conséquence, on a le

Lemme 1.1.1. Soient $\underline{C}$ une catégorie, S un objet de $\underline{C}$, G un S-groupe représentable. Notons $\underline{C}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{C}_{/S}$ dont les objets sont les puissances cartésiennes de G sur S. Soient F et F' deux S-foncteurs en groupes commutatifs sur lesquels G opère. Si F et F' ont même restriction à $\underline{C}(G)$, on a un isomorphisme canonique

$$H^*(G,F) \xrightarrow{\sim} H^*(G,F') \quad ,$$

Enonçons un autre résultat de comparaison. Soit maintenant $T \to S$ un morphisme de $\underline{C}$. Si F est un T-foncteur en groupes commutatifs, alors

$$F_1 = \prod_{T/S} F \qquad \text{(Exp. II, 1)}$$

est un S-foncteur en groupes commutatifs et on a un morphisme de S-foncteurs en groupes

$$u: \prod_{T/S} \underline{\mathrm{Aut}}_{T\text{-gr.}}(F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(F_1) \quad .$$

Soit maintenant G un S-foncteur en groupes et soit

$$G_T \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{T\text{-gr.}}(F)$$

une opération de G_T sur F. Par définition du foncteur $\prod$, on en déduit un morphisme de S-foncteurs en groupes

$$G \longrightarrow \prod_{T/S} \underline{\mathrm{Aut}}_{T\text{-gr.}}(F)$$

d'où, par composition avec u, une opération de G sur F_1.

Lemme 1.1.2. *Sous les conditions précédentes, on a un isomorphisme canonique*

$$H^*(G, \prod_{T/S} F) \simeq H^*(G_T, F) .$$

En effet, d'après la définition de la cohomologie, les complexes standard sont canoniquement isomorphes .

1.2. Suivant les principes généraux, on pose la définition suivante :

Définition 1.2.1. *Soit* $1 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$ *une suite de morphismes de* $\hat{\underline{C}}$*-groupes* . *On dit qu'elle est* exacte *si les conditions équivalentes sont vérifiées* :

(i) *pour tout* $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, *la suite de groupes ordinaires*

$$1 \longrightarrow M(S) \xrightarrow{u(S)} E(S) \xrightarrow{v(S)} G(S)$$

est exacte ;

(ii) *pour tout objet* H *de* $\hat{\underline{C}}$, *la suite de groupes ordinaires*

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H,G)$$

est exacte .

Faisant en particulier $H = G$ dans (ii), on voit que l'ensemble des sections de v (ne respectant pas a priori les structures de groupes) est vide ou principal homogène sous $\mathrm{Hom}(H,M)$. Supposons-le non vide ; soit donc

$$s : G \longrightarrow E$$

une section de v . Alors pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$ et tout $x \in G(S)$, l'élément $s(x)$ de $E(S)$ définit un automorphisme intérieur de E_S qui normalise M_S

(plus correctement l'image de M_S par u_S), donc un automorphisme de M_S ; si M est commutatif, on voit "ensemblistement" que cet automorphisme ne dépend pas de la section choisie, mais seulement de x , et qu'il en dépend multiplicativement . En résumé, à toute suite exacte

$$(E) \qquad 1 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$$

telle que M soit commutatif et que v possède une section est associée un morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes

$$G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\hat{\underline{C}}\text{-gr.}}(M)$$

que l'on appelle l'opération de G sur M définie par l'extension (E) .

On a vu en I 2.3.7 que v possède une section qui est un morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes si et seulement si l'extension (E) est isomorphe ("en tant qu'extension") au produit semi-direct de M par G relativement à l'opération précédente . Une telle section de v sera appelée section de l'extension (E) . Si s est une section de (E) et si $m \in \Gamma(M) \simeq \mathrm{Ker}(\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(G))$ (pour la définition de Γ , voir I 1.2) , alors le morphisme $G \longrightarrow E$ défini par

$$x \longmapsto u(m)\, x\, u(m)^{-1}$$

est également une section de (E) dite déduite de s par l'automorphisme intérieur défini par m (ou par u(m)) .

Lemme 1.2.2. Soit $(E) : 1 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$ une suite exacte de $\hat{\underline{C}}$-groupes telle que M soit commutatif et que v possède une section. Faisons opérer G sur M de la manière définie par (E) .

(i) L'extension (E) définit canoniquement une classe $c(E) \in H^2(G,M)$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'une section de (E) .

(ii) Si $o(E) = 0$, l'ensemble des sections de (E) est principal homogène sous le groupe $Z^1(G,M)$, l'ensemble des sections de (E) modulo l'action des automorphismes intérieurs définis par les éléments de $\Gamma(M)$ est principal homogène sous le groupe $H^1(G,M)$.

La démonstration se fait exactement comme dans le cas des groupes ordinaires, le fait que l'on parte d'une section de v assurant la fonctorialité des calculs ensemblistes . Indiquons brièvement les principales étapes de la démonstration .

a) A toute section s de v on associe le morphisme

$$Ds : G \times G \longrightarrow M ,$$

défini ensemblistement par

$$u(Ds(x,y)) = s(xy)\, s(y)^{-1}\, s(x)^{-1} .$$

On montre que Ds est un 2-cocycle en calculant

$$\partial Ds\,(x,y,z) = s(x)Ds(y,z)^{-1}s(x)^{-1}Ds(x,yz)^{-1}Ds(xy,z)Ds(x,y) ;$$

il suffit de reporter la définition de Ds dans cette formule pour trouver (sans utiliser aucune commutativité) $Ds \in Z^2(G,M)$.

b) Si s et s' sont deux sections de v , on a vu qu'il existe

$$m : G \longrightarrow M$$

tel que $s(x) = m(x)\, s'(x)$. On a alors

$$Ds'(x,y) = m^{-1}(xy)\, Ds(x,y)\, s(x)m(y)s(x)^{-1}\, m(x) ,$$

soit

$$Ds' = Ds \, . \, \partial m \quad .$$

c) Si s et s' sont deux sections de v déduites l'une de l'autre par un automorphisme intérieur de E défini par un élément $m \in \Gamma(M)$, alors $s(x) = m^{-1} s'(x) m$ entraîne

$s(x) = m^{-1} s'(x) m s'(x)^{-1} s'(x)$,

soit

$s = \partial m \, . \, s'$.

d) Le raisonnement est maintenant habituel : pour trouver un s qui soit un morphisme de groupes, il faut trouver un s tel que $Ds = e$,... .

Soit toujours

(E) $\quad 1 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$

une suite exacte de $\underline{\hat{C}}$-groupes avec M <u>commutatif</u>. Soit

$$f : H \longrightarrow G$$

un morphisme de $\underline{\hat{C}}$-groupes . Considérons $E_f = H \times_G E$; c'est un $\underline{\hat{C}}$-groupe et la projection $v_f : E_f \longrightarrow H$ est un morphisme de $\underline{\hat{C}}$-groupes . De même pour $e_f : E_f \longrightarrow E$. D'autre part , si on envoie M dans E par u et dans H par le morphisme unité , on définit un morphisme de $\underline{\hat{C}}$-groupes $u_f : M \longrightarrow E_f$. On a donc construit un diagramme commutatif de $\underline{\hat{C}}$-groupes :

$$\begin{array}{lccccccc}
(E) & 1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{v} & G \\
 & & & \Big\uparrow{\scriptstyle id.} & & \Big\uparrow{\scriptstyle e_f} & & \Big\uparrow{\scriptstyle f} \\
(E_f) & 1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u_f} & E_f & \xrightarrow{v_f} & H
\end{array} \quad .$$

On a immédiatement :

Lemme 1.2.3. i) La suite (E_f) est exacte.

ii) L'application $s \longmapsto e_f \circ s = f'$ réalise une correspondance biunivoque entre les morphismes

$$s : H \longrightarrow E_f$$

tels que $v_f \circ s = \mathrm{id}.$ (c'est-à-dire les sections de v_f) et les morphismes

$$f' : H \longrightarrow E$$

tels que $v \circ f' = f$ (c'est-à-dire les morphismes f' "relevant" f).

iii) Dans la correspondance précédente, sections de (E_f) et morphismes de groupes f' relevant f se correspondent.

Appliquant le lemme 1.2.2 à l'extension (E_f) et tenant compte de 1.2.3, on obtient la proposition suivante (qui contient formellement 1.2.2) :

Proposition 1.2.4. Soit $(E) : \quad 1 \longrightarrow M \longrightarrow E \xrightarrow{v} G$ une suite exacte de $\hat{C}$-groupes avec M commutatif. Soit

$$f : H \longrightarrow G$$

un morphisme de $\hat{C}$-groupes ; supposons qu'il se relève en un morphisme (non nécessairement de groupes) $f' : H \longrightarrow E$. Faisons opérer H sur M par le morphisme composé (multiplicatif et indépendant du choix de f'),

$$H \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{\mathrm{int}} \mathrm{Aut}_{\hat{C}\text{-gr.}}(M) .$$

(i) Le morphisme f définit canoniquement une classe $c(f) \in H^2(H,M)$ dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'un morphisme de $\hat{C}$-groupes

$$f' : H \longrightarrow E$$

relevant f.

(ii) Si $c(f) = 0$, l'ensemble des morphismes de $\hat{\underline{C}}$-groupes f' relevant f, modulo l'action des automorphismes intérieurs définis par les éléments de $\Gamma(M)$ (i.e. par les éléments m de $\Gamma(E)$ tels que $v(m) = e$) est principal homogène sous $H^1(H,M)$.

(iii) Si $f' : H \longrightarrow E$ est un morphisme de groupes relevant f, l'ensemble des transformés de f' par les automorphismes intérieurs définis par les éléments de $\Gamma(M)$ est isomorphe à $\Gamma(M)/\Gamma(M^H) = \Gamma(M)/H^o(H,M)$.

1.3. Extensions de lois de groupes.

Considérons la situation suivante : on a un morphisme de $\hat{\underline{C}}$

$$p : X \longrightarrow Y$$

et un $\hat{\underline{C}}$-groupe commutatif M opérant sur X, tels que X soit formellement principal homogène au-dessus de Y sous M_Y. Si $g : Y \longrightarrow Z$ est un morphisme quelconque de $\hat{\underline{C}}$, alors $g \circ p : X \longrightarrow Z$ est invariant par M : pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $g \circ p\,(S)$ est invariant sous l'action de $M(S)$ opérant sur $X(S)$. Nous supposerons vérifiée la condition suivante pour $n = 1,2,3,4$.

$(+)_n$: Tout morphisme de X^n dans M, invariant sous l'action de M^n opérant sur X^n, se factorise de manière unique par $p^n : X^n \longrightarrow Y^n$ (où les puissances n désignent des puissances cartésiennes).

Lemme 1.3.1. Si h est un morphisme de Y dans M, l'automorphisme de X défini ensemblistement par $x \longmapsto h(p(x))\,x$ commute à p et aux opérations de M sur X. Cette construction réalise une correspondance bijective entre morphismes de Y dans M et automorphismes de X commutant à p et aux opérations de M.

La première partie est claire. Réciproquement, un automorphisme u de X commutant à p s'écrit ensemblistement $x \mapsto g(x)\,x$, où g est un certain morphisme de X dans M . Si u commute aux opérations de M , ce morphisme est invariant par M et on conclut par la condition $(+)_1$.

Nous supposons maintenant que sont données en plus une loi de groupe sur Y et une opération de Y sur M , c'est-à-dire un morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes :

$$f : Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\hat{\underline{C}}\text{-gr.}}(M) \quad .$$

Définition 1.3.2. Une loi de composition sur X

$$P : X \times X \longrightarrow X$$

est dite admissible si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) P relève la loi de groupe de Y , i.e. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{P} & X \\ {\scriptstyle (p,p)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y \times Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est commutatif .

(ii) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$ et tous $x,y \in X(S)$, $m,n \in M(S)$, on a la relation suivante

$$(++) \quad P(mx,ny) = (m.f(p(x))n)\,P(x,y) \quad .$$

Proposition 1.3.3. Pour qu'une loi de groupe sur X soit admissible, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) $p : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de groupes .

(ii) Le morphisme $i : M \longrightarrow X$ défini par $i(m) = m\, e_X$ est un isomorphisme de groupes de M sur $\mathrm{Ker}(p)$, c'est-à-dire : on a ensemblistement $m\, e_X \cdot n\, e_X = m\, n\ e_X$.

(iii) On a $m\, x = (m\, e_X) \cdot x$ pour chaque $m \in M(S)$, $x \in X(S)$.

(iv) Les automorphismes intérieurs de X opèrent sur $\mathrm{Ker}(p)$ suivant la formule ensembliste :

$$x\, i(m)\, x^{-1} = i(\, f(p(x))\, m\,) .$$

La démonstration est immédiate .

Lemme 1.3.4. Soit u un automorphisme de X du type décrit en 1.3.1. Si P et P' sont deux lois de compositions sur X déduites l'une de l'autre par l'intermédiaire de u (par $P(ux,uy) = u\, P'(x,y)$), P est une loi de composition admissible (resp. une loi de groupe admissible) si et seulement si P' en est une .

Trivial .

Définition 1.3.5. Deux lois de composition admissibles déduites l'une de l'autre par le procédé de 1.3.4 sont dites équivalentes .

Proposition 1.3.6. Supposons qu'il existe une loi de composition admissible sur X . Alors :

(i) Il existe une classe $c \in H^3(Y,M)$ (déterminée canoniquement), dont la nullité est nécessaire et suffisante à l'existence d'une loi de composition associative admissible sur X .

(ii) Si $c = 0$, l'ensemble des lois de composition admissibles et associatives (resp. des classes d'équivalence de lois de compositions admissibles et associatives) sur X est principal homogène sous $Z^2(G,M)$ (resp. $H^2(G,M)$) .

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

a) Soit P une loi de composition admissible sur X. Comme P relève la loi de composition de Y qui est associative, il existe un morphisme unique $a : X^3 \longrightarrow M$ tel que

$$P(x,P(y,z)) = a(x,y,z)\ P(P(x,y),z) \quad .$$

En appliquant la condition (ii), on voit aussitôt que a est invariant sous l'action de M^3 sur X^3, d'où en appliquant l'hypothèse $(+)_3$ le résultat suivant :

(1) <u>Il existe un morphisme unique</u> $DP : Y^3 \longrightarrow M$ <u>tel que</u> $P(x,P(y,z)) = DP(p(x),p(y),p(z))\ P(P(x,y),z)$, et P <u>est associative si et seulement si</u> $DP = o$.

b) Si on calcule de proche en proche $P(P(P(x,y),z),t)$ à l'aide de la formule précédente, on trouve, en posant

$$p(x) = u \ , \ p(y) = v \ , \ p(z) = w \ , \ p(t) = h$$

$$DP(u,v,w).DP(u,vw,h).f(u)DP(v,w,h).DP(u,v,wh)^{-1}.DP(uv,w,h)^{-1} = e_M \ .$$

On a donc $\partial DP(u,v,w,h) = e_M$. Comme d'autre part le premier membre de la formule précédente peut s'écrire à l'aide de P et de a comme l'expression en (x,y,z,t) d'un certain morphisme $X^4 \longrightarrow M$, il résulte de l'hypothèse d'unicité dans $(+)_4$ que DP et e qui factorisent le même morphisme sont égaux, donc

(2) DP <u>est un cocycle</u> : <u>on a</u> $DP \in Z^3(Y,M)$.

c) Si P et P' sont deux lois de composition admissibles sur X, il existe un morphisme unique

$$b : X^2 \longrightarrow M$$

tel que $P'(x,y) = b(x,y)\ P(x,y)$. On voit comme d'habitude que b est invariant par M^2 , d'où :

(3) Pour tout couple de lois de compositions admissibles (P,P') , il existe un unique $d(P,P') : Y^2 \longrightarrow M$ avec $P'(x,y) = d(P,P')(p(x),p(y))\ P(x,y)$, et l'ensemble des lois de compositions admissibles devient ainsi principal homogène sous $\mathrm{Hom}(Y^2,M) = C^2(G,M)$.

d) Sous les conditions précédentes , on a la formule :

(4) $D P' - D P = \partial\, d(P,P')$.

e) P et P' sont équivalentes si et seulement si il existe un morphisme $u \in C^1(Y,M) = \mathrm{Hom}(Y,M)$ avec $d(P,P') = \partial u$; cela résulte facilement de la définition de l'équivalence .

f) Il n'y a plus qu'à conclure : on cherche un P tel que $DP = e$. Or DP est un cocycle dont la classe dans $H^3(Y,M)$ ne dépend pas de la loi de composition admissible P choisie (par (3) et (4)). Cette classe est l'obstruction c demandée . On pourra choisir un P' répondant aux conditions si et seulement si $c = 0$; en effet, choisissant un P quelconque , on aura à résoudre, par (1) ;

$$0 = DP' = DP + \partial\, d(P,P') ,$$

ce qui est possible par (3) et (4) si et seulement si $c = 0$. L'ensemble des P associatifs est principal homogène sous $Z^2(Y,M)$, toujours par (3) et (4) . L'ensemble des P associatifs à équivalence près est principal homogène sous $H^2(Y,M)$ d'après e) .

2. Extensions infinitésimales d'un morphisme de préschémas en groupes

Reprenons les notations du n° 0 . Soient Y et X deux S-foncteurs en groupes. Soit M le noyau du morphisme de groupes $p_X : X \longrightarrow X^+$. On a donc une suite exacte de S-foncteurs en groupes

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow X \xrightarrow{p_X} X^+ \quad .$$

Par définition de X^+ , on a des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_S(Y,X^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S_{\underline{J}}}(Y_{\underline{J}},X_{\underline{J}})$$

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(Y,X^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S_{\underline{J}}\text{-gr.}}(Y_{\underline{J}},X_{\underline{J}}) \quad ,$$

le morphisme

$$\mathrm{Hom}_S(Y,p_X) \quad : \quad \mathrm{Hom}_S(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Y,X^+)$$

associant à un S-morphisme $f : Y \longrightarrow X$, le S-morphisme $f^+ : Y \longrightarrow X^+$ correspondant par les isomorphismes précédents au $S_{\underline{J}}$-morphisme $f_{\underline{J}} : Y \longrightarrow X$ obtenu par changement de base à partir de f . Si M est <u>commutatif</u>, on peut appliquer à cette situation la proposition 1.2.4.

En pratique, nous nous intéresserons au cas suivant : Y est <u>plat</u> sur S , X est soit représentable (cas (a)) , soit de la forme $\underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$ où E est représentable (cas (b)) . Les S-foncteurs en groupes M correspondant ont été calculés en 0.9 (resp. 0.11) , les opérations des automorphismes intérieurs de X sur M en 0.10 (resp. 0.12) . D'autre part, Y étant supposé plat , on peut par 1.1.1 se contenter de connaître les valeurs de M sur les S-préschémas <u>plats</u> sur S et l'opération de X sur M lorsqu'on regarde X et M comme des foncteurs sur la catégorie des S-préschémas <u>plats</u> sur S . Enfin , dans le cas (a) , M est (sur cette catégorie) de la forme $\prod_{S_o/S} N$ où N est un certain S_o-foncteur en groupes abéliens (0.5) ; on aura donc par 1.1.2 des isomorphismes $H^i(Y,M) \xrightarrow{\sim} H^i(Y_o,N)$.

Appliquant 1.2.4 , on obtient le

Théorème 2.1. Soient S un préschéma, $\underline{I}$ et $\underline{J}$ deux idéaux quasi-cohérents tels que $\underline{I} \supset \underline{J}$ et $\underline{I} \cdot \underline{J} = 0$, définissant les sous-préschémas fermés S_o et $S_{\underline{J}}$. Pour tout S-foncteur Z , soient Z_o et $Z_{\underline{J}}$ les foncteurs obtenus par changement de base . Soit X un S-foncteur en groupes de l'une des deux espèces suivantes :

(a) X est un S-préschéma en groupes ,

(b) $X = \underline{Aut}_S(E)$ où E est un S-préschéma, de présentation finie sur S .

Soient

(a) L_o le S_o-foncteur en groupes commutatifs défini par

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(T,L_o) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_T}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_T , \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_T)$$

sur lequel X_o **opère via sa représentation adjointe dans** $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}$.

(b) L le foncteur en groupes abéliens sur la catégorie des S-préschémas plats sur S défini par

$$\mathrm{Hom}_S(T,L) = \Gamma\,(T,\ f_*(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_E}(\underline{\Omega}^1_{E/S}\ ,\ \underline{J}\ \underline{O}_E)) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_T\ )$$

(f désigne le morphisme structural $E \longrightarrow S$), où X considéré comme foncteur sur la même catégorie opère comme on l'a vu en 0.13.

Soient Y un S-préschéma en groupes plat sur S et $f_{\underline{J}} : Y_{\underline{J}} \longrightarrow X_{\underline{J}}$ un morphisme de S_J-groupes . Faisons opérer dans le cas (a) Y_o sur L_o par l'intermédiaire de $f_o : Y_o \longrightarrow X_o$.

Alors

(i) Pour que f_J se relève en un morphisme de S-groupes $Y \longrightarrow X$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(i_1) f_J se relève en un morphisme de S-foncteurs $Y \longrightarrow X$, ce qui permet dans le cas (b) de faire opérer Y sur L par l'intermédiaire du relèvement $Y \longrightarrow X$ (opération qui, on l'a vu, est indépendante du relèvement choisi) .

(i_2) Une certaine obstruction $c(f_J)$, définie canoniquement par f_J , est nulle , où $c(f_J)$ est une classe dans

(a) $H^2(Y_o,L_o)$,

(b) $H^2(Y,L)$.

(ii) Si les conditions de (i) sont satisfaites , l'ensemble des morphismes de S-foncteurs en groupes $Y \longrightarrow X$ prolongeant f_J , modulo l'action des automorphismes intérieurs de X définis par les sections de X sur S induisant la section unité de X_J sur S_J , est principal homogène sous

(a) $H^1(Y_o,L_o)$,

(b) $H^1(Y,L)$.

(iii) Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de S-foncteurs en groupes prolongeant f_J , l'ensemble des morphismes $Y \longrightarrow X$ transformés de f par les automorphismes intérieurs définis par les sections de X sur S induisant la section unité de X_J sur S_J , est isomorphe à

(a) $\Gamma(L_o)/ H^0(Y_o,L_o)$,

(b) $\Gamma(L)/ H^0(Y,L)$.

Remarque 2.2. Supposons de plus dans (a) que X soit localement de présentation finie sur S. Appliquant alors 0.6 , on obtient

$$(a) \quad H^i(Y_o,L_o) = H^i(Y_o , \underline{Hom}_{\underline{O}_{S_o}}(\omega^1_{X_o/S_o} , \underline{J}) ,$$

$$(b) \quad H^i(Y,L) = H^i(Y,f_*(\underline{Hom}_{\underline{O}_E}(\Omega^1_{E/S} , \underline{J}\,\underline{O}_E))) ,$$

les modules dont on prend la cohomologie étant quasi-cohérents .

Remarque 2.3. D'après 0.16 et 0.17 , la condition (i_1) est automatiquement vérifiée lorsque

(a) X est lisse sur S , Y est affine ;

(b) E est lisse sur S , affine sur S et Y est affine .

En outre , sous ces conditions, on peut écrire dans le cas (a)

$$H^i(Y_o,L_o) = H^i(Y_o,\underline{Lie}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) .$$

Enonçons maintenant un certain nombre de corollaires concernant le cas où Y est un groupe diagonalisable (I , 4.4) ; on sait alors (loc. cit. 5.3.3) que si S est affine , la cohomologie de Y à valeur dans tout $\underline{O}_S$-Module quasi-cohérent est nulle . D'abord un cas particulier :

Corollaire 2.4. Soient S un préschéma et S_o un sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent . Soit Y un S-groupe diagonalisable et soit

(a) X un S-groupe localement de présentation finie sur S ,

(b) $X = \underline{Aut}_S(E)$ où E est localement de présentation finie sur S .

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S-groupes tel que le morphisme $f_o : Y_o \longrightarrow X_o$ obtenu par changement de base soit le morphisme unité .
Alors f est le morphisme unité.

En effet, la question est locale sur S et (dans (b)) sur E. On peut donc supposer S affine et (dans (b)) E de présentation finie sur S. En introduisant maintenant les sous-préschémas fermés S_n de S définis par les puissances de l'idéal définissant S_o, on est ramené au cas où S_o est défini par un idéal de carré nul, et en ce cas l'assertion énoncée résulte du théorème, via 2.2.

Dans le cas où on ne suppose pas nécessairement que f_o soit le morphisme unité, on a :

Corollaire 2.5. Soient S et S_o comme dans 2.4. Supposons de plus S affine. Soient Y un S-groupe diagonalisable, X un S-foncteur en groupes et $f_o : Y_o \longrightarrow X_o$ un morphisme de S_o-foncteurs en groupes.

(i) Supposons que l'on ait l'une des deux propriétés suivantes :

(a) X est un S-groupe localement de présentation finie sur S;

(b) $X = \underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$ où E est de présentation finie sur S.

Alors f_o se prolonge en un morphisme de S-groupes $Y \longrightarrow X$ si et seulement si il se prolonge en un morphisme de S-foncteurs $Y \longrightarrow X$.

(ii) Supposons que l'on ait l'une des deux propriétés suivantes :

(a) X est un S-groupe lisse sur S ;

(b) $X = \underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$ où E est lisse et affine sur S.

Alors f_o se prolonge en un morphisme de S-groupes $Y \longrightarrow X$, deux tels prolongements sont conjugués par un automorphisme intérieur de X défini par une section de X sur S induisant la section unité de X_o sur S_o.

Introduisant les S_n comme ci-dessus, (i) résulte de proche en proche de la partie (ii) du théorème. Pour (ii), on raisonne de même, en remarquant que les conditions de 2.1 (i) sont automatiquement vérifiées par 2.3 (noter qu'un préschéma lisse sur S est nécessairement localement de présentation finie sur S, donc qu'un préschéma lisse et affine sur S est nécessairement de présentation finie); en outre toute section de X_{S_n} sur S_n se relève en une section de $X_{S_{n+1}}$ sur S_{n+1} (d'après la définition de "lisse sur S" pour (a), et d'après 0.16 pour (b)) ; si f et f' sont deux relèvements de f_o, on peut supposer de proche en proche $f_n = f'_n$ en relevant l'automorphisme intérieur dont l'existence est affirmée par la partie (ii) du théorème, ce qui achève la démonstration.

En raisonnant de même, on obtient pour un Y quelconque :

Corollaire 2.6. Soient S un préschéma, $\underline{I}$ un idéal nilpotent définissant le sous-préschéma fermé S_o, Y un S-groupe plat sur S et affine, X un S-groupe lisse sur S.

(i) Si, pour tout $n \geqslant 0$, on a $H^2(Y_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2}) = 0$, tout morphisme de S_o-groupes $f_o : Y_o \longrightarrow X_o$ se relève en un morphisme de S-groupes $f : Y \longrightarrow X$.

(ii) Si, pour tout $n \geqslant 0$, on a $H^1(Y_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2}) = 0$, deux tels relèvements sont conjugués par un automorphisme intérieur de X défini par une section de X sur S induisant la section unité de X_o sur S_o.

Or on a le lemme suivant :

Lemme 2.7. Soient S un schéma affine, G un S-groupe affine, $\underline{F}$ un $\underline{O}_S$-module quasi-cohérent, $\underline{L}$ un $\underline{O}_S$-module localement libre. Supposons que l'on ait une opération de G sur $\underline{F}$ au sens de l'exposé I, ce qui définit une opération de G sur $\underline{F} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{L}$. Notons A l'anneau de S, L le A-module définissant $\underline{L}$ (qui est donc un module projectif). On a un isomorphisme canonique

$$H^*(G, \underline{F} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{L}) \simeq H^*(G,\underline{F}) \otimes_A L .$$

En effet, dans la situation de l'énoncé, les groupes de cohomologie de G à valeurs dans $\underline{F}$ se calculent comme les groupes de sections des faisceaux de cohomologie $\underline{H}^n(G,\underline{F})$ (I, 5.3). Or il résulte immédiatement de la définition de ces faisceaux de cohomologie que leur formation commute au produit tensoriel par un faisceau localement libre. En prenant les sections (on est sur une base affine), on trouve le résultat annoncé.

En utilisant le lemme, on transforme 2.6 en :

Corollaire 2.8. Soient S un schéma affine, $\underline{I}$ un idéal nilpotent sur S définissant le sous-préschéma fermé S_o. Supposons les $\underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2}$ localement libres sur S_o. Soient Y un S-groupe plat sur S et affine, X un S-groupe lisse sur S, et $f_o : Y_o \longrightarrow X_o$ un morphisme de S-groupes.

(i) Si $H^2(Y_o,\underline{Lie}(X_o/S_o)) = 0$, f_o se relève en un morphisme de S-groupes $Y \longrightarrow X$.

(ii) Si $H^1(Y_o,\underline{Lie}(X_o/S_o)) = 0$, deux tels relèvements sont conjugués par un automorphisme intérieur de X défini par une section de X sur S induisant la section unité de X_o sur S_o.

En particulier, faisant $Y = X$:

Corollaire 2.9. Soient S et S_o comme ci-dessus. Soit X un S-groupe lisse sur S et affine.

(i) Si $H^1(X_o,\underline{Lie}(X_o/S_o)) = 0$, tout endomorphisme de X au-dessus de S induisant l'identité sur X_o est l'automorphisme intérieur défini par une section de X sur S induisant la section unité de X_o sur S_o.

(ii) *Si* $H^2(X_o,\underline{Lie}(X_o/S_o)) = 0$, *tout* S_o-*automorphisme de* X_o *se prolonge en un* S-*automorphisme de* X .

Remarque 2.10. Les assertions concernant les H^1 ont des réciproques d'après le théorème . Signalons comme exemple la suivante : si $S = I_{S_o}$ est le schéma des nombres duaux sur S_o (II, 2.1) et si X est un S-groupe plat sur S tel que tout automorphisme de X sur S induisant l'identité sur S_o soit l'automorphisme intérieur défini par une section de X sur S induisant la section unité de X_o sur S_o , alors $H^1(X_o,\underline{Lie}(X_o/S_o)) = 0$.

Corollaire 2.11. *Soient* S , $\underline{I}$ *et* $\underline{J}$ *comme en* 2.1. *Soient* Y *un* S-*préschéma en groupes plat sur* S , X *un* S-*préschéma en groupes* , $f : Y \longrightarrow X$ *un morphisme de* S-*groupes* . *L'ensemble des morphismes de* Y *dans* X *déduits de* f *par conjugaison par des* $x \in X(S)$ *induisant l'unité de* $X(S_{\underline{J}})$ *est isomorphe au quotient*

$$E = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J}) \;/\; \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J})^{\mathrm{ad}(Y_o)} ,$$

où le second groupe est formé des $\underline{O}_{S_o}$-*morphismes* $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o} \longrightarrow \underline{J}$, *qui par tout changement de base* $S' \longrightarrow S_o$ *donnent des morphismes* $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{S'} \longrightarrow \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{S'}$ *invariants sous l'action de* $Y_o(S')$ *sur le premier facteur* .

Par 2.1 (iii) , on sait que l'ensemble cherché est isomorphe à $\Gamma(L_o)/H^o(Y_o,L_o)$. Or $\Gamma(L_o) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}, \underline{J})$ et $H^o(Y_o,L_o)$ n'est évidemment autre que $\Gamma(L_o)^{\mathrm{ad}(Y_o)}$ au sens de l'énoncé précédent .

Corollaire 2.12. Sous les conditions de 2.11 , supposons de plus $\underline{\omega}^1_{X_o/S_o}$ localement libre (de type fini) . Alors

$$E \simeq \Gamma(S_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J})/H^o(Y_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) .$$

Corollaire 2.13. Supposons de plus Y_o diagonalisable . Alors

$$E \simeq \Gamma(S_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) / \Gamma(S_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)^{\mathrm{ad}(Y_o)} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J})$$

où $\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)^{\mathrm{ad}(Y_o)}$ peut être construit comme le facteur de la décomposition de I , 4.7.3 , correspondant au caractère nul de Y_o .

En effet , si $Y_o \simeq D_{S_o}(M)$, on a par loc. cit. une décomposition en somme directe :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) = \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)_o \oplus \coprod_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)_m .$$

En tensorisant par $\underline{J}$, on trouve une décomposition analogue pour $\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}$, d'où la relation

$$H^o(Y_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes \underline{J}) \simeq \Gamma(S_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)_o \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) .$$

Corollaire 2.14. Supposons de plus S_o affine . Alors

$$E \simeq \Gamma(S_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)/\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)^{\mathrm{ad}(Y_o)} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) .$$

3. Extensions infinitésimales d'un préschéma en groupes .

Toujours dans les notations du n° 0 (S , $\underline{I}$, $\underline{J}$, etc...) , donnons-nous un S-préschéma X et supposons $X_{\underline{J}}$ muni d'une structure de groupe . Nous nous proposons de trouver les structures de S-groupe sur X induisant sur $X_{\underline{J}}$ la structure donnée .

A partir de maintenant, nous supposons X plat sur S . Soit $\underline{C}$ la catégorie des S-préschémas plats sur S . On a donc $X \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$. Nous noterons Y , resp. M , le foncteur sur $\underline{C}$ défini par X^+ , resp. $L_X^!$. Le morphisme canonique $p_X : X \longrightarrow X^+$ définit un morphisme de $\hat{\underline{C}}$

$$p : X \longrightarrow Y$$

et l'opération de $L_X^!$ sur X dans $\widehat{(Sch)}_{/S}$ définit une opération de M sur X dans $\hat{\underline{C}}$. On vérifie aussitôt que X devient bien ainsi formellement principal homogène sous M_Y au-dessus de Y . (cf. 0.2 (i) et 0.4) .

L'opération de X^+ sur $L_X^!$ définie en 0.8 (notée Ad en loc. cit.) définit une opération notée f de Y sur M . On sait , d'autre part (0.8) , que

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{C}}}(Z,M) \simeq \mathrm{Hom}_{S_o}(Z_o,L_o) \quad , \quad Z \in \mathrm{Ob}\, \underline{C} \ ,$$

où L_o est le foncteur défini en 0.5.

Lemme 3.1. (i) La condition $(+)_n$ de 1.3 est vérifiée pour tout entier positif n.

(ii) Si on fait opérer le S_o-groupe X_o sur le S_o-foncteur L_o par l'intermédiaire de sa représentation adjointe, on a un isomorphisme canonique

$$H^*(X_o,L_o) \simeq H^*(Y,M) \ ,$$

(la première cohomologie est calculée dans $(Sch)_{/S_o}$, la seconde dans $\underline{C}$) .

Les deux parties du lemme résultent de la relation :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{C}}}(Y,M) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{(Sch)}_{/S_o}}(X^+ \times_S S_o , L_o) \simeq \mathrm{Hom}_{S_o}(X_o,L_o) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\underline{C}}}(X,M)$$

qui provient aussitôt de la définition de M comme un $\prod_{S_o/S}$.

Cette relation étant plus généralement vérifiée en remplaçant X , Y par X^n , Y^n , on en déduit que tout morphisme $X^n \longrightarrow M$ se factorise de manière unique par Y^n , ce qui entraîne $(+)_n$. On en déduit aussi la relation $C^*(Y,M) = C^*(X_o,L_o)$ ce qui entraîne (ii) .

Nous pouvons donc appliquer les constructions de 1.3 . En particulier

Lemme 3.2. Soit $P : X \times_S X \longrightarrow X$ un morphisme . Pour que P relève la loi de groupe de $X_{\underline{J}}$, il faut et il suffit que P soit une loi de composition admissible sur X .

En effet, pour que P relève la loi de groupe de $X_{\underline{J}}$, il faut et il suffit que P relève la loi de groupe de X^+ , où encore celle de Y . Il n'y a donc qu'à montrer que tout morphisme P relevant la loi de groupe de $X_{\underline{J}}$ vérifie l'identité (++) de 1.3.2 , ce qui est exactement ce qu'on a vu en 0.8.

Proposition 3.3. Soient S un préschéma et S_o un sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent . Soit X un S-préschéma plat , et quasi-compact ou localement de présentation finie sur S . Soit $P : X \times_S X \longrightarrow X$ une loi de composition sur X . Pour que P soit une loi de groupe , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(i) P est associatif .

(ii) P <u>induit sur</u> $X_o = X \times_S S_o$ <u>une loi de groupe</u> .

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes . Supposons d'abord que X possède une section sur S . Comme $X(S')$ est alors non vide pour chaque $S' \longrightarrow S$, il suffit (Bourbaki, Alg. ch. I, exercice 2 , b)) de montrer que toute translation par un élément de $X(S')$ est un isomorphisme . On peut évidemment supposer $S' = S$; cette translation induit sur X_o une translation qui est donc un automorphisme de X_o . On conclut par platitude (SGA 1 III 4.2).
Ne supposant plus maintenant que X possède une section sur S , supposons qu'il existe un $S' \longrightarrow S$ tel que $X_{S'}$ possède une section sur S' . Alors $X_{S'}$ est un S'-groupe d'après ce qu'on vient de voir; considérons sa section unité e' . L'image inverse de e' par $pr_i : S' \times_S S' \longrightarrow S'$ $(i = 1,2)$ est la section unité de $X_{S''}$ pour la loi de groupe image inverse de $P_{S'}$ par pr_i . Mais comme P est "défini sur S", ces deux lois de groupes coïncident, donc aussi leur section unité . On a donc $pr_1^*(e') = pr_2^*(e')$. Si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de descente, il existera une section de X donnant e' par extension de la base, et on aura terminé . Comme X_X possède une section sur X (la section diagonale) , on voit qu'il suffit maintenant de prouver que $X \longrightarrow S$ est un morphisme de descente . Or il est plat et surjectif , et quasi-compact ou localement de présentation finie donc couvrant pour (fpqc) , donc un morphisme de descente (exposé IV, n° 6) .

<u>Remarque</u> : En fait l'hypothèse $X \longrightarrow S$ quasi-compact ou localement de présentation finie est superflue, en vertu du résultat suivant que le lecteur démontrera comme exercice sur l'exposé IV :

Sous les conditions du texte sur S et S_o , si $X \longrightarrow S$ est un morphisme plat et $X_o \longrightarrow S_o$ un morphisme couvrant pour (fpqc) , alors $X \longrightarrow S$ est un morphisme de descente .

Lemme 3.4. Pour que deux lois de compositions admissibles sur X soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles soient déduites l'une de l'autre par un automorphisme de X au-dessus de S induisant l'identité sur $X_{\underline{J}}$.

En effet, les morphismes construits en 1.3.1 sont exactement ceux de l'énoncé précédent (par 0.7).

Compte tenu de tous les résultats précédents, la proposition 1.3.6 donne :

Théorème 3.5. Soient S un préschéma, $\underline{I}$ et $\underline{J}$ deux idéaux sur S tels que $\underline{I} \supset \underline{J}$, $\underline{I} \cdot \underline{J} = 0$, S_o et $S_{\underline{J}}$ les sous-préschémas fermés de S qu'ils définissent. Soit X un S-préschéma plat (et localement de présentation finie ou quasi-compact sur S) sur S, X_o et $X_{\underline{J}}$ les préschémas obtenus par changement de base. Supposons $X_{\underline{J}}$ muni d'une structure de $S_{\underline{J}}$-groupe et notons L_o le S_o-foncteur en groupes abéliens définis par la formule

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(T,L_o) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_T}(\boldsymbol{\omega}^1_{X_o/S_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_T \, , \, \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_T)$$

sur lequel X_o opère par l'intermédiaire de sa représentation adjointe.

(i) Pour qu'il existe une structure de S-groupe sur X induisant la structure donnée sur $X_{\underline{J}}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i_1) Il existe un morphisme de S-préschémas $X \times_S X \longrightarrow X$ induisant la loi de groupe de $X_{\underline{J}}$.

(i_2) Une certaine d'obstruction appartenant à $H^3(X_o, L_o)$ (définie canoniquement par la donnée de X et de la loi de groupe de $X_{\underline{J}}$) est nulle.

(ii) Si les conditions de (i) sont satisfaites l'ensemble des lois de groupe sur X induisant la loi donnée de $X_{\underline{J}}$, module les

S-automorphismes de X induisant l'identité sur X_J, est un ensemble principal homogène sous $H^2(X_o,L_o)$.

Remarque 3.6. Soit X_J un S_J-préschéma lisse sur S_J et affine . Par 0.15 il existe à isomorphisme près un unique S-préschéma X , lisse sur S , et se réduisant suivant X_J . Si X_J est muni d'une structure de S_J-groupe , il résulte de 0.16 que la condition (i_1) est automatiquement vérifiée . De plus , d'après 0.6 la définition de L_o se simplifie et on obtient :

Corollaire 3.7. Soient S , $\underline{I}$ et $\underline{J}$ comme dans 3.1. Soit X_J un S_J-groupe lisse sur S_J et affine .

(i) L'ensemble des S-groupes lisses sur S et se réduisant suivant X_J à isomorphisme (induisant l'identité sur X_J) près , est vide ou principal homogène sous le groupe

$$H^2(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) .$$

(ii) Il existe un S-groupe lisse sur S se réduisant suivant X_J si et seulement si une certaine obstruction dans

$$H^3(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J})$$

est nulle .

On en déduit comme d'habitude les corollaires suivants :

Corollaire 3.8. Soient S un préschéma et S_o un sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent $\underline{I}$. Soit X_o un S_o-groupe lisse sur S et affine .

(i) Si $H^2(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2}) = 0$ pour tout $n \geq 0$, deux S-groupes lisses sur S se réduisant suivant X_o sont isomorphes (par un isomorphisme induisant l'identité sur X_o) .

(ii) Si $H^3(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2}) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, il existe un S-groupe lisse sur S , se réduisant suivant X_o .

Corollaire 3.9. Soient S un préschéma affine et S_o un sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent $\underline{I}$. Supposons les $\underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2}$ localement libres sur S_o . Soit X_o un S_o-groupe lisse et affine sur S_o

(i) Si $H^2(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)) = 0$, deux S-groupes lisses sur S se réduisant suivant X_o sont isomorphes .

(ii) Si $H^3(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)) = 0$, il existe un S-groupe lisse sur S se réduisant suivant X_o .

Corollaire 3.10. Soient S_o un préschéma et $S = I_{S_o}$ le schéma des nombres duaux sur S_o . Soit X_o un S_o-groupe lisse sur S_o . Pour que tout S-groupe Y , lisse sur S , tel que Y soit S_o-isomorphe à X_o , soit S-isomorphe à $X = X_o \times_{S_o} S$, il faut et il suffit que $H^2(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)) = 0$.

En effet , en vertu de 3.5 l'ensemble des classes, à un isomorphisme de S-groupes près "induisant l'identité sur X_o", de tels groupes Y , est en correspondance biunivoque avec $H^2(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o))$, donc l'ensemble des classes, à un isomorphisme de S-groupes quelconque près, est en correspondance biunivoque avec

$$H^2(X_o,\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o))/\Gamma_o \quad ,$$

où

$$\Gamma_o = \mathrm{Aut}_{S_o\text{-}gr}(X_o) \quad ,$$

(qui opère de façon évidente sur le H^2). La conclusion résulte aussitôt de là.

4. Extensions infinitésimales de sous-groupes fermés .

Enonçons d'abord un résultat valable dans une catégorie abélienne quelconque .

Lemme 4.1. Soient $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ une suite exacte , $A' \to Q$ un morphisme et $A'' \to P$ un épimorphisme de noyau C . Soit E l'ensemble (à isomorphisme près) des quadruplets (B,f,g,h) tels que la suite

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

soit exacte et le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

(i) Pour que E soit non vide, il faut et il suffit que l'image dans $\mathrm{Ext}^1(C,Q)$ de l'élément A de $\mathrm{Ext}^1(A'',A')$ soit nulle .

(ii) Sous ces conditions, E est un ensemble principal homogène sous le groupe abélien $\mathrm{Hom}(C,Q)$.

Introduisons la somme amalgamée $B' = A \coprod^{A'} Q$. On a alors un diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] & B' \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

et il est clair que la catégorie des solutions du problème posé est canoniquement isomorphe à la catégorie des solutions du problème correspondant pour la suite $0 \longrightarrow Q \longrightarrow B' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ et les morphismes $Q \xrightarrow{\text{id}} Q$ et $A'' \longrightarrow P$. On est donc ramené à démontrer le lemme dans le cas où $A' \longrightarrow Q$ est un isomorphisme. En ce cas, l'ensemble E est évidemment en correspondance biunivoque avec l'ensemble des sous-objets N de A tels que $A \longrightarrow A''$ induise un isomorphisme de N avec le noyau C de $A'' \longrightarrow P$, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes $C \longrightarrow A$ relevant le morphisme canonique $C \longrightarrow A''$; ce qui donne le résultat cherché.

On déduit immédiatement de (ii) :

Proposition 4.2. Soient $(X,\underline{O}_X)$ *un espace annelé,* $\underline{J}$ *un idéal de carré nul de* $\underline{O}_X$, $\underline{F}$ *un* $\underline{O}_X$*-module. Notons* $\underline{F}_o = \underline{F}/\underline{J}\underline{F}$ *et soit* $\underline{G}_o$ *un module-quotient de* $\underline{F}_o$. *Donnons-nous un morphisme de* $\underline{O}_X/\underline{J}$*-modules*

$$f : \underline{J} \otimes_{\underline{O}_X/\underline{J}} \underline{G}_o \longrightarrow \underline{Q} \quad .$$

Soit $\underline{E}$ *le faisceau sur* X *défini comme suit : pour chaque ouvert* U *de* X, $\underline{E}(U)$ *est l'ensemble des modules-quotients* $\underline{G}$ *de* $\underline{F} \mid U$, *tels que* $\underline{G} / (\underline{J} \mid U)\, \underline{G} = \underline{G}_o \mid U$ *et qu'il existe un isomorphisme (évidemment unique)*

$$(\underline{J} \mid U)\, \underline{G} \simeq \underline{Q} \mid U$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\underline{J}\ U) \otimes (\underline{G}_o \mid U) \arrow[r, "f \mid U"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & \underline{Q} \mid U \\
(\underline{J} \mid U)\ \underline{G} \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

Alors $\underline{E}$ est un faisceau formellement principal homogène sous le faisceau en groupes commutatifs

$$\underline{A} = \underline{Hom}_{\underline{O}_X/\underline{J}}(\underline{H}_o, \underline{Q}) ,$$

où on a posé $\underline{G}_o = \underline{F}_o/\underline{H}_o$.

Proposition 4.3. (TDTE IV 5.1). Soient S un préschéma, S_o un sous-préschéma fermé défini par l'idéal $\underline{J}$ quasi-cohérent de carré nul , X un S-préschéma , $\underline{F}$ un $\underline{O}_X$-module quasi-cohérent , $X_o = X \times_S S_o$, $\underline{F}_o = \underline{F} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{S_o}$. Soit $\underline{G}_o = \underline{F}_o/\underline{H}_o$ un module quotient quasi-cohérent de $\underline{F}_o$, plat sur S_o . Pour tout ouvert U de X , soit $\underline{E}(U)$ l'ensemble des modules-quotients $\underline{G}$ du $\underline{O}_U$-module $\underline{F} \mid U$, plats sur S et tels que $\underline{G} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{S_o} \simeq \underline{G}_o \mid U$, (qui sont nécessairement quasi-cohérents comme extension de deux modules quasi-cohérents, cf. EGA III, 1.4.17) . Alors les $\underline{E}(U)$ forment un faisceau $\underline{E}$ sur X , qui est formellement principal homogène sous le faisceau en groupes commutatifs

$$\underline{A} = \underline{Hom}_{\underline{O}_{X_o}}(\underline{H}_o, \underline{G}_o \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) .$$

Suivant le critère fondamental de platitude (voir par exemple SGA 1 IV, 5.1), $\underline{G}$ est plat sur S si et seulement si G_o est plat sur S_o et le morphisme canonique $\underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{G}_o \longrightarrow \underline{J}\, \underline{G}$ est un isomorphisme . Il n'y a donc qu'à appliquer la proposition précédente, en prenant pour f le morphisme identique de $\underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{G}_o = \underline{J}\, \underline{O}_X \otimes_{\underline{O}_{X_o}} \underline{G}_o$.

Prenant maintenant $F = \underline{O}_X$ et raisonnant comme d'habitude, on en déduit:

Corollaire 4.4. *Soient* S, S_o , $\underline{J}$, X , X_o *comme ci-dessus . Soit* Y_o *un sous-préschéma fermé de* X_o , *plat sur* S_o . *Soit* E *l'ensemble des sous-préschémas fermés* Y *de* X , *plats sur* S , *tels que* $Y \times_S S_o = Y_o$.

(i) *L'ensemble* E *est vide ou principal homogène sous*

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_{X_o}}(\underline{I}_{Y_o}, \underline{O}_{Y_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J})$$

où $\underline{I}_{Y_o}$ *est l'Idéal définissant* Y_o *dans* X_o .

(ii) *Pour que* E *soit non vide, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(a) *Il existe localement sur* X *une solution du problème* .

(b) *Une certaine obstruction est nulle, qui se trouve dans*

$$H^1(X_o, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{X_o}}(\underline{I}_{Y_o}, \underline{O}_{Y_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J})) \quad .$$

Effectuons maintenant un certain nombre de transformations . Comme $\underline{J}$ est de carré nul , on peut aussi écrire

$$\underline{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{X_o}}(\underline{I}_{Y_o}, \underline{O}_{Y_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{X_o}}(\underline{I}_{Y_o}/\underline{I}_{Y_o}^{\,2}, \underline{O}_{Y_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) \quad .$$

Comme $\underline{I}_{Y_o}/\underline{I}_{Y_o}^2$ est annulé par $\underline{I}_{Y_o}$, on peut le considérer comme un faisceau sur Y_o , que l'on note $\underline{N}_{Y_o/X_o}$, faisceau conormal à Y_o dans X_o . En posant

$$\underline{A}' = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{Y_o}}(\underline{N}_{Y_o/X_o}, \underline{O}_{Y_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) \quad ,$$

on aura $H^i(X_o,\underline{A}) = H^i(Y_o,\underline{A}')$, $i \geqslant 0$.

Introduisant maintenant deux idéaux $\underline{I}$ et $\underline{J}$, raisonnant comme dans 0.2 , et supprimant à la manière habituelle l'hypothèse : Y fermé , on obtient

Proposition 4.5. Soient S un préschéma , S_o et S_J les sous-préschémas fermés définis par les idéaux quasi-cohérents $\underline{I}$ et $\underline{J}$, tels que $\underline{I} \supset \underline{J}$ et $\underline{I} \cdot \underline{J} = 0$. Soient X un S-préschéma et Y_J un sous-préschéma de X_J , plat sur S_J . Soit $\underline{A}_o$ le $\underline{O}_{Y_o}$-module défini par

$$\underline{A}_o = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{Y_o}}(\underline{N}_{Y_J/X_J} \otimes_{\underline{O}_{Y_J}} \underline{O}_{Y_o} , \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o}) \quad .$$

(i) Pour qu'il existe un sous-préschéma Y de X , se réduisant suivant Y_J , plat sur S , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(a) Un tel Y existe localement sur X .

(b) Une certaine obstruction dans $H^1(Y_o,\underline{A}_o)$ est nulle .

(ii) Sous ces conditions, l'ensemble des Y répondant aux conditions exigées est principal homogène sous le groupe commutatif $H^o(Y_o,\underline{A}_o)$.

Remarque 4.6. Si X est plat sur S et si $Y_{\underline{J}}$ est localement intersection complète dans $X_{\underline{J}}$, alors la condition (a) est toujours satisfaite et tout Y S-plat relevant $Y_{\underline{J}}$ est alors localement intersection complète dans X. Si de plus Y_o est affine, la condition (b) est également satisfaite.

Remarque 4.7. Il résulte de (ii) la donnée pour tout couple (Y,Y') de sous-préschémas fermés de X, plats sur S et se réduisant suivant $Y_{\underline{J}}$ d'une déviation

$$d(Y,Y') \in H^o(Y_o,\underline{A}_o) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(\underline{N}_{Y_{\underline{J}}/X_{\underline{J}}} \otimes_{\underline{O}_{Y_J}} \underline{O}_{Y_o}, \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o}) .$$

Proposition 4.8. Soient S, $\underline{I}$, $\underline{J}$ et X comme dans 4.5 I étant nilpotent. Soit Y un sous-préschéma de X.

(i) Soient T un S-préschéma et $f : T \longrightarrow X$ un S-morphisme tel que $f_{\underline{J}} : T_{\underline{J}} \to X_{\underline{J}}$ se factorise par $Y_{\underline{J}}$. On peut alors définir une obstruction

$$c(X,Y,f) \in \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(f_o^*(\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o}), \underline{J} \cdot \underline{O}_T)$$

dont la nullité est nécessaire et suffisante à l'existence d'une factorisation de f par Y.

(ii) Supposons en particulier Y plat sur S et soit Y' un sous-préschéma de X, plat sur S, tel que $Y'_{\underline{J}} = Y_{\underline{J}}$. Considérons le morphisme canonique

$$u : \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(N_{Y_{\underline{J}}/X_J} \otimes_{\underline{O}_{Y_J}} \underline{O}_{Y_o}, \underline{J}.\underline{O}_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o}, \underline{J}.\underline{O}_Y)$$

Si on note $i' : Y' \longrightarrow X$ l'immersion canonique, on a

$$c(X,Y,i') = u(d(Y,Y')) ,$$

où $d(Y,Y')$ est la déviation de 4.7.

(iii) Considérons le morphisme canonique (SGA 1 II, formule 4.3)

$$\underline{N}_{Y/X} \xrightarrow{D} \underline{\Omega}^1_{X/S} \otimes_{\underline{O}_X} \underline{O}_Y$$

Il induit pour tout $f_o : T_o \longrightarrow X_o$ se factorisant par Y_o, un morphisme :

$$v_{f_o} : \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(f_o^*(\underline{\Omega}^1_{X_o/S_o}), \underline{J}.\underline{O}_T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(f_o^*(\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o}), \underline{J}.\underline{O}_T) ,$$

(Le premier membre n'est autre que $\mathrm{Hom}_{X^+}(T,L_X)$, cf. 0.2) .

Soit $a \in \mathrm{Hom}_{X^+}(T,L_X)$; considérons le morphisme composé

$$g : T \xrightarrow{a \times f} L_X \times_{X^+} X \longrightarrow X ,$$

où $f : T \longrightarrow X$ est un morphisme de l'espèce étudiée en (i) .

Alors

$$c(X,Y,g) - c(X,Y,f) = v_{f_o}(a) .$$

Nous allons démontrer la partie (i) de la proposition, laissant au lecteur le soin de (ne pas) vérifier les assertions (ii) et (iii) ; cette vérification se fait par réduction au cas affine, puis par comparaison des définitions explicites .

Démontrons donc (i) . Comme T , $T_{\underline{J}}$ et T_o d'une part, X , $X_{\underline{J}}$ et X_o d'autre part , ont même espace topologique sous-jacent, les applications continues sous-jacentes à f , $f_{\underline{J}}$ et f_o sont les mêmes . Notons

$f(\underline{O}_T) = f_o(\underline{O}_T)$ l'image directe (ensembliste) du faisceau d'anneaux $\underline{O}_T$ par l'application continue précédente . Le morphisme $f : T \longrightarrow X$ définit un morphisme de faisceaux d'anneaux $\underline{O}_X \longrightarrow f(\underline{O}_T)$.

Comme d'habitude, on peut se restreindre au cas où Y est fermé , donc défini par un faisceau d'idéaux $\underline{I}_Y$.

Pour que f se factorise par Y , il faut et il suffit que l'application composée $\underline{I}_Y \longrightarrow \underline{O}_X \longrightarrow f(\underline{O}_T)$ soit nulle. Comme $f_{\underline{J}}$ se factorise par $Y_{\underline{J}}$, l'application composée $\underline{I}_{Y_{\underline{J}}} \longrightarrow \underline{O}_{X_{\underline{J}}} \longrightarrow f(\underline{O}_{T_J})$

est nulle . Considérons le diagramme commutatif où la première ligne est exacte .

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f(\underline{J}.\underline{O}_T) \arrow[r] & f(\underline{O}_T) \arrow[r] & f(\underline{O}_{T_{\underline{J}}}) \\
 & & \underline{O}_X \arrow[u] \arrow[r] & \underline{O}_{X_{\underline{J}}} \arrow[u] \\
 & & \underline{I}_Y \arrow[u] \arrow[r] \arrow[uul, dashed, "h"] & \underline{I}_{Y_J} \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad ;$$

il se complète par un morphisme

$$h : \underline{I}_Y \longrightarrow f(\underline{J}.\underline{O}_T) \quad .$$

Mais, comme $\underline{J}^2 = 0$ et $\underline{I} \cdot \underline{J} = 0$, on a une factorisation

$$\begin{tikzcd}
\underline{I}_Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\text{surj.}"'] & & f(\underline{J}.\underline{O}_T) = f^{\circ}(\underline{J}.\underline{O}_T) \\
& \underline{I}_Y/\underline{I}_Y^2 \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o} \arrow[ur, "h'"'] &
\end{tikzcd} \quad .$$

Par définition de l'image directe , h' définit un morphisme

$$f_o^*(\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o}) \longrightarrow \underline{J} \cdot \underline{O}_T$$

qui est l'obstruction $c(X,Y,f)$ cherchée .

Remarque 4.9. Cette obstruction se calcule localement sur T . Si on suppose T affine, soit $T = \operatorname{Spec} C$, et de même $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} B/I_Y$, $S = \operatorname{Spec} A$, $S_J = \operatorname{Spec} A/J$, $S_o = \operatorname{Spec} A/I$, elle se calcule par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
I_Y \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r, "f"] & C \\
I_Y/I_Y^2 \arrow[r] & I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_o \arrow[r, "c"] & JC \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad .$$

L'obstruction c est donc définie comme l'unique morphisme de C_o-modules $I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_o \longrightarrow JC$ tel que, avec les notations évidentes, on ait $c(\bar{x} \otimes 1) = f(x)$, pour tout $x \in I_Y$.

Remarque 4.10. Si Y_o est localement intersection complète dans X_o (ce qui implique que Y l'est dans X) , on a $\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o} = N_{Y_o/X_o}$.

Plus précisément, on a de toutes façons un morphisme <u>surjectif</u> de $\underline{O}_{Y_o}$-Modules

$$\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o} \xrightarrow{\text{surj.}} \underline{N}_{Y_o/X_o}$$

qui est également injectif si Y est localement intersection complète dans X (comme il résulte aussitôt du fait que Y et $\underline{N}_{Y/X}$ sont plats sur S). Dans le cas "affine" de la remarque précédente, ceci se traduit par un morphisme

$$I_Y/I_Y^2 \otimes_B B_o \xrightarrow{\text{surj.}} I_{Y_o}/I_{Y_o}^2 \quad ,$$

donc un morphisme

$$I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_o \xrightarrow{\text{surj.}} I_{Y_o}/I_{Y_o}^2 \otimes_{B_o} C_o$$

qui est bijectif si Y est localement intersection complète dans X.

4.11. Nous nous proposons maintenant d'étudier la situation suivante : on a comme en 4.8 S, $S_{\underline{J}}$ et S_o, on a deux S-préschémas X et X', un sous-préschéma Y (resp. Y') de X (resp. X'), un S-préschéma T, des morphismes $f : T \to X'$ et $g : X' \to X$.

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, hook, "i'"'] & Y \arrow[d, hook, "i"'] \\ T \arrow[r, "f"] & X' \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd} \quad .$$

On suppose que par réduction modulo $\underline{J}$, ce diagramme se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \underline{Y}'_{\underline{J}} \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook, "i'_{\underline{J}}"'] & Y_{\underline{J}} \arrow[d, hook, "i_{\underline{J}}"'] \\ T_{\underline{J}} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f_{\underline{J}}"] & X'_{\underline{J}} \arrow[r, "g_{\underline{J}}"] & X_{\underline{J}} \end{tikzcd} .$$

On a donc par 4.8 des obstructions

$$c(X,Y,g \circ i) \in \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y'_o}}(i'^*_o\, g^*_o\,(\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o}),\ \underline{J}\,\underline{O}_{Y'})\ ,$$

$$c(X',Y',f) \in \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(f^*_o\,(\underline{N}_{Y'/X'} \otimes_{\underline{O}_{Y'}} \underline{O}_{Y'_o}),\ \underline{J}\,\underline{O}_T)\ ,$$

$$c(X,Y,g \circ f) \in \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(f^*_o\, g^*_o\,(\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o}),\ \underline{J}\,\underline{O}_T)\ ,$$

dont on cherche à calculer les relations .

Lemme 4.12. (i) Supposons Y' plat sur S' . On a alors un morphisme naturel

$$b_{f_o} : \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y'_o}}(i'^*_o\, g^*_o(\underline{N}_{Y/X} \otimes \underline{O}_{Y_o}),\ \underline{J}\,\underline{O}_{Y'}) \to \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(f^*_o\, g^*_o\,(\underline{N}_{Y/X} \otimes \underline{O}_{Y_o}),\ \underline{J}\,\underline{O}_T)\ .$$

(ii) Supposons de plus Y'_o localement intersection complète dans X'_o . On a alors un morphisme naturel

$$a_{g_o} : \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(f^*_o\,(\underline{N}_{Y'/X'} \otimes \underline{O}_{Y'_o}),\ \underline{J}\,\underline{O}_T) \to \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(f^*_o\, g^*_o(\underline{N}_{Y/X} \otimes \underline{O}_{Y_o}),\ \underline{J}\,\underline{O}_T)\ .$$

Pour construire b_{f_o} , il suffit d'exhiber un $\underline{O}_{T_o}$-morphisme

$$f^*_o\,(\underline{J}\,\underline{O}_{Y'}) \longrightarrow \underline{J}\,\underline{O}_T\ ;$$

on a de toutes façons un diagramme

$$\begin{tikzcd}
f_o^*(\underline{J}\ \underline{O}_{Y'}) \arrow[r, dashed] & \underline{J}\ \underline{O}_T \\
f_o^*(\underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y'_o}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & \underline{J} \otimes_{O_{S_o}} \underline{O}_{T_o} \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad .$$

Si Y' est plat sur S' , la première flèche verticale est un isomorphisme , et on complète le carré immédiatement .

De la même manière, on construira a_{g_o} en exhibant un $\underline{O}_{Y'_o}$-morphisme

$$g_o^*(\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o}) \longrightarrow \underline{N}_{Y'/X'} \otimes_{\underline{O}_{Y'}} \underline{O}_{Y'_o} \quad ;$$

or on a de toutes façons un diagramme

$$\begin{tikzcd}
g_o^*(\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o}) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \underline{N}_{Y'/X'} \otimes_{\underline{O}_{Y'}} \underline{O}_{Y'_o} \arrow[d] \\
g_o^*(\underline{N}_{Y_o/X_o}) \arrow[r] & \underline{N}_{Y'_o/X'_o}
\end{tikzcd} \quad ;$$

si Y'_o est localement intersection complète dans X'_o , la deuxième flèche verticale est un isomorphisme et on complète le diagramme .

<u>Proposition</u> 4.13. <u>Supposons</u> Y' <u>plat sur</u> S <u>et</u> Y'_o <u>localement intersection complète dans</u> X'_o . <u>On a alors la formule</u> :

$$c(X,Y,g \circ f) = a_{g_o}(c(X',Y',f)) + b_{f_o}(c(X,Y,g \circ i')) \ .$$

Comme la définition des différentes obstructions et des morphismes a_{g_o} et b_{f_o} est locale , on voit facilement qu'il suffit de vérifier la formule donnée lorsque les différents schémas en cause sont affines .
Notons donc $S = \operatorname{Spec} \Lambda$, $S_{\underline{J}} = \operatorname{Spec} \Lambda/J$, $S_o = \operatorname{Spec} \Lambda/I$,

T = Spec C , X = Spec A , Y = Spec A/I_Y = Spec B , X' = Spec A' ,
Y' = Spec $A'/I_{Y'}$ = Spec B' .

On a donc un diagramme d'anneaux et d'idéaux

$$
\begin{tikzcd}
 & B' & B \\
C & A' \arrow[l, "f"'] \arrow[u] & A \arrow[l, "g"'] \arrow[u] \\
 & I_{Y'} \arrow[u, hook] & I_Y \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} .
$$

Etudions les différents termes de la formule à démontrer . D'abord
$c = c(X,Y,g \circ f)$. On a vu que c'est l'unique C_o-morphisme
$I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_o \longrightarrow J\,C$ tel que $c(\overline{x} \otimes 1) = f(g(x))$, pour tout $x \in I_Y$.
Soit donc $x \in I_Y$; posons $x' = g(x) \in I_{Y'} + J\,A'$. Ecrivons
$x' = y' + \Sigma\, \lambda_i\, a'_i$, $y' \in I_{Y'}$, $\lambda_i \in J$, $a'_i \in A'$. On a donc
$c(X,Y,g \circ f)\ (\overline{x} \otimes 1) = f(x') = f(y') + \Sigma\, \lambda_i\, f(a'_i)$.

Considérons maintenant $a_{g_o}\ (c(X',Y',f))$. D'après les définitions posées, il est défini par le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
I_{Y'} \arrow[r, hook] \arrow[d] & A' \arrow[r, "f"] & C \\
I_{Y'}/I_{Y'}^2 \otimes_{B'} C_o \arrow[r, "\sim"] & I_{Y'_o}/I_{Y'_o}^2 \otimes_{B'_o} C_o & \\
I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_o \arrow[u] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "a_{g_o}(c(X',Y',f))"'] & I_{Y_o}/I_{Y_o}^2 \otimes_{B_o} C_o \arrow[u, "g_o"] \arrow[r] & J\,C \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd} .
$$

On a donc $a_{g_o}(c(X',Y',f))(\bar{x} \otimes 1) = f(u)$, où u est un élément de $I_{Y'}$ relevant $g_o(x_o) = (g(x))_o = y'_o$. On prend donc $u = y'$ et on trouve

$$a_{g_o}(c(X',Y',f))(\bar{x} \otimes 1) = f(y') \quad .$$

Considérons enfin $b_{f_o}(c(X,Y,goi'))$. Il est défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
I_Y/I_Y^2 \otimes_B B'_o \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d] & J\,B' \arrow[d] & \\
I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_o \arrow[r] \arrow[drr, "b_{f_o}(c(X,Y,g\circ i'))"'] & J\,B' \otimes_{B'_o} C_o & J \otimes_o C_o \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
& & J\,C
\end{tikzcd} \quad .$$

On a donc aussitôt $b_{f_o}(c(X,Y,g \circ i')(\bar{x} \otimes 1) = f(\bar{g}(x)) = \Sigma\, \lambda_i f(a'_i)$.

La comparaison des trois résultats explicites donne la formule cherchée .

Corollaire 4.14. *Soit Y et Y' deux sous-préschémas plats de X se réduisant suivant Y_J , supposons Y_o localement intersection complète dans X_o . Si $T \xrightarrow{f} X$ est un S-morphisme tel que f_J se factorise par $Y_J \hookrightarrow X_J$, on a la formule*

$$c(X,Y',f) - c(X,Y,f) = f^*(d(Y',Y))$$

où f^* est le morphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(\underline{N}_{Y_o}/X_o, \underline{J}\,\underline{O}_Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(\underline{N}_{Y_o}/X_o, \underline{J}\,\underline{O}_T) \quad .$$

En effet, il suffit d'appliquer la formule précédente au diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, hook, "i'"'] & Y \arrow[d, hook] \\ T \arrow[r, "f"] & X \arrow[r, "id."] & X \end{tikzcd}$$

et d'utiliser la relation $c(X,Y,i') = d(Y,Y')$ (cf. 4.8 (ii))

Nota. En faisant dans la formule précédente $f = i'$, on retrouve la relation donnée dans 4.8 (ii) .

4.15. Nous allons maintenant considérer le cas où X est un S-groupe lisse sur S . Notons d'abord que tout sous-S-groupe Y plat sur S est localement intersection complète dans X . Esquissons la démonstration de ce fait . En vertu de résultats généraux (cf. en particulier SGA 1 IV 5.7), comme X et Y sont plats , on est ramené à vérifier l'assertion sur les fibres géométriques de S , donc lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos . On remarque ensuite que l'on a affaire à des groupes , donc qu'il suffit de vérifier l'assertion à l'origine . Enfin, pour vérifier que Y est à l'origine intersection complète dans X , on peut se contenter de le faire pour les groupes formels $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ correspondants à X et Y . Comme X est lisse , l'hyperalgèbre de $\hat{X}$ est une algèbre de polynômes et on conclut à l'aide du théorème de structure de DIEUDONNE qui montre que l'hyperalgèbre de $\hat{Y}$ s'obtient en "tronquant" celle de X , donc est intersection complète dans celle-ci (cf. Exp. VII) . Bien entendu , lorsque Y est également lisse sur S , il suffit d'invoquer simplement SGA 1 II 4.15.

Donnons-nous maintenant un sous-$S_{\underline{J}}$-groupe $Y_{\underline{J}}$ de $X_{\underline{J}}$, plat et localement de présentation finie sur $S_{\underline{J}}$. Nous savons d'abord que $Y_{\underline{J}}$ est localement intersection complète dans $X_{\underline{J}}$, donc (4.6) que tout S-préschéma Y relevant $Y_{\underline{J}}$ est localement intersection complète dans X et qu'un tel Y existe si en plus Y_o est affine .

4.16. De plus, on a $\underline{N}_{Y/X} \otimes_{\underline{O}_Y} \underline{O}_{Y_o} = \underline{N}_{Y_{\underline{J}}/X_{\underline{J}}} \otimes_{\underline{O}_{Y_{\underline{J}}}} \underline{O}_{Y_o} = \underline{N}_{Y_o/X_o}$.

Comme Y_o et X_o sont des S_o-groupes, on voit aisément que si l'on note $\underline{n}_{Y_o/X_o}$ l'image réciproque de N_{Y_o/X_o} par la section unité de Y_o (c'est un $\underline{O}_{S_o}$-Module quasi-cohérent), on a aussi

$$\underline{N}_{Y_o/X_o} = \underline{n}_{Y_o/X_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o} .$$

Les déviations et obstructions de 4.7 et 4.8 sont donc des éléments respectivement des groupes

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o}}(\underline{n}_{Y_o/X_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o} , \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o})$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\underline{O}_{T_o}}(\underline{n}_{Y_o/X_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{T_o} , \underline{J}\, \underline{O}_T) .$$

Considérons le foncteur en groupes commutatifs au-dessus de S_o défini par

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(Z,N) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_Z}(\underline{n}_{Y_o/X_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_Z , \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_Z) , \quad Z \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch})/_{S_o}$$

On sait que l'ensemble des sous-S-préschémas de X, <u>plats</u> sur S, relevant $Y_{\underline{J}}$, est vide ou principal homogène sous $\mathrm{Hom}_{S_o}(Y_o,N) = C^1(Y_o,N)$.

<u>Lemme</u> 4.17. <u>Sous les hypothèses précédentes, considérons pour chaque</u> Y <u>relevant</u> $Y_{\underline{J}}$ <u>l'obstruction</u> $DY \in \mathrm{Hom}_{S_o}(Y_o \times_{S_o} Y_o, N) = C^2(Y_o,N)$ <u>définie</u> par $D\,Y = c(X,Y, \pi \circ (i , i))$.

$$\begin{tikzcd} Y \times_S Y \arrow[d, "{(i,i)}"'] & & Y \arrow[d, hook] \\ X \times_S X \arrow[rr, "\pi"] & & X \end{tikzcd}$$

(i) Pour que Y soit un sous-S-groupe de X, il faut et il suffit que $DY = 0$.

(ii) Si on fait opérer Y_o sur N par fonctorialité à partir des automorphismes intérieurs de Y_o, alors $DY \in Z^2(Y_o, N)$.

(iii) Si Y et Y' sont deux sous-préschémas de X, plats sur S, relevant $Y_{\underline{J}}$ (de sorte qu'est définie la déviation $d(Y,Y') \in C^1(Y_o, N)$), on a

$$DY - DY' = \partial\, d(Y,Y')$$

Démontrons successivement ces diverses assertions.

4.18. Démonstration de 4.17 (i). Si $DY = 0$, alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \times_S X \arrow[r] & X \end{tikzcd},$$

donc Y est stable par la loi de groupe de X. Pour que ce soit un sous-groupe de X, il faut et il suffit que ce soit un groupe pour la loi induite; or celle-ci est associative, se réduit modulo $\underline{J}$ suivant la loi induite sur $Y_{\underline{J}}$ qui est une loi de groupe. Comme Y est plat, on conclut par 3.3.

4.19. Démonstration de 4.17 (ii). Celle-ci se fait en comparant les deux valeurs de $u = c(X, Y, \pi_3 \circ (i,i,i))$ calculées dans les deux diagrammes suivants D_j, $j = 1,2$:

$$(D_j) \quad \begin{tikzcd} Y \times_S Y \times_S Y \arrow[d, "{(i,i,i)}"'] & Y \times_S Y \arrow[d, hook, "{(i,i)}"'] & Y \arrow[d, hook, "{(i)}"'] \\ X \times_S X \times_S X \arrow[r, "f_j"'] & X \times_S X \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

où $f_1 = (1,\pi)$, $f_2 = (\pi,1)$, $\pi \circ f_j = \pi_3 : X \times X \times X \longrightarrow X$.

On applique chaque fois 4.13. On a donc

$$u = a_{1,\pi_o}((0,DY)) + b_{f_{1_o}}(DY) = a_{2,\pi_o}((DY,0)) + b_{f_{2_o}}(DY) .$$

La première chose que l'on remarque , c'est que $b_{f_{j_o}}$ n'est autre que $\mathrm{Hom}_{S_o}(f_{j_o}, N)$, c'est-à-dire le morphisme déduit de f_{j_o} par fonctorialité . L'identité ci-dessus devient donc, en notant $a_{j,\pi_o} = a_j$

$$a_{j,\pi_o}\ a_j : \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o^3}}(f^*_{i_o}(N_{Y_o \times Y_o / X_o \times X_o}), J \otimes \underline{O}_{Y_o^3}) \to \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_o^3}}(\pi_3^*(\underline{N}_{Y_o/X_o}), \underline{J} \otimes \underline{O}_{Y_o^3}) ,$$

$$- a_1((0,DY)) + \mathrm{Hom}((\pi,1),N)(DY) - \mathrm{Hom}((1,\pi),N)(DY) + a_2((DY,0)) = 0 .$$

On reconnaît les deux termes du milieu : ce sont les parties "$DY(xy,z)$" et "$DY(x,yz)$" de la formule du 2-cobord . Il ne reste plus donc qu'à identifier les deux autres termes .

Il nous faut d'abord calculer l'application a_j . Or elle provient, par image réciproque par f_{j_o} , du morphisme de $\underline{O}_{Y_o^2}$-modules

$$P : \underline{n}_{Y_o/X_o} \otimes \underline{O}_{Y_o^2} \longrightarrow (\underline{n}_{Y_o/X_o} \oplus \underline{n}_{Y_o/X_o}) \otimes \underline{O}_{Y_o^2}$$

induit par le produit dans Y_o . Or ce morphisme se décrit de la manière suivante : considérons le fibré vectoriel $\underline{\underline{V}}(\underline{n}_{Y_o/X_o}) = V$; P donne par dualité un morphisme

$$\underline{\underline{V}}(P) : V \times_{S_o} V \times_{S_o} Y_o \times_{S_o} Y_o \longrightarrow V \times_{S_o} Y_o \times_{S_o} Y_o$$

qui s'exprime ensemblistement par

$$\underline{\underline{V}}(P)\ (u\ ,\ v\ ,\ a\ ,\ b\ )\ =\ (\ u + \mathrm{Ad}(a)\ v\ ,\ a\ ,\ b\ )\ .$$

Ceci se démontre exactement comme le fait correspondant sur les Algèbres de Lie, c'est-à-dire sur le Module $\underline{\omega}^1_{Y_o/S_o}$. On remarque d'abord que V est muni par fonctorialité en Y_o d'une structure de groupe dans la catégorie des fibrés vectoriels sur S_o ; en vertu du lemme déjà utilisé pour les Algèbres de Lie (exposé II, 3.10) , cette structure coïncide avec la structure de groupe sous-jacente à sa structure de $\underline{\underline{O}}_S$-module . On voit ensuite que $\underline{\underline{V}}(\underline{n}_{Y_o/X_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{Y_o}) = \underline{\underline{V}}(\underline{N}_{Y_o/X_o})$ est lui aussi muni d'une structure de S_o-groupe qui n'est autre que le produit semi-direct de celle de V par celle de Y_o . Il ne reste plus qu'à identifier les opérations de Y_o sur V pour établir la formule cherchée .

Calculons maintenant les deux termes restants. Considérons d'abord $a_1((0,DY))$ On le calcule par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{n} \otimes \underline{O}_{Y_o^2} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "f^*_{1_o}"] & (\underline{n} + \underline{n}) \otimes \underline{O}_{Y_o^2} \arrow[d, "f^*_{1_o}"] \\
\underline{n} \otimes \underline{O}_{Y_o^3} \arrow[dr, "a_1((0,DY))"'] & (\underline{n} + \underline{n}) \otimes \underline{O}_{Y_o^3} \arrow[d, "(0,DY)"] \\
 & \underline{J} \otimes \underline{O}_{Y_o^3}\ .
\end{tikzcd}$$

Considérant maintenant les fibrés vectoriels définis par ces différents modules comme autant de schémas sur S_o et prenant les points à valeurs dans n'importe quoi, on a, en notant (u,x,y,z) un point de $\underline{\underline{V}}(\underline{J}) \times Y_o^3$;

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ad}(x)\ DY_{y,z}(u),x,yz) & (0 + DY_{y,z}(u),x,yz) \arrow[l, mapsto] \\
 & (0 + DY_{y,z}(u),x,y,z) \arrow[u, mapsto] \\
(\mathrm{Ad}(x)\ DY_{y,z}(u),x,y,z) \arrow[uu, mapsto] & (u,x,y,z) \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

On a donc obtenu $a_1((0,DY))\ (x,y,z) = \mathrm{Ad}\,(x)\ DY\ (y,z)$, ce qui est bien le premier terme du cobord . On aurait de même $a_2((DY,0))(x,y,z) = DY(x,y)$, d'où

$$0 = -\mathrm{Ad}(x)\ DY(y,z) + DY(xy,z) - DY(x,yz) + DY(x,y) = \partial\ DY(x,y,z) \quad .$$

4.20. <u>Démonstration de</u> 4.17 (iii) . On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y' \times Y' & Y \times Y & Y & Y' \\
X \times X \arrow[r] \arrow[u, bend left] & X \times X \arrow[r] \arrow[u, bend left] & X \arrow[r] \arrow[u, bend left] & X \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$

qui permet de calculer DY' à l'aide de DY et de $d(Y,Y')$.
Le calcul se fait exactement comme précédemment; nous en laissons les détails au lecteur. On trouve

$$DY'(x,y) = d(Y',Y)(xy) + DY(x,y) + d(Y,Y')(y) + \mathrm{Ad}\,(x)\ d(Y,Y')(y)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} DY'(x,y) - DY(x,y) &= -\mathrm{Ad}(x)\ d(Y',Y)(y) + d(Y',Y)(xy) - d(Y',Y)(x) \\ &= \partial\, d(Y',Y)\ (y) \quad . \end{aligned}$$

Théorème 4.21. Soient S un préschéma, $\underline{I}$ et $\underline{J}$ deux idéaux nilpotents, sur S tels que $\underline{I} \supset \underline{J}$, $\underline{I}\cdot\underline{J} = 0$. Soient X un S-groupe lisse sur S et $Y_{\underline{J}}$ un sous-$S_{\underline{J}}$-groupe de $X_{\underline{J}}$ (= sous-préschéma en groupes), plat et localement de présentation finie sur $S_{\underline{J}}$. Considérons le S_o-foncteur en groupes commutatifs N_o défini par

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(Z,N_o) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_Z}(\underline{n}_{Y_o/X_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_Z \,,\, \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_Z), \quad Z \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch})/S_o,$$

sur lequel Y_o opère par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs de X_o.

(i) Pour qu'il existe un sous-S-groupe de X, plat sur S, qui se réduise suivant $Y_{\underline{J}}$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i_1) Il existe un sous-préschéma Y de X, plat sur S, relevant $Y_{\underline{J}}$ (condition automatiquement vérifiée si Y_o est affine (4.6))

(i_2) Une certaine obstruction canonique, élément de $H^2(Y_o,N_o)$, est nulle.

(ii) Si les conditions de (i) sont satisfaites, l'ensemble des sous-S-groupes de X, plats sur S et se réduisant suivant $Y_{\underline{J}}$ est un ensemble principal homogène sous le groupe $Z^1(Y_o,N_o)$.

En effet, la condition (i_1) est nécessaire. Supposons-la vérifiée et soit Y plat sur S relevant $Y_{\underline{J}}$. Il nous faut chercher un Y' relevant aussi $Y_{\underline{J}}$ tel que $\partial DY' = 0$ (4.17 (i)). Mais cela revient à chercher un $d(Y,Y') \in C^1(Y_o,N_o)$ tel que $DY = \partial d(Y,Y')$ (4.17 (iii)). Soit $c \in H^2(Y_o,N_o)$ la classe image de DY qui est un cocycle par 4.17 (ii). Elle ne dépend pas du choix de Y d'après 4.17 (iii), et sa nullité est nécessaire et suffisante à l'existence d'un $d(Y,Y')$ vérifiant l'équation précédente. Ceci démontre (i). Si on a maintenant choisi Y tel que $DY = 0$, l'équation à résoudre s'écrit $\partial d(Y,Y') = 0$, ce qui démontre (ii).

<u>Remarque</u> 4.22. Notons que $\underline{n}_{Y_o/X_o}$ est de présentation finie sur S_o. Donc le foncteur N_o s'écrit sur la catégorie des préschémas S-plats

$$N_o = W(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{n}_{Y_o/X_o}, \underline{J})) .$$

Il en résulte des isomorphismes :

$$H^2(Y_o,N_o) \simeq H^2(Y_o, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{n}_{Y_o/X_o}, \underline{J})) ,$$

$$Z^1(Y_o,N_o) \simeq Z^1(Y_o, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{n}_{Y_o/X_o}, \underline{J})) .$$

4.23. Toujours sous les hypothèses de 4.21, nous allons maintenant étudier comment l'ensemble des Y relevant $Y_{\underline{J}}$, se comporte vis-à-vis de la conjugaison par des sections de X. Si x est une section de X sur S induisant la section unité de $X_{\underline{J}}$, l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(x)$ défini par x transforme sous-groupes plats de X relevant $Y_{\underline{J}}$ en sous-groupes plats de X relevant $Y_{\underline{J}}$. Or, sous les conditions de 4.21 (ii), l'ensemble de ces sous-groupes est principal homogène sous $Z^1(Y_o,N_o)$; nous allons voir qu'il existe alors un sous-groupe de $Z^1(Y_o,N_o)$ tels que deux sous-groupes de X, plats sur S, et relevant $Y_{\underline{J}}$ soient conjugués (par des $x \in X(S)$ induisant l'unité de $X(S_{\underline{J}})$) si et seulement si leur "différence" dans $Z^1(Y_o,N_o)$ est un élément de ce sous-groupe. Dans les meilleurs cas, nous montrerons que ce dernier n'est autre que $B^1(Y_o,N_o)$, donc que l'ensemble des sous-groupes Y de X plats, relevant $Y_{\underline{J}}$, modulo conjugaison par les $x \in X(S)$ induisant l'unité de $X(S_{\underline{J}})$, est vide ou principal homogène sous $H^1(Y_o,N_o)$ (proposition 4.36).

4.24. Soit Y un sous-groupe plat de X, se réduisant suivant $T_{\underline{J}}$. Rappelons que nous avons introduit en 0.5 le foncteur L_{oX} (resp. L_{oY}) défini par l'identité par rapport au S_o-préschéma variable T :

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(T, L_{oX}) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_T}(\underline{\omega}^1_{X_o/S_o} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_T \; , \; \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_T)$$

(resp. de même en remplaçant X par Y) .

Or on a :

Lemme 4.25. Il existe une suite exacte canonique de Y_o-modules

$$(+) \qquad \underline{n}_{Y_o/X_o} \xrightarrow{d} \underline{\omega}^1_{X_o/S_o} \longrightarrow \underline{\omega}^1_{Y_o/S_o} \longrightarrow 0 \; ,$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) Par image réciproque sur Y , d donne le morphisme D de 4.8 , (iii) .

(ii) Si X_o et Y_o sont lisses sur S_o , alors d est injectif . Comme les deux $\underline{\omega}^1$ sont alors localement libres de type fini , il en est de même de $\underline{n}_{Y_o/X_o}$ et la suite est localement scindée .

D'après SGA 1 II, formule (4.3) , il existe une suite exacte canonique de $\underline{O}_{Y_o}$-modules

$$\underline{N}_{Y_o/X_o} \xrightarrow{D} \underline{\Omega}^1_{X_o/S_o} \otimes_{\underline{O}_{X_o}} \underline{O}_{Y_o} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{Y_o/S_o} \longrightarrow 0 \; .$$

Comme cette suite est invariante par les translations de Y_o , elle provient d'une suite (+) sur S_o par image réciproque par la projection de Y_o sur S_o . Faisant maintenant agir les automorphismes intérieurs de Y_o , on voit que (+) est une suite exacte de Y_o-modules . Comme (+) devient exacte par tensorisation avec $\underline{O}_{Y_o}$, elle est déjà exacte (Y_o est fidèlement plat sur S_o) . Pour la même raison d est injectif si et seulement si D l'est . Le reste résulte de SGA 1 II 4.10.

4.26. Pour tout S_o-préschéma T , (+) donne par fonctorialité une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_o}(T,L_{oY}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_o}(T,L_{oX}) \xrightarrow{d_T} \mathrm{Hom}_{S_o}(T,N_o) \ .$$

En particulier, prenant pour T les puissances cartésiennes de Y_o , on en déduit une suite exacte de complexes de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow C^*(Y_o,L_{oY}) \longrightarrow C^*(Y_o,L_{oX}) \xrightarrow{d^*} C^*(Y_o,N_o) \ ,$$

et en particulier, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C^o(Y_o,L_{oY}) & \longrightarrow & C^o(Y_o,L_{oX}) & \xrightarrow{d^o} & C^o(Y_o,N_o) \\
 & & \downarrow{\partial} & & \downarrow{\partial} & & \downarrow{\partial} \\
0 & \longrightarrow & C^1(Y_o,L_{oY}) & \longrightarrow & C^1(Y_o,L_{oX}) & \xrightarrow{d^1} & C^1(Y_o,N_o)
\end{array} \ .$$

Remarquons que $C^o(Y_o,L_{oY})$ (resp. $C^o(Y_o,L_{oX})$) n'est autre que $\mathrm{Hom}_{S_o}(S_o,L_{oY})$ (resp. ...) c'est-à-dire le groupe des sections de Y (resp. X) sur S induisant la section unité de $X_{\underline{J}}$. Notons aussi que d^1 n'est autre que le morphisme $v_{i_{Y_o}}$ de 4.8 (iii) , ou $i_{Y_o} : Y_o \longrightarrow X_o$ est l'immersion canonique .

<u>Lemme</u> 4.27. <u>Sous les conditions de</u> 4.21 <u>pour</u> S , $\underline{I}$, $\underline{J}$ <u>et</u> X , <u>soit</u> Y <u>un sous-groupe de</u> X , <u>plat sur</u> S <u>et relevant</u> $Y_{\underline{J}}$. <u>Soit</u> $x \in C^o(Y_o,L_{oX})$ <u>une section de</u> X <u>sur</u> S <u>induisant la section unité de</u> $X_{\underline{J}}$. <u>Alors</u>

$d(Y, \mathrm{Int}(x)Y) \in C^1(Y_o, N_o)$ <u>est donné par la formule</u>

$$d(\mathrm{Int}(x)Y, Y) = \partial d^o x = d^1 \partial x .$$

En effet, posons $Y' = \mathrm{Int}(x) Y$. Par la formule

$$x y x^{-1} = x y x^{-1} y^{-1} y = (x - \mathrm{Ad}(y) x) y$$
$$= -(\partial x)(y) . y ,$$

on voit que Y' peut se décrire comme l'image de Y par le morphisme composé (cf. 4.8 (iii)) :

$$Y \xrightarrow{(-\partial x, i_Y)} L'_X \times_S X \longrightarrow X .$$

Si i_Y désigne l'immersion canonique de Y dans X , on a par 4.8 (iii) , et le résultat précédent :

$$c(X, Y', \mathrm{Int}(x) \circ i_Y) - c(X, Y', i_Y) = - d^1 \partial x .$$

Mais $\mathrm{Int}(x) \circ i_Y$ se factorise par Y' par définition et le premier terme est nul ; par 4.8 (ii), on a $c(X, Y', i_Y) = d(Y', Y)$. Cela entraine $d(Y'Y) = d^1 \partial x$.

<u>Corollaire</u> 4.28. <u>Pour que deux sous-groupes</u> Y <u>et</u> Y' <u>de</u> G, <u>plats sur</u> S <u>et relevant</u> $Y_{\underline{J}}$, <u>soient conjugués par une section de</u> X <u>sur</u> S <u>induisant la section unité de</u> $X_{\underline{J}}$, <u>il faut et il suffit que</u> $d(Y, Y') \in \partial d^o C^o(Y_o, L_{oX})$.

Corollaire 4.29. Si d^o est surjectif, Y et Y' comme ci-dessus sont conjugués par une section de X sur S induisant la section unité de X_J si et seulement si $d(Y,Y') \in B^1(Y_o, N_o)$.

Corollaire 4.30. Soit Y comme dans 4.27 ; l'ensemble des conjugués de Y par des sections de X sur S induisant la section unité de X_J est isomorphe à $C^o(Y_o/L_{oX}) / \mathrm{Ker}\ d^1 \partial = d^1 \partial\, C^o(Y_o, L_{oX})$.

Remarquons maintenant que $C^o(Y_o/L_{oX}) / \mathrm{Ker}\ d^1 \partial$ se calcule uniquement à l'aide du carré de gauche du diagramme commutatif de 4.26. Il en résulte en particulier que l'on peut aussi le calculer dans tout diagramme du même type ayant le même carré de gauche. Considérons en particulier le foncteur L_{oX}/L_{oY} au-dessus de S_o défini par

$$\mathrm{Hom}_{S_o}(T, L_{oX}/L_{oY}) = \mathrm{Hom}_{S_o}(T, L_{oX})/\mathrm{Hom}_{S_o}(T, L_{oY}) .$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^o(L_{oY}) & \longrightarrow & C^o(L_{oX}) & \longrightarrow & C^o(L_{oX}/L_{oY}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \\
0 & \longrightarrow & C^1(L_{oY}) & \longrightarrow & C^1(L_{oX}) & \longrightarrow & C^1(L_{oX}/L_{oY}) & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

d'où par la remarque précédente :

Corollaire 4.31. Soit Y comme en 4.27 ; l'ensemble des conjugués de Y par des sections de X sur S induisant la section unité de X_J est isomorphe à

$$E = \partial\, C^o(L_{oX}/L_{oY}) = C^o(L_{oX}/L_{oY}) / H^o(Y_o, L_{oX}/L_{oY}) .$$

<u>Corollaire</u> 4.32. <u>Supposons de plus</u> S_o affine et $\mathrm{Lie}(Y_o/S_o)$ localement libre. <u>Si on note</u> $\underline{F}_o = \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)/\underline{\mathrm{Lie}}(Y_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}$, <u>on a</u>

$$E = \Gamma(S_o, \underline{F}_o)/H^o(Y_o, \underline{F}_o) \quad .$$

En effet , on a pour tout T au-dessus de S_o une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_o}(T, L_{oY}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_o}(T, L_{oX}) \longrightarrow W(\underline{F}_o)(T) \quad .$$

Par le raisonnement qui nous a servi à prouver 4.31 , nous pouvons calculer E comme l'image de $C^o(Y_o, L_{oX})$ dans $C^1(Y_o, W(\underline{F}))$. Mais comme S_o est affine , $C^o(Y_o, L_{oX}) \longrightarrow C^o(Y_o, W(\underline{F}))$ est surjectif et on trouve bien le résultat annoncé .

<u>Corollaire</u> 4.33. <u>Soient</u> S , $\underline{I}$, $\underline{J}$ <u>et</u> X <u>comme en</u> 4.21. <u>Supposons</u> S <u>affine</u> . <u>Soit</u> Y <u>un sous-groupe</u> diagonalisable <u>de</u> X . <u>L'ensemble des sous-groupes de</u> X , <u>conjugués de</u> Y <u>par une section de</u> X <u>sur</u> S <u>induisant la section unité de</u> $X_{\underline{J}}$, <u>est isomorphe à</u>

$$E = \Gamma(S_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)/\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)^{\mathrm{ad}(Y_o)}) \otimes_{\Gamma(S_o, \underline{O}_{S_o})} \Gamma(S_o, \underline{J}) \quad .$$

En effet, on écrit par I 4.7.3 , (cf. 2.13)

$$\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o) = \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)^{\mathrm{ad}(Y_o)} \oplus \underline{R} \quad .$$

Comme Y_o est commutatif on a $\underline{\mathrm{Lie}}(Y_o/S_o) \subset \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)^{\mathrm{ad}(Y_o)}$, donc

$$\underline{F}_o = (\underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)^{\mathrm{ad}(Y_o)}/\underline{\mathrm{Lie}}(Y_o/S_o)) \otimes \underline{J} \oplus \underline{R} \otimes \underline{J} \quad ,$$

$$\underline{F}_o^{\,ad(Y_o)} = (\ \underline{Lie}(X_o/S_o)^{ad(Y_o)}/\underline{Lie}(Y_o/S_o)) \otimes \underline{J} \ .$$

Par 4.32 , on a donc $E \simeq \Gamma(S_o , \underline{R} \otimes \underline{J})$. Retournant à la définition de $\underline{R}$, on a terminé .

Corollaire 4.34. Soient S , $\underline{I}$, $\underline{J}$ et X comme en 4.21. Supposons S affine . Soit Y un sous-groupe diagonalisable de X . Si $x \in X(S)$ induit la section unité de $X_{\underline{J}}$ et normalise Y , alors il centralise Y .

Cela résulte immédiatement de la comparaison du corollaire précédent et de 2.14. En effet, 4.33 montre que les éléments de $C^o(Y_o,L_{oX})$ qui respectent globalement Y sont les éléments de $H^o(Y_o,L_{oX})$, et on a vu en 2.14 que ce sont ceux-là même qui agissent trivialement sur l'immersion canonique $Y \longrightarrow X$.

4.35. Revenons à la situation générale de 4.21 et supposons $Y_{\underline{J}}$ lisse sur $S_{\underline{J}}$. Alors (SGA 1 II 4.10), tout sous-préschéma Y de X relevant $Y_{\underline{J}}$ et plat sera lisse sur S . De plus , par 4.25 (ii) , on a un isomorphisme de Y_o-modules :

$$\check{\underline{n}}_{Y_o/X_o} = \underline{Lie}(X_o/S_o)/\underline{Lie}(Y_o/S_o) \ .$$

Proposition 4.36. Sous les hypothèses de 4.21 , supposons de plus $Y_{\underline{J}}$ lisse sur $S_{\underline{J}}$ et S_o affine . L'ensemble des sous-S-groupes Y de X plats (ou lisses) sur S , se réduisant suivant $Y_{\underline{J}}$, modulo conjugaison par des sections de X sur S induisant la section unité de $X_{\underline{J}}$, est soit vide , soit un ensemble principal homogène sous le groupe

$$H^1(Y_o,\underline{Lie}(X_o/S_o)/\underline{Lie}(Y_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}) \ .$$

Il nous suffit de vérifier que le corollaire 4.29 s'applique , c'est-à-dire que

$$d^{\circ} : \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{S_o}}(\omega^1_{X_o/S_o}, \underline{J}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{n}_{Y_o/X_o}, \underline{J})$$

est surjectif. Or cela résulte de ce que la suite (+) de 4.25, (ii), est scindée, S_o étant affine.

Enonçons enfin un corollaire commun à 4.21 et 4.36, qui sera, en fait, la seule forme sous laquelle nous utiliserons par la suite les résultats généraux de ce numéro.

Corollaire 4.37. Soient S un préschéma et S_o le sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent $\underline{I}$. Soient X un S-groupe lisse sur S, et Y_o un sous-S_o-groupe de X_o, plat sur S_o.

(i) Si S_o est affine, Y_o lisse sur S_o, et si

$$H^1(Y_o, \underline{\mathrm{Lie}}(X_o/S_o)/\underline{\mathrm{Lie}}(Y_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2}) = 0$$

pour tout $n \geqslant 0$, deux sous-S-groupes de X, plats (ou lisses) sur S, se réduisant suivant Y_o, sont conjugués par une section de X sur S induisant la section unité de X_o.

(ii) Si Y_o est affine et de présentation finie et si

$$H^2(Y_o, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{S_o}}(\underline{n}_{Y_o/X_o}, \underline{I}^{n+1}/\underline{I}^{n+2})) = 0$$

pour tout $n \geqslant 0$, il existe un sous-S-groupe de X, plat sur S, se réduisant suivant Y_o.

4.38. Il nous reste à relier les trois constructions que nous avons faites dans cet exposé . Pour éviter des complications innessentielles , nous nous placerons dans la situation suivante : S_o est le spectre d'un corps k , S est le spectre des nombres duaux $D(k)$, X est un S-groupe <u>lisse</u> sur S , Y un sous-S-groupe , affine et <u>lisse</u> sur S . On a une suite exacte de k-espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o \xrightarrow{\ i\ } \underline{\mathrm{Lie}}\, X_o \xrightarrow{\ d\ } \check{\underline{n}}_{Y_o/X_o} \longrightarrow 0 ,$$

donnant naissance à une suite exacte de cohomologie (où on écrit $H^i(\ )$ pour $H^i(Y_o,\ )$) :

$$0 \longrightarrow H^o(\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o) \xrightarrow{\ i^o\ } H^o(\underline{\mathrm{Lie}}\, X_o) \xrightarrow{\ d^o\ } H^o(\underline{\mathrm{Lie}}\, X_o/\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o)$$

$$\xrightarrow{\ \partial^o\ } H^1(\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o) \xrightarrow{\ i^1\ } H^1(\underline{\mathrm{Lie}}\, X_o) \xrightarrow{\ d^1\ } H^1(\check{\underline{n}}_{Y_o/X_o}) \xrightarrow{\ \partial^1\ } H^2(\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o).$$

Or ces divers groupes ont tous une signification géométrique .

a) $H^o(\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o) \;=\; \underline{\mathrm{Lie}}\, \underline{\mathrm{Cent}}(Y)_o$ par (Exp. II 5.2.3) .

b) $H^o(\underline{\mathrm{Lie}}\, X_o) \;=\; \underline{\mathrm{Lie}}\, \underline{\mathrm{Cent}}_X(Y)_o$, (id.) .

c) $H^o(\underline{\mathrm{Lie}}\, X_o/\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o) \;=\; \underline{\mathrm{Lie}}\, \underline{\mathrm{Norm}}_X(Y)_o/\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o$, (id.) .

d) $H^1(\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o) \;=\; \underline{\mathrm{Lie}}\, \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr.}(Y)_o/ \mathrm{Im}\, \underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o$,

où $\mathrm{Im}\, \underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o$ désigne l'image de $\underline{\mathrm{Lie}}\, Y_o$ par $\underline{\mathrm{Lie}}\, (\mathrm{Int})_o$ déduit de

$$\mathrm{Int} : Y_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr.}(Y) \ ;$$

cela résulte aussitôt de 2.1 et II 4.2.

e) $H^1(\underline{\text{Lie}}\ X_o)$ = groupe des déviations entre homomorphismes $Y \longrightarrow X$ prolongeant l'immersion canonique $i_o : Y_o \longrightarrow X_o$, modulo les déviations obtenues par l'action des automorphismes intérieurs de X définis par des éléments de $X(S)$ donnant l'unité de $X(S_o)$ (c'est-à-dire des éléments de $\underline{\text{Lie}}\ X_o$). (cf. 2.1 et 1.2.2).

f) $H^1(\check{\underline{n}}_{Y_o/X_o})$ = groupe des déviations entre sous-groupes Y' de X, plats sur S, prolongeant Y_o, modulo les déviations obtenues par l'action des automorphismes intérieurs de X construits comme précédemment. (cf. démonstration de 4.21).

g) $H^2(\underline{\text{Lie}}\ Y_o)$ = groupe des déviations entre structures de groupe sur Y prolongeant celle de Y_o, modulo les S-automorphismes de Y induisant l'identité sur Y_o (cf. 3.5).

Nous proposons maintenant de montrer comment on peut expliciter les 6 morphismes de la suite exacte précédente dans l'interprétation géométrique que nous venons de donner.

1) i^o et d^o ne sont autres que les morphismes obtenus par passage à l'Algèbre de Lie (puis par passage au quotient pour d^o), à partir des monomorphismes canoniques :

$$\underline{\text{Cent}}(Y) \longrightarrow \underline{\text{Cent}}_X(Y) \longrightarrow \underline{\text{Norm}}_X(Y) .$$

C'est en effet ce qu'il résulte immédiatement de la définition des identifications a), b), et c).

2) On construit ∂^o ainsi. Soit $\bar{x} \in \underline{\text{Lie}}\ \underline{\text{Norm}}_X(Y)_o/\underline{\text{Lie}}\ Y_o$. Relevons-le en un $x \in \underline{\text{Lie}}\ \underline{\text{Norm}}_X(Y)_o \subset \text{Norm}_X(Y)$. Alors $\text{Int}(x)$ définit un automorphisme de Y induisant l'identité sur Y_o, donc un élément de $\underline{\text{Lie}}\ \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)_o$.

Notons $\overline{\mathrm{Int}(x)}$ l'image de cet élément dans $\underline{\mathrm{Lie}}\ \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)_o \,/\, \mathrm{Im}(\underline{\mathrm{Lie}}\ Y_o)$.
Alors on a :

$$\partial^{o}(x) = - \overline{\mathrm{Int}(x)} = \overline{\mathrm{Int}(x^{-1})} \quad .$$

En effet , calculons l'élément de $\underline{\mathrm{Lie}}\ \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)_o$ défini par $\mathrm{Int}(x)$. Il correspondra par définition à un élément a de $Z^1(Y_o, \underline{\mathrm{Lie}}\ Y_o)$ tel que $x\,y\,x^{-1} = a(y_o)\ y$, $y \in Y(S')$, $S' \longrightarrow S$. Mais ceci s'écrit aussi $a(y_o) = x\,y\,x^{-1}y^{-1} = x - \mathrm{ad}(y)\,x = - \partial\,(x)(y_o)$.

3) Soit $\bar{u}$ un élément de $H^1(\underline{\mathrm{Lie}}\ Y_o)$, image canonique d'un

$$u \in \underline{\mathrm{Lie}}\ \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(Y)_o \subset \mathrm{Aut}_{S\text{-gr}}(Y) \quad .$$

Alors, si $i : Y \longrightarrow X$ est l'immersion canonique, on a :

$$i^1(\bar{u}) = d\,(\,i\,,\,u \circ i\,) \quad .$$

En effet, $d\,(\,i\,,\,u \circ i\,)$ est défini comme l'image d'un élément $d \in Z^1(Y_o, \underline{\mathrm{Lie}}\ X_o)$ tel que $i\,u(y) = d(y_o)\,i(y)$. Or $\bar{u}$ est défini comme l'image d'un élément $v \in Z^1(Y_o, \underline{\mathrm{Lie}}\ Y_o)$, tel que $u(y) = v(y_o)\ y$. On peut donc choisir $d(y_o) = i\ v(y_o)$, ce qui démontre la relation annoncée.

4) Soit $\overline{d}(i,i')$ l'image de la déviation $d(i,i')$ dans $H^1(\underline{\mathrm{Lie}}\ X_o)$, où $i' : Y \longrightarrow X$ est un homomorphisme de groupes relevant i_o. Soit $\overline{d}(Y,i'(Y))$ l'image de la déviation $d(Y,i'(Y))$ dans $H^1(\underline{n}_{Y_o/X_o})$.

Alors

$$d^1(\overline{d}(i,i')) = \overline{d}(Y,i'(Y)) .$$

Cela résulte sans difficultés de 4.8 (ii) et (iii), en raisonnant comme dans la démonstration de 4.27.

5) Soit enfin Y' un sous-groupe de X, plat sur S et relevant Y_o. On a supposé que Y_o est affine. Alors on sait que Y et Y' sont isomorphes comme préschémas étendant Y_o (3.6), donc qu'il existe un isomorphisme de S-préschémas

$$f : Y \longrightarrow Y'$$

induisant l'identité sur Y_o. Transportons par f la structure de groupe de Y' et soit Y_1 le groupe obtenu (qui a donc Y comme préschéma sous-jacent). Alors

$$\partial^1\overline{d}(Y,Y') = \overline{d}(Y,Y_1) .$$

En effet, $d(Y,Y_1)$ est défini comme l'image d'un $b \in Z^2(Y_o,\underline{\mathrm{Lie}}\ Y_o)$ tel que $f^{-1}(f(y)\ f(y')) = b(y_o,y'_o)\ y\ y'$.

D'un autre côté, $d(Y,Y')$ est défini comme l'image dans $H^1(Y_o,\underline{\mathrm{Lie}}\ X_o/\underline{\mathrm{Lie}}\ Y_o)$ d'un $a \in Z^1(Y_o,\underline{\mathrm{Lie}}\ X_o)$ tel que $f(y) = a(y_o)\ y$. Calculant b, on trouve aussitôt :

$$b(y_o,y'_o) = a(y_oy'_o)^{-1}\ a(y_o)y\ a(y'_o)y'\ (y\ y')^{-1} = \partial\ a\ (y_o,y'_o) .$$

E X P O S E IV

TOPOLOGIES et FAISCEAUX

par M. DEMAZURE (*)

Cet exposé est destiné à faire connaître au lecteur l'essentiel du langage des topologies et des faisceaux (sans cohomologie), particulièrement commode dans les questions de passage au quotient (entre autres).

Les trois premiers paragraphes développent le langage du passage au quotient. Le quatrième, qui est la partie centrale, est l'exposé de la théorie des faisceaux, orienté principalement vers l'application aux questions de quotients; le cinquième est une application au passage au quotient dans les groupes et aux fibrés principaux homogènes. Le dernier paragraphe concerne plus spécialement la catégorie des préschémas, et définit diverses topologies utiles sur cette catégorie.

Le lecteur se référera utilement à [AS], [MA], [D], et SGA 4 ; [D] en ce qui concerne spécialement les applications des topologies à la la théorie de la descente, et SGA 4 pour les questions d'univers (particulièrement maltraitées dans cet exposé).

(*) Ce texte développe la substance de deux exposés oraux de A. GROTHENDIECK, en complétant ces derniers sur plusieurs points importants, qui avaient été passés sous silence ou à peine effleurés.

1. Epimorphismes effectifs universels

Dans la suite de cet exposé, on suppose fixée une catégorie $\underline{C}$.

Définition 1.1. Un morphisme $u:T \to S$ est appelé un épimorphisme si, pour tout objet X , l'application correspondante

$$X(S) = \mathrm{Hom}(S,X) \to X(T) = \mathrm{Hom}(T,X)$$

est injective. On dit que u est un épimorphisme universel si pour tout morphisme $S' \to S$, le produit fibré $T'=T\times_S S'$ existe , et $u' : T' \to S'$ est un épimorphisme.

Définition 1.2. Un diagramme

$$A \xrightarrow{u} B \overset{v_1}{\underset{v_2}{\rightrightarrows}} C$$

d'applications d'ensembles est dit exact si u est injectif et si son image est formée des éléments b de B tels que $v_1(b)=v_2(b)$. Un diagramme de même type dans $\underline{C}$ est dit exact si pour tout objet X de $\underline{C}$, le diagramme d'ensembles correspondant

$$A(X) \to B(X) \rightrightarrows C(X)$$

est exact ; on dit aussi alors que u fait de A un noyau du couple de flèches (v_1,v_2) . Dualement, un diagramme

$$C \overset{v_1}{\underset{v_2}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{u} A$$

dans $\underline{C}$ est dit exact, s'il est exact en tant que diagramme dans la catégorie opposée $\underline{C}^{\circ}$, i.e. si pour tout objet X de $\underline{C}$, le diagramme d'ensembles correspondant

$$X(A) \to X(B) \rightrightarrows X(C)$$

est exact . On dit aussi que u fait de A un conoyau du couple de flèches (v_1, v_2) .

Définition 1.3. Un morphisme $u:T \to S$ est appelé un épimorphisme effectif si le carré fibré $T\times_S T$ existe, et si le diagramme

$$T\times_S T \overset{pr_1}{\underset{pr_2}{\rightrightarrows}} T \xrightarrow{u} S$$

est exact, i.e. si u fait de S un conoyau de (pr_1, pr_2) . On dit que u est un épimorphisme effectif universel si pour tout morphisme $S' \to S$, le produit fibré $T' = T\times_S S'$ existe, et le morphisme $u':T' \to S'$ est un épimorphisme effectif.

On a évidemment les implications :

$$\begin{array}{ccc} \text{épimorphisme effectif universel} & \Longrightarrow & \text{épimorphisme effectif} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{épimorphisme universel} & \Longrightarrow & \text{épimorphisme} \end{array} ,$$

mais en général aucune autre implication n'est valable .

Lemme 1.4. Considérons des morphismes $U \xrightarrow{v} T \xrightarrow{u} S$. Alors

a) u,v épimorphismes $\Rightarrow uv$ épimorphismes $\Rightarrow u$ épimorphisme ,

b) u,v épim. univ. $\Rightarrow uv$ épim. univ. et u quarrable $\Rightarrow u$ épim. univ.

On rappelle qu'un morphisme $u:T \to S$ est dit quarrable si pour tout morphisme $S' \to S$, le produit fibré $T\times_S S'$ existe . Le lemme 1.4 est trivial sur les définitions . On en conclut :

Corollaire 1.5. Soient $u:X \to Y$ et $u':X' \to Y'$ des épimorphismes universels, tels que $Y\times Y'$ existe , alors $X\times X'$ existe et $u\times u':X\times X' \to Y\times Y'$ est un épimorphisme universel.

Notons aussi :

Lemme 1.6. *Soit* u: $X \to Y$ *un morphisme dans* $\underline{C}_{/S}$; *pour que ce soit un épimorphisme* (*resp. épimorphisme universel, resp. épimorphisme effectif, resp. épimorphisme effectif universel*), *il suffit que le morphisme correspondant dans* $\underline{C}$ *le soit, et c'est aussi nécessaire si on suppose que* S *est un objet* quarrable *de* $\underline{C}$, *i.e. que son produit par tout objet de* $\underline{C}$ *existe* .

Démonstration immédiate laissée au lecteur. On utilise l'hypothèse "S quarrable" pour interpréter les $\underline{C}$-morphismes d'un objet Y dans un objet Z , comme étant les $\underline{C}_{/S}$-morphismes de Y dans $Z \times S$.

Lemme 1.7. *Avec les notations de* 1.4:

u,v *épim. effectifs et* v *épim. univ.* $\Rightarrow$ uv *épim. effectif* .

Pour le voir, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S & T \arrow[l, "u"'] & T\times_S T \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\
& U \arrow[u, "v"] & U\times_S U \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, "v\times_S v"'] \\
& U\times_T U \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On note que par hypothèse, la ligne 1 et la colonne 1 sont exactes, et qu'en vertu de 1.5 et 1.6 , $v\times_S v$ est un épimorphisme (v étant un épimorphisme *universel*) . La conclusion en résulte par un diagram-chasing évident : si un élément de $X(U)$ a mêmes images dans $X(U\times_S U)$, il a *a fortiori* mêmes images dans $X(U\times_T U)$, donc provient d'un élément de $X(T)$ puisque la colonne 1 est exacte . Comme la ligne 1 est exacte , il suffit de vérifier que l'élément envisagé a mêmes images dans $X(T\times_S T)$, et comme $v\times_S v$ est un épimorphisme, il suffit de vérifier que les images dans $X(U\times_S U)$ sont les mêmes, ce qui est bien le cas .

Proposition 1.8. Considérons des morphismes $U \xrightarrow{v} T \xrightarrow{u} S$. Alors

u, v épim. effectifs univ. $\Rightarrow uv$ épim. eff. un. et u quarrable $\Rightarrow u$ épim. eff. un.

La première implication résulte aussitôt de 1.7. Pour la deuxième , on regarde le diagramme (de type "bisimplicial") :

$$\begin{tikzcd}
S & T \arrow[l] & T\times_S T \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\
U \arrow[u] & U\times_S T \arrow[l] \arrow[u] & U\times_S T\times_S T \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u] \\
U\times_S U \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & U\times_S U\times_S T \arrow[l] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & U\times_S U\times_S T\times_S T \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

Les colonnes 1,2,3 sont exactes en vertu de l'hypothèse "vu épimorphisme effectif universel", la ligne 2 est exacte, car $U\times_S T \rightarrow U$ est un épimorphisme effectif (car il a une section sur U), et il en est de même de la ligne 3 (même raison). Un diagram-chasing évident montre alors que la ligne 1 est exacte, i.e. u est un épimorphisme effectif. Comme les hypothèses faites sont invariantes par un changement de base quelconque $S' \rightarrow S$, il s'ensuit que u est même un épimorphisme effectif universel .

Corollaire 1.9. Soient $u: X \rightarrow Y$ et $u': X' \rightarrow Y'$ des épimorphismes effectifs universels, tels que $Y \times Y'$ existe; alors $X \times X'$ existe et $u \times u': X \times X' \rightarrow Y \times Y'$ est un épimorphisme effectif universel .

Démonstration comme pour 1.5 par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & Y' & X' \arrow[l] \\
X \arrow[d] & X\times Y' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & X\times X' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dl, "u\times u'"] \\
Y & Y\times Y' \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

.

Corollaire 1.10. Considérons un morphisme quarrable $u:T \to S$, et un morphisme de changement de base $S' \to S$, qui soit un épimorphisme effectif universel. Pour que u soit un épimorphisme effectif universel, il faut et suffit que $u': T' = T \times_S S' \to S'$ le soit.

$$\begin{tikzcd} T & T' \arrow[l, "v'"'] \arrow[d, "u'"] \\ S \arrow[from=u, "u"'] & S' \arrow[l, "v"] \end{tikzcd}$$

Seul le "il suffit" demande une démonstration. Or si u' est un épim. eff. univ., il en est de même de vu' grâce à 1.8, et comme $vu' = uv'$, on conclut par 1.8 que u est un épim. eff. univ.

Remarque 1.11. Le même raisonnement montre que dans 1.10 on peut remplacer "épimorphisme effectif universel" par "épimorphisme universel" ou "épimorphisme universel et effectif", ou simplement par "épimorphisme" (et dans ce dernier cas, l'hypothèse "u quarrable" est évidemment inutile).

Dans la démonstration de 1.8 nous avons utilisé le résultat suivant, qui mérite d'être explicité :

Proposition 1.12. Soit $u:T \to S$ un morphisme qui admette une section. Alors u est un épimorphisme, et si $T \times_S T$ existe, c'est un épimorphisme effectif, et un épimorphisme effectif universel si de plus u est quarrable.

La première assertion est contenue dans 1.4 a), et la troisième va résulter aussitôt de la seconde, qu'il suffira donc d'établir. En fait on a une conclusion plus forte : pour tout foncteur $F: \underline{C}^{\circ} \longrightarrow (Ens)$ (non nécessairement représentable), le diagramme d'ensembles

$$F(S) \longrightarrow F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T)$$

est exact. Ceci peut être considéré comme un cas particulier du formalisme de la cohomologie de Čech (en dimension 0 !) que nous nous contentons de rappeler ici. Supposons simplement que $T \times_S T$ existe, on pose alors

$$H^{\circ}(T/S, F) = \mathrm{Ker}\ (F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T)) \quad .$$

On peut regarder $H^0(T/S,F)$ de façon évidente comme un foncteur contravariant en l'argument T variable dans $\underline{C}_{/S}$, tout S-morphisme $T' \to T$ définissant une application

$$(+) \qquad H^0(T/S,F) \longrightarrow H^0(T'/S,F) \quad .$$

Fixons T et T' dans $\underline{C}_{/S}$. Un calcul bien connu montre que s'il existe un S-morphisme de T' dans T, l'application correspondante (+) est en fait indépendante du choix de ce morphisme, de sorte que $H^0(T/S,F)$ peut être regardé comme un foncteur sur la catégorie associée à l'ensemble $\mathrm{Ob}\,\underline{C}_{/S}$ préordonné par la relation de "domination" (T' domine T s'il existe un S-morphisme de T' dans T). En particulier, si T et T' sont isomorphes dans cette dernière catégorie, i.e. si chacun domine l'autre, alors (+) est un <u>isomorphisme</u> d'ensembles. Ceci s'applique en particulier au cas où T' est l'objet final de $\underline{C}_{/S}$, i.e. essentiellement S lui-même; de toutes façons T domine $T'=S$, et l'inverse est vrai précisément si T/S a une section. Cela établit 1.12 sous la forme renforcée annoncée.

<u>Remarque</u> 1.13. Pour diverses applications, les notions introduites dans le présent exposé, et les résultats énoncés, doivent se développer plus généralement relativement à une <u>famille</u> de morphismes $u_i : T_i \to S$ de même but (au lieu d'un seul morphisme $u : T \to S$). Ainsi, une telle famille sera dite <u>épimorphique</u> si pour tout objet X de $\underline{C}$, l'application correspondante

$$X(S) \longrightarrow \prod_i X(T_i)$$

est injective, et on introduit de même la notion de <u>famille épimorphique effective</u>, et les variantes "universelles" de ces notions. Nous admettrons au besoin, par la suite, que les résultats du présent exposé s'étendent à cette situation plus générale.

<u>Remarque</u> 1.14. Tout morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme effectif est un isomorphisme. En effet, dans les notations de 1.3, le

fait que $T \to S$ soit un monomorphisme entraîne que les deux morphismes

$$pr_1, pr_2 : T \times_S T \rightrightarrows T$$

sont égaux (et sont des isomorphismes). Or un diagramme

$$C \overset{v}{\underset{v}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{u} A$$

n'est exact que si u est un isomorphisme, comme il résulte immédiatement de la définition .

2. Morphismes de descente .

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 2.1. Soient $f: S' \to S$ un morphisme tel que $S''=S'\times_S S'$ existe , et soit $u':X' \to S'$ un objet sur S' . On appelle donnée de recollement sur X'/S' , relativement à f , un isomorphisme

$$c : X''_1 \xrightarrow{\sim} X''_2$$

où X''_i $(i=1,2)$ désigne l'image inverse (supposée exister) de X'/S' par la projection $pr_i : S'' \to S'$. On dit que la donnée de recollement c est une donnée de descente si elle satisfait la "condition des cocycles"

$$pr_{3,1}(c) = pr_{3,2}(c)\ pr_{2,1}(c)$$

où $pr_{i,j}$ $(1 \leqslant j < i \leqslant 3)$ sont les projections canoniques de $S''' = S'\times_S S'\times_S S'$ dans S'' (N.B. on suppose maintenant que S''' existe également) , où $pr_{i,j}(c)$ est l'image inverse de c , considéré comme un S'''-morphisme de

X''_i' dans X''_j' , et où pour tout entier k entre 1 et 3, X''_k' désigne l'image inverse (supposée exister) de X'/S' par la projection d'indice k $q_k: S''' \to S'$.

Dans la deuxième partie de la définition, on a donc utilisé des identifications et abus d'écriture d'usage courant, que l'expérience prouve être inoffensifs, mais qu'il convient évidemment d'éviter dans un exposé rigoureux de la théorie de la descente, (qui doit précisément justifier dans une certaine mesure ces abus de langage courants). Un tel exposé en forme ([D]) a été rédigé par GIRAUD, (en vue de justifier et de préciser SGA VII, qui n'a jamais été rédigé). Pour un exposé détaillé des résultats de descente fidèlement plate dont il sera fait un usage constant dans le présent Séminaire on pourra consulter SGA 1 VIII .

Soit toujours $f: S' \to S$ un morphisme tel que $S'' = S' \times_S S'$ existe, et soit X un objet sur S tel que $X' = X \times_S S'$ et $X'' = X \times_S S''$ existent ; alors les images inverses de X' par pr_i $(i=1,2)$ existent et sont canoniquement isomorphes , et par suite X'/S' est munie d'une donnée de recollement canonique relativement à f . Lorsque S''' et $X''' = X \times_S S'''$ existent , c'est même une donnée de descente . Si Y est un autre objet sur S , satisfaisant aux mêmes conditions que X/S , alors pour tout S-morphisme $X \to Y$, le S'-morphisme correspondant $X' \to Y'$ est "compatible avec les données de recollement" canoniques sur X',Y' . Si en particulier $S' \to S$ est un morphisme quarrable , alors

$$X \longmapsto X' = X \times_S S'$$

est un foncteur de la catégorie $\underline{C}_{/S}$ dans la "catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de descente relativement à f" - catégorie dont la définition est laissée au lecteur, et qui est une sous-catégorie pleine de la "catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de recollement relativement à f" .

Ceci posé :

Définition 2.2. On dit qu'un morphisme $f:S'\to S$ est un morphisme de descente (resp. un morphisme de descente effective) si f est quarrable (i.e. pour tout $X\to S$, le produit fibré $X\times_S S'$ existe), et si le foncteur précédent $X\mapsto X'=X\times_S S'$ de la catégorie $\underline{C}_{/S}$ des objets sur S, dans la catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de descente relativement à f, est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories).

On notera que la première de ces deux notions peut s'exprimer à l'aide de la seule notion de donnée de recollement (donc sans faire intervenir le produit fibré triple S'''), f étant un morphisme de descente si f est quarrable et $X\mapsto X'$ est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie $\underline{C}_{/S}$ dans la catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de recollement relativement à f. Quand on explicite cette définition, on constate que cela signifie que pour deux objets X,Y sur S, le diagramme d'ensembles suivant

$$(x)\qquad \mathrm{Hom}_S(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(X',Y') \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{S''}(X'',Y'')$$

est exact, où $p_i(u')$ désigne l'image inverse de $u'\in \mathrm{Hom}_{S'}(X',Y')$ par la projection $pr_i: S''\to S'$, pour $i=1,2$; en effet, le noyau du couple (p_1,p_2) n'est autre par définition que l'ensemble des S'-morphismes $X'\to Y'$ compatibles avec les données de recollement canoniques.

Notons que, par définition des images inverses Y',Y'', on a des bijections canoniques

$$\mathrm{Hom}_{S'}(X',Y') \simeq \mathrm{Hom}_S(X',Y) \quad , \quad \mathrm{Hom}_{S''}(X'',Y'') \simeq \mathrm{Hom}_S(X'',Y) \quad ,$$

de sorte que l'exactitude du diagramme (x) équivaut à celle de

$$(xx)\qquad \mathrm{Hom}_S(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X',Y) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_S(X'',Y) \quad ,$$

obtenu en appliquant $\mathrm{Hom}_S(-,Y)$ au diagramme dans $\underline{C}_{/S}$:

(xxx) $$X'' \rightrightarrows X' \longrightarrow X$$

qui est déduit de

$$S'' \rightrightarrows S' \longrightarrow S$$

par le changement de base $X \to S$. Cela prouve, compte tenu de 1.6 , la première partie de :

Proposition 2.3. Soit $f : S' \to S$ un morphisme . Si c'est un épimorphisme effectif universel, c'est un morphisme de descente, et la réciproque est vraie si S est un objet quarrable de $\underline{C}$ (i.e. son produit par tout objet de $\underline{C}$ existe) .

Reste à prouver que si f est un morphisme de descente, c'est un épimorphisme effectif universel, c'est-à-dire que pour tout morphisme $X \to S$, le diagramme (xxx) est exact , i.e. pour tout objet Z de $\underline{C}$, le transformé de ce diagramme par $\mathrm{Hom}(-,Z)$ est un diagramme exact d'ensembles. Or par hypothèse $Z \times S$ existe; soit Y l'objet de $\underline{C}_{/S}$ qu'il définit ; alors le diagramme transformé de (xxx) par $\mathrm{Hom}(-,Z)$ est isomorphe au diagramme transformé par $\mathrm{Hom}_S(-,Y)$, or ce dernier est exact par l'hypothèse sur f .

On peut donc appliquer aux épimorphismes effectifs universels les résultats sur les morphismes de descente, tels les suivants :

Proposition 2.4. Soit $f : S' \to S$ un morphisme de descente (par exemple un épimorphisme effectif universel). Alors :

a) Pour tout S-morphisme $u : X \to Y$, u est un isomorphisme (resp. un monom.) si et seulement si $u' : X' \to Y'$ l'est.

b) Soient X, Y deux sous-objets de S , X' et Y' les sous-objets de S' images inverses des précédents . Pour que X soit majoré par Y (resp. soit égal à Y) , il faut et suffit qu'il en soit de même pour X', Y' .

Pour a) , il résulte de la définition que si u' est un isomorphisme dans la catégorie des objets a donnée recollement, alors u est un isomorphisme ; or on constate aussitôt que tout isomorphisme d'objets sur S', compatible avec des données de recollement, est un isomorphisme d'objets à donnée de recollement, i.e. son inverse est également compatible avec les données de recollement. Pour b), on est ramené à prouver que si X' est majoré par Y', i.e. s'il existe un S'-morphisme $X' \to Y'$, alors il en est de même pour X,Y sur S. Or comme $Y' \to S'$, donc aussi $Y'' \to S''$, est un monomorphisme, on voit que $X' \to Y'$ est automatiquement compatible avec les données de recollement, donc provient d'un S-morphisme $X \to Y$. Notons que la démonstration vaut plus généralement quand on a deux objets X,Y sur S, avec $Y \to S$ un monomorphisme, et qu'on se demande si le morphisme $X \to S$ se factorise par Y : il suffit que $X' \to S'$ se factorise par Y'.

Corollaire 2.5. *Soient $f: S' \to S$ un épimorphisme effectif universel et $g: S \to T$ un morphisme tel que $S \times_T S$ existe. Supposons que $S'' = S' \times_S S'$ soit aussi un produit fibré de S' par lui-même sur T, i.e. $S' \times_S S' \xrightarrow{\sim} S' \times_T S'$. Alors $g: S \to T$ est un monomorphisme (et réciproquement bien sur).*

En effet, considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} S' \times_S S' & \longrightarrow & S' \times_T S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & S \times_T S \end{array} \quad ,$$

où la deuxième flèche horizontale est le morphisme diagonal. En vertu de 1.9 la deuxième flèche verticale est un épimorphisme effectif universel, par hypothèse la première flèche horizontale est un isomorphisme, donc en vertu de 2.4 a) ou b) au choix, il en est de même de la première $S \to S \times_T S$, ce qui signifie précisément que $g: S \to T$ est un monomorphisme.

Remarque 2.6. Les notions introduites dans 2.1, en termes de morphismes entre certaines limites projectives, s'explicitent de façon évidente en termes des foncteurs contravariants définis par les objets S,S',X' envisagés : sous réserve d'existence des produits fibrés envisagés dans 2.1 , il y a correspondance biunivoque entre les données de recollement, resp. de descente sur X'/S' relativement à $S' \to S$, et les données de recollement, resp. de descente pour les objets correspondants dans $\hat{\underline{C}} = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}^{\circ},(\mathrm{Ens}))$. Ceci permet, si on le désire, d'étendre ces notions au cas où on ne fait aucune hypothèse d'existence de produits fibrés dans $\underline{C}$.

Remarque 2.7. Les notions introduites dans ce numéro se généralisent au cas de familles de morphismes . Elles peuvent d'autre part se présenter de manière plus intrinsèque à l'aide de la notion de crible (4.1). Pour ces questions, le lecteur se reportera à [D] .

3. Relations d'équivalence effectives universelles .

3.1. Relations d'équivalence : définitions .

Définition 3.1.1. On appelle $\underline{C}$-relation d'équivalence dans $X \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ un sous-foncteur représentable R du foncteur $X \times X$, tel que pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, $R(S)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $X(S)$.

Cette définition s'applique en particulier à la catégorie $\hat{\underline{C}}$. Si on considère X comme un objet de $\hat{\underline{C}}$, on voit alors qu'une $\hat{\underline{C}}$-relation d'équivalence dans X n'est autre qu'un sous-foncteur R de $X \times X$ tel que $R(S)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $X(S)$ pour tout objet S de $\underline{C}$.

Si R est une $\underline{C}$-relation d'équivalence dans X , on désigne par p_i le morphisme de R dans X induit par la projection $pr_i : X \times X \to X$. On a donc un diagramme

$$p_1,p_2 : R \rightrightarrows X .$$

Définition 3.1.2. Un morphisme $u : X \to Z$ est dit compatible avec R si $up_1 = up_2$. Un objet conoyau du couple (p_1, p_2) est aussi appelé objet-quotient de X par R et noté X/R.

On a donc un diagramme exact

$$R \underset{}{\overset{p_1, p_2}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{p} X/R$$

et X/R représente le foncteur covariant

$$\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X/R, Z) = \{ \text{morphismes de } X \text{ dans } Z \text{ compatibles avec } R \} .$$

Si les objets-quotients ont été choisis dans $\underline{C}$, le quotient X/R est unique (lorsqu'il existe).

Ces définitions se généralisent aussitôt au cas d'une $\hat{\underline{C}}$-relation d'équivalence dans X, mais on remarquera que l'identification des objets de $\underline{C}$ à leurs images dans $\hat{\underline{C}}$ ne commute pas à la formation des quotients, c'est-à-dire que le quotient X/R de X par R dans $\underline{C}$ n'est pas a priori un quotient de X par R dans $\hat{\underline{C}}$. On se gardera donc d'identifier inconsidérément $\underline{C}$ à son image dans $\hat{\underline{C}}$ dans les questions faisant intervenir des passages au quotient.

Dans la suite, nous dirons simplement relation d'équivalence pour $\underline{C}$-relation d'équivalence; nous préciserons, le cas échéant, s'il s'agit de $\hat{\underline{C}}$-relations d'équivalences.

Définition 3.1.3. Si X est un objet de $\underline{C}$ au-dessus de S, on appelle relation d'équivalence dans X au-dessus de S une relation d'équivalence R dans X tel que le morphisme structural $X \to S$ soit compatible avec R.

Le monomorphisme canonique $R \to X \times X$ se factorise alors par le monomorphisme

$$X \times_S X \longrightarrow X \times X$$

et définit une relation d'équivalence dans l'objet $X \to S$ de $\underline{C}_{/S}$. Lorsque le quotient X/R existe, il est muni d'un morphisme canonique dans S et l'objet de $\underline{C}_{/S}$ correspondant est un quotient de $X \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}_{/S}$ par la relation d'équivalence précédente . Réciproquement, si S est un objet quarrable de $\underline{C}$ et si $Y \to S$ est un quotient de X par cette relation d'équivalence (dans $\underline{C}_{/S}$) , alors Y est un quotient de X par R dans $\underline{C}$. De toutes façons, nous n'aurons jamais à considérer des quotients dans $\underline{C}_{/S}$ qui ne soient pas déjà quotients dans $\underline{C}$.

Définition 3.1.4. Si X (resp. X') est un objet de $\underline{C}$ muni d'une relation d'équivalence R (resp. R'), un morphisme

$$u : X \longrightarrow X'$$

est dit compatible avec R et R' si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, deux points de $X(S)$ congrus modulo $R(S)$ sont transformés par u en deux points de $X'(S)$ congrus modulo $R'(S)$;

(ii) il existe un morphisme $R \to R'$ (nécessairement unique) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R' \arrow[d] \\ X \times X \arrow[r, "u \times u"] & X' \times X' \end{tikzcd} .$$

D'après la propriété universelle de X/R , il existe alors (lorsque les quotients X/R et X'/R' existent) un morphisme unique v rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & X/R \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "p'"] & X'/R' \end{tikzcd} .$$

Définition 3.1.5. Un sous-objet (= un sous-foncteur représentable) Y de X est dit stable par la relation d'équivalence R si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, le sous-ensemble $Y(S)$ de $X(S)$ est stable par $R(S)$;

(ii) Les deux sous-objets de R images inverses de Y par p_1 et p_2 sont identiques.

Un cas particulier important de sous-objet stable de X est le suivant : le quotient X/R existe et Y est l'image inverse sur X d'un sous-objet de X/R.

Définition 3.1.6. Soient R une relation d'équivalence dans X et $X' \to X$ un morphisme. La relation d'équivalence R' dans X' obtenue par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} R' & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' \times X' & \longrightarrow & X \times X \end{array}$$

est dite la relation d'équivalence dans X' image inverse de la relation d'équivalence R dans X. En particulier, si X' est un sous-objet de X, on dira que c'est la relation d'équivalence induite dans X' par R, on la notera $R_{X'}$.

Le morphisme $X' \to X$ est compatible avec R' et R ; on a donc, lorsque les quotients existent, un morphisme $X'/R' \to X/R$ (3.1.4). Si X' est un sous-objet de X, nous verrons plus tard que dans certains cas on peut prouver que $X'/R' \to X/R$ est un monomorphisme, donc identifie X'/R' à un sous-objet de X/R. Lorsqu'il en sera ainsi, l'image inverse de ce sous-objet dans X sera un sous-objet de X majorant X' et stable par R : le saturé de X' pour la relation d'équivalence R.

Proposition 3.1.7. Si le sous-objet Y de X est stable par R, on a deux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} R_Y & \longrightarrow & R \\ {\scriptstyle p_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} \quad , \quad i = 1,2 \; .$$

Démonstration immédiate .

3.2. Relation d'équivalence définie par un groupe opérant librement .

Définition 3.2.1. Soient X un objet de $\underline{C}$ et H un $\underline{C}$-groupe opérant sur X (c'est-à-dire muni d'un morphisme de $\hat{\underline{C}}$-groupes

$$H \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(X) \quad) .$$

On dit que H opère librement sur X si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, le groupe $H(S)$ opère librement sur $X(S)$.

(ii) Le morphisme de foncteurs

$$H \times X \longrightarrow X \times X$$

défini ensemblistement par $(h,x) \longmapsto (hx,x)$ est un monomorphisme .

(Dans la définition précédente, on a supposé que le groupe H opérait "à gauche" sur X . On a évidemment une notion analogue dans le cas où le groupe opère "à droite", c'est-à-dire lorsqu'on s'est donné un morphisme de groupes du groupe H opposé à H dans $\underline{\mathrm{Aut}}(X)$) .

Si H opère librement sur X, l'image de $H \times X$ par le morphisme de (ii) est une relation d'équivalence dans X dite relation d'équivalence définie par l'action de H sur X . Lorsque le quotient de X par cette relation d'équivalence existe, on le note $H\backslash X$ (X/H lorsque H opère à droite). Il représente le foncteur covariant suivant : si Z est un objet de $\underline{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}(H\backslash X , Z) = \{ \text{morphismes de } X \text{ dans } Z \text{ invariants par } H \}$$

où le morphisme $f : X \to Z$ est dit invariant par H si pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, le morphisme $X(S) \longrightarrow Z(S)$ correspondant est invariant sous le groupe $H(S)$.

Lemme 3.2.2. Sous les conditions de 3.2.1 , soit Y un sous-objet de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Y est stable par la relation d'équivalence définie par H (3.1.5),

(ii) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, le sous-ensemble $Y(S)$ de $X(S)$ est stable sous $H(S)$.

(iii) Il existe un morphisme f , nécessairement unique, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} H \times Y \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ H \times X \arrow[r] & X \end{tikzcd} .$$

Sous ces conditions, f définit un morphisme de $\underline{C}$-groupes

$$H \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(Y)$$

et la relation d'équivalence définie dans Y par cette opération de H n'est autre que la relation d'équivalence induite dans Y par la relation d'équivalence définie dans X par l'action de H .

Démonstration immédiate . On a évidemment un énoncé analogue pour une "opération à droite". L'opération de H sur Y définie ci-dessus sera appelée opération induite dans Y par l'opération donnée de H sur X .

Considérons maintenant la situation suivante : H et G sont deux

$\underline{C}$-groupes et on s'est donné un morphisme de groupes

$$u : H \longrightarrow G \quad .$$

Alors H opère sur G par translations (on pose ensemblistement $h\,g = u(h)\,g$) et y opère *librement* si et seulement si u est un *monomorphisme* . Le quotient de G par cette opération de H est noté, lorsqu'il existe, $H \backslash G$. On définit de même une opération à droite de H sur G et un quotient G / H . Ces quotients sont fonctoriels par rapport aux groupes en cause ; de manière précise, on a le lemme suivant, énoncé pour les quotients à droite :

Lemme 3.2.3. *Soient* $u : H \longrightarrow G$ *et* $u' : H' \longrightarrow G'$ *deux monomorphismes de* $\underline{C}$-*groupes* . *Supposons donné un morphisme de* $\underline{C}$-*groupes*

$$f : G \longrightarrow G' \quad .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f *est compatible avec les relations d'équivalences définies dans* G *et* G' *par* H *et* H' .

(ii) *Pour tout* $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, *on a* $f\,u\,(H(S)) \subset u'(H'(S))$

(iii) *Il existe un morphisme* $g : H \rightarrow H'$, *nécessairement unique et multiplicatif, tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & H' \arrow[d, "u'"] \\ G \arrow[r, "f"] & G' \end{tikzcd} \quad .$$

Sous ces conditions, si les quotients G/H *et* G'/H' *existent, il existe un morphisme unique* $\dot{f}$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G' \arrow[d, "p'"] \\ G/H \arrow[r, "\dot{f}"] & G'/H' \end{tikzcd} \quad .$$

La première partie se démontre par réduction au cas ensembliste . La seconde résulte immédiatement de (i) .

On pourrait traduire dans la situation présente les notions introduites ci-dessus pour des relations d'équivalences générales. Signalons simplement le lemme suivant dont la démonstration est immédiate par réduction au cas ensembliste :

Lemme 3.2.4. *Soient* $u : H \to G$ *un monomorphisme de* $\underline{C}$*-groupes et* G' *un sous-*$\underline{C}$*-groupe de* G . *Pour que le sous-objet* G' *de* G *soit stable par la relation d'équivalence définie par* H , *il faut et il suffit que* u *se factorise par le monomorphisme canonique* $G' \to G$ *et sous cette condition l'opération de* H *sur* G' *induite par l'opération de* H *sur* G *définie par* u *n'est autre que l'opération déduite du monomorphisme* $H \to G'$ *factorisant* u .

3.3. *Relations d'équivalence effectives universelles* .

Définition 3.3.1. *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme* . *On appelle* relation d'équivalence définie par f *dans* X *et on note* $\underline{R}(f)$, *la* $\underline{C}$*-relation d'équivalence dans* X *image du monomorphisme canonique*

$$X \times_Y X \longrightarrow X \times X \quad .$$

Définition 3.3.2. *Soit* R *une relation d'équivalence dans* X . *On dit que* R *est* effective *si*

(i) R *est représentable* (*i.e. est une* $\underline{C}$*-relation d'équivalence*) ,

(ii) *le quotient* $Y = X/R$ *existe* ,

(iii) le diagramme

$$R \overset{p_1,p_2}{\rightrightarrows} X \xrightarrow{p} Y$$

fait de R le carré fibré de X au-dessus de Y , c'est-à-dire R est la relation d'équivalence définie par p .

Si R est une relation d'équivalence effective dans X , alors p est un épimorphisme effectif (1.3) . Si $f : X \to Y$ est un épimorphisme effectif, alors $\underline{R}(f)$ est une relation d'équivalence effective dans X dont un quotient est Y . Il y a donc une correspondance "galoisienne" biunivoque entre relations d'équivalences effectives dans X et quotients effectifs de X (i.e. classes d'équivalences des épimorphismes effectifs de source X) .

Définition 3.3.3. On dit que la relation d'équivalence R dans X est effective universelle si le quotient $Y = X/R$ existe, et si, pour tout $Y' \to Y$, les produits fibrés $X' = X \times_Y Y'$ et $R' = R \times_Y Y'$ existent et R' est un carré fibré de X' au-dessus de Y' . Il revient au même de dire que R est effective et que $p : X \to X/R$ est un épimorphisme effectif universel.

Il y a donc comme ci-dessus correspondance biunivoque entre relations d'équivalence effectives universelles dans X et quotients effectifs universels de X .

Proposition 3.3.4. Soit R une relation d'équivalence effective universelle dans X . Soit $f : X \to Z$ un morphisme compatible avec R donc se factorisant par $g : X/R \to Z$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) g est un monomorphisme ;

(ii) R est la relation d'équivalence définie par f .

En effet, (i) entraîne (ii) trivialement, la réciproque n'est autre que 2.5.

Définition 3.3.5. Soit H un $\underline{C}$-groupe opérant librement sur X. On dit que H opère de manière effective, ou que l'opération de H sur X est effective (resp. effective universelle), si la relation d'équivalence définie dans X par l'action de H est effective (resp. effective universelle).

3.4. (M)-effectivité.

Dans la pratique, il est le plus souvent difficile de caractériser les épimorphismes effectifs universels. On dispose souvent, néanmoins, d'un certain nombre de morphismes de ce type, par exemple en théorie des schémas, des morphismes fidèlement plats quasi-compacts. Cela conduit aux développements ci-dessous.

3.4.1. Enonçons d'abord un certain nombre de conditions portant sur une famille (M) de morphismes de $\underline{C}$:

(a) (M) est stable par extension de la base : tout $u : T \to S$ élément de (M) est quarrable et pour tout $S' \to S$, $u' : T \times_S S' \longrightarrow S'$ est élément de (M).

(b) Le composé de deux éléments de (M) est dans (M).

(c) Tout isomorphisme est élément de (M).

(d) Tout élément de (M) est un épimorphisme effectif.

Notons que (a) et (b) entraînent :

(a') Le produit cartésien de deux éléments de (M) est dans (M) : Soient $u : X \longrightarrow Y$ et $u' : X' \longrightarrow Y'$ deux S-morphismes éléments de (M). Si $Y \times_S Y'$ existe, alors $X \times_S X'$ existe et $u \times_S u'$ est élément de (M).

Cela résulte du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & Y' & X' \arrow[l, "u'"'] \\
X \arrow[d, "u"'] & X \times_S Y' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & X \times_S X' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dl, "u \times_S u'"] \\
Y & Y \times_S Y' \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

De même (a) et (d) entraînent

(d') Tout élément de (M) est un épimorphisme *effectif universel* .

3.4.2. La famille (M_o) des épimorphismes effectifs universels vérifie les conditions (a) à (d) de 3.4.1 En effet, (a) , (c) et (d) sont vérifiées par définition, (b) résulte de 1.8. Dans la suite, nous supposerons donnée une famille (M) de morphismes de $\underline{C}$ vérifiant ces conditions : nos résultats s'appliqueront donc à la famille (M_o) en particulier .

Définition 3.4.3. *On dit que la relation d'équivalence* R *dans* X *est de type* (M) *si elle est représentable et si* $p_1 \in (M)$ *(ce qui par* (b) et (c) *entraîne que* $p_2 \in (M)$) . *On dit que* R *est* (M)-effective *si elle est effective et si le morphisme canonique* $X \longrightarrow X/R$ *est élément de* (M) . *On dit que le quotient* Y *de* X *est* (M)-effectif *si le morphisme canonique* $X \longrightarrow Y$ *est élément de* (M) .

Il résulte de cette définition les conséquences suivantes :

(i) Une relation d'équivalence (M)-effective est effective universelle et de type (M) .

Cela résulte respectivement de (d), et de (a) par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{p_2} & X \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \longrightarrow & X/R \end{array} .$$

(ii) Un quotient (M)-effectif est effectif universel .

(iii) Les applications $R \longmapsto X/R$ et $p \longmapsto \underline{R}(p)$ réalisent une correspondance biunivoque entre relations d'équivalences (M)-effectives dans X et quotients (M)-effectifs de X .

(iv) (M_o)-effectif équivaut à effectif universel .

3.4.4. Soit H un S-groupe dont le morphisme structural soit élément de (M). Alors si H opère librement sur le S-objet X, il y définit une relation d'équivalence de type (M). En effet par (a) le produit fibré $H \times_S X$ existe et $pr_2 : H \times_S X \longrightarrow X$ est élément de (M). On dira que l'opération de H est (M)-effective si la relation d'équivalence définie dans X par cette opération est (M)-effective.

Proposition 3.4.5. (M)-effectivité et changement de base. Soit R une relation d'équivalence (M)-effective dans X au-dessus de S. Posons $Y = X/R$. Soit $S' \longrightarrow S$ un changement de base tel que $Y' = Y \times_S S'$ existe. Alors $X' = X \times_S S'$ existe, $R' = R \times_S S'$ est une relation d'équivalence (M)-effective dans X' au-dessus de S' et $X'/R' \simeq (X/R)'$.

En effet, les morphismes canoniques $X \longrightarrow Y$ et $R \longrightarrow Y$ sont éléments de (M), donc par (a') X' et R' sont représentables. Par associativité du produit, R' est la relation d'équivalence définie dans X' par le morphisme canonique $X' \longrightarrow Y'$ qui est élément de (M), d'où la conclusion.

Proposition 3.4.6. (M)-effectivité et produits cartésiens. Soit R (resp. R') une relation d'équivalence (M)-effective dans X (resp. X') au-dessus de S. Si $(X/R) \times_S (X'/R')$ existe, alors $X \times_S X'$ existe, $R \times_S R'$ est une relation d'équivalence (M)-effective dans $X \times_S X'$ au-dessus de S et

$$(X \times_S X')/(R \times_S R') \simeq X/R \times_S X'/R' .$$

Posons $Y = X/R$, $Y' = X'/R'$. D'après (a'), le produit fibré $X \times_S X'$ existe et le morphisme canonique

$$q : X \times_S X' \longrightarrow Y \times_S Y'$$

est élément de (M). Or la formule

$$(X \times X') \times_{(Y \times Y')} (X \times X') \simeq (X \times_Y X) \times (X' \times_{Y'} X')$$

(tous les produits non indicés sont pris sur S) montre que $R \times_S R'$ est la relation d'équivalence définie par q dans $X \times_S X'$, ce qui achève la démonstration.

3.5. Construction de quotients par descente .

Il arrive fréquemment que l'on ne sache pas construire directement un quotient , mais qu'on sache le faire après un changement de base convenable . Le présent numéro donne un critère utile dans cette situation .

On a vu au paragraphe 2 la définition d'une donnée de descente sur un objet X' au-dessus de S' relativement à un morphisme $S' \longrightarrow S$.

Définition 3.5.1. On dit qu'une donnée de descente sur X' relativement à $S' \longrightarrow S$ est effective , si X' muni de cette donnée de descente est isomorphe à l'image réciproque sur S' d'un objet X au-dessus de S , munie de sa donnée de descente canonique .

Si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de descente (2.2) , alors le X de la définition est unique à isomorphisme unique près . Dire que $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de descente effective (2.2), c'est dire que c'est un morphisme de descente et que toute donnée de descente relativement à ce morphisme est effective .

Considérons maintenant une relation d'équivalence R dans un objet X au-dessus de S . Soient X' (resp. X'', resp. X''') les images inverses de X sur S' , $S'' = S' \times_S S'$ et $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$ et soit R' , R'' , R''' les relations d'équivalences déduites de R par image inverse . Supposons que la relation d'équivalence R' dans X' soit (M)-effective , et considérons le quotient $Y' = X'/R'$ qui est un objet au-dessus de S' . Ses deux images inverses sur S'' sont isomorphes à X''/R'' d'après 3.4.5. Le S'-objet Y' est donc muni d'une donnée de recollement canonique . Utilisant de même l'unicité de X'''/R''', on voit que c'est même une donnée de descente . (Remarque : on a implicitement supposé dans cette démonstration que tous les produits fibrés écrits existaient, ce qui est le cas en particulier si $S' \longrightarrow S$ est quarrable , par exemple un morphisme de descente) .

Proposition 3.5.2. Soit R une relation d'équivalence dans l'objet X au-dessus de S. Soit $S' \rightarrow S$ un épimorphisme effectif universel. Supposons que tout S-morphisme dont l'image inverse sur S' est dans (M) soit lui-même dans (M). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) R est (M)-effective dans X ;

(ii) R' est (M)-effective dans X' et la donnée de descente canonique sur X'/R' est effective.

S'il en est ainsi, l'objet "descendu" de X'/R' est canoniquement isomorphe à X/R.

Le fait que (i) entraîne (ii) n'est autre que la traduction dans le langage de la descente de 3.4.4. Si on montre la réciproque, la dernière affirmation de la proposition sera conséquence du fait qu'un épimorphisme effectif universel est un morphisme de descente (2.3), donc que l'"objet descendu" est unique (= à isomorphisme unique près).

Démontrons donc (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit Y' le quotient X'/R' et Y l'objet descendu. Comme le morphisme canonique $p' : X' \longrightarrow X'/R' = Y'$ est compatible par construction avec les données de descente (ses images inverses sur S'' coïncident avec le morphisme canonique $X'' \longrightarrow X''/R''$), il provient par image inverse sur S' d'un S-morphisme $p : X \longrightarrow Y$. Comme p' est élément de (M), il résulte de l'hypothèse faite sur le morphisme $S' \rightarrow S$ que p est également élément de (M). Comme p' est compatible avec la relation d'équivalence R', p est compatible avec R, toujours parce qu'un épimorphisme effectif universel est un morphisme de descente. On a donc un morphisme

$$R \longrightarrow X \times_Y X \quad .$$

Pour démontrer que R est (M)-effective et que Y est isomorphe à X/R, il suffit de prouver que ce morphisme est un isomorphisme. Or il le devient par extension de la base de S à S', car R' est effective, c'est donc un isomorphisme pour la même raison que précédemment (2.4).

Remarquons que l'hypothèse du texte est vérifiée si on prend pour (M) la famille (M_o) des épimorphismes effectifs universels et si $\underline{C}$ possède des produits fibrés (1.10) . On en déduit le

Corollaire 3.5.3. Supposons que $\underline{C}$ possède des produits fibrés (au-dessus de S suffirait) . Soient R une relation d'équivalence dans X au-dessus de S et $S' \longrightarrow S$ un épimorphisme effectif universel . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) R est effective universelle dans X ,

(ii) R' est effective universelle dans X' et la donnée de descente canonique sur X'/R' est effective .

S'il en est ainsi, l'objet "descendu" de X'/R' est canoniquement isomorphe à X

4. Topologies et faisceaux .

La notion de crible, et la présentation de la notion de topologie (4.2. adoptée ici, (plus intrinsèque et plus commode à bien des égards que celle par familles couvrantes de [MA]), sont dus à J. GIRAUD [AS] .

4.1. Cribles .

Définition 4.1.1. On appelle crible de la catégorie $\underline{C}$ un sous-foncteur C du foncteur final $\underline{e} : \underline{C}^o \longrightarrow (Ens)$.

A tout crible C de $\underline{C}$ on associe l'ensemble E(C) des objets X de $\underline{C}$ tels que $C(X) \neq \emptyset$, c'est-à-dire tel que le morphisme structural $X \longrightarrow \underline{e}$ se factorise par C . On a donc les équivalences

$$(+) \quad \begin{cases} X \in E(C) \iff C(X) = \underline{e}(X) = \{\emptyset\} \; . \\ X \notin E(C) \iff C(X) = \emptyset \; . \end{cases}$$

L'ensemble $E(C)$ jouit de la propriété suivante :

(++) Si $X \in E(C)$ et si $\mathrm{Hom}(Y,X) \neq \emptyset$, alors $Y \in E(C)$.

Réciproquement, si E est un sous-ensemble de Ob $\underline{C}$ jouissant de la propriété (++), alors E s'écrit de manière unique sous la forme $E(C)$ et C est défini par les formules (+). Il y a donc correspondance biunivoque entre les cribles de $\underline{C}$ et les sous-ensembles de Ob $\underline{C}$ vérifiant la condition (++). Par abus de langage, nous dirons parfois que l'ensemble $E(C)$ est un crible de $\underline{C}$.

Si on munit l'ensemble Ob $\underline{C}$ de sa structure de préordre naturelle, (Y dominant X s'il existe une flèche de Y dans X), les ensembles $E(C)$ sont donc les sous-ensembles de Ob $\underline{C}$ qui contiennent tout majorant d'un de leurs éléments. L'ensemble des cribles de $\underline{C}$ est muni d'une structure d'ordre : on dira que C est plus fin que C' si $C \subset C'$, ou, ce qui revient au même $E(C) \subset E(C')$. On a $E(C) \cap E(C') = E(C \times C')$ et l'ensemble des cribles de $\underline{C}$ est filtrant.

Tout sous-ensemble E de Ob $\hat{\underline{C}}$, par exemple un sous-ensemble de Ob $\underline{C}$ définit un crible $C(E)$: l'ensemble des $X \in$ Ob $\underline{C}$, tels que $F(X) \neq \emptyset$ pour au moins un $F \in E$ vérifie la condition (++) et définit le crible cherché.

Ce crible peut aussi être défini comme l'image de la famille de morphismes $\{F \longrightarrow \underline{e}\ ,\ F \in E\}$ au sens de la définition suivante :

Définition 4.1.2. Soit $\{F_i \longrightarrow F\}$ une famille de morphismes de $\hat{\underline{C}}$ de même but F. On appelle image de cette famille le sous-foncteur de F défini par

$$S \rightsquigarrow \bigcup_i \mathrm{Im}\, F_i(S) \subset F(S) .$$

Proposition 4.1.3. La formation de l'image commute à l'extension de la base : dans les notations précédentes, désignons par I l'image de la famille $\{F_i \longrightarrow F\}$; pour tout morphisme $G \longrightarrow F$ de $\hat{\underline{C}}$, l'image de la famille de morphismes $\{F_i \times_F G \longrightarrow G\}$ est le sous-foncteur $I \times_F G$ de G.

Si C est un crible de $\underline{C}$ et E un sous-ensemble de Ob $\underline{C}$ tel que

$C(E) = C$, on dit que E est une <u>base</u> de C . Tout crible C possède une base, par exemple l'ensemble $E(C)$. Nous nous proposons de décrire l'ensemble $\mathrm{Hom}(C,F)$, où C est un crible de $\underline{C}$ et F un objet de $\hat{\underline{C}}$, à l'aide d'une base de C .

Soit $\{S_i\}$ une base du crible C , pour chaque couple (i,j) , on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} S_i \times S_j \arrow[r] \arrow[d] & S_i \arrow[d] \\ S_j \arrow[r] & \underline{e} \end{tikzcd} ,$$

d'où un diagramme

$$\Gamma(F) = \mathrm{Hom}(\underline{e},F) \xrightarrow{i} \prod_i \mathrm{Hom}(S_i,F) \overset{j_1,j_2}{\rightrightarrows} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times S_j, F)$$

tel que $j_1 i = j_2 i$. On a donc un morphisme

$$\mathrm{Hom}(\underline{e},F) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\prod_i \mathrm{Hom}(S_i,F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times S_j,F))$$

On vérifie immédiatement :

<u>Proposition</u> 4.1.4. <u>On a un isomorphisme fonctoriel en</u> F

$$\mathrm{Hom}(C,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\Big[\prod_i \mathrm{Hom}(S_i,F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times S_j , F)\Big] ,$$

<u>tel que le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\underline{e},F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}\Big[\prod_i \mathrm{Hom}(S_i,F)) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times S_j, F)\Big] \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}(\underline{e},F) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C,F) \end{tikzcd} ,$$

<u>où la dernière ligne est induite par le morphisme canonique</u> $C \to \underline{e}$, <u>soit commutatif</u> .

Corollaire 4.1.5. Supposons que les produits fibrés $S_i \times S_j$ soient représentables, par exemple que les S_i soient quarrables. On a alors pour tout $F \in \mathrm{Ob}\,\hat{\underline{C}}$, un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(C,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\Big[\prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \times S_j)\Big] .$$

Remarque 4.1.6. Soit R un crible de C ; désignons par $\underline{R}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{C}$ dont l'ensemble des objets est $E(R)$ et par

$$i_R : \underline{R} \longrightarrow \underline{C}$$

le foncteur d'inclusion. On a un isomorphisme fonctoriel en $F \in \mathrm{Ob}\,\hat{\underline{C}}$

$$\mathrm{Hom}(R,F) \longrightarrow \Gamma(F \circ i_R)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\underline{e},F) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R,F) \\
\wr\| & & \wr\| \\
\Gamma(F) & \longrightarrow & (F \circ i_R)
\end{array}$$

où la seconde ligne est induite par le foncteur i_R, soit commutatif.

Définition 4.1.7. Soit $\underline{C}$ une catégorie. On appelle crible de l'objet S de $\underline{C}$ un crible de la catégorie $\underline{C}_{/S}$.

Un crible de S est donc un sous-$\hat{\underline{C}}$-objet de S. Il lui correspond canoniquement un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\underline{C}_{/S}$ contenant la source de toute flèche dont il contient le but. Par abus de langage, un tel ensemble sera aussi appelé crible de S.

4.2. Topologies : définitions.

Définition 4.2.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie. On appelle topologie sur $\underline{C}$ la donnée pour chaque S de $\underline{C}$ d'un ensemble $J(S)$ de cribles de S, appelés cribles couvrants ou raffinements de S , donnée vérifiant les axiomes suivants :

(T 1) Pour tout raffinement R de S et tout morphisme $T \longrightarrow S$, le crible $R \times_S T$ de T est couvrant ("stabilité par changement de base") .

(T 2) Si R , C sont deux cribles de S , si R est couvrant et si pour tout $T \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et tout morphisme $T \to R$, le crible $C \times_S T$ de T est couvrant , alors C est un raffinement de S .

(T 3) Si $C \supset R$ sont deux cribles de S et si R est couvrant, alors C est couvrant .

(T 4) Pour tout S , S est un raffinement de S .

On peut reformuler ces axiomes de la manière suivante : pour tout objet F de $\hat{\underline{C}}$, notons $J(F)$ l'ensemble des sous-foncteurs R de F tels que pour tout morphisme $T \longrightarrow F$ de $\hat{\underline{C}}$, où T est représentable , $R \times_F T$, qui est un crible de T , soit couvrant . En vertu de (T 1) , cette notation est bien compatible avec la précédente . On dira également que $R \in J(F)$ est un raffinement de F . On vérifie immédiatement que les axiomes précédents entraînent les propriétés suivantes :

(T' 0) Si $F \supset G$ sont deux objets de $\hat{\underline{C}}$, et si pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et tout morphisme $S \to F$, $G \times_F S \in J(S)$, alors $G \in J(F)$.

(T' 1) Si $G \in J(F)$, et si $H \to F$ est un morphisme de $\hat{\underline{C}}$, alors $G \times_F H \in J(H)$.

(T' 2) Si $F \supset G \supset H$ sont trois objets de $\hat{\underline{C}}$, si $G \in J(F)$ et $H \in J(G)$, alors $H \in J(F)$.

(T' 3) Si $F \supset G \supset H$ sont trois objets de $\hat{\underline{C}}$ et si $H \in J(F)$, alors $G \in J(F)$.

(T' 4) Pour tout $F \in \mathrm{Ob}\, \hat{\underline{C}}$, $F \in J(F)$.

Réciproquement, si on se donne pour tout $F \in \mathrm{Ob}\, \hat{\underline{C}}$ un ensemble $J(F)$

de sous-objets de F vérifiant les propriétés (T' 0) à (T' 4), l'application $S \longmapsto J(S)$ définit une topologie sur $\underline{C}$ et les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre.

De (T' 1), (T' 2) et (T' 3) résulte la propriété suivante :

(T'5) Si G et H sont deux sous-objets de F, si $G, H \in J(F)$, alors $G \cap H \in J(F)$.

L'ensemble $J(H)$, ordonné par la relation $\supset$ est donc filtrant ; cette remarque nous servira plus tard.

4.2.2. On dira que la topologie définie par J est plus fine que la topologie définie par J' si pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, $J(S) \supset J'(S)$ (il revient au même de dire que pour tout $F \in \mathrm{Ob}\, \hat{\underline{C}}$, $J(F) \supset J'(F)$).

Tout ensemble de topologies sur $\underline{C}$ possède une borne inférieure : soit I un ensemble d'indice, et pour chaque $i \in I$, soit $S \longmapsto J_i(S)$ une topologie sur $\underline{C}$. Posons $J(S) = \bigcap_{i \in I} J_i(S)$; il est immédiat que l'on a défini ainsi une topologie sur $\underline{C}$, et que c'est bien la borne inférieure de l'ensemble donné.

En particulier, donnons-nous pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, un ensemble $E(S)$ de cribles de S. On appelle topologie engendrée par ces ensembles la topologie la moins fine pour laquelle les éléments de $E(S)$ soient des raffinements de S pour tout S.

Définition 4.2.3. Soit $\{F_i \longrightarrow F\}$ une famille de morphismes de $\hat{\underline{C}}$. Soit $G \subset F$ l'image (4.1.2) de cette famille. La famille est dite couvrante si $G \in J(F)$.

Un morphisme est dit couvrant si la famille réduite à ce morphisme est couvrante.

Cette définition s'applique en particulier à une inclusion : un crible C de S est couvrant si et seulement si le morphisme canonique $C \longrightarrow S$ est couvrant.

Les axiomes (T' 0) à (T' 5) entraînent pour les familles couvrantes les propriétés suivantes :

(C 0) Soit $\{F_i \longrightarrow F\}$ une famille de morphismes de $\hat{\underline{C}}$. Si pour tout changement de base <u>représentable</u> $S \longrightarrow F$, la famille $\{F_i \times_F S \longrightarrow S\}$ est couvrante, alors la famille initiale l'est aussi.

(C 1) Pour toute famille couvrante $\{F_i \longrightarrow F\}$ et tout morphisme $G \longrightarrow F$, la famille $\{F_i \times_F G \longrightarrow G\}$ est couvrante ("<u>stabilité par changement de base</u>").

(C 2) Si $\{F_i \longrightarrow F\}$ est une famille couvrante et si, pour chaque i, $\{F_{ij} \longrightarrow F_i\}$ est une famille couvrante, alors la famille composée $\{F_{ij} \longrightarrow F\}$ est couvrante ("<u>stabilité par composition</u>").

(C 3) Si $\{G_j \longrightarrow F\}$ est une famille couvrante, et si $\{F_i \longrightarrow F\}$ est une famille de morphismes de but F telle que pour chaque j il existe un i tel que $G_j \longrightarrow G$ se factorise par $F_i \longrightarrow F$, alors $\{F_i \longrightarrow F\}$ est couvrante ("<u>saturation</u>").

(C 4) Toute famille réduite à un isomorphisme est couvrante.

Noter que (C 2) et (C 3) entraînent aussi :

(C 5) Si $\{F_i \longrightarrow F\}$ est une famille de morphismes de but F telle qu'il existe une famille couvrante $\{G_j \longrightarrow F\}$ telle que pour tout j la famille $\{F_i \times_F G_j \longrightarrow G_j\}$ soit couvrante, alors la famille $\{F_i \longrightarrow F\}$ est couvrante ("<u>une famille localement couvrante est couvrante</u>").

4.2.4. Soit réciproquement $\underline{C}$ une catégorie <u>possédant des produits fibrés et</u> donnons-nous pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\ \underline{C}$ un ensemble de familles de morphismes de $\underline{C}$ de but S dites familles <u>couvrantes</u>, donnée vérifiant les axiomes (C 1) à (C 4) (donc aussi (C 5) qui en est une conséquence). Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\ \underline{C}$, soit $J(S)$ l'ensemble des cribles de S possédant une base couvrante (ou, ce qui revient au même par (C 3), dont toutes les bases sont couvrantes) . Alors $S \longmapsto J(S)$ définit une topologie sur $\underline{C}$. Les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre .

En fait, dans les applications, il est peu pratique de considérer toutes les familles couvrantes, car on possède parfois des descriptions assez simples d'un nombre "suffisant" de ces familles . Cela conduit à poser la

Définition 4.2.5. Soit $\underline{C}$ une catégorie . On appelle prétopologie sur $\underline{C}$ la donnée pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$ d'un ensemble $R(S)$ de familles de morphismes $\{S_i \longrightarrow S\}$ de but S dites couvrantes pour la prétopologie envisagée, vérifiant les axiomes suivants :

(P 1) Pour toute famille $\{S_i \longrightarrow S\} \in R(S)$ et tout morphisme $T \longrightarrow S$, les produits fibrés $S_i \times_S T$ existent et $\{S_i \times_S T \longrightarrow T\} \in R(T)$.

(P 2) Si $\{S_i \longrightarrow S\} \in R(S)$ et si pour chaque i $\{T_{ij} \longrightarrow S_i\}$ $R(S_i)$, alors la famille composée $\{T_{ij} \longrightarrow S\}$ appartient à $R(S)$.

(P 3) Toute famille réduite à un isomorphisme est couvrante .

On appelle topologie engendrée par R la topologie la moins fine pour laquelle les familles données soient couvrantes .

Proposition 4.2.6. Soit pour tout S , $J(S)$ l'ensemble des cribles de S couvrants pour la topologie engendrée par la prétopologie R . Soit $J_R(S)$ la partie de $J(S)$ formée des cribles définis par les familles de $R(S)$. Alors $J_R(S)$ est cofinal dans $J(S)$: tout raffinement de S contient un crible défini par une famille de $R(S)$.

Soit pour tout S , $J'(S)$ l'ensemble des cribles de S contenant un crible de $J_R(S)$. On a évidemment $J'(S) \subset J(S)$. Pour montrer que $J(S) = J'(S)$, il suffit de montrer que les $J'(S)$ font une topologie sur $\underline{C}$, c'est-à-dire vérifient les axiomes (T 1) à (T 4) . Or (T 1), (T 3), (T 4) sont évidemment vérifiés. Il reste à vérifier (T 2) . Soit donc R un élément de $J'(S)$ et C un sous-crible de R ; on suppose que pour tout $T \longrightarrow R$, $C \times_R T$ est dans $J'(T)$ et il faut prouver que $C \in J'(S)$. Par définition de J' , R contient un raffinement R' défini par une famille $\{ S_i \longrightarrow S \} \in R(S)$. Comme on a vérifié (T 3) , il suffit de prouver que $R' \cap C \in J'(S)$, on peut donc supposer que $R = R'$. Par hypothèse, pour tout i , $C \times_S S_i \in J'(S_i)$; il existe donc pour chaque i une famille couvrante $\{T_{ij} \longrightarrow S_i\} \in R(S_i)$ telle que $T_{ij} \longrightarrow S_i$ se factorise par $C \times_S S_i \longrightarrow S_i$. Le morphisme $T_{ij} \longrightarrow S$ se factorise donc par $C \longrightarrow S$, ce qui montre que C contient le crible défini par la famille composée $\{ T_{ij} \longrightarrow S \}$ et on a terminé par (P 2) .

Les axiomes (P 1) à (P 3) sont ceux de [MA] . Etant donné l'intérêt pratique des prétopologies, nous interpréterons chaque résultat important à à l'aide d'une prétopologie définissant la topologie donnée .

Remarque 4.2.7. On peut introduire une notion un peu plus générale : on donne pour chaque S un ensemble de familles couvrantes vérifiant (P 1), (P 3) et la proposition 4.2.6. Ceci se présente en particulier, lorsque les familles données vérifient (P 1), (P 3) et (C 5) . Le lecteur pourra consulter [D] .

Définition 4.2.8. Soit S un objet de $\underline{C}$. Soit $\underline{P}(S')$ une relation faisant intervenir un argument $S' \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}_{/S}$. On suppose que $\mathrm{Hom}(S'',S') \neq \emptyset$ entraîne $\underline{P}(S') \Rightarrow \underline{P}(S'')$. On dit que $\underline{P}$ est vrai localement sur S si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) L'ensemble des $S' \longrightarrow S$ tels que $\underline{P}(S')$ soit vrai est un raffinement de S .

(ii) Il existe un raffinement de S tel que $\underline{P}(S')$ soit vrai pour tout S' de ce raffinement .

(iii) (Si la topologie donnée est définie par une prétopologie). Il existe une famille couvrante pour cette prétopologie telle que $\underline{P}(S')$ soit vrai pour tout S' de cette famille .

Exemple 4.2.9. Soit $f: X \longrightarrow Y$ un S-morphisme . On dira que f est localement un isomorphisme s'il existe une famille couvrante $\{ S_i \longrightarrow S \}$ telle que pour tout i , $f \times_S S_i$ soit un isomorphisme . Il revient au même d'exiger qu'il existe un raffinement R de S tel que pour tout $T \longrightarrow R$, $X(T) \longrightarrow Y(T)$ soit un isomorphisme .

On verra dans la suite bien d'autres exemples de langage "local" .

4.3. Préfaisceaux, faisceaux, faisceau associé à un préfaisceau .

Définition 4.3.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie. On appelle préfaisceau d'ensembles sur $\underline{C}$ tout foncteur contravariant de $\underline{C}$ dans la catégorie des ensembles . La catégorie $\hat{\underline{C}} = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}^{\circ}, (\mathrm{Ens}))$ est appelée catégorie des préfaisceaux sur $\underline{C}$. Si $\underline{C}$ est munie d'une topologie, on dit que le préfaisceau P est séparé (resp. est un faisceau) si pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et tout $R \in J(S)$, l'application canonique

$$(+) \qquad P(S) = \mathrm{Hom}(S,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,P)$$

est injective (resp. bijective) . On appelle catégorie des faisceaux et on note $\tilde{\underline{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\underline{C}}$ dont les objets sont les faisceaux .

Proposition 4.3.2. Soit P un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) . Pour tout foncteur $H \in \mathrm{Ob}\, \hat{\underline{C}}$ et tout $R \in J(H)$; l'application canonique

$$(+) \qquad \mathrm{Hom}(H,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,P)$$

est injective (resp. bijective) .

Soient en effet P un préfaisceau séparé , H un préfaisceau , $R \in J(H)$, et $u , v : H \longrightarrow P$ tels que $u j = v j$ (voir diagramme) .

Pour tout $f:S \longrightarrow H$, $S \in \mathrm{Ob}\, C$, $R \times_H S$ est un raffinement de S et $u\, f\, j_S = v\, f\, j_S$. Comme P est séparé, on en tire $u\, f = v\, f$. Ceci étant vrai pour tout S représentable , on a $u = v$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "j"] & H \arrow[r, "{u\,,\,v}"] & P \\ R \times_H S \arrow[u, "f_R"] \arrow[r, "j_S"] & S \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \times_H S \arrow[r, "f_R"] \arrow[d, "j_S"'] & R \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"] & P \\ S \arrow[r, "f"] \arrow[rru, bend right=40] & H \arrow[ru, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Supposons maintenant que P soit un faisceau . Soit $g : R \longrightarrow P$, montrons qu'il se factorise par H . Pour tout $f : S \longrightarrow F$, $S \in \mathrm{Ob}\, C$, $g\ f_R : R \times_F S \longrightarrow P$ se factorise de manière unique par S , donc définit un morphisme $h : S \longrightarrow P$, qui est évidemment fonctoriel par rapport à f , par unicité . On a donc défini pour tout S une application de $F(S)$ dans $P(S)$ fonctorielle en S , donc un morphisme de F dans P qui répond bien aux conditions exigées .

Proposition 4.3.3. ([AS] , 1.3) . Soit $\underline{C}$ une catégorie . Soit P un préfaisceau sur $\underline{C}$; pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, notons $J(S)$ l'ensemble des cribles R de S tels que pour tout $T \longrightarrow S$, l'application

$$(+) \qquad \mathrm{Hom}(T,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R \times_S T,\, P)$$

soit injective (resp. bijective). Alors les $J(S)$ définissent une topologie sur $\underline{C}$, i.e. vérifient les axiomes (T 1) à (T 4) .

Corollaire 4.3.4. Soit pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, $K(S)$ une famille de cribles vérifiant (T 1). Soit P un préfaisceau sur $\underline{C}$. Pour qu'il soit séparé (resp. un faisceau) pour la topologie engendrée par les $K(S)$, il faut et il suffit que pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et tout $R \in K(S)$, l'application canonique

$$(+) \qquad \mathrm{Hom}(S,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,P)$$

soit injective (resp. bijective) .

Corollaire 4.3.5. Soit pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, $R(S)$ un ensemble de familles de morphismes de $\underline{C}$ de but S, vérifiant (P 1) (par exemple définissant une prétopologie). Soit P un préfaisceau sur $\underline{C}$. Pour que P soit séparé (resp. un faisceau) pour la topologie engendrée par R, il faut et il suffit que pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$ et toute famille $\{ S_i \longrightarrow S \} \in R(S)$, l'application

$$P(S) \longrightarrow \prod_i P(S_i)$$

soit injective, (resp. le diagramme

$$P(S) \longrightarrow \prod_i P(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} P(S_i \times_S S_j)$$

soit exact).

Définition 4.3.6. Soit $\underline{C}$ une catégorie. On appelle topologie canonique sur $\underline{C}$ la topologie la plus fine pour laquelle tous les foncteurs représentables soient des faisceaux.

Corollaire 4.3.7. Pour qu'un crible R de S soit un raffinement pour la topologie canonique, il faut et il suffit que pour tout morphisme $T \longrightarrow S$ de $\underline{C}$ et tout $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(T,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R \times_S T,\ X)$$

soit bijective.

Définition 4.3.8. Un crible couvrant pour la topologie canonique sera dit crible épimorphique effectif universel.

Corollaire 4.3.9. Une famille épimorphique effective universelle définit un crible épimorphique effectif universel. Réciproquement, toute famille quarrable définissant un crible épimorphique effectif universel est épimorphique effective universelle.

Passons maintenant à la construction du <u>faisceau associé</u> . Soient P un préfaisceau et S un objet de $\underline{C}$. Si $R \supset R'$ sont deux raffinements de S , on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(S,P) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}(R,P) \arrow[d] \\ & \mathrm{Hom}(R',P) \end{tikzcd} .$$

L'ensemble ordonné $J(S)$ est filtrant comme on l'a déjà remarqué. Comme S est un élément de $J(S)$, on a un morphisme évident

$$\mathrm{Hom}(S,P) \longrightarrow \varinjlim_{R \in J(S)} \mathrm{Hom}(R,P) \quad .$$

On pose $\check{H}^{0}(S,P) = \varinjlim\limits_{R \in J(S)} \mathrm{Hom}(R,P)$. On vérifie que $\check{H}^{0}(S,P)$ dépend fonctoriellement de S , donc définit un foncteur LP par

$$(++) \qquad \mathrm{Hom}(S,LP) = \check{H}^{0}(S,P) = \varinjlim_{R \in J(S)} \mathrm{Hom}(R,P) \quad .$$

On a par construction des morphismes

$$\ell_P \; : \; P \longrightarrow LP$$

$$z_R \; : \; \mathrm{Hom}(R,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S,LP) \quad .$$

<u>Lemme</u> 4.3.10. (i) <u>Pour tout raffinement</u> R <u>de</u> S <u>et tout</u> $u : R \longrightarrow P$, <u>le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\ell_P"] & LP \\ R \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_R"'] & S \arrow[u, "z_R(u)"'] \end{tikzcd}$$

<u>est commutatif</u> .

(ii) Pour tout morphisme $S \xrightarrow{v} LP$, il existe un raffinement R de S et un morphisme $u : R \to P$ avec $v = z_R(u)$.

(iii) Soit Q un foncteur et $u, v : Q \longrightarrow P$ tels que $\ell_P u = \ell_P v$. Alors le noyau du couple (u,v) est un raffinement de Q .

(iv) Soient $u : R \longrightarrow P$ et $u' : R' \longrightarrow P$; pour que $z_R(u) = z_{R'}(u')$, il faut et il suffit qu'il existe un raffinement $R'' \subset R \cap R'$ de S tel que u et u' coïncident sur R" .

Démonstration (i) : Il faut vérifier que $z_R(u)\, i_R = \ell_P u$. Pour cela , il suffit de vérifier que les composés de ces deux morphismes avec tout morphisme $T \xrightarrow{g} R$, où T est représentable, sont égaux . Or considérons $f = i_R g$ et le produit fibré $R' = R \times_S T$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\ell_P"] & LP \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r] & S \arrow[u, dash, "z_R(u)"'] \\
R' \arrow[u] \arrow[r, "\sim", "i_{R'}"'] & T \arrow[u, dash, "f"'] \arrow[ul, "i_R"', "g"]
\end{tikzcd}$$

Par définition de ℓ_P , $\ell_P u g = z_R(u) f$ (c'est le cas particulier de ce qu'on cherche à démontrer dans lequel i_R est un isomorphisme), or $z_R(u) f = z_R(u)\, i_R\, g$.

(ii) et (iv) ne font que traduire la définition de Hom(S,LP) comme limite inductive .

(iii) : Si K désigne le noyau du couple (u,v), pour chaque morphisme $f : S \longrightarrow Q$ où S est représentable , $K \times_Q S$ majore le noyau du couple de flèches $u f$, $v f$: $S \longrightarrow P$. On est donc ramené à démontrer l'assertion dans le cas où $Q = S$ est représentable . Mais en ce cas, il résulte de (ii) et (iv) que K contient un raffinement de S donc est un raffinement de S .

On vérifie enfin que $P \longmapsto LP$ définit un foncteur

$$L : \underline{\hat{C}} \longrightarrow \underline{\hat{C}}$$

et $P \longmapsto \ell_P$ un morphisme de foncteurs

$$\ell : \mathrm{Id}_{\underline{\hat{C}}} \longrightarrow L \ .$$

Enonçons maintenant le résultat essentiel :

Proposition 4.3.11. (i) Si P est un préfaisceau quelconque, LP est séparé et $\ell_P : P \longrightarrow LP$ est couvrant (4.2.3).

(ii) Si P est un faisceau, $P \longrightarrow LP$ est un isomorphisme.

(iii) Pour tout préfaisceau P et tout préfaisceau séparé (resp. faisceau) F, l'application

$$\mathrm{Hom}(\ell_P, F) : \mathrm{Hom}(LP, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, F)$$

est injective (resp. bijective).

(iv) Si P est séparé, $\ell_P : P \longrightarrow LP$ est un monomorphisme couvrant (donc P est un crible de LP), et LP est un faisceau.

Démonstration : (i) Il est d'abord clair que $P \longrightarrow LP$ est couvrant ; en effet, pour tout $S \longrightarrow LP$, le morphisme obtenu par changement de base $P \times_{LP} S \longrightarrow S$ est majoré par le morphisme d'inclusion d'un crible de S (par 4.3.10 (i) et (ii)), donc est couvrant. Si d'autre part deux morphismes $S \xrightarrow{v_1, v_2} LP$ induisent le même morphisme d'un raffinement R de S, montrons qu'ils sont égaux. Il existe des raffinements R_i, $i = 1,2$, et des morphismes $u_i : R_i \longrightarrow P$ tels que $z_{R_i}(u_i) = v_i$. En prenant R assez petit, on peut supposer que $R_1 = R_2 = R$. Il résulte alors du diagramme commutatif de 4.3.10 (i) que $\ell_P u_1 = \ell_P u_2$. D'après loc. cit. (ii) , u_1 et u_2 coïncident donc sur un raffinement de R , donc un raffinement de S , ce qui entraîne que $z_R(u_1) = z_R(u_2)$, par loc. cit. (iv) .

(ii) est clair, car si P est un faisceau , $\mathrm{Hom}(S,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,P)$ est déjà un isomorphisme pour tout raffinement R de S .

(iii) Soient u et v deux morphismes $LP \longrightarrow F$ tels que $u\,\ell_P = v\,\ell_P$. Pour montrer que $u = v$, il suffit de voir que $u\,f = v\,f$ pour tout $f : S \longrightarrow LP$ où S est représentable . Or il existe un raffinement R de S et un morphisme $g : R \longrightarrow P$ avec $f = z_R(g)$. Alors $u\,f$ et $v\,f$ coïncident sur R avec $u\,\ell_P\,g = v\,\ell_P\,g$, donc coïncident sur R . Si F est séparé , on a donc $u\,f = v\,f$. Supposons maintenant que F soit un faisceau ; on a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\ell_P"] \arrow[d] & LP \arrow[d] \arrow[dl] \\ F \arrow[r, "\sim"] & LF \end{tikzcd}$$

qui montre que $\mathrm{Hom}(\ell_P, F)$ est surjectif .

(iv) Montrons que si P est séparé , $P \longrightarrow LP$ est un monomorphisme . Pour cela , il suffit de voir que pour tout couple de morphismes $u , v : S \longrightarrow P$ (où S est représentable) tels que $\ell_P u = \ell_P v$ on a $u = v$. Or loc. cit. (iii) montre que u et v coïncident sur un raffinement de S donc coïncident car P est séparé . Montrons enfin que LP est un faisceau . Comme on sait déjà par (i) que c'est un préfaisceau séparé , il suffit de voir que pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, tout raffinement R de S et tout morphisme $h : R \longrightarrow LP$, il existe un morphisme $u : S \longrightarrow LP$ avec $u\,i_R = h$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\ell_P"] & LP & \\ R' \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "j"'] & R \arrow[u, "h"] \arrow[r, "i_R"'] & S \arrow[ul, "u"'] \end{tikzcd}$$

Or $R' = P \times_{LP} R$ est un raffinement de R , car P est un raffinement de LP , donc R' est un raffinement de S . Posons $u = z_{R'}(h')$. On a $u\, i_{R'} = \ell_P\, h' = h\, j$, d'où $u\, i_R\, j = h\, j$. Comme R' est un raffinement de R et comme LP est séparé , 4.3.2 montre que $u\, i_R = h$, cqfd .

Corollaire 4.3.12. Soient F un faisceau et R un sous-$\hat{C}$-objet de F . Alors R est un raffinement de F si et seulement si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\ell_R"'] & & F \\ & LR \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd} .$$

Remarque 4.3.13. Si $J'(S)$ est un sous-ensemble cofinal de $J(S)$, on a

$$\mathrm{Hom}(S, LP) = \varinjlim_{R \in J'(S)} \mathrm{Hom}(R, P) .$$

En particulier , soit $S \longmapsto R(S)$ une prétopologie engendrant la topologie donnée . Le foncteur L peut se décrire à l'aide des familles couvrantes éléments de $R(S)$. En explicitant la formule ci-dessus, on retrouve la construction de [MA] .

Notons i le foncteur d'inclusion $\tilde{C} \longrightarrow \hat{C}$. De la proposition 4.3.11 résulte le théorème suivant :

Théorème 4.3.14. Il existe un foncteur unique $a : \hat{C} \longrightarrow \tilde{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{C} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "a"'] & \hat{C} \arrow[d, "L"] \\ \tilde{C} \arrow[r, "i"] & \hat{C} \end{tikzcd} ,$$

i.e. pour tout préfaisceau P , $L(L(P))$ est un faisceau . Les foncteurs i et a sont adjoints l'un de l'autre : pour tout préfaisceau P et tout faisceau F on a un isomorphisme fonctoriel en P et F

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{C}}}(P, i(F)) \simeq \mathrm{Hom}_{\tilde{\underline{C}}}(a(P), F) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}(P,F) \simeq \mathrm{Hom}(a(P),F) \quad .$$

Définition 4.3.15. Le faisceau $a(P)$ est dit associé au préfaisceau P .

Remarque 4.3.16. Comme le foncteur L est construit à l'aide de limites projectives et de limites inductives filtrantes, il commute aux limites projectives finies . De plus , si on identifie $L(P \times P)$ à $LP \times LP$, le morphisme $\ell_{P\times P}$ s'identifie à $\ell_P \times \ell_P$. Il en résulte par exemple que si P est un préfaisceau en groupes , LP est aussi muni canoniquement d'une structure de préfaisceau en groupes et le morphisme canonique $P \longrightarrow LP$ est un morphisme de groupes . Il en est de même pour le foncteur a , ce qui montre que si P est un préfaisceau en groupes et F un faisceau en groupes , on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{C}}\text{-gr.}}(P,i(F)) \simeq \mathrm{Hom}_{\tilde{\underline{C}}\text{-gr.}}(a(P),F) \quad .$$

Voir [D] pour plus de détails .

4.3.17. Si $\underline{V}$ est une catégorie quelconque, on appelle préfaisceau sur $\underline{C}$ à valeurs dans $\underline{V}$ un foncteur contravariant de $\underline{C}$ dans $\underline{V}$. Pour définir les faisceaux à valeurs dans $\underline{V}$, il nous faut d'abord rappeler la définition de la limite projective d'un foncteur . Si $\underline{R}$ et $\underline{V}$ sont deux catégories, et

$$F : \underline{R}^{\circ} \longrightarrow \underline{V}$$

un foncteur contravariant de $\underline{R}$ dans $\underline{V}$, on note $\varprojlim F$ l'objet de $\hat{\underline{V}}$ défini de la manière suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\hat{V}}}(X, \varprojlim F) = \varprojlim F(X) = \mathrm{Hom}(c_X, F) \quad ,$$

où X est un objet variable de $\underline{R}$, où c_X dénote le foncteur contravariant de $\underline{R}$ dans $\underline{V}$ qui envoie chaque objet de $\underline{R}$ sur X et chaque flèche de $\underline{R}$ sur id_X, et où le dernier Hom est pris dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{R}^{\circ}, \underline{V})$. Si $\underline{R}$ possède un objet final $\underline{e}_{\underline{R}}$, on a $\varprojlim F = F(\underline{e}_{\underline{R}})$. Si $\underline{V}$ est la catégorie des ensembles, le foncteur $\varprojlim$ s'identifie au foncteur Γ.

Si S est un objet de $\underline{C}$ et R un crible de S, notons $\underline{R}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{C}_{/S}$ dont l'ensemble d'objets est $E(R)$ et $i_R : \underline{R} \longrightarrow \underline{C}_{/S}$ le foncteur canonique. Si P est un préfaisceau sur $\underline{C}$ à valeurs dans $\underline{V}$, il définit un foncteur $P_S : (\underline{C}_{/S})^{\circ} \longrightarrow \underline{V}$. Le foncteur i_R induit un morphisme de $\underline{\hat{V}}$

$$P(S) = P_S(S) = \varprojlim P_S \longrightarrow \varprojlim P_S \circ i_R \quad .$$

On note $\varprojlim_R P$ ce dernier objet de $\underline{\hat{V}}$. En vertu de 4.1.6, la définition 4.3.1 se généralise en la

<u>Définition</u> 4.3.18. <u>Le préfaisceau</u> P <u>sur</u> $\underline{C}$ <u>à valeurs dans</u> $\underline{V}$ <u>est dit séparé</u> (<u>resp.</u> <u>un</u> faisceau), <u>si pour tout</u> $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ <u>et tout</u> $R \in J(S)$, <u>le morphisme canonique de</u> $\underline{\hat{V}}$

$$P(S) \longrightarrow \varprojlim_R P$$

<u>est un monomorphisme</u> (<u>resp.</u> <u>un isomorphisme</u>) .

Dans le cas où $\underline{V}$ est la catégorie (Gr.) des groupes (où toute autre catégorie d'ensembles munis de structures algébriques définies par limites projectives finies) , on peut voir (cf [D]) qu'il y a équivalence entre les notions suivantes : un faisceau sur $\underline{C}$ à valeurs dans (Gr.) , un préfaisceau sur $\underline{C}$ à valeurs dans (Gr.) dont le préfaisceau d'ensembles sous-jacent est un faisceau, et un groupe dans la catégorie des faisceaux d'ensembles. Compte tenu de ces identifications nous considèrerons toujours les faisceaux à valeurs dans une catégorie d'ensembles munis de structures algébriques définies par limites projectives finies, comme des faisceaux d'ensemble, munis dans la catégorie $\tilde{C}$ de la structure algébrique correspondante .

4.4. Propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux .

Théorème 4.4.1. (i) Les limites projectives quelconques existent dans $\tilde{C}$; "elles se calculent dans $\hat{C}$ ", i.e. le foncteur d'inclusion $i : \tilde{C} \longrightarrow \hat{C}$ commute aux limites projectives : si (X_i) est un système projectif de faisceaux, le préfaisceau

$$\varprojlim i(X_i) \ : \ S \longmapsto \varprojlim X_i(S)$$

est un faisceau et on a $i(\varprojlim X_i) = \varprojlim i(X_i)$.

(ii) Les limites inductives quelconques existent dans $\tilde{C}$: si (X_i) est un système inductif de faisceaux, on a

$$\varinjlim X_i = a(\varinjlim i(X_i))$$

où $\varinjlim i(X_i)$ est le préfaisceau limite inductive des $i(X_i)$:

$$\varinjlim i(X_i) \ : \ S \longmapsto \varinjlim X_i(S) \ .$$

(iii) Le foncteur $a : \hat{C} \longrightarrow \tilde{C}$ commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies .

Les assertions (i) et (ii) résultent formellement de la formule d'adjonction (4.3.14) , et (iii) a déjà été signalé dans 4.3.16.

Scholie 4.4.2. Ce théorème permet d'utiliser la méthode suivante pour démontrer dans $\tilde{C}$ une assertion portant simultanément sur des limites inductives quelconques et des limites projectives finies (par exemple : "tout épimorphisme est effectif universel", cf. plus loin). On commence par démontrer l'assertion correspondante dans la catégorie des ensembles ; puis on l'étend "argument par argument" à la catégorie des préfaisceaux. Ensuite, on utilise le théorème précédent pour passer de la catégorie des préfaisceaux à la catégorie des faisceaux. On verra dans la suite bien des exemples de cette méthode (4.4.3 , 4.4.6 , 4.4.9 , etc...) .

Remarquons enfin que les assertions relatives à la catégories des préfaisceaux sont formellement des corollaires des assertions relatives à la catégorie des faisceaux . Il suffit en effet de prendre comme topologie la topologie la moins fine ("chaotique") c'est-à-dire la topologie définie par $J(S) = \{S\}$ pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, tout foncteur est en effet un faisceau pour cette topologie .

Proposition 4.4.3. Soit $\mathcal{F} = \{F_i \longrightarrow F\}$ une famille de morphismes de faisceaux . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{F}$ est une famille épimorphique .

(ii) $\mathcal{F}$ est une famille épimorphique effective universelle (1.13).

(iii) $\mathcal{F}$ est couvrante (4.2.3)

(iv) Le faisceau image de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire le faisceau associé au préfaisceau image de $\mathcal{F}$ (4.1.2)) est F .

L'équivalence de (iii) et (iv) résulte de 4.3.12. Les autres équivalences résulteront des lemmes suivants .

Lemme 4.4.4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un monomorphisme de faisceaux qui soit un épimorphisme . Alors f est un isomorphisme .

Le lemme est d'abord clair dans la catégorie des ensembles . Démontrons le ensuite dans la catégorie des préfaisceaux . Considérons le préfaisceau

$$V : S \longmapsto Y(S) \coprod_{X(S)} Y(S) \quad ;$$

c'est la somme amalgamée de Y et de Y au-dessous de X dans la catégorie des préfaisceaux . Si $X \longrightarrow Y$ est un épimorphisme de préfaisceaux, le premier morphisme coordonnée $Y \longrightarrow V$ est un isomorphisme, donc $Y(S) \longrightarrow V(S)$ un isomorphisme pour chaque S , donc $X(S) \longrightarrow Y(S)$ un épimorphisme d'ensembles , ce qui règle la question, car c'est d'autre part un monomorphisme .

Plaçons-nous enfin dans la catégorie des faisceaux . La somme amalgamée Z des faisceaux Y et Y au-dessous de X est le faisceau associé à V d'après 4.4.1. Or on a le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\ & V \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Si on sait que le préfaisceau V est séparé , on saura que $V \longrightarrow Z$ est un monomorphisme (4.3.11 (iv)) . Comme $Y \longrightarrow Z$ est un isomorphisme par hypothèse, $Y \longrightarrow V$ le sera aussi . Le morphisme $X \longrightarrow Y$ sera donc aussi un épimorphisme de préfaisceaux , ce qui démontre le lemme , lorsqu'on aura vérifié que V est séparé . Ceci résulte de :

Lemme 4.4.5. (i) Le préfaisceau somme directe d'une famille de préfaisceaux séparés est séparé .

(ii) Soit $X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y$ une relation d'équivalence dans la catégorie des préfaisceaux. Soit $w : Y \longrightarrow Z$ le quotient. Si $u \times v : X \longrightarrow Y \times Y$ est un monomorphisme, si X est un faisceau et si Y est séparé, alors Z est séparé.

(iii) Si $\begin{tikzcd}[row sep=small] & Y \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & Z \\ & Y' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ est une somme amalgamée dans la catégorie des préfaisceaux, si u et u' sont des monomorphismes , si X est un faisceau , Y et Y' des préfaisceaux séparés, alors Z est séparé .

On démontre aussitôt (i) ; (iii) se prouve sans peine, en remarquant que pour tout $S \in Ob(\underline{C})$, $\begin{tikzcd}[row sep=small] & Y(S) \arrow[dr] & \\ X(S) \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z(S) \\ & Y'(S) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ est une somme amalgamée dans la catégorie des ensembles. Pour prouver (ii), on doit prouver que deux morphismes d'un S dans Z coïncidant sur un raffinement R de S sont égaux. Or tout morphisme d'un S

<u>représentable</u> dans Z se remonte par construction de Z en un morphisme de S dans Y. On voit alors aussitôt qu'il suffit de prouver que pour tout préfaisceau U et tout couple de morphismes $f, g : U \longrightarrow Y$ tels que $wf = wg$, il existe un morphisme <u>unique</u> $U \longrightarrow X$ avec $uf = vg$. Or pour ce faire, il suffit de prouver l'assertion correspondante pour les composés de ces morphismes avec tout $T \longrightarrow U$ où T est représentable ; on peut donc supposer $U = T$ représentable. Mais le diagramme $X(T) \rightrightarrows Y(T) \longrightarrow Z(T)$ est un conoyau dans la catégorie des ensembles, $X(T)$ étant une relation d'équivalence dans $Y(T)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Lemme</u> 4.4.6. <u>Une famille couvrante est épimorphique effective universelle</u>.

Comme la notion de famille couvrante est stable par extension de la base, il suffit de montrer que toute famille couvrante est épimorphique effective. Soit donc $\{ F_i \longrightarrow F \}$ une famille couvrante. Considérons le préfaisceau G image de cette famille. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[dr] & F \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ & & a(G) \end{tikzcd}$$

La famille de morphismes de préfaisceaux $\{ F_i \longrightarrow G \}$ est épimorphique effective, car c'est une vérification qui se fait argument par argument, et car dans la catégorie des ensembles, famille épimorphique effective veut simplement dire famille surjective. Comme $G \longrightarrow F$ est un monomorphisme, les produits fibrés $F_i \times_G F_j$ et $F_i \times_F F_j$ sont les mêmes. De plus, pour tout faisceau H, on a

$$\mathrm{Hom}(G,H) \simeq \mathrm{Hom}(F,H) \quad .$$

Il en résulte que la famille donnée est bien une famille épimorphique effective de morphismes de <u>faisceaux</u>.

<u>Lemme</u> 4.4.7. <u>Toute famille de morphisme de faisceaux</u> $\{ F_i \longrightarrow F \}$ <u>se factorise en une famille couvrante</u> $\{ F_i \longrightarrow G \}$ <u>et un monomorphisme</u> $G \longrightarrow F$.

Il suffit en effet de prendre pour G le faisceau image de la famille donnée.

Démonstration du théorème : on a vu en 4.4.6 que (iii) $\Rightarrow$ (ii), on a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit enfin $\{F_i \longrightarrow F\}$ une famille épimorphique ; d'après 4.4.7, elle se factorise en une famille couvrante suivi d'un monomorphisme. Mais ce dernier étant majoré par une famille épimorphique est un épimorphisme, donc un isomorphisme par 4.4.4.

CQFD.

Remarque 4.4.7. Comme le préfaisceau image de la famille $\mathcal{F}$ est séparé, la construction du faisceau associé montre que les conditions du théorème sont aussi équivalentes aux suivantes :

(v) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, tout $f \in F(S)$ est localement dans l'image de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire :

(vi) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et tout $f \in F(S)$, l'ensemble des $S' \to S$ tels que l'image de f dans $F(S')$ soit dans l'image d'un des $F_i(S')$ est un raffinement de S.

(vii) (Si la topologie est définie par une prétopologie). Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et tout $f \in F(S)$, il existe une famille $\{S_j \longrightarrow S\} \in R(S)$ telle que pour tout j l'image f_j de f dans $F(S_j)$ soit dans l'image de l'un des $F_i(S_j)$.

Remarque 4.4.8. Si le faisceau F est représentable, les conditions précédentes sont aussi équivalentes à

(viii) L'ensemble des $T \longrightarrow F$ ($T \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$), tels qu'il existe un i et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r] & F \\ T \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

est un raffinement de F.

En effet, si (viii) est satisfaite, le préfaisceau image des F_i majore un raffinement de F, ce qui entraîne que la famille est couvrante. Réciproquement, on applique (vi) à $id_F \in F(F)$.

Cette condition s'exprime en langage imagé de la manière suivante : localement sur F, il existe un i tel que $F_i \longrightarrow F$ possède une section. En particulier un morphisme $G \longrightarrow F$ où G est un faisceau et F un faisceau <u>représentable</u> sera <u>couvrant</u> si et seulement si il possède <u>localement</u> (sur F) une <u>section</u>.

<u>Proposition</u> 4.4.9. <u>Toute relation d'équivalence dans</u> $\widetilde{C}$ <u>est</u> effective universelle (3.3.3) : <u>soit</u> R <u>une</u> $\widetilde{C}$<u>-relation d'équivalence dans le faisceau</u> X ; <u>alors le faisceau associé au préfaisceau</u> séparé

$$i(X)/i(R) \; : \; S \longmapsto X(S)/R(S)$$

<u>est un quotient effectif universel de</u> X <u>par</u> R.

Soit X/R le faisceau quotient de X par R, qui existe par 4.4.1 (ii) : $X/R = a(i(X)/i(R))$. Il nous faut montrer que $X \longrightarrow X/R$ est un épimorphisme effectif universel, et que le morphisme $f : R \longrightarrow X \times_{X/R} X$ est un isomorphisme. La première assertion a déjà été démontrée (4.4.3). Quant à f, il provient par application du foncteur a du morphisme $i(R) \longrightarrow i(X) \times_{i(X/R)} i(X)$ ou, comme $i(X)/i(R)$ est séparé (4.4.5 (ii)) donc $i(X)/i(R) \rightarrow i(X/R)$ est un monomorphisme, du morphisme canonique $i(R) \rightarrow i(X) \times_{i(X)/i(R)} i(R)$.

On est donc ramené à démontrer la même assertion dans la catégorie des préfaisceaux. Mais $i(X)/i(R)$ est le préfaisceau $S \longmapsto X(S)/R(S)$ et on est ramené à démontrer l'assertion analogue dans la catégorie des ensembles, où elle est immédiate.

Proposition 4.4.10. *Sous les conditions de* 4.4.9 , *soit* Y *un sous-faisceau de* X. *Notons* R_Y *la relation d'équivalence induite dans* Y *par* R . *Alors le morphisme canonique* (3.1.6)

$$Y/R_Y \longrightarrow X/R$$

est un monomorphisme ; *il identifie* Y/R_Y *à un sous-faisceau de* X/R , *qui est le faisceau-image du morphisme composé*

$$Y \longrightarrow X \longrightarrow X/R \ .$$

Le morphisme de préfaisceaux

$$i(Y)/i(R_Y) \ = \ i(X)/i(R)_{i(Y)} \longrightarrow i(X)/i(R)$$

est un monomorphisme . Comme le foncteur a est exact à gauche (4.3.16), il transforme monomorphisme en monomorphisme et

$$Y/R_Y \longrightarrow X/R$$

est un monomorphisme . La dernière assertion résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y/R_Y \arrow[r] & X/R \end{tikzcd} \ ,$$

et du fait que $Y \longrightarrow Y/R_Y$ est *couvrant* .

En vertu de cette proposition , nous identifierons toujours Y/R_Y à un sous-faisceau de X/R .

Proposition 4.4.11. *Soit* R *une* $\tilde{C}$*-relation d'équivalence dans le faisceau* X . *Pour tout sous-faisceau* Y *de* X stable *par* R , *notons* Y' *le quotient* Y/R_Y *considéré comme un sous-faisceau de* $X' = X/R$. *Alors* $Y = Y' \times_{X'} X$, *et les applications* $Y \longmapsto Y/R_Y$ *et* $Y' \longmapsto T' \times_{X'} X$ *réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-faisceaux* Y *de* X *stables par* R *et l'ensemble des sous-faisceaux* Y' *de* X' .

Si Y' est un sous-faisceau de X' , alors $Y' \times_{X'} X$ est un sous-faisceau de X stable par R . Si Y' est obtenu par passage au quotient à partir d'un sous-faisceau Y de X , alors $Y' \times_{X'} X$ majore Y . Il suffit donc de montrer que si l'on a deux sous-faisceaux Y et Y_1 de X , stables par R , Y_1 majorant Y , et si les quotients Y/R_Y et Y_1/R_{Y_1} sont identiques, alors $Y = Y_1$. On est évidemment ramené à démontrer la même assertion dans le cas où $Y_1 = X$. Notant alors P (resp. Q) le <u>préfaisceau</u> $i(X)/i(R)$ (resp. $i(Y)/i(R_Y)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & P \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & Q \end{array}$$

est cartésien . Comme on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \hookleftarrow & a(P) \\ \uparrow & & \| \\ Q & \hookleftarrow & a(Q) \end{array} \quad ,$$

le monomorphisme $Q \hookrightarrow P$ est couvrant , donc Q est un raffinement de P . Par changement de base , Y est un raffinement de X . Comme X et Y sont des faisceaux, cela entraîne (4.3.12) $Y = X$.

4.4.12. En particulier, si Y est un sous-faisceau de X , et si $Y' = Y/R_Y$, alors la correspondance précédente définit un sous-faisceau $\overline{\overline{Y}}$ de X , stable par R , majorant Y et minimum pour ces propriétés , que l'on appelle le <u>saturé</u> de Y pour la relation d'équivalence R .

4.5. <u>Le cas d'une topologie moins fine que la topologie canonique</u> .

D'après 4.3.6 et 4.3.8 , les conditions suivantes sont équivalentes pour une topologie T sur $\underline{C}$:

(i) T est *moins fine* que la topologie *canonique* de $\underline{C}$.

(ii) Tout préfaisceau *représentable* est un *faisceau* pour T .

(iii) Tout crible couvrant pour T est épimorphique effectif universel.

Si T est définie par une *prétopologie* $S \longmapsto R(S)$, ces conditions équivalent encore à

(iv) Toute famille $\in R(S)$ est épimorphique effective universelle .

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, le foncteur canonique $\underline{C} \longrightarrow \hat{\underline{C}}$ se factorise par un foncteur $j_{\underline{C}} = j : \underline{C} \longrightarrow \tilde{\underline{C}}$ (on notera aussi $j(S) = \tilde{S}$) .

Proposition 4.5.1. Le foncteur $j : C \to \tilde{C}$ est pleinement fidèle , commute aux limites projectives quelconques . Il est en particulier exact à gauche et conserve donc les structures algébriques définies par limites projectives finies .

Cela résulte immédiatement de la considération du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & & \hat{\underline{C}} \\ & \tilde{\underline{C}} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} ,$$

et de 4.4.1 (i) .

Avant d'exhiber d'autres propriétés du foncteur j , il nous faut définir la topologie induite sur une catégorie $\underline{C}_{/S}$. Ne supposant plus nécessairement la topologie donnée moins fine que la topologie canonique , cela se fait de la manière suivante : si C est un crible de T dans $\underline{C}$ et si on a un morphisme $T \longrightarrow S$, alors C définit naturellement un crible de T dans $\underline{C}_{/S}$ [car la définition d'un crible de T ne dépend que de la catégorie $\underline{C}_{/T} = (\underline{C}_{/S})_{/T}$] . Si , par exemple , C est défini par la famille $\{T_i \longrightarrow T\}$, alors son image dans $\underline{C}_{/S}$ est défini par la même famille considérée comme famille de morphismes de $\underline{C}_{/S}$. Ceci dit , l'application $T \longmapsto J(T)$ définit une topologie sur $\underline{C}_{/S}$ dite *topologie induite* par la topologie donnée . Avec les définitions de [AS] 2.3 , c'est la moins fine des topologies sur $\underline{C}_{/S}$ pour laquelle le foncteur canonique

$$i_S : \underline{C}_{/S} \longrightarrow \underline{C}$$

est un comorphisme . On remarquera que les identifications

$$(\underline{C}_{/S})_{/T} = \underline{C}_{/T}$$

respectent par définition les topologies.

Proposition 4.5.2. Soient S un faisceau représentable sur $\underline{C}$ et $F \longrightarrow S$ un morphisme de $\hat{\underline{C}}$. Pour que $S' \longmapsto \mathrm{Hom}_S(S',F)$ soit un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) sur $\underline{C}_{/S}$, il faut et il suffit que F soit un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) sur $\underline{C}$.

Pour tout foncteur P , on a (I 1.4.1)

$$\mathrm{Hom}(P,F) = \coprod_{f \in \mathrm{Hom}(P,S)} \mathrm{Hom}_f(P,F) \quad .$$

Pour tout $S' \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$ et tout crible couvrant C' de S' , on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(C',S) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(S',S) \quad ,$$

car S est un faisceau . La proposition résulte immédiatement de ces deux formules .

Corollaire 4.5.3. La topologie induite sur $\underline{C}_{/S}$ par une topologie sur $\underline{C}$ moins fine que la topologie canonique de $\underline{C}$, est moins fine que la topologie canonique de $\underline{C}_{/S}$.

Corollaire 4.5.4. Supposons la topologie donnée sur $\underline{C}$ moins fine que la topologie canonique . Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, on a une équivalence de catégories

$$\tilde{\underline{C}}_{/\tilde{S}} \longrightarrow \widetilde{(\underline{C}_{/S})} \quad .$$

Les diagrammes suivants sont commutatifs à isomorphisme près [Toutes les flèches non désignées sont des équivalences] :

$$\begin{tikzcd}
\underline{C}_{/S} \arrow[r, "(j_{\underline{C}})_{/S}"] \arrow[d, equal] & \widetilde{\underline{C}}_{/\widetilde{S}} \arrow[r, "(i_{\underline{C}})_{/\widetilde{S}}"] \arrow[d] & \widehat{\underline{C}}_{/\widehat{S}} \arrow[r, "(a_{\underline{C}})_{/\widehat{S}}"] \arrow[d] & \widetilde{\underline{C}}_{/\widetilde{S}} \arrow[d] \\
\underline{C}_{/S} \arrow[r, "j_{\underline{C}/S}"] & \widetilde{(\underline{C}_{/S})} \arrow[r, "i_{\underline{C}/S}"] & \widehat{(\underline{C}_{/S})} \arrow[r, "a_{\underline{C}/S}"] & \widetilde{(\underline{C}_{/S})}
\end{tikzcd} ,$$

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{\underline{C}}_{/\widetilde{S}})_{/\widetilde{T}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \widetilde{(\underline{C}_{/S})}_{/\widetilde{T}} \arrow[dr] & \\
& & \widetilde{((\underline{C}_{/S})_{/T})} \\
\widetilde{\underline{C}}_{/\widetilde{T}} \arrow[r] & \widetilde{(\underline{C}_{/T})} \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd} .$$

La commutativité des deux premiers carrés résulte de la définition de l'équivalence $\widetilde{\underline{C}}_{/\widetilde{S}} \longrightarrow \widetilde{(\underline{C}_{/S})}$. Pour démontrer la commutativité du dernier, il faut voir que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{C}_{/\widehat{S}} \arrow[r, "L'"] \arrow[d] & \widehat{\underline{C}}_{/\widehat{S}} \arrow[d] \\
\widehat{(\underline{C}_{/S})} \arrow[r, "L''"] & \widehat{(\underline{C}_{/S})}
\end{tikzcd} ,$$

où L' est la restriction du foncteur $L_{\underline{C}}$ à $\widehat{\underline{C}}_{/\widehat{S}}$ et L'' le foncteur $L_{\underline{C}_S}$; ceci se voit aisément en revenant à la définition des foncteurs L (après 4.3.9). Quant au second diagramme , ce n'est autre que la restriction aux catégories de faisceaux du diagramme correspondant sur les catégories de préfaisceaux (Exposé I, n° 1) qui est commutatif .

Scholie 4.5.5. Les diverses assertions de ce numéro montrent que dans le cas où la topologie donnée est moins fine que la topologie canonique, on peut identifier

$\underline{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\underline{C}}$, elle-même sous-catégorie pleine de $\underline{C}$ et que dans cette identification, on peut se livrer aux abus de langage, habituels en ce qui concerne $\underline{C} \longrightarrow \widehat{\underline{C}}$, justifiés par les commutativités précédentes. Remarquons explicitement que le premier diagramme de 4.5.4 montre que l'on pourra se servir sans précaution spéciale du foncteur a.

Nous verrons dans le numéro suivant que l'identification de $\underline{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\underline{C}}$ (contrairement à ce qui se passait pour $\widehat{\underline{C}}$), commute à la formation de certaines limites inductives et nous dirons alors comment utiliser ce fait.

A partir de maintenant et sauf mention expresse du contraire, nous supposerons la topologie donnée *moins fine que la topologie canonique* et nous ferons systématiquement les identifications exposées ci-dessus.

Proposition 4.5.6. *Soient* F *et* G *deux faisceaux au-dessus de* S *et* $f : F \longrightarrow G$ *un* S-*morphisme. Les conditions suivantes sur* f *sont équivalentes :*

(i) f *est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *dans* $\widetilde{\underline{C}}$.

(ii) f *est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *dans* $\widetilde{\underline{C}}_{/S} = (\widetilde{\underline{C}_{/S}})$.

Pour monomorphisme et isomorphisme, c'est évident (c'est une question de préfaisceaux). Pour épimorphisme, cela résulte de la description des épimorphismes comme morphismes couvrants et du fait que, par définition de la topologie induite, ceux-ci sont les mêmes dans $\widetilde{\underline{C}}$ et $\widetilde{\underline{C}}_{/S}$.

Proposition 4.5.7. *Soit* $f : F \longrightarrow G$ *un morphisme de faisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*).

(ii) *Pour chaque* $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, $f_S : F_S \longrightarrow G_S$ *est* localement *un* monomorphisme (resp. un épimorphisme , resp. un isomorphisme) , c'est-à-dire :

(iii) Pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, l'ensemble des $T \longrightarrow S$ tels que $F_T \longrightarrow G_T$ soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme , resp. un isomorphisme) est un raffinement de S .

Si la topologie donnée est définie par une prétopologie, ces conditions sont encore équivalentes à la suivante :

(iv) Pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, il existe une famille couvrante $\{S_i \longrightarrow S\} \in R(S)$ telle que pour tout i , $F_{S_i} \longrightarrow G_{S_i}$ soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) .

Si la catégorie $\underline{C}$ possède un objet final e , on peut se contenter de prendre $S = e$ dans les conditions (ii), (iii) et (iv) .

On a évidemment (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) . Pour démontrer l'équivalence de (i) et (ii) ainsi que le supplément concernant l'objet final , il faut montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i) et que les notions envisagées sont stables par extension de la base . Démontrons d'abord ce dernier point . Pour monomorphisme et isomorphisme , c'est évident (c'est une question de préfaisceaux) . Pour épimorphisme , cela résulte du fait que tout épimorphisme de faisceaux est universel (4.4.3) . Montrons enfin que (ii) entraîne (i) . Supposons que $f_S : F_S \longrightarrow G_S$ soit localement un monomorphisme (resp. un isomorphisme) . Il existe alors un crible couvrant C de S tel que pour tout $T \longrightarrow C$, f_T soit un monomorphisme , (resp. un isomorphisme) . Comme une limite projective de monomorphismes (resp. isomorphismes) en est un , $\mathrm{Hom}(C,f)$ sera un monomorphisme (resp. un isomorphisme) (cf. 4.1.4) . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(C,F) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(C,f)} & \mathrm{Hom}(C,G) \\ \uparrow\wr & & \uparrow\wr \\ F(S) & \xrightarrow{f(S)} & G(S) \end{array}$$

montre alors que $f(S)$ est injectif (resp. bijectif) . Supposons enfin que

$F \longrightarrow G$ soit localement un épimorphisme et soit $H \subset G$ l'image de f. Pour chaque $S \longrightarrow G$, $H \times_G S$ est l'image de $f \times_G S : F \times_G S \longrightarrow S$. Pour montrer que f est un épimorphisme, il faut montrer que H est un raffinement de G, c'est-à-dire que $H \times_G S$ est un raffinement de S pour chaque S. Mais comme il en est ainsi après tout changement de base $T \longrightarrow S$ d'un raffinement de S (si $f \times_G S$ est localement couvrant), $H \times_G S$ est bien un raffinement de S (Axiome (T 2)).

Corollaire 4.5.8. Soient F et G deux faisceaux au-dessus de S et $f : F \to G$ un S-morphisme. Pour que f soit un monomorphisme, resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il le soit localement sur S.

Remarque 4.5.9. La démonstration de la proposition montre que celle-ci reste valable, pour la partie concernant les monomorphismes (resp. les isomorphismes) lorsqu'on suppose seulement que F est un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) et G un préfaisceau quelconque (resp. un préfaisceau séparé).

Revenons provisoirement au cas d'une topologie quelconque et posons une définition.

Définition 4.5.10. Soit $G \longrightarrow F$ un morphisme de $\hat{C}$. On dit que G est un faisceau relatif au-dessus de F si pour chaque F-foncteur H et chaque raffinement R de H, l'application canonique

$$(+) \qquad \mathrm{Hom}_F(R,G) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_F(H,G)$$

est bijective.

La proposition 4.5.2 se généralise aussitôt :

Proposition 4.5.11. Si F est un faisceau, G est un faisceau relatif au-dessus de F si et seulement si c'est un faisceau.

Lemme 4.5.12. Dans la situation $X \to T \to S$ (où X, T, S, sont trois objets de C

si X est un faisceau relatif au-dessus de T , alors $U = \prod_{T/S} X$ est un faisceau relatif au-dessus de S .

En effet, on a pour tout S-foncteur Y

$$\mathrm{Hom}_S(Y,U) = \mathrm{Hom}_T(T \times_S Y , X) .$$

Si C est un crible de Y , alors $T \times_S C$ est un crible de $T \times_S Y$; on conclut aussitôt .

Corollaire 4.5.13. Les préfaisceaux $\mathrm{Hom}_{T/S}(X,Y)$, $\mathrm{Isom}_S(X,Y),\ldots$, sont des faisceaux lorsque les arguments qui y interviennent en sont aussi .

En effet, tous ces préfaisceaux sont construits à l'aide de produits fibrés et de préfaisceaux $\prod$ (I 1.7 et II 1) . Il suffit de vérifier le résultat pour un préfaisceau $\prod_{T/S} X$; en ce cas, l'assertion résulte de 4.5.11 et 4.5.12.

4.6. Description du quotient d'un faisceau par une relation d'équivalence .

Rappelons que nous supposons la topologie T donnée moins fine que la topologie canonique .

Proposition 4.6.1. Soit $R \overset{p_1,p_2}{\rightrightarrows} X$ une $\widetilde{C}$-relation d'équivalence dans le faisceau X . Soit $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{C}$ défini comme suit : pour chaque S de C , $F(S)$ est l'ensemble des sous-S-faisceaux Z de X_S , stables par R_S , et dont le quotient par R_Z est S (c'est-à-dire tels que le diagramme $R_Z \rightrightarrows Z \longrightarrow S$ soit exact) . Alors pour tout faisceau Y , $\mathrm{Hom}(Y,F)$ s'identifie à l'ensemble des sous-Y-faisceaux de $X \times Y$ stables par $R \times Y$ et dont le quotient est Y . En particulier le sous-faisceau R de $X \times X$ correspond à un élément p de $\mathrm{Hom}(X,F)$ et le diagramme

$$R \overset{p_1,p_2}{\rightrightarrows} X \xrightarrow{\ p\ } F$$

est exact , donc identifie F au faisceau-quotient X/R .

Posons en effet $Q = X/R$. Pour tout faisceau Y et tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}(Y,Q)$ correspondant à une section $s : Y \hookrightarrow Y \times Q$, considérons le diagramme

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} R \times Y \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X \times Y \arrow[r] & Q \times Y \\ & Z \arrow[u, hook] \arrow[r] & Y \arrow[u, hook, "s"'] \end{tikzcd}$$

où le carré est cartésien. Il est immédiat par 4.4.11 que Z est un sous-Y-faisceau de $X \times Y$, stable par $R \times Y$, dont le quotient est Y , et que, réciproquement, tout Z de ce type provient d'une unique section de $Q \times Y$ sur Y . Prenant d'abord Y représentable , on en tire un isomorphisme $Q \simeq F$. Prenant ensuite Y quelconque , on en tire la forme annoncée de $\mathrm{Hom}(Y,F)$. Considérant enfin le morphisme canonique $X \to Q$, on voit aussitôt qu'il correspond au sous-X-faisceau R de $X \times X$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.6.2. *Soit G un sous-foncteur quelconque de F tel que $\mathrm{Hom}(X,G) \subset \mathrm{Hom}(X,F)$ contienne R . Alors le morphisme canonique $X \longrightarrow F$ se factorise par G . Comme $X \longrightarrow F$ est couvrant* (4.4.9 *et* 4.4.3) *il en résulte que G est un raffinement de F . En particulier, tout sous-faisceau G de F vérifiant la condition précédente est égal à F* (4.3.12) .

4.6.3. Nous allons maintenant nous intéresser au cas où X et R sont représentables . Introduisons d'abord une terminologie . Outre les conditions (a) à (d) introduites en 3.4.1 , nous utiliserons d'autres conditions sur une famille (M) de morphismes de $\underline{C}$ que nous énonçons ci-après, en rappelant les conditions (a) à (c) déjà données, pour être complet .

(a) (M) est stable par *extension de la base* .

(b) Le *composé* de deux éléments de (M) est dans (M) .

(c) Tout isomorphisme est élément de (M) .

(d_T) Tout élément de (M) est couvrant .

(e_T) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\underline{C}$. S'il existe un raffinement R de Y tel que pour tout $Y' \to R$, $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ soit élément de (M) , alors f est élément de (M) .

Rappelons que (a) et (b) entraînent

(a') Le produit cartésien de deux éléments de (M) est élément de (M) .

D'autre part (a) et (d_T) entraînent par 4.3.9.

(d') Tout élément de (M) est un épimorphisme effectif universel .

4.6.4. Les conditions précédentes sont vérifiées par la famille des morphismes couvrants , notée (M_T) , lorsque $\underline{C}$ possède des produits fibrés . En effet (a) résulte de (C 1) (4.2.3) , (b) de (C 2) , (c) de (C 4) , (d_T) de la définition , (e_T) de (C 5) . Les résultats que nous allons établir pour une famille vérifiant ces conditions s'appliqueront en particulier à la famille (M_T) . En particulier, on pourra prendre pour T la topologie canonique et pour (M) la famille des épimorphismes effectifs universels .

<u>Lemme</u> 4.6.5. <u>Soit</u> (M) <u>une famille de morphismes vérifiant les propriétés</u> (a) <u>à</u> (e_T) <u>précédentes</u> . <u>Soit</u> R <u>une</u> $\underline{C}$<u>-relation d'équivalence dans</u> $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, <u>de type</u> (M) . <u>Soient</u> $\tilde{X}$ <u>le faisceau défini par</u> X , $\tilde{R}$ <u>la</u> $\tilde{\underline{C}}$<u>-relation d'équivalence dans</u> $\tilde{X}$ <u>définie par</u> R <u>et</u> $\tilde{X}/\tilde{R}$ <u>le faisceau-quotient</u> . <u>Pour que</u> R <u>soit (M)-effective, il faut et il suffit que</u> $\tilde{X}/\tilde{R}$ <u>soit représentable</u> . <u>S'il en est ainsi</u> , $\tilde{X}/\tilde{R}$ <u>est représentable par le quotient</u> X/R .

Supposons d'abord que R soit (M)-effective et notons $Y = X/R$. Le morphisme canonique $p : X \longrightarrow Y$ est élément de (M) , donc couvrant par (d_T) . Le morphisme correspondant

$$\tilde{p} ; \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}/\tilde{R}$$

est donc un épimorphisme effectif universel de $\tilde{\underline{C}}$ (4.4.3) , donc identifie $\tilde{X}/\tilde{R}$ au quotient de $\tilde{X}$ par la relation d'équivalence R' définie dans $\tilde{X}$ par $\tilde{p}$.

Comme le foncteur canonique $\underline{C} \longrightarrow \tilde{\underline{C}}$ commute aux produits fibrés, R' n'est autre que $\tilde{R}$, car R est la relation d'équivalence définie par p.

Réciproquement, supposons $\tilde{X}/\tilde{R}$ représentable par un objet Y de $\underline{C}$. Soit $p : X \to Y$ le morphisme déduit du morphisme canonique $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}/\tilde{R}$; c'est un morphisme couvrant par 4.4.3 . Il est clair comme tout à l'heure que R est la relation d'équivalence définie par p. Il ne reste plus qu'à montrer que $p \in (M)$. Or le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "p_2"'] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d, "pr_2"] & X \arrow[d, "p"] \\ & X \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

montre que p devient p_2 qui est un élément de (M) après changement de base par le morphisme couvrant p. On conclut par (e_T) .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce numéro .

Théorème 4.6.6. *Soit* (M) *une famille de morphismes vérifiant les axiomes* (a) *à* (e_T) *de* 4.6.3. *Soit* R *une* $\underline{C}$*-relation d'équivalence de type* (M) *dans l'objet* X *de* $\underline{C}$. *Considérons le foncteur* $F \in \mathrm{Ob}\,\hat{\underline{C}}$ *défini comme suit :* $F(S)$ *est l'ensemble des sous-S-faisceaux* Z *de* X_S *stables par* R_S *et tels que la relation d'équivalence induite ait pour quotient* S . *Soit* F_o *le sous-foncteur de* F *défini comme suit :* $F_o(S)$ *est formé des* $Z \in F(S)$ *représentables, c'est-à-dire des sous-*$\underline{C}_{/S}$*-objets de* X_S *stables par* R_S *et tels que la relation d'équivalence induite soit* (M)*-effective et ait comme quotient* S (*c'est-à-dire* $R_Z \simeq Z \times_S Z$ *et* $Z \to S$ *élément de* (M)).

Alors :

(i) *Le morphisme* $p \in \mathrm{Hom}(X,F) == F(X)$ *défini par le sous-objet* R *de* $X \times X$ *identifie* F *au faisceau-quotient de* X *par* R .

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) F est représentable .

b) F_o est représentable .

c) R est (M)-effective .

Sous ces conditions , $F = F_o = X/R$.

(iii) Soit (N) une famille de morphismes stable par changement de base , telle que pour toute famille couvrante $\{S_i \longrightarrow S\}$ et toute famille $\{T_i \longrightarrow S_i\}$ de morphismes de (N) , toute donnée de descente sur les T_i relative à $\{S_i \longrightarrow S\}$ soit effective . Supposons X quarrable et le morphisme $R \rightarrow X \times X$ élément de (N) . Alors $F_o = F$.

Démontration. (i) a déjà été démontré (4.6.1) .

(ii) On a vu l'équivalence de a) et de c) ainsi que $F = X/R$. Il reste à prouver que b) ou c) implique $F_o = F$. Remarquons d'abord, comme il est d'ailleurs affirmé dans l'énoncé, que F_o est bien un sous-foncteur de F ; en effet pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et tout $Z \in F_o(S)$, le morphisme $Z \rightarrow S$ est quarrable, donc $Z \times_S S'$ élément de $F_o(S')$ pour tout $S' \rightarrow S$. Comme $R \in F(X)$ appartient à $F_o(X)$, 4.6.2 montre que b) $\Longrightarrow F_o = F$. Supposons maintenant c) vérifié . Le morphisme $X \rightarrow X/R$ est élément de (M) et pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et tout $Z \in F(S)$, le diagramme (*) de 4.6.1 montre que $Z = S \times_{X/R \times S} X \times S$ est représentable, donc élément de $F_o(S)$.

(iii) Soit $f \in \mathrm{Hom}(S,F)$ correspondant à $Z \in F(S)$. On doit montrer que f se factorise par F_o , c'est-à-dire que Z est représentable . C'est d'abord clair si f se factorise par X en vertu de :

Lemme 4.6.7. Soit $x_o \in X(S)$. L'image de x_o dans $F(S)$ correspond au sous-faisceau Z de X_S défini par les deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X_S \arrow[r, "id_{X_S} \times x_o"] & X_S \times_S X_S \arrow[r] & X \times X \\ Z \arrow[u] \arrow[r] & R_S \arrow[u] \arrow[r] & R \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

Ce lemme résulte aussitôt de la description du morphisme $X \longrightarrow F$.

Revenons à la démonstration du théorème . Si f se factorise par X , alors Z est représentable et le morphisme $Z \longrightarrow X_S$ élément de (N) . En général , f ne se factorise pas nécessairement par X ; mais, comme $X \longrightarrow F$ est couvrant (4.4.3) , il existe par 4.4.8 une famille couvrante $\{ S_i \longrightarrow S \}$ et pour chaque i un morphisme $S_i \longrightarrow X$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & F \\ S_i \arrow[u] \arrow[r] & S \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} .$$

D'après ce qui précède, le morphisme $f_i : S_i \longrightarrow F$ défini par le diagramme précédent appartient à $Hom(S_i, F_o)$ et correspond au sous-faisceau $Z \times_S S_i$ de X_{S_i} . Le morphisme $Z \times_S S_i \longrightarrow X_{S_i}$ est élément de (N) et la famille $X_{S_i} \longrightarrow X_S$ couvrante . Il n'y a donc plus qu'à établir :

Proposition 4.6.8. Soient $\{ S_i \longrightarrow S \}$ une famille couvrante et F un faisceau au-dessus de S . Supposons que pour chaque i , le S_i-foncteur $F \times_S S_i$ soit représentable par un objet T_i . Alors la famille des T_i est munie d'une donnée de descente canonique relative à $S_i \longrightarrow S$. Pour que F soit représentable , il faut et il suffit que cette donnée soit effective ; s'il en est ainsi l'objet "descendu" représente F .

Remarquons d'abord que d'après 4.4.3 , $S_i \longrightarrow S$ est une famille épimorphique effective universelle dans $\widetilde{C}$, donc une famille de descente dans $\widetilde{C}$. Si F est représentable par l'objet T , alors $T \times_S S_i$ (considéré comme faisceau) est isomorphe à $F \times_S S_i$, donc la donnée de descente sur les T_i est effective et l'objet descendu (unique) est isomorphe à F. Réciproquement, supposons que la donnée de descente canonique sur les T_i soit effective et soit T l'objet descendu. Comme la famille $\{ S_i \longrightarrow S \}$ est une famille de descente dans $\widetilde{C}$, il existe un S-morphisme $T \longrightarrow F$ qui par extension de la base à chaque S_i redonne le morphisme canonique $T_i \longrightarrow F \times_S S_i$. Ce morphisme est localement un isomorphisme ; comme T et F sont des faisceaux, il résulte de 4.5.8 que c'est un isomorphisme.

Corollaire 4.6.9. Soit R une relation d'équivalence (M)-effective dans X. Pour tout faisceau F, l'application

$$\mathrm{Hom}(X/R,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,F)$$

identifie le premier ensemble à la partie du second formée des morphismes compatibles avec R.

Corollaire 4.6.10. Soit T' une topologie moins fine que T, pour laquelle les morphismes de (M) soient couvrants. Sous les conditions de (iii), X/R est aussi le faisceau-quotient de X par R dans toute topologie intermédiaire entre T' et la topologie canonique.

Remarque 4.6.11. Si dans l'énoncé de (iii), on suppose de plus que, dans les hypothèses du texte, si on note T l'objet descendu, le morphisme $T \longrightarrow S$ est élément de (N), alors les morphismes d'inclusion $Z \hookrightarrow X_S$ sont aussi éléments de (N), comme il résulte aussitôt de la construction de Z par descente.

Remarque 4.6.12. Les implications

$$c) \Longrightarrow b) \Longrightarrow a) \quad ,$$

$$c) \Longrightarrow F_0 = F = X/R \quad ,$$

ont été établies sans recourir à la partie "il suffit" du lemme 4.6.5, qui est le seul endroit où l'on utilise la condition (e_T). Elles restent donc valables si (M) vérifie seulement les conditions (a) à (d_T). Un exemple de telle famille (M) est celle des morphismes quarrables couvrants (comparer avec 4.6.4.). Dans le cas de la topologie canonique, ceux-ci ne sont autres que les épimorphismes effectifs universels. On a donc :

Corollaire 4.6.13. Soit R une relation d'équivalence effective universelle dans X. Alors X/R est le faisceau-quotient de X par R pour la topologie canonique. Il représente le foncteur suivant : X/R (S) est l'ensemble des sous-$\underline{C}_{/S}$-objets Z de X_S stables par R_S et tels que la relation d'équivalence induite soit effective universelle et ait comme quotient S.

De même, pour une topologie quelconque :

Corollaire 4.6.14. Soit (M) la famille des morphismes quarrables couvrants. Si R est une relation d'équivalence (M)-effective dans X, alors X/R est le faisceau-quotient de X par R et représente le foncteur F_o de 4.6.6.

Scholie 4.6.15. Nous pouvons maintenant apporter les précisions suivantes à 4.5.5. Alors que dans les questions faisant intervenir exclusivement des limites projectives (produits fibrés, structures algébriques...), on peut, d'après les résultats de l'Exposé I et 4.5.5, identifier indifféremment $\underline{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\vec{\underline{C}}$ ou de $\hat{\underline{C}}$, il n'en est pas de même dans celles qui mêlent limites projectives et inductives. Dans toutes les questions faisant intervenir à la fois des limites projectives et des limites inductives, en particulier des passages au quotient (exemple : structure de groupe sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe invariant), nous considérerons la catégorie donnée comme plongée dans la catégorie des faisceaux ; ainsi si R est une $\underline{C}$-relation d'équivalence dans l'objet X de $\underline{C}$, X/R désignera le faisceau-quotient de X par R (désigné antérieurement par $j(X)/j(R)$), donc dans le cas où ce faisceau sera représentable, l'objet qu'il représente. Les résultats précédents montrent que dans les cas les plus importants, un quotient dans $\underline{C}$ sera aussi un quotient dans la catégorie des faisceaux ; de toutes façons, nous nous <u>interdisons</u> l'emploi de la notation X/R pour un quotient dans $\underline{C}$ qui ne coïnciderait pas avec le quotient dans $\underline{\widetilde{C}}$ (par exemple qui ne serait pas universel), modifiant ainsi les définitions du n° 3 .

Pour étudier un problème du type ci-dessus, on se place donc d'abord dans la catégorie des faisceaux, où tous les résultats habituels sont valables (n° 4.4), puis on particularise les résultats obtenus à la catégorie de départ, en utilisant les résultats du présent numéro et, lorsqu'on en possède, des critères d'effectivité de descente. Nous verrons des exemples de cette méthode dans les numéros suivants .

4.7. <u>Utilisation de critères d'effectivité</u> : <u>théorème d'isomorphie</u> .

Dans ce numéro, nous donnons un exemple d'utilisation de critères d'effectivité . Les données de départ sont une topologie $\underline{T}$ sur $\underline{C}$ (toujours moins fine que la topologie canonique) , une famille (M) de morphismes de $\underline{C}$ vérifiant les axiomes (a) à (e_T) de 4.6.3 et une famille (N) de morphismes de $\underline{C}$ susceptible de vérifier les axiomes suivants :

(a) (N) est stable par extension de la base .

(f_T) "les morphismes de (N) se descendent par la topologie donnée" ; c'est-à-dire : pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, toute famille couvrante $\{S_i \longrightarrow S\}$ et toute famille $\{T_i \longrightarrow S_i\}$ de morphismes de (N) , toute donnée de descente sur les T_i relativement à $\{S_i \longrightarrow S\}$ est effective , et si on note T l'objet descendu , le morphisme $T \longrightarrow S$ est élément de (N) .

Signalons tout de suite un exemple de cette situation, qui sera traité plus tard : $\underline{C}$ est la catégorie des préschémas , $\underline{T}$ la topologie fidèlement plate quasi-compacte ; (M) la famille des morphismes fidèlement plats quasi-compacts, (N) la famille des immersions fermées , ou celle des immersions quasi-compactes .

Rappelons le résultat principal de 4.6.6 (compte tenu de 4.6.11) :

<u>Proposition</u> 4.7.1. <u>Si</u> X <u>est un objet quarrable de</u> $\underline{C}$, R <u>une relation d'équivalence de type</u> (M) <u>dans</u> X , <u>telle que</u> $X \longrightarrow R \times R$ <u>soit élément de</u> (N) , (N) <u>vérifiant</u> (a) <u>et</u> (f_T) , <u>alors le faisceau-quotient</u> X/R <u>est défini par</u>

> $X/R\ (S)$ = <u>ensemble des sous-S-objets</u> Z <u>de</u> X_S , <u>stables par</u> R_S , <u>tels que</u> $Z \longrightarrow X_S$ <u>soit élément de</u> (N) , <u>que</u> $Z \longrightarrow S$ <u>soit couvrant</u> (<u>ou élément de</u> (M)) <u>et que</u> $R_Z \simeq Z \times_S Z$.

Soit X un objet de $\underline{C}$, R une relation d'équivalence (M)-<u>effective</u> dans X , notons $X' = X/R$. Pour tout sous-objet Y' de X' tel que le morphisme canonique $Y' \longrightarrow X'$ soit élément de (N) , le sous-objet $Y = Y' \times_{X'} X$ de X est stable par R , le morphisme canonique $Y \longrightarrow X$ est élément de (N) , (si (N) vérifie (a)) , la relation d'équivalence induite dans Y est (M)-effective (4.4.11 et 4.6.6) et son quotient est Y' . Réciproquement, montrons que tout sous-objet Y de X , stable par R, tel que le morphisme structural $X \longrightarrow Y$ soit élément de (N) , s'obtient de cette façon ; en effet, si Y est stable par R , ses deux images dans $R = X \times_{X'} X$ sont identiques et Y est muni d'une donnée de descente relative à $X \longrightarrow X'$. Pour avoir le résultat cherché, il suffit donc que la famille (N) vérifie l'axiome suivant (entraîné par (f_T) et les conditions sur (M)) :

> (f_M) Si $Y \longrightarrow X$ est élément de (N) et $X \longrightarrow X_1$ élément de (M) , toute donnée de descente sur Y relative à $X \longrightarrow X_1$ est effective ; si on note Y_1 l'objet descendu, $Y_1 \longrightarrow X_1$ est élément de (N) .

On a donc :

<u>Proposition</u> 4.7.2. <u>Soit</u> R <u>une relation d'équivalence</u> (M)-<u>effective dans</u> X . <u>Soit</u> (N) <u>une famille de morphismes vérifiant</u> (a) <u>et</u> (f_M) . <u>Pour tout sous-objet</u> Y <u>de</u> X , <u>stable par</u> R <u>et tel que le morphisme</u> $Y \longrightarrow X$ <u>soit élément</u>

de (N) , la relation d'équivalence induite dans Y par R est (M)-effective et le quotient $Y/R_Y = Y'$ est un sous-objet de $X' = X/R$ tel que $Y' \longrightarrow X'$ soit élément de (N) . L'application $Y \longmapsto Y'$ réalise une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-objets Y de X , stables par R , tels que le morphisme $Y \longrightarrow X$ soit élément de (N) , et l'ensemble des sous-objets Y' de X' tels que le morphisme $Y' \longrightarrow X'$ soit élément de (N) . L'application réciproque est $Y' \longmapsto Y' \times_{X'} X$.

Corollaire 4.7.3. Supposons de plus que $R \longrightarrow X \times X$ soit élément de (N) . Alors , pour tout Y comme dans l'énoncé , $R_Y \longrightarrow Y \times Y$ est aussi élément de (N) . Si (N) vérifie (a) et (f_T) , on a donc

$Y'(S)$ = ensemble des sous-S-objets Z de Y_S , stables par R_S, tels que $Z \longrightarrow Y_S$ soit élément de (N) (alors $Z \longrightarrow X_S$ est aussi élément de (N)) , que $Z \longrightarrow S$ soit couvrant et que $R_Z \xrightarrow{\sim} Z \times_S Z$.

5. Passage au quotient et structures algébriques .

5.1. Fibrés principaux homogènes .

On rappelle (III 0.1) qu'un objet X à groupe d'opérateurs (à droite) H est dit formellement principal homogène sous H si le morphisme canonique (de foncteurs)

$$X \times H \longrightarrow X \times X$$

défini par $(x,h) \longmapsto (x , xh)$ est un isomorphisme . Il revient au même de dire (cf. loc. cit.) que pour tout $S \in Ob\ \underline{C}$, X(S) est formellement principal homogène sous H(S) , c'est-à-dire vide ou principal homogène sous H(S) . En particulier , si on fait opérer H sur lui-même par translations (à droite) , H devient formellement principal homogène sous lui-même .

Définition 5.1.1. L'objet X à groupe d'opérateurs H est dit trivial s'il est isomorphe (comme objet à groupe d'opérateurs H) à H sur lequel H opère par translations .

Proposition 5.1.2. Soit X formellement principal homogène sous H . On a un isomorphisme

$$\Gamma(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{H\text{-obj.}}(H,X)$$

d'ensemble principaux homogènes sous $\Gamma(H)$.

A toute section x de X on associe le morphisme de H dans X défini ensemblistement par $h \longmapsto x\,h$. L'assertion énoncée est immédiate , par réduction au cas ensembliste .

Corollaire 5.1.3. On a un isomorphisme d'objets à opérateurs H

$$X \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{H\text{-obj.}}(H,X) \quad .$$

Corollaire 5.1.4. Pour qu'un objet à groupe d'opérateurs soit trivial , il faut et il suffit qu'il soit formellement principal homogène et qu'il possède une section .

Définition 5.1.5. Soit $\underline{C}$ une catégorie munie d'une topologie . On dit que le S-objet X à S-groupe d'opérateurs H est fibré principal homogène sous H s'il est localement trivial , c'est-à-dire si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) L'ensemble des $T \longrightarrow S$ tels que (le foncteur) $X \times_S T$ soit trivial sous $H \times_S T$ est un raffinement de S .

(ii) Il existe une famille couvrante (pour une prétopologie définissant la topologie donnée) $\{ S_i \longrightarrow S \}$ telle que pour chaque i, le S_i-foncteur $X \times_S S_i$ à S_i-foncteur-groupe d'opérateurs $H \times_S S_i$ soit trivial (= possède une section sur S_i).

Proposition 5.1.6. Soit $\underline{C}$ une catégorie munie d'une topologie T. Soit (M) une famille de morphismes de $\underline{C}$ vérifiant les axiomes (a) à (e_T) de 4.6.3. Soient H un S-groupe tel que le morphisme structural $H \longrightarrow S$ soit élément de (M) et P un S-objet à S-groupe d'opérateurs H. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) P est fibré principal homogène sous H (définition 5.1.5)

(ii) P est formellement principal homogène sous H et le morphisme structural $P \rightarrow S$ est élément de (M) .

(iii) Il existe un morphisme $S' \rightarrow S$ élément de (M) tel que par extension de la base de S à S', P devienne trivial , c'est-à-dire que $P \times_S S'$ soit trivial sous $H \times_S S'$.

(iv) H opère librement sur P , de manière (M)-effective et le quotient H/P est isomorphe à S .

Remarquons d'abord que (ii) et (iv) sont équivalents, compte tenu du fait que , dans l'un et l'autre cas , $P \rightarrow S$ est élément de (M) , donc quarrable , ce qui assure la représentabilité des produits fibrés $H \times_S P$ et $P \times_S P$. Il est clair que (ii) entraîne (iii) , car on peut prendre comme S' P lui-même , l'hypothèse que P est formellement principal homogène entraînant que $P \times_S P$ est trivial sous $H \times_S P$ (5.1.4) , car il a une section (la section diagonale) . Il est clair que (iii) entraîne (i) , car $\{ S' \rightarrow S \}$ est une famille couvrante , par l'axiome (d_T) . Il reste donc à montrer que (i) entraîne (ii) . Le morphisme de faisceaux $P \times_S H \rightarrow P \times_S P$ est localement un isomorphisme , donc un isomorphisme (4.5.8) ; P est donc formellement principal homogène . Le morphisme structural $P \longrightarrow S$ est localement isomorphe au morphisme structural $H \to S$ qui est élément de (M). Il est donc lui-même élément de (M), par (e_T).

L'équivalence entre (i) et (iv) se généralise :

Proposition 5.1.7. *Sous les mêmes hypothèses sur C et (M), soient H un S-groupe et X un S-objet sur lequel H opère (à droite). Supposons le morphisme structural $H \to S$ élément de (M). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *H opère librement sur X et de manière (M)-effective.*

(ii) *Il existe un S-morphisme $p : X \to Y$ compatible avec la relation d'équivalence définie dans X par l'action de H et tel que l'opération de $H \times_S Y$ sur X au-dessus de Y qu'on en déduit fasse de X un fibré principal homogène sous H_Y au-dessus de Y. Sous ces conditions p identifie Y quotient X/H.*

Si $p : X \to Y$ est un morphisme compatible avec l'action de H, alors l'opération de $H \times_S Y$ sur X au-dessus de Y qu'on en déduit définit dans X la même relation d'équivalence que l'action de H, en vertu de la formule

$$H_Y \times_Y X \xrightarrow{\sim} H \times_S X .$$

la proposition résulte de cette remarque et de l'équivalence (iv)$\Longleftrightarrow$(i) précédente.

Nous pouvons maintenant préciser le théorème 4.6.6 dans le cas du passage au quotient par un groupe d'opérateurs :

Proposition 5.1.8. *Dans les hypothèses de 5.1.7, notons F_o le foncteur au-dessus de S défini comme suit : pour chaque $S' \to S$, $F_o(S')$ est l'ensemble des sous-S'-foncteurs représentables Z de $X \times_S S'$, stables sous $H \times_S S'$ et fibrés principaux homogènes sous ce S'-groupe pour l'action induite (3.2.2).*

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opération de H dans X est (M)-effective .

b) F_o est représentable .

Sous ces conditions , on a $F_o = X/H$.

(ii) Soit (N) une famille de morphismes , stables par changement de base , telle que pour toute famille couvrante $\{S'_i \longrightarrow S'\}$ et toute famille $\{T_i \longrightarrow S'_i\}$ de morphismes de (N) , toute donnée de descente sur les T_i relativement à $\{S'_i \longrightarrow S'\}$ soit effective . Supposons le morphisme $X \times_S H \longrightarrow X \times_S X$ élément de (N) et X quarrable . Alors l'élément p de $\mathrm{Hom}(X, F_o)$ correspondant au sous-objet $X \times_S H$ de $X \times_S X$ identifie F_o au faisceau-quotient X/H .

5.2. Structures de groupes et passage au quotient .

Nous nous intéressons dans ce numéro aux structures algébriques que l'on peut mettre sur le quotient G/H d'un groupe par un sous-groupe . Nous nous placerons d'abord dans la catégorie des faisceaux sur $\underline{C}$ pour une topologie quelconque . En prenant la topologie canonique et en utilisant 4.6.12 , nous obtiendrons des résultats pour le passage au quotient effectif universel dans $\underline{C}$.

Proposition 5.2.1. Soit $u : H \longrightarrow G$ un monomorphisme de faisceaux en groupes . Il existe sur le faisceau G/H une structure unique d'objet à groupe d'opérateurs G telle que le morphisme canonique

$$p : G \longrightarrow G/H$$

soit un morphisme d'objets à groupe d'opérateurs G . Cette structure est fonctorielle par rapport au couple (G,H) : si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow f \\ H' & \longrightarrow & G' \end{array} ,$$

le morphisme $\dot{f} : G/H \longrightarrow G'/H'$ (3.2.3) est compatible avec le morphisme f sur les groupes d'opérateurs.

En effet, le faisceau G/H est le faisceau associé au préfaisceau

$$i(G)/i(H) : S \longmapsto G(S)/H(S) ;$$

comme le foncteur a est exact à gauche, il transforme objets à groupes d'opérateurs en objets à groupe d'opérateurs. Le préfaisceau $i(G)/i(H)$ étant muni d'une structure d'objet à groupes d'opérateurs $i(G)$, $G/H = a(i(G)/i(H))$ est muni d'une structure d'objet à opérateurs $a(i(G)) = G$. Cette structure jouit évidemment de toutes les propriétés énoncées.

Corollaire 5.2.2. Soit $u : H \longrightarrow G$ un monomorphisme de $\underline{C}$-groupes. Supposons que l'opération de H sur G soit effective universelle. Il existe sur le quotient G/H une structure unique d'objet à groupe opérateurs G telle que le morphisme $p : G \longrightarrow G/H$ soit un morphisme d'objets à opérateurs. Cette structure est fonctorielle en le couple (H,G) (H opérant de manière effective universelle dans G), au sens précédent.

Proposition 5.2.3. Soit $u : H \longrightarrow G$ un monomorphisme de faisceaux en groupes identifiant H à un sous-faisceau en groupes invariant de G. Il existe sur le quotient G/H une structure unique de faisceau en groupes telle que le morphisme canonique $p : G \longrightarrow G/H$ soit un morphisme de groupes. Cette structure est fonctorielle en le couple (H,G) (H invariant).

La démonstration est semblable à celle de 5.2.1.

Corollaire 5.2.4. Soit $u : H \longrightarrow G$ un monomorphisme de $\underline{C}$-groupes identifiant H à un sous-groupe invariant de G. Supposons que l'action de H sur G soit effective universelle. Il existe sur le quotient G/H une structure de groupe unique telle que le morphisme canonique $G \longrightarrow G/H$ soit un morphisme de groupes. Cette structure est fonctorielle par rapport au couple (H,G) (H invariant, H opérant de manière effective universelle).

On peut caractériser la structure de groupe de G/H de manière plus parlante :

Proposition 5.2.5. *Sous les conditions de 5.2.4, soient K un $\underline{C}$-groupe et $f : G \longrightarrow K$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est un morphisme de groupes compatible avec la relation d'équivalence définie par* H.

(ii) f *est un morphisme de groupes induisant le morphisme trivial* $H \longrightarrow K$.

(iii) f *se factorise en un morphisme de groupes* $G/H \longrightarrow K$.

En particulier, on a un isomorphisme, fonctoriel en le groupe K

$$\mathrm{Hom}_{\underline{C}\text{-gr.}}(G/H,K) \xrightarrow{\sim} \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\underline{C}\text{-gr.}}(G,K) \text{ , } f \circ u = e \right\} .$$

L'équivalence de (i) et (ii) se démontre ensemblistement. On a évidemment (iii) $\Longrightarrow$ (ii). L'équivalence de (iii) et de (ii) résulte de la formule

$$\mathrm{Hom}(G/H,K) \simeq \mathrm{Hom}(i(G)/i(H),K)$$

et de la définition de la structure de groupe de G/H.

Remarque 5.2.6. Dans la situation précédente, si le noyau de f est exactement H, le morphisme $G/H \longrightarrow K$ qui factorise f est un *monomorphisme*. Cela résulte aussitôt de 3.3.4.

Dans le cas de faisceaux en groupes, on peut préciser 4.4.11 par la

Proposition 5.2.7. *Soient G un faisceau en groupes, H un sous-faisceau en groupes invariant. Pour tout sous-faisceau en groupes K de G contenant H,* soit K' le groupe quotient K/H considéré comme un sous-groupe de $G' = G/H$. On a $K = K' \times_{G'} G$. Les applications $K \longmapsto K/H$ et $K' \longmapsto K' \times_{G'} G$ réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-faisceaux en groupes de G contenant H et l'ensemble des sous-faisceaux en groupes de G'. Dans cette correspondance, les sous-faisceaux en groupes invariants de G correspondent aux sous-faisceaux invariants de G'.

La première partie résulte facilement de 4.4.11 et de 3.2.4. Il reste à voir que K est invariant dans G si et seulement si K' est invariant dans G'. Si K est invariant dans G, alors le préfaisceau $i(K)/i(H)$ est invariant dans $i(G)/i(H)$. Il en est de même des faisceaux associés, en vertu de l'argument habituel. Si réciproquement K' est invariant dans G', alors le produit fibré $K \times_{G'} G$ est invariant dans G, comme on le voit immédiatement.

Si maintenant L est un sous-faisceau en groupes quelconque de G, soit $\overline{L}$ le saturé de L pour la relation d'équivalence définie par H, on notera aussi $\overline{L} = L \cdot H$.

Proposition 5.2.8. Sous les conditions précédentes, $L \cdot H$ est un sous-faisceau en groupes de G contenant H et l'image de L dans G/H s'identifie à

$$L \cdot H / H \simeq L / H \cap L .$$

En effet, notons L' le faisceau image de L dans G/H. C'est un sous-faisceau en groupes de G/H correspondant à $L \cdot H$ dans la correspondance de la proposition précédente. Comme le morphisme $L \to L'$ est couvrant, donc un épimorphisme effectif universel de faisceaux, il résulte de 4.4.9 que L' s'identifie au quotient de L par le noyau de $L \longrightarrow L'$ qui n'est évidemment autre que $H \cap L$.

Considérons enfin la situation suivante : on a un faisceau en groupes G, un sous-faisceau en groupes K et un sous-faisceau en groupes H de K,

inva
grou
sur
la r
de
Aut(
triv
Comm
opér

Prop
(à d
d'op

Lors
(5.2

qui
anno

Coro
un
véri
très
libr
cons

invariant dans K . Définissons d'abord une opération (à droite) du faisceau en groupes $H\backslash K$ (= K/H) sur G/H . Le groupe K opère par translations à droite sur G . Comme H est invariant dans K , cette opération est compatible avec la relation d'équivalence définie par l'action de H et définit donc une opération de K sur G/H , c'est-à-dire un morphisme du groupe K° opposé à K dans Aut(G/H) . Comme ce dernier est un faisceau (4.5.13) et que ce morphisme est trivial sur H , il se factorise par K/H et définit l'opération cherchée . Comme les opérations de G sur lui-même à droite et à gauche commutent, les opérations de G et de K/H sur G/H commutent .

Proposition 5.2.9. Sous les conditions précédentes , K/H opère librement (à droite) dans G/H et on a un isomorphisme canonique de faisceaux à groupe d'opérateurs G

$$(G/H)/(K/H) \simeq G/K .$$

Lorsque K est invariant dans G , auquel cas K/H est invariant dans G/H (5.2.7), cet isomorphisme respecte les structures de groupe des deux membres .

On a un isomorphisme de préfaisceaux

$$(i(G)/i(H))/(i(K)/i(H)) \xleftarrow{\sim} i(G)/i(K) ,$$

qui respecte les structures d'objets à groupe d'opérateurs i(G) . Le résultat annoncé s'obtient en appliquant le foncteur a à cette relation .

Corollaire 5.2.10. Soient G un $\underline{C}$-groupe , K un sous-$\underline{C}$-groupe de G , H un sous-$\underline{C}$-groupe invariant de K . Soit (M) une famille de morphismes de $\underline{C}$ vérifiant les axiomes (a) à (e_T) . Supposons l'opération de H sur G (resp. K) à droite (M)-effective . Alors K/H opère de manière naturelle librement à droite sur G/H ; cette opération commute à celle de G . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'opération de K sur G est (M)-effective .

(ii) L'opération de K/H sur G/H est (M)-effective .

Sous ces conditions , on a un isomorphisme d'objets à groupe d'opérateurs G :

$$(G/H)/(K/H) \simeq G/K \quad .$$

5.3. Utilisation de critères d'effectivité : théorème de Noether .

Soient $\underline{C}$, $\underline{T}$ et (M) comme d'habitude . Soit (N) une famille de morphismes vérifiant les axiomes (a) et (f_M) de 4.7.

Mettant ensemble 5.2.7 et 4.7.2 , on obtient :

Proposition 5.3.1. Soit G un $\underline{C}$-groupe . Soit H un sous-$\underline{C}$-groupe de G , invariant et opérant de manière (M)-effective dans G . Pour tout sous-$\underline{C}$-groupe K de G majorant H et tel que le morphisme $K \longrightarrow G$ soit élément de (N) , H opère dans K de manière (M)-effective et le quotient $K/H = K'$ est un sous-$\underline{C}$-groupe de $G/H = G'$ tel que le morphisme $K' \longrightarrow G'$ soit élément de (N) . L'application $K \longmapsto K'$ réalise une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-$\underline{C}$-groupes K de G , majorant H et tels que $K \longrightarrow G$ soit élément de (N) et l'ensemble des sous-$\underline{C}$-groupes K' de G' tels que $K' \longrightarrow G'$ soit élément de (N) . L'application réciproque est $K' \longmapsto K \times_{G'} G$. Dans cette correspondance, les sous-groupes invariants de G correspondent aux sous-groupes invariants de G' .

Corollaire 5.3.2. Si $H \longrightarrow G$ est élément de (N) , alors $\underline{C}$ possède un objet final e et la section unité $e \longrightarrow G/H$ est élément de (N) .

6. Topologies dans la catégorie des schémas .

6.1. La topologie de Zariski . C'est la topologie engendrée par la prétopologie suivante : une famille de morphismes $\{ S_i \to S \}$ est couvrante si chaque morphisme est une immersion ouverte et si la réunion des images des S_i est S tout entier . On la note (Zar) .

Un faisceau pour la topologie de Zariski est aussi appelé foncteur de nature locale : c'est un foncteur contravariant de (Sch) dans (Ens) tel que pour tout préschéma S et tout recouvrement de S par des ouverts S_i , on ait un diagramme exact :

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \cap S_j) \quad .$$

En particulier , un foncteur de nature locale transforme sommes directes en produits . Comme tout foncteur représentable est un faisceau , cette topologie est moins fine que la topologie canonique .

Au point de vue terminologie , chaque fois que nous dirons "local" , "localement", sans précisions , ce sera par référence à la topologie de Zariski, donc au sens habituel .

6.2. Un procédé de construction de topologies .

Proposition 6.2.1. *Soient* $\underline{C}$ *une catégorie et* $\underline{C}'$ *une sous-catégorie pleine . Soit* P *un ensemble de familles de morphismes de* $\underline{C}$ *de même but , stable par changement de base et par composition* (*c'est-à-dire vérifiant les axiomes* (P 1) *et* (P 2) *de* 4.2.5) . *Soit* P' *un ensemble de morphismes de* $\underline{C}'$. *On suppose que* P' *contient les familles réduites à un isomorphisme identique* (P 3) *vérifie la condition suivante :*

(a) *Si* $\{ S_i \longrightarrow S \} \in P'$ (*donc* $S_i, S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}'$) *et si* $T \longrightarrow S$ *est un morphisme de* $\underline{C}'$, *alors les produits fibrés* $S_i \times_S T$

(dans $\underline{C}$) existent et la famille $\{ S_i \times_S T \longrightarrow T \} \in P'$ (donc $S_i \times_S T \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}'$) . (Remarque : cette condition entraîne que P' est stable par changement de base dans $\underline{C}'$, mais ne lui est pas équivalente , car elle suppose de plus que le foncteur d'inclusion de $\underline{C}'$ dans $\underline{C}$ commute à certains produits fibrés) .

On suppose de plus vérifiées les deux conditions ci-dessous :

(b) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$, il existe $\{ S_i \longrightarrow S \} \in P$ avec $S_i \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}'$ pour chaque i .

(c) Dans la situation suivante

$$\begin{tikzcd} & S_{ijk} \arrow[d] \\ S_i \arrow[d] & S_{ij} \arrow[l] \\ S & \end{tikzcd}$$

où S , S_i , S_{ij} , $S_{ijk} \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}'$; $\{ S_i \rightarrow S \} \in P'$; $\{ S_{ij} \rightarrow S_i \} \in P$ pour chaque i ; $\{ S_{ijk} \longrightarrow S_{ij} \} \in P'$ pour chaque ij , il existe une famille $\{ T_n \rightarrow S \} \in P'$ et pour chaque n un multi-indice (ijk) et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S_{ijk} \arrow[dr] & & T_n \arrow[ll] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

Munissons $\underline{C}$ de la topologie engendrée par P et P'. Soient $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}$ et R un crible de S . Pour que R soit couvrant, il faut et il suffit qu'il existe une famille composée $\{ S_{ij} \longrightarrow S_i \longrightarrow S \}$, où S_i , $S_{ij} \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}'$, $\{ S_i \longrightarrow S \} \in P$, $\{ S_{ij} \longrightarrow S_i \} \in P'$ pour chaque i , et que les morphismes $S_{ij} \longrightarrow S$ obtenus se factorisent par R (en d'autres termes que le crible engendré par cette famille composée soit contenu dans R) .

<u>Démonstration</u> . Les familles éléments de P et de P' étant couvrantes , une famille composée de telles familles le sera aussi (C 2) , donc un crible de la forme indiquée couvrant, car contenant un crible couvrant . Réciproquement , il suffit de voir que les cribles de cette forme forment bien une topologie, c'est-à-dire de vérifier les axiomes (T 1) à (T 4) de 4.2.1.

<u>Axiome</u> (T 4) . Soit $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$. Il existe d'après (b) une famille $\{S_i \longrightarrow S\} \in P$ avec $S_i \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}'$. Les familles $\{S_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{S_i}} S_i\}$ sont éléments de P' par hypothèse . Le crible S de S est donc de la forme voulue .

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr] & \\ S_i \arrow[d] & S \arrow[dl, hook'] \\ S & \end{tikzcd}$$

.

<u>Axiome</u> (T 3) . Evident .

<u>Axiome</u> (T 2) . Soit R un crible de S de la forme voulue et soit C un crible quelconque de S .

$$\begin{tikzcd} & S_{ij} \arrow[dl] \arrow[d] & C_{ij} \arrow[l, hook'] \arrow[dd] \\ & S_i \arrow[d] & \\ R \arrow[r, hook] & S & C \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Comme $S_{ij} \longrightarrow S$ se factorise par R , le crible $C_{ij} = C \times_S S_{ij}$ de S est de la forme voulue par hypothèse .

On a donc pour chaque ij un diagramme de la forme ci-contre . On a donc prouvé qu'il existe une famille composée

$$\begin{tikzcd} S_{ijkl} \arrow[d] \arrow[ddr] & \\ S_{ijk} \arrow[d] & \\ S_{ij} & C_{ij} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

$$S_{ijkl} \longrightarrow S_{ijk} \longrightarrow S_{ij} \longrightarrow S_i \longrightarrow S$$

appartenant à $P \circ P' \circ P \circ P'$, se factorisant par C et où tous les objets autres que S sont dans $\underline{C}'$.

Appliquant la condition (c) à chaque famille $\{ S_{ijkl} \longrightarrow S_i \}$, on en déduit qu'il existe pour chaque i une famille $\{ T_{in} \longrightarrow S_i \} \in P'$, telle que $T_{in} \longrightarrow S$ se factorise par l'un des S_{ijkl} , donc par C .

$$\begin{tikzcd}
T_{in} \arrow[r] \arrow[d] & S_{ijkl} \arrow[dd] \\
S_i \arrow[d] & \\
S & C \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Le crible C est donc de la forme voulue, ce qui achève la vérification .

<u>Axiome</u> (T 1) . Soit R un crible de S de la forme donnée et soit $T \rightarrow S$ un morphisme de $\underline{C}$.

$$\begin{tikzcd}
 & S_{ij} \arrow[d] \arrow[dl] & & U_{ikj} \arrow[lll] \arrow[d] \\
 & S_i \arrow[d] & T_i \arrow[l] \arrow[d] & U_{ik} \arrow[l] \\
R \arrow[r, hook] & S & T \arrow[l] &
\end{tikzcd} \qquad . \qquad
\begin{tikzcd}
U_{ikj} \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d, hook] \\
T \arrow[r] & S
\end{tikzcd} \quad .$$

Soit $T_i = S_i \times_S T$. La famille $\{ T_i \longrightarrow T \}$ appartient à P (par (P 1)). Appliquant (b) , on construit des $\{ U_{ik} \longrightarrow T_i \} \in P$, avec les $U_{ik} \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}'$. Par hypothèse (condition (P 2) sur P) , on a $\{ U_{ik} \longrightarrow T \} \in P$. D'après (a) , $U_{ik} \times_{S_i} S_{ij} = U_{ikj}$ est objet de $\underline{C}'$ et pour chaque ik, $\{ U_{ikj} \longrightarrow U_{ik} \} \in P'$. Le carré commutatif ci-dessus montre alors que les morphismes $U_{ijk} \longrightarrow T$ se factorisent par le crible $T \times_S R$ de T , qui est donc de la forme voulue , ce qui achève la démonstration .

<u>Corollaire</u> 6.2.2. <u>Si</u> $S \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}'$ <u>et si</u> R <u>est un crible de</u> S , R <u>est couvrant si et seulement si il existe une famille</u> $\{ T_i \rightarrow S \} \in P'$, <u>se factorisant par</u> R .

En effet , un tel crible est couvrant . D'autre part il suffit d'appliquer

(c) en prenant la famille $\{ S_i \longrightarrow S \}$ réduite à l'isomorphisme identique de S pour déduire de la proposition qu'un crible couvrant est de la forme indiquée.

Corollaire 6.2.3. Pour qu'un préfaisceau F sur $\underline{C}$ soit séparé (resp. un faisceau), il faut et il suffit que le morphisme

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i)$$

soit injectif (resp. le diagramme

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \times_S S_j)$$

exact) dans les deux cas suivants :

(i) $\{S_i \longrightarrow S\} \in P$,

(ii) $S , S_i \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}'$; $\{S_i \longrightarrow S\} \in P'$.

En effet, les conditions sont nécessaires, car les familles en question sont couvrantes. Si C est un crible de S engendré par une famille de morphismes du type indiqué, un diagram-chasing facile montre que les conditions du corollaire entraînent que $\mathrm{Hom}(S,F) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}(C,F)$ est injectif, (resp. bijectif). Mais tout raffinement R de S contient un crible C du type ci-dessus et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(S,F) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathrm{Hom}(R,F) \arrow[dl, "h"] \\ & \mathrm{Hom}(C,F) & \end{tikzcd}$$

On sait que g est injectif, donc aussi f. Donc F est séparé. Mais R est un raffinement de C, donc h est aussi injectif. Si g est bijectif, alors

f l'est aussi , donc F est un faisceau .

<u>Remarque</u> 6.2.4. Le corollaire précédent ne résulte <u>pas</u> de 4.3.5 , car P' n'est <u>pas</u> stable par extension de la base .

<u>Remarque</u> 6.2.5. La condition (c) est vérifiée en particulier dans le cas où

(i) P' est stable par composition .

(ii) Si $\{ S_i \longrightarrow S \}$ est une famille de morphismes de $\underline{C}'$, élément de P , il en existe une sous-famille élément de P' .

6.3. <u>Application à la catégorie des schémas</u> .

On prend pour $\underline{C}$ la catégorie des schémas , pour $\underline{C}'$ la sous-catégorie pleine formée des schémas affines , pour P l'ensemble des familles surjectives d'immersions ouvertes . On considèrera plusieurs ensembles P' :

P'_1 : familles finies surjectives , composées de morphismes <u>plats</u> .

P'_2 : familles finies surjectives , composées de morphismes <u>plats de présentation finie et quasi-finis</u> .

P'_3 : familles finies surjectives , composées de morphismes <u>étales</u> .

P'_4 : familles finies surjectives , composées de morphismes <u>étales et finis</u> .

Pour chacun de ces ensembles P'_i , sauf P'_4 , les conditions de la proposition sont vérifiées ((c) grâce à 6.2.5 , car un schéma affine étant quasi-compact , toute famille de morphismes de $\underline{C}'$, élément de P, contient une sous-famille <u>finie</u> qui soit également dans P , donc dans P'_i) . La topologie

$\underline{T}_i$ engendrée par P et P'_i est notée et appelée de la manière suivante :

$\underline{T}_1$ = (fpqc) = topologie fidèlement plate quasi-compacte .

$\underline{T}_2$ = (fppf) = topologie fidèlement plate (localement) de présentation finie.

$\underline{T}_3$ = (et) = topologie étale.

$\underline{T}_4$ = (etf) = topologie étale finie.

Comme $P'_1 \supset P'_2 \supset P'_3 \supset P'_4$, on a

$$(\mathrm{fpqc}) \geq (\mathrm{fppf}) \geq (\mathrm{et}) \geq (\mathrm{etf}) \geq (\mathrm{Zar}) .$$

Proposition 6.3.1. (i) Pour que le crible R de S soit couvrant pour $\underline{T}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement S_p de S par des ouverts affines et pour chaque p une famille $\{S_{pq} \to S_p\}$ élément de P'_i , les S_{pq} étant affines, tels que chaque morphisme $\{S_{pq} \to S\}$ se factorise par R .

(ii) Pour qu'un préfaisceau F sur (Sch) soit un faisceau pour (fpqc) (resp. (fppf) , (et) , (etf)), il faut il il suffit que

(a) F soit un faisceau pour (Zar) , i.e. un foncteur de nature locale.

(b) Pour tout morphisme fidèlement plat (resp. fid. plat de présentation finie et quasi-fini , resp. étale surjectif, resp. étale fini surjectif) $T \to S$, où T et S sont affines, on ait un diagramme exact :

$$F(S) \to F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T)$$

(iii) Les topologies $\underline{T}_i$, $i = 1,2,3,4$, sont moins fines que la topologie canonique.

(iv) Toute famille surjective formée de morphismes plats et ouverts (resp. plats et localement de présentation finie, resp. étales, resp. étales et finis) est couvrante pour (fpqc) (resp. (fppf) resp. (fpqf) , resp. (et), resp. (etf)) .

(v) Toute famille surjective , finie et formée de morphismes plats et quasi-compacts est couvrante pour (fpqc) . En particulier , tout morphisme fidèlement plat et quasi-compact est couvrant pour (fpqc) .

Démonstration . (i) résulte de 6.2.1 , (ii) de 6.2.3 , compte tenu du fait qu'un faisceau pour la topologie de Zariski transforme sommes directes en produits. Tout foncteur représentable étant un faisceau pour (Zar) et vérifiant la condition (b) de (ii) par SGA VIII , 5.3 , $\underline{T}_1$ est moins fine que la topologie canonique , ce qui prouve (iii) .
Prouvons (iv) . Soit $\{ S_i \longrightarrow S \}$ une famille de morphisme comme dans l'énoncé. Considérant un recouvrement de S par des ouverts affines , on se ramène immédiatement au cas où S est affine . Soit alors S_{ij} un recouvrement de S_i par des ouverts affines , tels que la restriction de $S_i \rightarrow S$ à S_{ij} soit quelconque (resp. de présentation finie, et quasi-finie EGA IV , resp. quelconque , resp. quelconque) . Comme les morphismes en cause sont ouverts , les images T_{ij} des S_{ij} forment un recouvrement ouvert de S . Soit T_{ijk} un recouvrement ouvert affine de T_{ij} . Les $S_{ijk} = S_{ij} \times_S T_{ijk}$ sont affines, les morphismes $S_{ijk} \longrightarrow T_{ijk}$ sont surjectifs , plats et ouverts resp. plats de présentation finie et quasi-finis, resp. étales, resp. étales et finis) . La famille composée $\{ S_{ijk} \longrightarrow T_{ijk} \longrightarrow S \}$ est donc couvrante par (i) . Comme elle se factorise par la famille donnée, celle-ci est couvrante .

$$\begin{tikzcd} & S_{ij} \arrow[dl] \arrow[dd] & S_{ijk} \arrow[l] \arrow[dd] \\ S_i \arrow[dd] & & \\ & T_{ij} \arrow[dl] & T_{ijk} \arrow[l] \\ S & & \end{tikzcd}$$

Prouvons (v) Soit $\{ S_i \longrightarrow S \}$ une famille finie fidèlement plate et quasi-compacte . Soit T_j un recouvrement de S par des ouverts affines . Les

$S_{ij} = T_j \times_S S_i$ sont quasi-compacts et possèdent donc des recouvrements ouverts affines finis T_{ijk}. Chaque morphisme $T_{ijk} \longrightarrow T_j$ est plat, la famille $\{T_{ijk} \longrightarrow T_j\}$ est finie et surjective. La famille $\{T_{ijk} \longrightarrow S\}$ est couvrante par (i). Elle se factorise par la famille donnée qui l'est donc aussi.

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[d] & S_{ij} \arrow[l] \arrow[d] & T_{ijk} \arrow[l] \\ S & T_j \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Corollaire 6.3.2. Soit (M_i) la famille de morphismes suivante :

(M_1) : morphismes fidèlement plats et quasi-compacts.

(M_2) : morphismes fidèlement plats localement de présentation finie.

(M_3) : morphismes étales.

(M_4) : morphismes étales et finis.

La famille (M_i) vérifie les axiomes (a), (b), (c), $(d_{\underline{T}_i})$ et $(e_{\underline{T}_i})$ de 4.6.3.

En effet, pour (a), (b), (c), c'est classique (EGA et SGA, passim.). D'après 6.3.1, (iv) et (v), (M_i) vérifie $(d_{\underline{T}_i})$. Il reste à voir que (M_i) vérifie $(e_{\underline{T}_i})$; pour cela, il suffit de voir que (M_i) vérifie $(e_{\underline{T}_1})$ qui entraîne les autres. Cela résulte de SGA 1 VIII (n° 4 et 5).

Corollaire 6.3.3. Si X est un préschéma et R une relation d'équivalence dans X de type (M_i), R est (M_i)-effective si et seulement si le faisceau quotient de X par R pour $\underline{T}_i$ est représentable et en ce cas il est représenté par le quotient X/R.

En effet, c'est 4.6.5.

6.4. Conditions d'effectivité .

Nous cherchons maintenant des familles (N) de morphismes vérifiant l'axiome $(f_{\underline{T}})$ de 4.7. Remarquons d'abord que $(f_{\underline{T}_1})$ entraîne $(f_{\underline{T}_i})$, ce qui fait que nous pouvons nous restreindre au cas de la topologie (fpqc) .

Lemme 6.4.1. *Les familles de morphismes suivantes vérifient l'axiome $(f_{\underline{T}_1})$ de 4.7 , c'est-à-dire "se descendent par (fpqc)":*

(N) : *immersions ouvertes* .

(N'): *immersions fermées* .

(N"): *immersions quasi-compactes* .

En vertu de 6.3.1 (ii) , il suffit de vérifier que les familles données se descendent par la topologie de Zariski et par un morphisme fidèlement plat quasi-compact . La première assertion est claire , vérifions la seconde . Pour (N) , c'est SGA 1 VIII, 4.4, pour (N') , c'est loc. cit., 1.9 Pour (N"), on raisonne comme dans loc. cit., 5.5 à l'aide des deux résultats antérieurs.

Corollaire 6.4.2. *Le même résultat est valable pour les immersions ouvertes quasi-compactes* .

Ces résultats permettent d'appliquer à la situation présente les résultats généraux de 4.7.1 , 4.7.2 , 5.1.8 , 5.3.1 , etc... Enonçons-en un comme exemple , le premier .

Corollaire 6.4.3. (= 4.7.1 + 4.6.10) . *Soient X un préschéma et R une relation d'équivalence dans X . On suppose que $R \to X$ est fidèlement plat et quasi-compact et que $R \to X \times X$ est une immersion fermée (resp. ouverte, resp. quasi-compacte, resp. ouverte quasi-compacte) . Alors le faisceau-quotient X/R est le même pour la topologie (fpqc) et pour la topologie canonique , et pour chaque préschéma S , on a*

$X/R(S)$ = ensemble des sous-préschémas fermés (resp. ouverts, resp. rétrocompacts, resp. ouverts rétrocompacts) Z de X_S, stables par R_S, tels que $Z \longrightarrow S$ soit fidèlement plat quasi-compact et le diagramme $R_Z \rightrightarrows Z \longrightarrow S$ exact .

6.5. Fibrés principaux homogènes .

Signalons simplement la terminologie :

topologie	fibrés principaux homogènes
(fpqc)	" " " (tout court)
(et)	" " " quasi-isotriviaux
(etf)	" " " localement isotriviaux
(Zar)	" " " localement triviaux.

6.6. Autres topologies .

On utilise parfois d'autres topologies sur la catégorie des schémas . Signalons-en une : la topologie étale finie globale (etfg) engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les familles surjectives formées de morphismes étales et finis . Elle n'est pas plus fine que la topologie de Zariski . Les fibrés principaux homogènes correspondants sont appelés "isotriviaux" .

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (\text{canonique}) \arrow[d, dash] & \\
 & (\text{fpqc}) \arrow[d, dash] & \\
 & (\text{fppf}) \arrow[d, dash] & \\
 & (\text{et}) \arrow[d, dash] & \\
 & (\text{etf}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\text{Zar}) \arrow[dr, dash] & & (\text{etfg}) \arrow[dl, dash] \\
 & (\text{chaotique}) &
\end{tikzcd}$$
.

-:-:-:-:-:-

Bibliographie

[AS] Analysis Situs, par J. GIRAUD, Séminaire Bourbaki, Mai 1963.

[D] Méthode de la descente, Mémoires de la S.M.F. n° 2, par J. GIRAUD

[MA] Grothendieck Topologies, par M. ARTIN, notes multigraphiées, Harvard, 1962

[TDTE I] Techniques de descente ... I . Généralités . Descente par morphismes fidèlement plats , par A. GROTHENDIECK, Séminaire Bourbaki, Déc. 1959 .

---oOo---

Exposé V

CONSTRUCTION DE PRESCHEMAS QUOTIENT

par P. GABRIEL

L'objet de cet exposé est de démontrer les théorèmes énoncés dans TDTE III. Si X et T sont deux objets d'une catégorie $\underline{C}$ nous écrivons $X(T)$ au lieu de $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(T, X)$. De même, si $\varphi : Y \longrightarrow X$ et $f : U \longrightarrow T$ sont deux flèches de $\underline{C}$, $\varphi(T)$ désigne l'application $g \longmapsto \varphi \circ g$ de $Y(T)$ dans $X(T)$, $Y(f)$ l'application $g \longmapsto g \circ f$ de $Y(T)$ dans $Y(U)$. Enfin, si P est un préschéma, on note $\underline{P}$ l'ensemble sous-jacent à P.

Exceptionnellement, nous ne suivons pas dans le présent exposé la convention énoncée dans IV 4.6.15 sur la notation des quotients (loc.cit. haut de la page 68), car nous désirons donner ici une construction de quotients qui s'applique également à des "pré-relations d'équivalence" qui ne sont pas des relations d'équivalence.

1. $\underline{C}$-GROUPOIDES.

$\underline{C}$ est une catégorie où les produits et produits fibrés existent. Rappelons d'abord qu'un diagramme

$$X_1 \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} X_0 \xrightarrow{p} Y$$

de $\underline{C}$ est dit <u>exact</u> si $pd_0=pd_1$ et si, pour tout $T \in \underline{C}$, $T(p)$ est une bijection de $T(Y)$ sur la partie de $T(X)$ formée des flèches $f : X_0 \longrightarrow T$ telles que $fd_0=fd_1$. On dit aussi que (Y, p) est le conoyau de (d_0, d_1) et on écrit

$$(Y, p) = \mathrm{Coker}(d_0, d_1)$$

Soit par exemple $\underline{C}$ la catégorie des espaces annelés. Dans ce cas, il existe toujours un conoyau (Y , p) dont on peut donner la description suivante : l'espace sous-jacent à Y est obtenu à partir de X_o en identifiant les points $d_o(x)$ et $d_1(x)$ et en munissant Y de la topologie quotient. L'application canonique $\pi : X \longrightarrow Y$ et d_o, d_1 induisent alors une double-flèche de faisceaux d'anneaux sur Y

$$\pi_*(\underline{O}_o) \underset{\delta_1}{\overset{\delta_o}{\rightrightarrows}} \pi_*(d_{o*}\,\underline{O}_1) = \pi_*(d_{1*}\,\underline{O}_1)$$

où $\underline{O}_i$ est le faisceau structural de X_i. On choisit pour faisceau d'anneaux sur Y le sous-faisceau de $\pi_*(\underline{O}_o)$ dont les sections s sont telles que $\delta_o(s) = \delta_1(s)$. La flèche p est définie de façon évidente.

Dans cet exposé, nous étudions l'existence de $\mathrm{Coker}(d_o , d_1)$ lorsque la double flèche (d_o , d_1) se trouve insérée dans un contexte plus riche ; de façon précise, désignons par $X_2 = X_1 \underset{d_1, d_o}{\times} X_1$ le produit fibré du diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\ X_1 \arrow[r, "d_o"] & X_o \end{tikzcd}$$

par d_o' et d_2' les deux projections canoniques de X_2 sur X_1 ; on a donc par définition un <u>carré cartésien</u>

$$(\circ) \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "d_o'"] \arrow[d, "d_2'"'] & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\ X_1 \arrow[r, "d_o"] & X_o \end{tikzcd}$$

De plus, donnons nous une troisième flèche $d'_1 : X_2 \longrightarrow X_1$; nous disons que $(d_o, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_o\ ,\ d'_1)$ est un <u>$\underline{C}$-groupoïde</u> si pour tout objet T de $\underline{C}$, $X_1(T)$ est l'ensemble des flèches d'un groupoïde $X_*(T)$ dont l'ensemble des objets est $X_o(T)$, l'application source $d_1(T)$, l'application but $d_o(T)$ et dont l'application composition est $d'_1(T)$ (on identifie comme d'habitude $(X_1 \underset{d_1, d_o}{\times} X_1)(T)$ à $X_1(T) \underset{d_1(T), d_o(T)}{\times} X_1(T)$; on rappelle aussi qu'un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles) .

Si φ est une flèche du groupoïde $X_*(T)$, l'application $f \longmapsto \varphi\circ f$ est une bijection de l'ensemble des flèches f dont le but coïncide avec la source de φ sur l'ensemble des flèches ayant même but que φ . On voit facilement qu'on peut traduire ce fait en disant que <u>le carré</u>

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "d'_o"'] & X_1 \arrow[d, "d_o"] \\ X_1 \arrow[r, "d_o"] & X_o \end{tikzcd}$$

<u>est cartésien.</u>

De même, l'application $g \longmapsto g\circ\varphi$ est une bijection de l'ensemble des flèches g de $X_*(T)$ qui ont pour source le but de φ sur l'ensemble des flèches qui ont même source que φ . On peut encore traduire ce fait en disant que <u>le carré</u>

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\ X_1 \arrow[r, "d_1"] & X_o \end{tikzcd}$$

<u>est cartésien.</u>

Notons d'autre part $s : X_o \longrightarrow X_1$ l'unique flèche de $\underline{C}$ telle que $s(T) : X_o(T) \longrightarrow X_1(T)$ associe à tout objet de $X_*(T)$ la flèche identique de cet objet . La flèche s satisfait aux égalités

$$(3) \qquad d_1 \, s = Id_{X_o}$$

et

$$(3 \text{ bis}) \qquad d_o \, s = Id_{X_o} \quad .$$

Enfin, l'associativité des applications-composition $d_1'(T)$ se traduit par la commutativité du diagramme

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} X_1 \underset{d_1,d_o}{\times} X_1 \underset{d_1,d_o}{\times} X_1 \arrow[r, "d_1' \times X_1"] \arrow[d, "X_1 \times d_1'"'] & X_1 \underset{d_1,d_o}{\times} X_1 \arrow[d, "d_1'"] \\ X_1 \underset{d_1,d_o}{\times} X_1 \arrow[r, "d_1'"] & X_1 \end{tikzcd} \quad .$$

Réciproquement, les conditions (1), (2) et (4) et l'existence d'une flèche s satisfaisant à (3) impliquent que $(X_1 \overset{d_1}{\underset{d_o}{\rightrightarrows}} X_o, d_1')$ est un $\underline{C}$-groupoïde . La condition (3) est bénigne; elle assure simplement que l'application $d_1(T) : X_1(T) \longrightarrow X_o(T)$ est surjective pour tout $T \in \underline{C}$. Dans la suite de cet exposé, nous nous servons surtout des carrés cartésiens (o), (1) et (2) que nous résumons dans le diagramme

$$(0,1,2) \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, shift left, "d_1'"] \arrow[r, shift right, "d_o'"'] \arrow[d, "d_2'"'] & X_1 \arrow[r, "d_o"] \arrow[d, "d_1"] & X_o \\ X_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & X_o & \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme les deux carrés de gauche (i.e. les carrés (o) et (2)) sont cartésiens; la première ligne est exacte et X_2 s'identifie au produit fibré $X_1 \underset{d_o, d_o}{x} X_1$. Nous n'utilisons l'associativité que de façon détournée, par exemple pour assurer l'existence d'une flèche s satisfaisant à (3) et (3bis), ou bien pour assurer l'existence d'une flèche $\sigma : X_1 \longrightarrow X_1$ telle que $d_o\sigma = d_1$ et $d_1\sigma = d_o$ (on choisit σ de telle manière que $\sigma(T) : X_1(T) \longrightarrow X_1(T)$ envoie toute flèche de $X_*(T)$ sur la flèche inverse).

Par abus de langage il nous arrivera d'appeler C-groupoïde un diagramme

$$X_2 \overset{d'_o, d'_1, d'_2}{\rightrightarrows\!\!\!\rightarrow} X_1 \overset{d_o, d_1}{\rightrightarrows} X_o$$

tel que (o), (1) et (2) soient cartésiens, que (4) soit commutatif et qu'il existe s satisfaisant à (3). L'objet X_2 pourra donc être "un" produit fibré de (*) sans être "le" produit fibré de (*). Au lieu du C-groupoïde X_*, nous parlerons aussi du groupoïde X_* de base X_o, ou de la prérelation d'équivalence X_* dans X_o.

2. EXEMPLES DE C-GROUPOÏDES.

a) Soient X un objet de C et G un C-groupe opérant à gauche sur X. Nous désignons par $d_o : G\times X \longrightarrow X$ la flèche définissant l'opération de G sur X, par $d_1 : G\times X \longrightarrow X$ la projection du produit sur le deuxième facteur, par $\mu : G\times G \longrightarrow G$ la flèche définissant la structure de C-groupe de G, enfin par $pr_{2,3}$ la projection de $G\times G\times X = G\times(G\times X)$ sur le deuxième facteur. Alors

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, shift left=2, "pr_{2,3}"] \arrow[r, "\mu \times X" description] \arrow[r, shift right=2, "G\times d_o"'] & G \times X \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & X \end{tikzcd}$$

est un $\underline{C}$-groupoïde.

b) Soit $d_o, d_1 : X_1 \longrightarrow X_o$ un couple d'équivalence . Si $d_o \boxtimes d_1 : X_1 \longrightarrow X_o \times X_o$ est la flèche de composantes d_o et d_1 , nous supposons donc que $(d_o \boxtimes d_1)(T)$ est, pour tout objet T de $\underline{C}$, une bijection de $X_1(T)$ sur le graphe d'une relation d'équivalence de $X_o(T)$. L'ensemble $X_1(T)$ s'identifie par conséquent à l'ensemble des couples (x,y) formés d'éléments de $X_o(T)$ tels que $x \sim y$; de même, l'ensemble $X_2(T) = (X_1 \underset{d_1,d_o}{\times} X_1)(T)$ s'identifie à l'ensemble des triplets (x,y,z) d'éléments de $X_o(T)$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Il y a donc une et une seule flèche $d_1^! : X_2 \longrightarrow X_1$ rendant commutatifs les carrés (1) et (2) : $d_1^!(T)$ doit envoyer $(x,y,z) \in X_2(T)$ sur $(x,z) \in X_1(T)$. Pour ce choix de $d_1^!$, $(d_o, d_1 : X_1 \longrightarrow X_o \, , \, d_1^!)$ est un $\underline{C}$-groupoïde.

Réciproquement, considérons un $\underline{C}$-groupoïde X_* tel que $d_o \boxtimes d_1 : X_1 \longrightarrow X_o \times X_o$ soit un monomorphisme . Alors (d_o, d_1) est un couple d'équivalence et X_* peut être reconstruit à partir de (d_o, d_1) comme cela est expliqué quelques lignes plus haut .

c) Si $p : X \longrightarrow Y$ est une flèche quelconque de $\underline{C}$ et si pr_1 et pr_2 sont les deux projections de $X \underset{p,p}{\times} X$ sur X , alors $(pr_1, pr_2) : X \underset{p,p}{\times} X \rightrightarrows X$ est un couple d'équivalence . On dit que p est un <u>épimorphisme effectif</u> si le diagramme

$$X \underset{p,p}{\times} X \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\;p\;} Y$$

est exact, c'est-à-dire si $(Y,p) = \mathrm{Coker}(pr_1, pr_2)$.

Soit par exemple S un préschéma noethérien et soit $\underline{C}$ la catégorie des préschémas finis au-dessus de S . Montrons qu'un épimorphisme de $\underline{C}$ n'est pas forcément effectif : on choisit S égal à $\mathrm{Spec}\, k[T^3, T^5]$, où k est un corps commutatif , Y égal à S et X égal à Spec $k[T]$. Si i est l'inclusion de $B = k[T^3,T^5]$ dans $A = k[T]$, p est choisi égal à Spec i . Dans ce cas $X \underset{p,p}{\times} X$ s'identifie à Spec $A \otimes_B A$ et $\mathrm{Coker}(pr_1,pr_2)$ à Spec B' , où B' est le sous-anneau de A formé des a tels que $a \otimes_B 1 = 1 \otimes_B a$. Or

$$T^7 \otimes_B 1 = (T^2T^5) \otimes_B 1 = T^2 \otimes_B T^5 = T^2 \otimes_B (T^3T^2) = T^5 \otimes_B T^2 = 1 \otimes_B T^7$$

Donc T^7 appartient à B' , n'appartient pas à B et Spec B' est distinct de Spec B , d'où le contre-exemple .

3. QUELQUES SORITES SUR LES $\underline{C}$-GROUPOIDES.

Voici pêle-mêle quelques remarques utilisées dans la suite :

a) Soient

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, shift left=2, "d'_0{,}d'_1{,}d'_2"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & X_1 \arrow[r, shift left, "d_0{,}d_1"] \arrow[r, shift right] & X_0 \end{tikzcd}$$

un $\underline{C}$-groupoïde et $f_0 : Y_0 \longrightarrow X_0$ une flèche de $\underline{C}$. Nous allons définir un $\underline{C}$-groupoïde de base Y_0

$$\begin{tikzcd} Y_2 \arrow[r, shift left=2, "e'_0{,}e'_1{,}e'_2"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & Y_1 \arrow[r, shift left, "e_0{,}e_1"] \arrow[r, shift right] & Y_0 \end{tikzcd}$$

qu'on dira induit par X_* et f_0 . On dira aussi que Y_* est l'image réciproque de X_* par le changement de base f_0 .

Nous choisissons pour Y_1 le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "d_0 \boxtimes d_1"] \\ Y_0 \times Y_0 \arrow[r, "f_0 \times f_0"] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd}$$

pour e_o et e_1 les flèches composées de la flèche canonique $Y_1 \longrightarrow Y_o \times Y_o$ et des première et deuxième projections de $Y_o \times Y_o$ sur Y_o. On peut dire que le couple (e_o, e_1) est défini de telle façon que, pour tout $T \in \underline{C}$, et pour tout couple (y,x) d'éléments de $Y_o(T)$, il y ait une certaine correspondance biunivoque $\psi \longmapsto {}_y\psi_x$ entre les flèches ψ de $X_*(T)$ de source $f_o(x)$, de but $f_o(y)$ et les flèches ${}_y\psi_x$ de $Y_*(T)$ de source x et de but y. On détermine donc e_1' en définissant pour tout $T \in \underline{C}$ la composition des flèches de $Y_*(T)$ à l'aide de la formule

$$ {}_z\psi_y \circ {}_y\varphi_x = {}_z(\psi \circ \varphi)_x \quad . $$

Il est clair que cette définition fait de chaque $Y_*(T)$ un groupoïde.

b) Connaissant le $\underline{C}$-groupoïde X_* et le changement de base $f_o : Y_o \longrightarrow X_o$, on peut reconstruire le couple $(e_o, e_1) : Y_1 \rightrightarrows Y_o$ d'une autre manière : construisons $Y_o \underset{X_o}{\times} X_1$, pr_1 et pr_2 de telle façon que le carré

$$\begin{tikzcd}
Y_o \underset{X_o}{\times} X_1 \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & X_1 \arrow[d, "d_o"] \\
Y_o \arrow[r, "f_o"] & X_o
\end{tikzcd}$$

soit cartésien. On vérifie alors sans peine par réduction au cas ensembliste qu'on peut définir Y_1 au moyen du carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "e_o \boxtimes f_1"] \arrow[d, "e_1"'] & Y_o \underset{X_o}{\times} X_1 \arrow[d, "d_1 \circ pr_2"] \\
Y_o \arrow[r, "f_o"] & X_o
\end{tikzcd}$$

où f_1 désigne la projection canonique de $Y_1 = (Y_o \times Y_o)_{(X_o \times X_o)} X_1$ sur X_1.

c) Nous allons donner un exemple d'image réciproque d'un $\underline{C}$-groupoïde : prenons Y_o égal à X_1, f_o égal à d_o. Pour tout objet T de $\underline{C}$, $Y_1(T)$ s'identifie alors à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\varphi"] & d \\ a \arrow[u, "f"] & c \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

de $X_*(T)$. La source d'un tel diagramme est la flèche f, le but est la flèche g. Ces diagrammes se composent de façon évidente.

Posons maintenant $Y'_o = X_1$, $f'_o = d_1$ (nous ajoutons les accents pour éviter toute confusion avec l'exemple précédent). Dans ce cas, $Y'_1(T)$ s'identifie pour tout $T \in \underline{C}$ à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} b & d \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\psi"] & c \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

du groupoïde $X_*(T)$. La source d'un tel diagramme est f, le but est g ; la composition de ces diagrammes est évidente.

Ceci dit, il est clair que l'application identique de $Y_o(T)$ et l'application

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\varphi"] & d & & b & d \\ a \arrow[u, "f"] & c \arrow[u, "g"'] & \longmapsto & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g^{-1}\varphi f"] & c \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

de $Y_1(T)$ sur $Y'_1(T)$ définissent un isomorphisme du groupoïde $Y_*(T)$ sur $Y'_*(T)$. De plus, cet isomorphisme dépend fonctoriellement de T de sorte que *les $\underline{C}$-groupoïdes Y_* et Y'_* sont isomorphes.*

d) PROPOSITION 3.1 : *Nous conservons les notations de* a) *et nous supposons que* f_o *est un épimorphisme effectif et universel . Dans ce cas,* $\mathrm{Coker}(d_o,d_1)$ *existe si et seulement si* $\mathrm{Coker}(e_o,e_1)$ *existe . L'égalité* $(X,p) = \mathrm{Coker}(d_o,d_1)$ *entraîne* $(X,pf_o) = \mathrm{Coker}(e_o,e_1)$.

Rappelons d'abord qu'un épimorphisme $f_o : Y_o \longrightarrow X_o$ est dit universel si, pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & Y_o \arrow[d, "f_o"] \\
X' \arrow[r] & X_o
\end{tikzcd}$$

f' est un épimorphisme. Ceci étant, désignons par $C(d_o,d_1)$ le foncteur covariant de $\underline{C}$ dans les ensembles qui associe à tout $T \in \underline{C}$ le noyau du couple $T(d_o)$, $T(d_1)$: $T(X_o) \rightrightarrows T(X_1)$. Définissons de même $C(e_o, e_1)$. Pour tout $T \in \underline{C}^{\cdot}$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C(d_o,d_1)(T) \arrow[r] \arrow[d, "T(f)"'] & T(X_o) \arrow[r, shift left, "T(d_1)"] \arrow[r, shift right, "T(d_o)"'] \arrow[d, "T(f_o)"'] & T(X_1) \arrow[d, "T(f_1)"'] \\
C(e_o, e_1)(T) \arrow[r] & T(Y_o) \arrow[r, shift left, "T(e_1)"] \arrow[r, shift right, "T(e_o)"'] & T(Y_1)
\end{tikzcd}$$

où $T(f)$ est l'injection induite par l'injection $T(f_o)$. Si nous montrons que $T(f)$ est une surjection pour tout T , on aura un isomorphisme fonctoriel $f: C(d_o,d_1) \longrightarrow C(e_o, e_1)$ de sorte que la représentabilité de l'un de ces foncteurs équivaudra à celle de l'autre; ceci prouvera notre proposition.

Pour prouver la surjectivité de $T(f)$, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & Y_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift right, "e_o"'] \arrow[d, shift left, "e_1"] & X_1 \arrow[d, shift right, "d_o"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
Y_o \underset{X_o}{\times} Y_o \arrow[urr, "\Delta"] \arrow[rr, shift left, "pr_2"] \arrow[rr, shift right, "pr_1"'] & & Y_o \arrow[r, "f_o"] & X_o
\end{tikzcd}$$

où Δ est défini par les égalités $(e_o \boxtimes e_1)\,\Delta = pr_1 \boxtimes pr_2$ et $f_1\,\Delta = s\,f_o\,pr_1$, la flèche $s : X_o \longrightarrow X_1$ satisfaisant aux égalités (3) et (3 bis) du paragraphe 1. Si la flèche $g : Y_o \longrightarrow T$ est telle que $g\,e_o = g\,e_1$, on a $g\,e_o\,\Delta = g\,e_1\Delta$, donc $g\,pr_1 = g\,pr_2$. Comme f_o est un épimorphisme effectif, g est composé de f_o et d'une flèche $h : X_o \longrightarrow T$, c'est-à-dire qu'on a $g = T(f_o)(h)$. Il reste à montrer que h appartient à $C(d_o,d_1)(T)$, c'est-à-dire satisfait à l'égalité $h\,d_o = h\,d_1$; or on a

$$h\,d_o\,f_1 = h\,f_o\,e_o = g\,e_o = g\,e_1 = h\,f_o\,e_1 = h\,d_1\,f_1 ,$$

d'où l'égalité cherchée grâce au fait que f_1 est un épimorphisme (car f_o est un épimorphisme universel).

e) Considérons maintenant un préschéma S et choisissons $\underline{C}$ égal à (Sch/S). La donnée d'un $\underline{C}$-groupoïde

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, shift left=2, "d'_2"] \arrow[r, "d'_1" description] \arrow[r, shift right=2, "d'_o"'] & X_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & X_o
\end{tikzcd}$$

permet de définir <u>une relation d'équivalence dans l'ensemble</u> $\underline{X}_o$ sous-jacent au préschéma X_o : si $x,y \in \underline{X}_o$, on écrira $x \sim y$ lorsqu'il existe $z \in \underline{X}_1$ tel que $x = d_1 z$ et $y = d_o z$. La réflexivité et la symétrie de cette relation sont évidentes; prouvons la transitivité: si $x \sim y$ et $y \sim z$, il existe $u,v \in \underline{X}_1$ tels que $x = d_1 u$, $y = d_o u$, $y = d_1 v$, $z = d_o v$. Il s'ensuit que (v,u) appartient au produit fibré ensembliste $\underline{X}_{1\,\underline{d}_1,\underline{d}_0}\!\times \underline{X}_1$. Comme l'application canonique

$\underline{X_{1\,d_1,d_0}\!\times X_1} \longrightarrow \underline{X}_{1\,\underline{d}_1,\underline{d}_0}\!\times \underline{X}_1$ de l'ensemble sous-jacent au produit fibré dans le produit fibré des ensembles sous-jacents est surjective, (v,u) est l'image d'un certain $w \in \underline{X}_2$. On a alors $x = d_1 d_1' w$ et $z = d_0 d_1' w$, d'où $x \sim z$.

f) Conservons les notations de a) et b), $\underline{C}$ étant toujours égal à (Sch/S) . Si x,y sont des points de Y_0 , nous allons voir qu'on a $x \sim y$ si et seulement si $f_0(x) \sim f_0(y)$ (l'image réciproque de la relation d'équivalence définie par un groupoïde est la relation d'équivalence définie par l'image réciproque du groupoïde) .

En effet, supposons qu'on a $x \sim y$. Il existe donc $z \in \underline{Y}_1$ tel que $x = e_1 z$, $y = e_0 z$. On a alors $f_0(x) = d_1 f_1 z$ et $f_0(y) = d_0 f_1 z$ d'où $f_0(x) \sim f_0(y)$.

Réciproquement, supposons qu'on a $f_0(x) \sim f_0(y)$ et soit $z \in \underline{X}_1$ tel que $f_0(y) = d_1 z$, $f_0(x) = d_0 z$. Il y a alors un point t de $Y_0 \underset{X_0}{\times} X_1$ tel que $pr_1\, t = x$ et $pr_2\, t = z$ (les notations sont celles de b)) . De même, comme $f_0(y) = d_1 pr_2 t$, il y a un $s \in \underline{Y}_1$ tel que $y = e_1 s$ et $(e_0 \boxtimes f_1)(s) = t$. On a alors $e_0 s = pr_1 (e_0 \boxtimes f_1) s = pr_1\, t = x$.
D'où $x \sim y$.

4. PASSAGE AU QUOTIENT PAR UNE PRERELATION D'EQUIVALENCE FINIE ET PLATE (démonstration d'un cas particulier).

THEOREME 4.1 : Soit

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{d_2'} & & \xrightarrow{d_1} & \\ X_2 & \xrightarrow{d_1'} & X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \\ & \xrightarrow{d_0'} & & & \end{array}$$

un (Sch/S)-groupoïde tel que d_1 soit fini localement libre et que, pour tout $x \in X_o$, l'ensemble $d_o d_1^{-1}(x)$ soit contenu dans un ouvert affine de X_o. Alors :

(i) Il existe un conoyau (Y,p) de (d_o,d_1) dans (Sch/S) ; de plus, un tel (Y,p) est un conoyau de (d_o,d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) p est entier, et Y est affine si X_o est affine.

(iii) Le morphisme $X_1 \longrightarrow X_o \underset{Y}{\times} X_o$ de composantes d_o et d_1 est surjectif.

(iv) Si (d_o,d_1) est un couple d'équivalence, $X_1 \longrightarrow X_o \underset{Y}{\times} X_o$ est un isomorphisme et $p : X_o \longrightarrow Y$ est fini localement libre.

Il résulte évidemment de (i) que l'espace topologique sous-jacent à Y est le quotient de l'espace topologique sous-jacent à X_o par la relation d'équivalence définie par le (Sch/S)-groupoïde X_*.

Nous allons d'abord prouver ce théorème lorsque X_o est affine et que d_1 est localement libre de rang constant n. Nous verrons ensuite comment on peut se ramener à ce cas particulier :

Dans le cas où nous nous sommes placés, X_o, X_1 et X_2 sont affines. Nous pouvons donc supposer qu'on a

$$X_i = \operatorname{Spec} A_i \quad , \quad d_j = \operatorname{Spec} \delta_j \quad , \quad d'_k = \operatorname{Spec} \delta'_k \quad ,$$

les A_i étant des anneaux commutatifs, les δ_j, δ'_k des homomorphismes d'anneaux. On peut alors remplacer le diagramme (o, 1, 2) par le suivant

$$(\mathrm{o},\ 1,\ 2)^* \qquad \begin{tikzcd} A_2 & A_1 \arrow[l, shift right, "\delta'_1"'] \arrow[l, shift left, "\delta'_0"] & A_0 \arrow[l, "\delta_0"'] \\ A_1 \arrow[u, "\delta'_2"] & A_0 \arrow[l, shift right, "\delta_1"'] \arrow[l, shift left, "\delta_0"] \arrow[u, "\delta_1"'] & \end{tikzcd}$$

où les deux carrés de gauche sont cocartésiens.

Désignons par B le sous-anneau de A_o formé des $a \in A_o$ tels que $\delta_o(a) = \delta_1(a)$.

a) A_o <u>est entier sur</u> B :

Si a appartient à A_o, soit

$$P_{\delta_1}(T, \delta_o(a)) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

le polynôme caractéristique de $\delta_o(a)$ lorsqu'on considère A_1 comme algèbre sur A_o au moyen de l'homomorphisme δ_1 (Bourbaki, <u>Alg</u>. VIII, § 12). Comme les carrés de gauche de $(0, 1, 2)^*$ sont cocartésiens, on a

$$\delta_o(P_{\delta_1}(T, \delta_o(a))) = P_{\delta'_2}(T, \delta'_o \delta_o(a))$$

et

$$\delta_1(P_{\delta_1}(T, \delta_o(a))) = P_{\delta'_2}(T, \delta'_1 \delta_o(a)) \quad .$$

Comme $\delta'_o \delta_o = \delta'_1 \delta_o$, on a

$$\delta_o(P_{\delta_1}(T, \delta_o(a)) = \delta_1(P_{\delta_1}(T, \delta_o(a)))$$

c'est-à-dire $\delta_o(\sigma_i) = \delta_1(\sigma_i)$ pour tout i . Hamilton-Cayley nous enseigne d'autre part qu'on a

$$\delta_o(a)^n - \delta_1(\sigma_1)\ \delta_o(a)^{n-1} + \dots + (-1)^n\ \delta_1(\sigma_n) = 0 \quad .$$

Comme $\delta_1(\sigma_i)$ est égal à $\delta_o(\sigma_i)$, on a aussi

$$\delta_o(a)^n - \delta_o(\sigma_1)\ \delta_o(a)^{n-1} + \dots + (-1)^n\ \delta_o(\sigma_n) = 0 \quad ,$$

d'où

$$a^n - \sigma_1\ a^{n-1} + \dots + (-1)^n\ \sigma_n = 0 \quad ,$$

car il existe un homomorphisme $\tau : A_1 \longrightarrow A_o$ tel que $\tau\,\delta_o = Id_{A_o}$, donc δ_o

est injectif .

Il s'ensuit que A_o est entier sur B .

b) Considérons maintenant deux idéaux premiers x et y de A_o . Nous allons montrer que l'égalité $x \cap B = y \cap B$ entraîne l'existence d'un idéal premier z de A_1 tel que $x = d_o(z)$ et $y = d_1(z)$:

En effet, si l'assertion n'était pas vraie, x serait distinct de $\delta_o^{-1}(t)$ pour tout idéal premier t de A_1 tel que $\delta_1^{-1}(t)=y$. Pour un tel t on aurait $\delta_o^{-1}(t) \cap B = \delta_1^{-1}(t) \cap B = y \cap B = x \cap B$, d'où il résulterait grâce à Cohen-Seidenberg que x ne serait contenu dans aucun $\delta_o^{-1}(t)$; il y aurait donc un $a \in x$ qui n'appartiendrait à aucun $\delta_o^{-1}(t)$ (car il y a au plus n idéaux premiers t de A_1 tels que $\delta_1^{-1}(t) = y)$. Par conséquent, $\delta_o(a)$ n'appartiendrait à aucun de ces t de sorte que la norme $N_{\delta_1}(\delta_o(a))$ n'appartiendrait pas à y (on calcule cette norme en considérant A_1 comme algèbre sur A_o au moyen de l'homomorphisme δ_1 ; on a $N_{\delta_1}(\delta_o(a)) = \sigma_n$ avec les notations de a)) . Or cette norme appartiendrait à $B \cap x = B \cap y$, d'où la contradiction .

c) Démonstration de (i) :

Posons $Y = \operatorname{Spec} B$ et $p = \operatorname{Spec} i$, où i est l'inclusion de B dans A_o . Nous allons d'abord montrer que (Y,p) est un conoyau de (d_o,d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés : il résulte en effet de b) que l'ensemble sous-jacent à $\operatorname{Spec} B$ est obtenu à partir de l'ensemble sous-jacent à X_o en identifiant les points x et y tels qu'il existe $z \in X_1$ avec $d_1 z = y$, $d_o z = x$. De plus, comme i est entier, $\operatorname{Spec} i$ est fermé de sorte que Y est muni de la topologie quotient de celle de X_o . Il résulte enfin du choix de B et du fait que p, d_o et d_1 sont affines, que la suite canonique de faisceaux d'anneaux

$$\underline{O}_Y \longrightarrow p_*(\underline{O}_{X_o}) \rightrightarrows p_*(d_{o*}(\underline{O}_{X_1})) \simeq p_*(d_{1*}(\underline{O}_{X_1}))$$

est exacte, c.q.f.d.

Il reste à montrer que (Y,p) est aussi le conoyau de (d_o,d_1) dans la catégorie des préschémas (plus généralement dans celle des espaces annelés en anneaux locaux) : soit donc $q : X_o \longrightarrow Z$ un morphisme de préschémas tel que $qd_o = qd_1$. D'après ce qui précède, il y a un morphisme d'espaces annelés $r : Y \longrightarrow Z$ et un seul tel que $q = rp$. Il s'agit de montrer que, pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $\underline{O}_{r(y)} \longrightarrow \underline{O}_y$ induit par r est local . Cela résulte de ce que p est surjectif , donc de ce que y est de la forme $p(x)$ et de ce que les homomorphismes $\underline{O}_{q(x)} \longrightarrow \underline{O}_x$ et $\underline{O}_y \longrightarrow \underline{O}_x$ induits par p et q sont locaux .

d) <u>Démonstration de</u> (ii) :

Résulte de a) et c) .

e) <u>Démonstration de</u> (iii) :

Rappelons qu'on désigne par $\underline{P}$ l'ensemble sous-jacent à un préschéma P , par $\underline{d} : \underline{P} \longrightarrow \underline{Q}$ l'application induite par un morphisme $d : P \longrightarrow Q$. On peut alors traduire b) en disant que l'application

$$\underline{d}_o \boxtimes \underline{d}_1 : \underline{X}_1 \longrightarrow \underline{X}_o \underset{\underline{Y}}{\times} \underline{X}_o$$

de composantes $\underline{d}_o$ et $\underline{d}_1$ est surjective ; or cette application se factorise comme suit

$$\underline{X}_1 \xrightarrow{\underline{d_o \boxtimes d_1}} \underline{X_o \underset{Y}{\times} X_o} \xrightarrow{q} \underline{X}_o \underset{\underline{Y}}{\times} \underline{X}_o$$

q étant l'application canonique; l'image de $d_o \boxtimes d_1$ contient donc tous les points v de $X_o \underset{Y}{\times} X_o$ tels que $\{v\} = q^{-1}(q(v))$. Cette dernière condition

$$\begin{tikzcd}
A_2 & & A_1 \arrow[ll, shift right, "\delta'_1"'] \arrow[ll, shift left, "\delta'_0"] & & A_0 \arrow[ll, "\delta_0"'] \\
A_1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}^n \arrow[u, "u_2"] & & A_0 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}^n \arrow[u, "u_1"] \arrow[ll, shift right, "\delta_1 \otimes \mathbb{Z}^n"'] \arrow[ll, shift left, "\delta_0 \otimes \mathbb{Z}^n"] & & B \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}^n \arrow[u, "u_0"] \arrow[ll, "i \otimes \mathbb{Z}^n"']
\end{tikzcd}$$

où u_o, u_1 et u_2 ont pour composantes respectivement i et ε, δ_1 et $\delta_o \varepsilon$, δ'_2 et $\delta'_o \delta_o \varepsilon$. Nous savons que u_1 est un isomorphisme. Comme les deux carrés de gauche de $(0, 1, 2)^*$ sont cocartésiens, u_2 est bijectif. Or les deux lignes horizontales de notre diagramme sont exactes; donc u_o est bijectif.

5. PASSAGE AU QUOTIENT PAR UNE RELATION D'EQUIVALENCE FINIE ET PLATE (cas général)

a) Soit $U^{(n)}$ le plus grand ouvert de X_o au-dessus duquel d_1 est fini localement libre de rang n. On sait que X_o est la somme directe des $U^{(n)}$. Il résulte d'autre part des deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "d'_o"] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\
X_1 \arrow[r, "d_o"'] & X_o
\end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\
X_1 \arrow[r, "d_1"'] & X_o
\end{tikzcd}$$

que les images réciproques de $U^{(n)}$ par d_o et d_1 coïncident toutes les deux avec le plus grand ouvert de X_1 au-dessus duquel d'_2 est localement libre de rang n ; on a donc $d_o^{-1}(U^{(n)}) = d_1^{-1}(U^{(n)})$ de sorte que le groupoïde X_* est la somme directe des groupoïdes $X_*^{(n)}$ induits par X_* sur les ouverts et fermés $U^{(n)}$. Il suffit par conséquent, comme on le voit aisément, de prouver le théorème 4.1 pour chacun des $X_*^{(n)}$: <u>on est ramené au cas où</u> d_1 <u>est fini localement libre de rang</u> n.

sera réalisée en particulier si v est <u>rationnel au-dessus de</u> Y , c'est-à-dire si le corps résiduel $k(v)$ de v s'identifie au corps résiduel $k(w)$ de l'image w de v dans Y .

Si $v \in X_o \times_Y X_o$ n'est pas rationnel au-dessus de Y , soit toujours w l'image de v dans Y ; il existe alors un anneau local C de radical $\underline{m}$ et un homomorphisme local et plat $f : \underline{O}_w \longrightarrow C$ tel que $C/\underline{m}$ soit isomorphe à $k(v)$ comme $k(w)$ - algèbre . Si on pose $Y' = \operatorname{Spec} C$ et si $\pi : Y' \longrightarrow Y$ est le morphisme induit par f , il est clair que la projection canonique de $(X_o \times_Y X_o) \times_Y Y'$ dans $X_o \times_Y X_o$ envoie sur v un point v' de $(X_o \times_Y X_o) \times_Y Y'$ qui est rationnel au-dessus de Y' . Comme $(X_o \times_Y X_o) \times_Y Y'$ s'identifie à $(X_o \times_Y Y') \times_{Y'} (X_o \times_Y Y')$ et que les raisonnements faits ci-dessus restent valables après le changement de base $\pi : Y' \longrightarrow Y$, v' est l'image d'un élément $u' \in X_1 \times_Y Y'$ par le morphisme déduit de $d_o \boxtimes d_1$ par changement de base . Si u est l'image de u' dans X_1 , on a bien $v = (d_o \boxtimes d_1)(u)$, c.q.f.d.

f) <u>Démonstration de</u> (iv) :

Il suffit de montrer que, pour tout idéal premier $\underline{p}$ de B , l'homomorphisme $A_{o\underline{p}} \otimes_{B_p} A_{o\underline{p}} \longrightarrow A_{1\underline{p}}$ de composantes $\delta_{o\underline{p}}$ et $\delta_{1\underline{p}}$ est bijectif . Autrement dit, il est loisible de supposer B local . Il résulte alors de b) que $A_{o\underline{p}}$ est semi-local ; en effet, si $\underline{m}$ est un idéal maximal de $A_{o\underline{p}}$, les autres idéaux maximaux sont de la forme $\delta_o^{-1}(\underline{n})$, où $\underline{n}$ parcourt les idéaux premiers de A_1 tels que $\delta_1^{-1}(\underline{n}) = \underline{m}$; l'assertion résulte donc de ce qu'il y a au plus $n = [A_1 : A_o]$ idéaux premiers $\underline{n}$. Quitte à faire un changement de base fidèlement plat, on peut aussi supposer que le corps résiduel de B est infini de sorte qu'on peut utiliser le lemme suivant :

<u>LEMME</u> 4.2 : <u>Soient</u> B <u>un anneau local de corps résiduel infini,</u> A <u>un anneau semi-local et</u> $i: B \longrightarrow A$ <u>un homomorphisme qui envoie l'idéal maximal</u> $\underline{n}$ <u>de</u> B

dans le radical $\underline{r}$ de A . Soient M un A-module libre de rang n et N un B-sous-module de M qui engendre M en tant que A-module . Alors N contient une base de M sur A .

On rappelle en effet qu'une suite $m_1, \dots, m_n$ d'éléments de M est une A-base de M si et seulement si les images canoniques de $m_1, \dots, m_n$ dans $M/\underline{r}M$ forment une base de $M/\underline{r}M$ sur $A/\underline{r}$. On peut donc remplacer M par $M/\underline{r}M$, N par $N/(N \cap \underline{r}M)$, A par $A/\underline{r}$ et B par $B/\underline{m}$. Dans ce cas le lemme est facile (si A est un produit de corps $K_1 \times \dots \times K_r$, on peut identifier M au module $K_1^n \times \dots \times K_r^n$; si x_j est alors un élément de N dont la j-ième composante dans $K_1^n \times \dots \times K_r^n$ n'est pas nulle, montrer qu'une combinaison linéaire x des n_j à coefficients dans B a toutes ses composantes non nulles; remplacer ensuite M par M/Ax et procéder par récurrence sur n) .

Nous appliquons le lemme précédent dans la situation suivante : $B = B$, $A = A_o$, i est l'inclusion de B dans A , $M = A_1$ considéré comme A_o-module au moyen de l'homomorphisme δ_1 , $N = \delta_o(A_o)$: en effet, comme $d_o \boxtimes d_1 : X_1 \longrightarrow X_o \underset{Y}{\times} X_o$ est un monomorphisme , l'homomorphisme

$A_o \otimes_B A_o \longrightarrow A_1$ de composantes δ_o et δ_1 est surjectif; cela signifie justement que $\delta_o(A_o)$ engendre le A_o-module A_1 .

Soient donc $a_1, \dots, a_n$ des éléments de A_o tels que $\delta_o(a_1), \dots, \delta_o(a_n)$ forment une base de A_1 sur A_o . Si nous montrons que $a_1, \dots, a_n$ est une base de A_o sur B , il s'ensuivra que l'homomorphisme $A_o \otimes_B A_o \longrightarrow A_1$ applique la base $(1 \otimes a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sur la base $(\delta_o(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, donc est bijectif . Par conséquent, si $\varepsilon : \mathbb{Z}^n \longrightarrow A_o$ est l'homomorphisme de groupes abéliens qui envoie la base naturelle de $\mathbb{Z}^n$ sur $a_1, \dots, a_n$, il suffit de prouver que l'application $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \longrightarrow A_o$ de composantes i et ε est bijective .

Or le diagramme $(0,1,2)^*$ considéré au début de cette preuve, induit le diagramme commutatif

b) <u>Nous sommes maintenant en mesure de prouver notre théorème dans le cas général</u>.

D'après a) on peut supposer que d_1 est localement libre de rang n. Soit alors (Y,p) un conoyau de (d_o,d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le raisonnement du paragraphe 4c) montre qu'il suffit pour démontrer 4.1 (i) de prouver que Y est un préschéma et $p : X_o \longrightarrow Y$ un morphisme de préschémas. La question est donc locale sur Y : Soit $y \in Y$ et soit $x \in X_o$ tel que $p(x) = y$. Si x possède un voisinage ouvert affine et saturé U, $p(U)$ sera un ouvert affine de Y d'après le § 4 et $p|U$ sera un morphisme de préschémas. Il suffit donc de prouver que tout $x \in X_o$ possède un voisinage ouvert affine et saturé U. Voici comment on procède (la démonstration est tirée de SGA 1 VIII cor. 7.6).

$$d_1(d_o^{-1}(x)) \subset U = (V_f)' \subset V_f \subset V' \subset V \subset X_o$$

$U = (V_f)'$: plus grand ouvert saturé de V_f

V_f : ouvert affine spécial de V

V' : plus grand ouvert saturé de V

V : ouvert affine

On prend pour V un ouvert affine contenant $d_1(d_o^{-1}(x))$; si $F = X - V$, $d_1(d_o^{-1}(F))$ est fermé car d_1 est entier et $V' = X - d_1(d_o^{-1}(F))$ est le plus grand ouvert saturé contenu dans V. Comme V' est un voisinage de l'ensemble fini $d_1(d_o^{-1}(x))$, il existe une section f du faisceau structural de V qui s'annule sur $V - V'$ et est telle que $d_1(d_o^{-1}(x))$ soit contenu dans l'ouvert V_f de V formé des points où f ne s'annule pas. Nous allons voir que le plus grand ouvert saturé $(V_f)'$ de V_f est affine, donc répond à la question :

Soit en effet $Z(f) = V' - V_f$. Alors $d_o^{-1}(Z(f))$ est l'ensemble des points de $d_o^{-1}(V') = d_1^{-1}(V')$ où s'annule l'image $d_o^*(f)$ de f par l'application induite par d_o. D'autre part, comme d_1 induit un morphisme localement libre de rang n de $d_o^{-1}(V') = d_1^{-1}(V')$ sur V', $d_1(d_o^{-1}(Z(f)))$ est l'ensemble des points où s'annule la norme N de $d_o^*(f)$ pour le morphisme d_1. Il s'ensuit que $(V_f)'$ est l'ensemble des points de V_f où N ne s'annule pas; par conséquent, $(V_f)'$ est affine.

Ceci prouve 4.1 (i) ; les autres assertions sont claires.

6. PASSAGE AU QUOTIENT LORSQU'IL EXISTE UNE QUASI-SECTION

Nous allons maintenant prouver un lemme de caractère technique qui nous servira dans la démonstration des deux théorèmes que nous avons en vue : soient S un préschéma et

$$X_2 \overset{d_o', d_1', d_2'}{\ggg} X_1 \overset{d_o, d_1}{\rightrightarrows} X_o$$

un (Sch/S)-groupoïde. Nous appellerons quasi-section du groupoïde X_*, tout sous-préschéma U de X_o tel qu'on ait (1) et (2) :

(1) La restriction v de d_1 à $d_o^{-1}(U)$ est un morphisme fini, localement libre et surjectif de $d_o^{-1}(U)$ sur X_o.

(2) Toute partie de U formée de points deux à deux équivalents pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde X_* (§ 3 e) est contenue dans un ouvert affine de U.

Si U est une quasi-section de X_*, le (Sch/S)-groupoïde

$$U_2 \overset{u_o', u_1', u_2'}{\ggg} U_1 \overset{u_o, u_1}{\rightrightarrows} U$$

induit par X_* et l'inclusion de U dans X_o (§ 3, a)) vérifie les hypothèses du théorème 4.1. Posons en effet $V = d_o^{-1}(U)$ et soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_o et d_1 :

$$X_o \xleftarrow{\ v\ } V \xrightarrow{\ u\ } U \quad .$$

D'après le paragraphe 3b), on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r] \arrow[d, "u_1"'] & V \arrow[d, "v"] \\ U \arrow[r, "\text{inclusion}"] & X_o \end{tikzcd}$$

de sorte que u_1 est fini localement libre d'après (1) . Avec (2) , la condition (1) assure donc que le groupoïde U_* vérifie les hypothèses du théorème 4.1. En particulier $\mathrm{Coker}(u_o,u_1)$ existe dans (Sch/S) . De plus, d_o possède une section de sorte que u est un épimorphisme effectif et universel ; il s'ensuit, d'après la proposition 3.1 , que $\mathrm{Coker}(u_o,u_1)$ coïncide avec $\mathrm{Coker}(v_o,v_1)$ (où

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, shift left=2, "v'_2"] \arrow[r, "v'_1" description] \arrow[r, shift right=2, "v'_o"'] & V_1 \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_o"'] & V \end{tikzcd}$$

désigne l'image réciproque de U_* par le changement de base $u : V \longrightarrow U$, c'est-à-dire aussi l'image réciproque de U_* par le changement de base $V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{\ d_o\ } X_o$) .

De même, comme v est un épimorphisme effectif et universel, $\mathrm{Coker}(d_o,d_1)$ coïncide avec le conoyau de l'image réciproque de X_* par le changement de base $v : V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{\ d_1\ } X_o$. Or cette image réciproque est isomorphe à V_* d'après le paragraphe 3c) . Nous avons donc prouvé la première assertion du lemme suivant :

LEMME 6.1 : *Supposons que le* (Sch/S)-*groupoïde* X_* *possède une quasi-section et que* $d_o : X_1 \longrightarrow X_o$ *soit fidèlement plat et quasi-compact. Alors* :

(i) *Il existe un conoyau* (Y,p) *de* (d_o,d_1) *dans* (Sch/S) ; *de plus, un tel* (Y,p) *est un conoyau de* (d_o,d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés*.

(ii) p *est surjectif; il est ouvert si* d_o *l'est* ; *si* S *est localement noethérien et* X_o *de type fini sur* S , Y *est de type fini sur* S .

(iii) *Le morphisme* $X_1 \longrightarrow X_o \underset{Y}{\times} X_o$ *de composantes* d_o *et* d_1 *est surjectif* .

(iv) *Si* (d_o,d_1) *est un couple d'équivalence*, $X_1 \longrightarrow X_o \underset{Y}{\times} X_o$ est un isomor-*phisme et* p *est fidèlement plat* .

Avant de prouver la deuxième assertion de (i), nous allons démontrer (ii) et (iii) :

a) *Démonstration de* (ii) :

Nous venons de voir que (Y,p) s'identifie à $\mathrm{Coker}(v_o,v_1)$ et $\mathrm{Coker}(u_o,u_1)$. Soient donc q et r les épimorphismes canoniques de U et V dans Y :

$$\begin{tikzcd}
X_o \arrow[dr, "p"'] & V \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "r"] & U \arrow[dl, "q"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Comme u et v sont surjectifs, p est surjectif si et seulement si r l'est , donc si et seulement si q l'est . Or q est surjectif d'après le théorème 4.1 ; d'où la surjectivité de p .

De même, si U' est un ouvert quelconque de U, le saturé de U' pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde U_* n'est autre que $u_1(u_0^{-1}(U'))$; c'est donc un ouvert de U, d'où il ressort que le morphisme q est ouvert ; si d_0 est ouvert, u est également ouvert ainsi que r ; comme v est surjectif, il s'ensuit que p est ouvert.

Supposons maintenant S localement noethérien et X_0 de type fini au-dessus de S. Montrons que Y est de type fini au-dessus de S : en effet, comme U est quasi-compact au-dessus de S et que q est surjectif, Y est quasi-compact au-dessus de S. De plus, soient $S' = \operatorname{Spec} R$ un ouvert affine de S, $Y' = \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine de Y se projetant dans S' et $U' = \operatorname{Spec} A$ l'image réciproque de Y' dans U. Il s'agit de montrer que B est une R-algèbre de type fini ; or, d'après les paragraphes 4 et 5, B est contenu dans A qui est une R-algèbre de type fini ; l'assertion résulte donc de ce que R est noethérien et A entier sur B.

b) <u>Démonstration de</u> (iii) :

Comme le groupoïde V_* de base V est isomorphe à la fois à l'image réciproque de U_* par le changement de base u et à l'image réciproque de X_* par le changement de base v, on a un double carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc}
X_1 & \longleftarrow & V_1 & \longrightarrow & U_1 \\
{\scriptstyle d_0 \boxtimes d_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle v_0 \boxtimes v_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle u_0 \boxtimes u_1}\big\downarrow \\
X_0 \underset{Y}{\times} X_0 & \xleftarrow{v \times v} & V_0 \underset{Y}{\times} V_0 & \xrightarrow{u \times u} & U_0 \underset{Y}{\times} U_0
\end{array}$$

Comme $u_0 \boxtimes u_1$ est surjectif, il en va de même pour $v_0 \boxtimes v_1$.
Comme $v \times v$ est surjectif, il en va de même pour les morphismes composés

$$V_1 \xrightarrow{v_0 \boxtimes v_1} V_0 \underset{Y}{\times} V_0 \xrightarrow{v \times v} X_0 \underset{Y}{\times} X_0$$

et

$$V_1 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_0 \boxtimes d_1} X_0 \underset{Y}{\times} X_0 \quad ,$$

donc pour $d_o \boxtimes d_1$.

c) Démonstration de (i) :

Il reste à prouver que (Y,p) est un conoyau de (d_o,d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Nous montrons d'abord que Y est obtenu à partir de X_o en identifiant les points x et y tels qu'il existe $z \in X_1$ avec $d_o(z) = x$ et $d_1(z) = y$: en effet p est surjectif et on a $pd_o = pd_1$; en outre, si $p(x) = p(y)$, il y a un point z' de $X_o \times_Y X_o$ dont la première projection est x , la deuxième y . Si z est un point de X_1 tel que $(d_o \boxtimes d_1)(z) = z'$, on a bien $d_o(z) = x$ et $d_1(z) = y$.

D'autre part, si W est un ouvert saturé de X_o , $W \cap U$ est un ouvert saturé de U ; d'après 4.1 , $q(W \cap U)$ est un ouvert de Y . Comme $q(W \cap U)$ n'est autre que $p(W)$, on voit que Y est muni d'une topologie quotient de celle de X_o .

Il reste à démontrer que la suite canonique de faisceaux d'anneaux

$$\underline{O}_Y \longrightarrow p_*(\underline{O}_{X_o}) \rightrightarrows p_*d_{o*}(\underline{O}_{X_1}) = p_*d_{1*}(\underline{O}_{X_1})$$

est exacte . Soit donc Y' un ouvert de Y et posons $U' = q^{-1}(Y')$ $X'_o = p^{-1}(Y')$ ... Il est clair que U' est un ouvert de U saturé pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde U_* . Il résulte donc du théorème 4.1 que Y' est le conoyau du groupoïde induit par U_* sur U' . De même, X'_o est un ouvert de X_o saturé pour la relation d'équivalence définie par X_* et on a $U' = X'_o \cap U$. Par conséquent, U' est une quasi-section du groupoïde induit par X_* sur X'_o . Ce qui précède montre alors que Y' est aussi le conoyau de ce dernier groupoïde. En particulier pour tout S-préschéma T , on a la suite exacte

$$T(Y') \xrightarrow{T(p|X'_o)} T(X'_o) \underset{T(d_1|X'_1)}{\overset{T(d_o|X'_1)}{\rightrightarrows}} T(X'_1)$$

Or, si T est la "droite affine" $\underline{\underline{G}}_{a,S}$ (I 4.3), cette suite s'identifie à la suite

$$\Gamma(Y',\underline{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(p^{-1}(Y'),\underline{O}_{X_o}) \rightrightarrows \Gamma(d_o^{-1}p^{-1}(Y'),\underline{O}_{X_1})$$

qui est donc exacte pour tout ouvert Y' .

d) Démonstration de (iv) :

Si (d_o,d_1) est un couple d'équivalence, il en va de même pour (u_o,u_1) . Il s'ensuit que $u_o \boxtimes u_1 : U_1 \longrightarrow U_o \times_Y U_o$ est un isomorphisme (théorème 4.1) , donc aussi $v_o \boxtimes v_1$ (confer les carrés cartésiens de b) ; comme $v \times v$ est fidèlement plat et quasi-compact, $d_o \boxtimes d_1$ est un isomorphisme SGA 1 VIII 5.4).

De plus, q est fidèlement plat, donc aussi r , car u est fidèlement plat. Comme r et v sont fidèlement plats, il en va de même pour p .

7. QUOTIENT PAR UNE PRERELATION D'EQUIVALENCE PROPRE ET PLATE.

THEOREME 7.1 : Soient S un préschéma localement noethérien et

$$X_2 \;\overset{d'_2}{\underset{d'_o}{\overset{d'_1}{\rightrightarrows\!\!\!\!\!\rightarrow}}}\; X_1 \;\underset{d_o}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}}\; X_o$$

un (Sch/S)-groupoïde tel que d_1 soit propre et plat, que X_o soit quasi-projectif sur S et que le morphisme $X_1 \longrightarrow X_o \times_S X_o$ de composantes d_o et d_1 soit quasi-fini . Alors :

(i) Il existe un conoyau (Y,p) de (d_o,d_1) dans (Sch/S) ; de plus, un tel (Y,p) est un conoyau de $(d_o d_1)$ dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) p <u>est surjectif, ouvert, propre et</u> Y <u>est de type fini sur</u> S

(iii) <u>Le morphisme</u> $X_1 \longrightarrow X_o \times_Y X_o$ <u>de composantes</u> d_o <u>et</u> d_1 <u>est surjectif</u>.

(iv) <u>Si</u> (d_o, d_1) <u>est un couple d'équivalence</u>, $X_1 \longrightarrow X_o \times_Y X_o$ <u>est un isomorphisme</u> et p <u>est fidèlement plat</u>.

Soit (Y,p) le conoyau de (d_o, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le raisonnement du paragraphe 4c) montre que, pour prouver (i), il suffit de démontrer que Y est un préschéma et p un morphisme de préschémas. Or cette question est locale sur Y ; d'après le lemme 6.1 (i), il suffit donc de montrer que tout point z de X_o possède un voisinage ouvert et saturé U_z tel que le groupoïde induit sur U_z par X_* possède une quasi-section. On peut même supposer que z est fermé dans la fibre de z au-dessus de S (nous dirons que z est <u>fermé relativement à</u> S).
L'existence de U_z résulte alors des lemmes qui suivent :

LEMME 7.2 : <u>Soient</u> T <u>un schéma affine noethérien</u>, X, Y, <u>et</u> Z <u>des</u> T<u>-préschémas de type fini</u>, X <u>étant quasi-projectif sur</u> T, <u>et</u>

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

<u>un diagramme de</u> (Sch/T). <u>Soit d'autre part</u> z <u>un point de</u> Z <u>qui est fermé relativement à</u> T <u>et tel que</u> v <u>soit plat aux points de</u> $v^{-1}(z)$.

<u>Si</u> $v^{-1}(z)$ <u>n'est pas vide, il existe un sous-préschéma fermé</u> F <u>de</u> X <u>tel que</u> $u(u^{-1}(F) \cap v^{-1}(z))$ <u>soit fini non vide et que la restriction de</u> v <u>à</u> $u^{-1}(F)$ <u>soit plate aux points de</u> $v^{-1}(z)$.

Soit $T = \mathrm{Spec}\, A$. Il est loisible de supposer X de la forme $\mathrm{Proj}\, S$, où S est l'algèbre symétrique d'un A-module de type fini E.

Si $u(v^{-1}(z))$ est fini , on peut choisir F égal à X . Sinon , nous désignons par $y_1 , \dots , y_n$ les points de la fibre $v^{-1}(z)$ associés au faisceau structural $\underline{O}_{v^{-1}(z)}$ de $v^{-1}(z)$ (les y_i sont donc tels que , si $\underline{O}_i$ désigne l'anneau local de $v^{-1}(z)$ au point y_i , l'idéal maximal de $\underline{O}_i$ soit formé de diviseurs de 0) . Si t est l'image de z dans T , $u(v^{-1}(z))$ est une partie constructible infinie de la fibre de t dans X . Il existe donc un point x fermé dans cette fibre , appartenant à $u(v^{-1}z))$ et distincte de $u(y_1) , \dots , u(y_n)$. Alors $X - \overline{\{x\}}$ est un voisinage ouvert de $u(y_1) , \dots , u(y_n)$, donc contient un voisinage ouvert de la forme $D_+(f)$, où f est un élément homogène de degré d de S (les notations sont celles de EGA II § 2.3) . Par conséquent, le sous-préschéma fermé $X_1 = V_+(f)$ défini par f contient x et évite les points $u(y_1) , \dots , u(y_n)$. Il s'ensuit évidemment que l'image réciproque $Y_1 = u^{-1}(V_+(f))$ de ce sous-préschéma est distincte de Y et rencontre $v^{-1}(z)$. Nous allons même montrer que la restriction v_1 de v à Y_1 est plate aux points de $v^{-1}(z)$; si $u(v_1^{-1}(z)$ est fini , on n'aura donc qu'à choisir F égal à X_1 ; sinon , on répètera l'argument qu'on vient de développer en remplaçant Y par Y_1 , v par v_1 , u par le morphisme u_1 induit dans Y_1 par u ; on obtiendra de cette façon une suite décroissante $X , X_1 , \dots$ de sous-préschémas fermés de X ; comme une telle suite s'arrête , $u(u^{-1}(X_n) \cap v^{-1}(z))$ sera fini non vide pour un certain n et on choisira F égal à X_n .

Il reste donc à montrer que v_1 est plat aux points de $v^{-1}(z)$; soient donc y un point de Y_1 au-dessus de z , $\underline{O}_y$ l'anneau local de y dans Y , $\overline{\underline{O}}_y$ l'anneau local de y dans $v^{-1}(z)$, $\underline{O}_{v(y)}$ l'anneau local de v(y) dans Z . Si $g \in S_1$ est tel que $D_+(g)$ soit un voisinage de u(y) dans X , soient φ l'image de f/g^d dans $\underline{O}_y$ et $\overline{\varphi}$ l'image de f/g^d dans $\overline{\underline{O}}_y$. Il résulte alors de la construction de f que ne divise pas 0 dans $\overline{\underline{O}}_y$; comme $\underline{O}_y$ est plat sur $\underline{O}_z$, φ ne divise pas 0 dans $\underline{O}_y$ et $\underline{O}_y / \underline{O}_y \varphi$ est plat sur $\underline{O}_z$ (SGA1 IV § 5.7) . Or $\underline{O}_y / \underline{O}_y \varphi$ n'est autre que l'anneau local de z dans Y_1 ...

LEMME 7.3 : Nous conservons les notations et les hypothèses de 7.1. Tout point z de X_o qui est fermé relativement à S possède alors un voisinage ouvert saturé U_z tel que le groupoïde induit par X_* sur U_z possède une quasi-section .

L'énoncé étant local sur S , on peut supposer S affine et appliquer le lemme précédent au diagramme

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "d_o"] \arrow[d, "d_1"'] & X_o \\ X_o & \end{tikzcd}$$

de (Sch/S) . Soit donc F un sous-préschéma fermé de X_o tel que $d_o(d_o^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z))$ soit fini non vide et que la restriction de d_1 à $d_o^{-1}(F)$ soit plate aux points de $d_1^{-1}(z)$. Désignons par F_1 et F_2 les images réciproques de F par d_o et $d_o d_o' = d_o d_1'$, par $\underline{d}_o$ et $\underline{d}_1$ ... les morphismes induits par d_o , d_1 ... On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, shift left, "\underline{d}_1'"] \arrow[r, shift right, "\underline{d}_o'"'] \arrow[d, "\underline{d}_2'"'] & F_1 \arrow[r, "\underline{d}_o"] \arrow[d, "\underline{d}_1"'] & F \\ X_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & X_o & \end{tikzcd}$$

où les deux carrés de gauche sont cartésiens et où la première ligne est exacte (confer (0, 1, 2), § 1) .

Montrons d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de F_1 au-dessus de z : soit en effet s l'image de z dans S ; comme $\underline{d}_o(\underline{d}_1^{-1}(z))$ est fini , les points de cet ensemble sont fermés dans la fibre de s dans X_o ; il n'y a donc qu'un nombre fini de points u de $X_o \times_S X_o$ dont la deuxième projection est z et dont la première projection appartient à $\underline{d}_o(\underline{d}_1^{-1}(z))$; enfin, comme $X_1 \longrightarrow X_o \underset{S}{\times} X_o$ est quasi-fini, un tel point u provient d'un nombre fini de points de X_1, d'où l'assertion.

Le morphisme $\underline{d}_1$ est donc quasi-fini et plat aux points de F_1 au-dessus de z. Désignons par Φ le fermé de F_1 formé des points où $\underline{d}_1$ n'est pas à la fois plat et quasi-fini (SGA1 IV § 6.10 et EGA III § 4.4.10). Comme d_1 est propre, $\underline{d}_1(\Phi)$ est fermé et ne contient pas z ; par conséquent, si on pose $W = \underline{d}_1(F) - \underline{d}_1(\Phi)$, $\underline{d}_1$ est plat et quasi-fini, c'est-à-dire fini et localement libre (EGA III § 4.4.2) au-dessus de W. Comme $\underline{d}_1 \mid \underline{d}_1^{-1}(W)$ est ouvert, $\underline{d}_1(F_1)$ est un voisinage ouvert de z, et W est le plus grand ouvert de X_o contenu dans $\underline{d}_1(F_1)$ au-dessus duquel $\underline{d}_1$ est à la fois plat et quasi-fini.

Nous allons voir dans le lemme 7.4 que les images réciproques de Φ par $\underline{d}_1'$ et $\underline{d}_o'$ s'identifient toutes les deux à l'ensemble des points de F_2 où $\underline{d}_2'$ n'est pas à la fois plat et quasi-fini. Il s'ensuit que $d_o^{-1}(W) = \underline{d}_2'(F_2) - \underline{d}'_2(\underline{d}_o'^{-1}\Phi)$ coïncide avec $d_1^{-1}(W) = \underline{d}_2'(F_2) - \underline{d}_2'(\underline{d}_1'^{-1}\Phi)$, c'est-à-dire que W est saturé. Par conséquent, si on pose $W_1 = \underline{d}_1^{-1}(W)$, l'égalité $d_o^{-1}(W) = d_1^{-1}(W)$ entraîne $\underline{d}_a'^{-1}d_o^{-1}(W) = \underline{d}_2'^{-1}d_1^{-1}(W)$ c'est-à-dire $\underline{d}_o'^{-1}(W_1) = \underline{d}_1'^{-1}(W_1)$. Comme $\underline{d}_o$ est fidèlement plat et quasi-compact et que le carré

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, "\underline{d}_1'"] \arrow[d, "\underline{d}_o'"'] & F_1 \arrow[d, "\underline{d}_o"] \\ F_1 \arrow[r, "\underline{d}_o"] & F \end{tikzcd}$$

est cartésien, il s'ensuit que W_1 est de la forme $\underline{d}_o^{-1}(U)$, où U est un ouvert de F (SGA1 VIII § 4.4). Cet ouvert U de F est une quasi-section pour le groupoïde de base W induit par X_*. On peut donc choisir U_z égal à W.

Il nous reste donc à énoncer le lemme 7.4 dont la démonstration est classique :

LEMME 7.4 : Considérons un carré cartésien de préschémas

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "d'"'] & F_1 \arrow[d, "d"] \\ X_1 \arrow[r, "u"] & X_o \end{tikzcd}$$

et soit x un point de F_2. Si u est plat, d' est plat en x si et seulement si d est plat en $v(x)$. Si d est localement de type fini, d' est quasi-fini en x si et seulement si d est quasi-fini en $v(x)$.

Nous avons donc prouvé qu'il existe un recouvrement de X_o par des ouverts saturés W tels que le groupoïde W_* induit par X_* sur W possède une quasi-section. Modulo le lemme 6.1, ceci prouve le théorème 7.1 à l'exception peut-être du fait que p est propre. Pour ce dernier point, nous reprenons les notations de 6a) en remplaçant le groupoïde X_* par W_*. Alors q est entier d'après le théorème 4.1, donc propre. Comme u est déduit de $v_o : W_1 \longrightarrow W_o$ par changement de base, u est propre ; donc r est propre. Comme W_o est quasi-projectif sur S, W_o est séparé et de type fini au-dessus de Y ; de plus, v est surjectif ; donc p est propre (EGA II § 5.4.3 (ii)).

8. PASSAGE AU QUOTIENT PAR UNE PRERELATION D'EQUIVALENCE PLATE NON NECESSAIREMENT PROPRE.

THEOREME 8.1 : Soient S un préschéma noethérien et

$$X_2 \overset{d'_2}{\underset{d'_o}{\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{d'_1}}}}} X_1 \overset{d_1}{\underset{d_o}{\rightrightarrows}} X_o$$

un (Sch/S)-groupoïde tel que d_1 soit plat et de type fini, que X_o soit de type fini sur S et que le morphisme $X_1 \longrightarrow X_o \times_S X_o$ de composantes d_o et d_1 soit quasi-fini .

Il existe alors un ouvert W_o de X_o dense , saturé et satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) Si $W_2 \xrightarrow{w_i'} W_1 \xrightarrow{w_j} W_o$ est le groupoïde induit par X_* sur W_o, (w_o,w_1) possède un conoyau (V,p) dans (Sch/S) ; de plus , (V,p) est un conoyau de (w_o,w_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés .

(ii) p est surjectif , ouvert et V est de type fini sur S .

(iii) Le morphisme $W_1 \longrightarrow W \times_V W$ de composantes w_o et w_1 est surjectif .

(iv) Si (d_o,d_1) est un couple d'équivalence, $W_1 \longrightarrow W \times_V W$ est un isomorphisme et p est fidèlement plat .

Nous allons montrer qu'on peut choisir W de telle façon que le (Sch/S)-groupoïde W_* induit par X_* possède une quasi-section (confer § 7) . Le théorème 8.1 résultera alors du lemme 6.1.

Admettons provisoirement que, pour tout point $z \in X_o$ fermé relativement à S (confer § 7), il existe un ouvert W_z qui est saturé, possède une quasi-section et rencontre toutes les composantes irréductibles de X_o passant par z . Alors l'extérieur $X_o - \overline{W}_z$ de W_z dans X_o est saturé (car le saturé $d_1(d_o^{-1}(X_o - \overline{W}_z))$ de cet extérieur est ouvert et ne rencontre pas W_z) . Si cet extérieur n'est pas vide, on peut y choisir un point z' fermé relativement à S et associer à z' un ouvert $W_{z'}$ comme ci-dessus ; on peut d'ailleurs supposer $W_{z'}$ contenu dans $X_o - \overline{W}_z$; alors W_z et $W_{z'}$ sont disjoints et le groupoïde induit par X_* sur $W_z \cup W_{z'}$ possède une quasi-section.... Le processus doit s'arrêter parce que X_o n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles . Il reste donc à construire W_z :

Pour cela il est loisible de supposer S affine ; dans ce cas, soient y un point de X_1 tel que $d_1 y = z$, X un ouvert affine de X_o contenant

$d_o Y$, Y l'image réciproque de X dans X_1 par d_o , enfin $u : Y \longrightarrow X$ et $v : Y \longrightarrow X_o$ les morphismes induits par d_o et d_1 . Comme X est affine , donc quasi-projectif , on peut appliquer le lemme 7.2 : il y a donc un sous-préschéma F de X_o tel que $d_o^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z)$ soit non vide, que $d_o(d_o^{-1}(F) \cap d_1^{-1}(z))$ soit fini et que la restriction de d_1 à $d_o^{-1}(F)$ soit plate aux points de $v^{-1}(z)$. Ce fait nous permet de reprendre les notations du lemme 7.3 en désignant par F_1 et F_2 les images réciproques de F dans X_1 et X_2 ...

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r, shift left, "\underline{d}'_1"] \arrow[r, shift right, "\underline{d}'_o"'] \arrow[d, "\underline{d}'_2"'] & F_1 \arrow[r, "\underline{d}_o"] \arrow[d, "\underline{d}_1"'] & F \\
X_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & X_o &
\end{tikzcd}$$

On montre alors comme en 7.3 que $\underline{d}_1$ est quasi-fini aux points de $d_1^{-1}(z)$ de sorte qu'il est naturel de considérer l'ouvert F'_1 de F_1 formé des points où $\underline{d}_1$ est à la fois plat et quasi-fini . D'après 7.4 , les deux images réciproques de F'_1 par $\underline{d}'_1$ et $\underline{d}'_o$ sont formées des points de F_2 où $\underline{d}'_2$ est plat et quasi-fini, de sorte que ces deux images réciproques coïncident et que F'_1 est de la forme $\underline{d}_o^{-1}(F')$, où F' est un ouvert de F (SGA 1 VIII 4.4). Quitte à remplacer F par F' , on peut donc supposer que $\underline{d}_1$ est quasi-fini et plat . Dans ce cas , nous désignons par W_z le plus grand ouvert de $\underline{d}_1(F_1)$ au-dessus duquel $\underline{d}_1$ est fini et plat . Cet ouvert W_z contient les points génériques des composantes irréductibles de X_o passant par z . Il résulte alors de SGA 1 VIII § 6.5 et 5.7 que $d_o^{-1}(W_z)$ et $d_1^{-1}(W_z)$ coïncident tous les deux avec le plus grand ouvert de $\underline{d}'_2(F_2)$ au-dessus duquel $\underline{d}'_2$ est fini et plat . On voit par conséquent comme en 7.3 que les deux images réciproques de $\underline{d}_1^{-1}(W_z)$ par $\underline{d}'_o$ et $\underline{d}'_1$ coïncident, donc que $\underline{d}_1^{-1}(W_z)$ est de la forme $\underline{d}_o^{-1}(U)$ où U est un ouvert de F qui est une quasi-section pour le groupoïde induit par X_* sur W_z .

9. ELIMINATION DES HYPOTHESES NOETHERIENNES

a) Reprenons les notations et les hypothèses du lemme 6.1 et soit $\pi : S' \longrightarrow S$ un changement de base arbitraire. Désignons par $f' : X' \longrightarrow Y'$ le morphisme de S'-préschémas déduit par l'extension π de la base d'un morphisme de S-préschémas $f : X \longrightarrow Y$. Avec cette convention, $p' : X'_o \longrightarrow Y'$ est surjectif ainsi que le morphisme $X'_1 \longrightarrow X'_o \times_{Y'} X'_o$ de composantes d'_o et d'_1. L'ensemble sous-jacent à Y' s'identifie donc au quotient de l'ensemble sous-jacent à X'_o par la relation d'équivalence définie dans X'_o par le S'-groupoïde X'_*. De plus, $q' : U' \longrightarrow Y'$ est entier surjectif de sorte que la topologie de Y' est la topologie quotient de celle de U', donc aussi de celle de X'_o (confer la preuve du § 6 c)).

D'un autre côté, il est clair que U' est une quasi-section du S'-groupoïde X'_* auquel on peut donc appliquer le lemme 6.1. En particulier, X'_* possède un conoyau (Y_1, p_1) et l'espace topologique sous-jacent à Y_1 s'obtient à partir de l'espace topologique sous-jacent à X'_o en identifiant les points équivalents pour la relation définie par X'_*. Il s'ensuit que le morphisme canonique $Y_1 \longrightarrow Y'$ est un homéomorphisme ; je dis même que $Y_1 \longrightarrow Y'$ <u>est un homéomorphisme universel</u> : en effet, si S'' est au-dessus de S' soit Y_2 le conoyau de $(d_o \underset{S}{\times} S'', d_1 \underset{S}{\times} S'')$. D'après ce qui précède, appliqué aux changements de base $S'' \longrightarrow S'$ et $S'' \longrightarrow S$, $Y_2 \longrightarrow Y_1 \times_{S'} S''$ et $Y_2 \longrightarrow Y \times_S S'' \simeq Y' \times_{S'} S''$ sont des homéomorphismes de sorte qu'il en va de même pour $Y_1 \times_{S'} S'' \longrightarrow Y' \times_{S'} S''$.

b) Des remarques analogues s'appliquent évidemment au cas où le groupoïde X_* possède "localement" des quasi-sections (confer la démonstration du théorème 7.1). Soient par exemple S un préschéma arbitraire et $X_2 \xrightarrow{d_j^i} X_1 \xrightarrow{d_i} X_o$ un (Sch/S)-groupoïde sur lequel on fait les hypothèses suivantes : X_o est de présentation finie et quasi-projectif sur S, d_1 est de présentation finie, propre et plat ; le morphisme $X_1 \longrightarrow X_o \times_S X_o$

de composantes d_o et d_1 est quasi-fini . Alors tout point x de X_o a un voisinage ouvert W qui est saturé et tel que le groupoïde induit par X_* dans W possède une quasi-section :

En effet, la question est locale sur S de sorte qu'on peut supposer S affine . Il existe alors un anneau A de type fini sur $\mathbb{Z}$, un morphisme $S \longrightarrow T = \operatorname{Spec} A$ et un (Sch/T)-groupoïde Z_* tel que X_* s'identifie à $Z_* \underset{T}{\times} S$ (EGA IV 8) ; de plus , on peut supposer que Z_* vérifie les conditions du théorème 7.1 (EGA IV 8) . Par conséquent Z_* possède "localement" des quasi-sections et on peut appliquer les remarques de a) .

c) Il résulte de a) et de b) que les assertions (i), (iii) et (iv) du théorème 7.1 restent vraies sous les hypothèses de b) . Lorsque de plus (d_o,d_1) est un couple d'équivalence, on voit que Y est de présentation finie sur S en appliquant la proposition suivante :

Proposition 9.1 : Considérons les morphismes de préschémas

$$X_o \xrightarrow{\ p\ } Y \xrightarrow{\ q\ } S$$

tels que qp soit de type fini (resp. de présentation finie) et p fidèlement plat de présentation finie . Alors q est de type fini (resp. de présentation finie) (*).

Comme p est surjectif et qp quasi-compact , q est quasi-compact . Donc on peut supposer S , Y et X_o affines d'anneaux A, B, C : On a $B = \varinjlim B_i$, où les B_i parcourent les sous-algèbres de type fini de B .

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] & C \\
B_i \arrow[u] \arrow[r] & C_i \arrow[u] \\
A \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Comme C est de présentation finie sur B , il existe un indice i_o , une B_{i_o}-algèbre de présentation finie C_{i_o} et un isomorphisme $C \simeq C_{i_o} \otimes_{B_{i_o}} B$; si on pose $C_i = C_{i_o} \otimes_{B_{i_o}} B_i$ pour $i \geqslant i_o$, on a donc $C \simeq C_i \otimes_{B_i} B$. Comme C est fidèlement plat sur B , on tire de EGA IV 11 l'existence d'un $i_1 \geqslant i_o$ tel que C_{i_1} soit fidèlement plat sur B_{i_1} ; par

(*) Cf. EGA IV 17.7.5 pour un résultat plus général.

conséquent C_i est fidèlement plat sur B_i pour $i \geqslant i_1$. Pour $i \geqslant i_1$, l'application canonique $C_i \longrightarrow C$ est alors injective, car déduite de $B_i \longrightarrow B$ par extension fidèlement plate de la base. Si C est de type fini sur A, il s'ensuit que l'application $C_i \longrightarrow C$ donc aussi l'application $B_i \longrightarrow B$ sont bijectives pour i assez grand.

Supposons maintenant C de présentation finie sur A : d'après ce qui précède, B est de type fini sur A, donc de la forme $\overline{B}/I$ où $\overline{B}$ est une algèbre de polynômes sur A à un nombre fini d'indéterminées, et I un idéal de B. Alors I est réunion de ses sous-idéaux de type fini I_α ; d'où l'égalité $B = \varinjlim B_\alpha$ avec $B_\alpha = \overline{B}/I_\alpha$. Procédant comme plus haut, on choisit un indice α_0 et une B_{α_0}-algèbre de présentation finie C_{α_0} tels qu'il existe un isomorphisme $C \simeq C_{\alpha_0} \otimes_{B_{\alpha_0}} B$. Pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, on pose encore $C_\alpha = C_{\alpha_0} \otimes_{B_{\alpha_0}} B_\alpha$ de telle sorte qu'on a $C \simeq C_\alpha \otimes_{B_\alpha} B$ pour $\alpha \geqslant \alpha_0$. Toujours d'après EGA IV 11, on conclut comme plus haut que C_α est fidèlement plat sur B_α pour α assez grand. Dans ce cas, le noyau de l'application $C_\alpha \longrightarrow C$ (resp. $C_\alpha \longrightarrow C_\beta$ pour $\beta \geqslant \alpha$) s'identifie à $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ (resp. à $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$). Comme C_α et C sont de présentation finie sur A et que $C_\alpha \longrightarrow C$ est surjectif, $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ est un idéal de type fini et est réunion des idéaux $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$. On a donc $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha) = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ pour β assez grand, d'où aussi $I_\beta = I$ (car C_α est fidèlement plat sur B_α) ; donc B est de présentation finie sur A.

Exposé VI_A

GENERALITES SUR LES GROUPES ALGEBRIQUES

par P. GABRIEL

Dans tout ce chapitre, A désignera un anneau local artinien de corps résiduel k. Un préschéma en groupes G sur $\operatorname{Spec} A$ sera appelé simplement un A-groupe. Cet A-groupe est dit localement de type fini si le préschéma sous-jacent est localement de type fini sur A ; il est dit algébrique si le préschéma sous-jacent est de type fini sur A.

0. Remarques préliminaires.

0.1. Considérons d'abord un préschéma en groupes G sur un préschéma quelconque S. Nous appelons multiplication le morphisme structural $\mu : G \times_S G \longrightarrow G$ et inversion le morphisme $c : G \longrightarrow G$ qui est défini par les égalités $c(T)(x) = x^{-1}$ (T étant un préschéma sur S et x un élément de $G(T)$). Si U et V sont des parties de l'ensemble sous-jacent à G, nous notons $U.V$ l'image par le morphisme multiplication de la partie de $G \times_S G$ formée des points dont la première projection appartient à U, la deuxième à V. De même, les notations U^{-1} et $c(U)$ sont équivalentes.

Soient pr_1 la projection de $G \times_S G$ sur le premier facteur et $\sigma : G \times_S G \longrightarrow G \times_S G$ le morphisme de composantes pr_1 et μ. Pour tout

S-préschéma T , $\sigma(T)$ est l'application $(x,y) \longmapsto (x,x.y)$; il s'ensuit que σ est un automorphisme. Le composé de cet automorphisme et de la projection pr_2 de $G \times_S G$ sur le deuxième facteur est le morphisme multiplication. Lorsque G est plat sur S , pr_2 donc μ sont des morphismes plats; lorsque G est lisse sur S , pr_2 donc μ sont des morphismes lisses....

0.2. Nous supposons à partir de maintenant que S est le spectre d'un anneau local artinien A de corps résiduel k . Nous désignons par $(Sch/_k)_{red}$ la catégorie des préschémas réduits sur k. Pour tout préschéma X sur A , le préschéma réduit X_{red} est un objet de $(Sch/_k)_{red}$ et le foncteur $X \longmapsto X_{red}$ est adjoint à droite à l'inclusion de $(Sch/_k)_{red}$ dans $(Sch/_A)$. Il s'ensuit que, pour tout A-groupe G , G_{red} est un groupe dans la catégorie $(Sch/_k)_{red}$.

Réciproquement, <u>si</u> k <u>est un corps parfait</u>, l'inclusion de $(Sch/_k)_{red}$ dans $(Sch/_k)$ commute aux produits de sorte que les groupes dans la catégorie $(Sch/_k)_{red}$ s'identifient aux préschémas en groupes sur k dont le préschéma sous-jacent est réduit. En particulier, pour tout k-groupe G , G_{red} est un sous-préschéma en groupes de G ; ce sous-groupe n'est pas invariant dans G en général : par exemple, si k est un corps de caractéristique 3, le groupe constant $(\mathbb{Z}/(2))_k$ opère de façon non triviale dans le groupe diagonalisable $D_k(\mathbb{Z}/(3))$ (I.4.1 et I.4.4); si G désigne le produit semi-direct de $D_k(\mathbb{Z}/(3))$ par $(\mathbb{Z}/(2))_k$ défini par cette opération, G_{red} s'identifie à $(\mathbb{Z}/(2))_k$ et n'est pas invariant dans G .

Si k est un corps quelconque et H un groupe dans la catégorie

$(Sch/_k)_{red}$, $(H \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{red}$ est un préschéma en groupes sur $k^{p^{-\infty}}$. Comme $H \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ a même espace topologique sous-jacent que $(H \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{red}$, on voit que les groupes de $(Sch/_k)_{red}$ ont en commun avec les k-groupes certaines propriétés topologiques invariantes par extension du corps de base : par exemple, il résultera de 0.3 et des remarques qu'on vient de faire que tout groupe de $(Sch/_k)_{red}$ est séparé.

Nous rencontrerons dans la suite des groupes de $(Sch/_k)_{red}$ chaque fois que nous aurons affaire à une partie localement fermée non vide U d'un A-groupe G telle que $U.U = U$ et $U^{-1} = U$: en effet, le sous-préschéma réduit de G défini par U est un groupe de $(Sch/_k)_{red}$.

0.3. <u>Un</u> A-<u>groupe</u> G <u>est toujours séparé</u> : la diagonale de $G \times_A G$ s'identifie en effet au foncteur de $(Sch/_A)^\circ$ à valeurs dans (Ens) qui associe à tout préschéma S sur A l'image réciproque de l'élément neutre de $G(S)$ par l'application $\varphi(S) : (x,y) \longmapsto x.y^{-1}$ de $G(S) \times G(S)$ dans $G(S)$. On a par conséquent un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
G \times_A G \arrow[r, "\varphi"] & G \\
G \arrow[u, "\text{morphisme diagonal}"] \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \arrow[u, "\text{section unité}"']
\end{tikzcd}$$

de sorte que le morphisme diagonal, qui est déduit d'une immersion fermée par changement de base est lui-même une immersion fermée.

0.4. Soit G un A-groupe. Nous dirons qu'un point g de G est <u>strictement rationnel</u> sur A s'il existe un A-morphisme $s : \operatorname{Spec} A \longrightarrow G$ qui envoie le seul point de $\operatorname{Spec} A$ sur g. On sait qu'un tel s définit un automorphisme r_s du préschéma G sur A qu'on appelle translation à droite par s : pour tout morphisme $\pi : S \longrightarrow \operatorname{Spec} A$, $r_s(S)$ est l'automorphisme $x \longmapsto x.(G(\pi)(s))$.

De même, on note ℓ_s la translation à gauche par s, c'est-à-dire l'automorphisme de G défini par les égalités $(\ell_s(S))(x) = (G(\pi)(s)).x$. Comme $G \otimes_A k$ et G ont même espace topologique sous-jacent $\underline{G}$, que $G \otimes_A k$ est un k-groupe et que $s \otimes_A k$ dépend seulement de g et non de s, on voit que les automorphismes de $\underline{G}$ induits par r_s et ℓ_s (ou par $r_{s\otimes k}$ et $\ell_{s\otimes k}$) dépendent seulement de g et non de s ; lorsque P est une partie de $\underline{G}$, nous pouvons donc noter $P.g$ et $g.P$ au lieu de $r_s(P)$ et $\ell_s(P)$, ce qui est conforme à 0.1.

0.5. Considérons maintenant <u>deux ouverts partout denses</u> U <u>et</u> V <u>d'un A-groupe localement de type fini</u> G. <u>Le produit</u> $U.V$ (0.1) <u>est alors égal à tout l'espace sous-jacent à</u> G : en effet, comme G et $G \otimes_A k$ ont même espace sous-jacent, on peut supposer, quitte à remplacer A par k et G par $G \otimes_A k$ que A est un corps k. Dans ce cas le morphisme multiplication est plat et localement de type fini (0.1), donc ouvert, de sorte que $U.V$ est un ouvert de G. Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, on a évidemment $(U.V)\otimes_k \bar{k} = (U \otimes_k \bar{k}).(V \otimes_k \bar{k})$; d'après SGA 1 VIII § 4, il suffit donc de prouver qu'on a $G \otimes_k \bar{k} = (U \otimes_k \bar{k}).(V \otimes_k \bar{k})$ et on est ramené au cas où k est algébriquement clos. Dans ce dernier cas, il suffit de prouver que $U.V$ contient tout point fermé x de G ; si k est algébriquement clos, un tel x est strictement rationnel et les ouverts partout denses $U^{-1}.x$ et V ont en commun un point fermé v ; si u est l'élément de $G(k)$ défini par l'égalité $x = u.v$, $u^{-1}.x$ appartient alors à $U^{-1}.x$ de sorte que u appartient à U , ce qui prouve l'assertion.

1. Propriétés locales d'un A-groupe localement de type fini.

Nous allons voir d'abord que, si G est localement de type fini et plat sur A, on peut "rendre strictement rationnel tout point fermé de G" au moyen d'une extension finie et plate de la base.

1.1. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons à partir de maintenant que G est un A-groupe localement de type fini.
Lorsque A est un corps, nous obtiendrons dans l'exposé VII_B des résultats très précis sur les anneaux locaux de G. Nous nous contentons ici de quelques résultats élémentaires :

PROPOSITION 1.1.1 : Soit x un point d'un A-groupe G localement de type fini et plat sur A. Alors l'anneau local $\underline{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay et il existe un système $a_1, \ldots, a_n$ de paramètres de $\underline{O}_{G,x}$ tel que $\underline{O}_{G,x}/(a_1,\ldots,a_n)$ soit un A-module plat.

Nous supposons d'abord A égal à son corps résiduel k ; il suffit de prouver alors que $\underline{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay et on peut se limiter au cas où x est un point fermé (EGA 0_{IV} 16.5.13). D'après le lemme 1.1.2 ci-dessous, G contient un point fermé y tel que $\underline{O}_{G,y}$ soit de Cohen-Macaulay. D'après SGA 1 I § 9, il revient au même de dire que, pour toute extension finie K du corps de base k et tout point $\overline{y}$ de $\overline{G} = G \otimes_k K$ au-dessus de y, $\underline{O}_{\overline{G},\overline{y}}$ est de Cohen-Macaulay. Si l'extension K a été choisie assez grande (i.e. si K contient l'extension normale de k engendrée par les corps résiduels $k(y)$ et $k(x)$), $\overline{y}$ est (strictement) rationnel sur K ainsi que tout point $\overline{x}$ de $\overline{G}$ au-dessus de x . Comme l'automorphisme $r_{\overline{x}} \circ (r_{\overline{y}})^{-1}$ applique $\overline{y}$ sur $\overline{x}$, il s'ensuit que $\underline{O}_{\overline{G},\overline{x}}$, donc $\underline{O}_{G,x}$ (SGA 1 I § 9) sont de Cohen-Macaulay.

Lorsque A est de nouveau supposé quelconque, le raisonnement précédent s'applique à $k \otimes_A G$ de sorte que $k \otimes_A \underline{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay. Si $a_1, \ldots, a_n$ est une suite d'éléments de $\underline{O}_{G,x}$ dont l'image dans $k \otimes_A \underline{O}_{G,x}$ est un système de paramètres, il résulte de SGA 1 IV 5.7 ou de EGA 0_{IV} 15.1.16 que $a_1, \ldots, a_n$ est une suite $\underline{O}_{G,x}$-régulière et que $\underline{O}_{G,x}/(a_1,\ldots,a_n)$ est fini et plat sur A .

LEMME 1.1.2 : <u>Tout préschéma non vide</u> X , <u>localement de type fini sur un anneau artinien</u> A , <u>contient un point fermé</u> x <u>dont l'anneau local est de Cohen-Macaulay</u>.

On peut évidemment supposer X affine d'algèbre B et raisonner par récurrence sur dim X (l'assertion est claire si X est discret, tous les anneaux locaux étant alors artiniens). Comme B est de type fini sur A , si dim B > 0 , B contient un élément a non inversible et non diviseur de 0 ; le sous-préschéma fermé X' = Spec B/(a) de X est alors de dimension strictement inférieure à dim X et contient par hypothèse de récurrence un point fermé x tel que $\underline{O}_{X',x}$ soit de Cohen-Macaulay. Comme on a $\underline{O}_{X',x} = \underline{O}_{X,x}/(a)$ et que a est non inversible et non diviseur de 0 dans $\underline{O}_{X,x}$, $\underline{O}_{X,x}$ est de Cohen-Macaulay (Voir aussi EGA IV 6.11.3).

PROPOSITION 1.2 : <u>Soient</u> A <u>un anneau artinien</u>, G <u>un</u> A-<u>groupe localement de type fini et plat sur</u> A <u>et</u> x <u>un point fermé de</u> G . <u>Il existe</u>

alors une A-algèbre A' locale, finie et libre sur A telle que tout point de $G \otimes_A A'$ au-dessus de x soit strictement rationnel sur A'.

On sait en effet qu'il existe une A-algèbre A_1 locale, finie et libre sur A et telle que le corps résiduel de A_1 contienne l'extension normale de k engendrée par le corps résiduel k(x) de x . Dans ce cas, tous les points $g_1, \ldots, g_n$ de $G \otimes_A A_1$ au-dessus de $g \in G$ ont même corps résiduel que A_1 (i.e. $g_1, \ldots, g_n$ sont rationnels sur A_1 au sens de V, § 4; e)). Soient donc $B_1, \ldots, B_n$ les anneaux locaux de $g_1, \ldots, g_n$. D'après 1.1.1 , $B_1, \ldots, B_n$ possèdent des quotients $B'_1, \ldots, B'_n$ qui sont artiniens et plats sur A_1 . Si on pose $A' = B'_1 \otimes_{A_1} \ldots \otimes_{A_1} B'_n$, les algèbres $B_i \otimes_{A_1} A'$ sont toutes locales et elles ont un quotient isomorphe à A' , de sorte que A' répond à la question.

1.3. Soit e l'élément neutre (ou origine) de G , c'est-à-dire l'image du seul point de Spec A par la section unité $\mathrm{Spec}\, A \longrightarrow G$. Par définition même, e est strictement rationnel sur A .

PROPOSITION 1.3.1 : Soient G un groupe localement de type fini et plat sur un anneau artinien A et K la clôture parfaite du corps résiduel k de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $G \otimes_A K$ est réduit.

(ibis) Si $\underline{O}_{G,e}$ est l'anneau local de l'origine de G , $\underline{O}_{G,e} \otimes_A K$ est réduit.

(ii) G est lisse sur A .

(iibis) G est lisse sur A à l'origine.

Au moyen de SGA 1 II 2.1 , on se ramène tout de suite au cas où A est un corps $(A = k)$. Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ibis), (ii) $\Longrightarrow$ (iibis) (ii) $\Longrightarrow$ (i) et (iibis) $\Longrightarrow$ (ibis) sont évidentes de sorte qu'il suffit de prouver que (ibis) entraîne (ii). Or, si $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k , il résulte de (ibis) que $\underline{O}_{G,e} \otimes_k \overline{k}$ est réduit. De plus, si x est un point fermé quelconque de $\overline{G} = G \otimes_k \overline{k}$, il y a exactement un $\overline{k}$-morphisme $s : \operatorname{Spec} \overline{k} \longrightarrow G \otimes_k \overline{k}$ dont l'image est x ; la translation à droite r_s induit alors un isomorphisme de $\underline{O}_{G,e} \otimes_k \overline{k}$ sur $\underline{O}_{\overline{G},x}$ de sorte que $\underline{O}_{\overline{G},x}$, donc $\overline{G}$ sont réduits. Mais, comme $\overline{G}$ est aussi localement de type fini sur $\overline{k}$, $\overline{G}$ contient au moins un point y fermé dans $\overline{G}$ et lisse sur $\overline{k}$. Comme d'autre part les anneaux locaux des points fermés de $\overline{G}$ sont tous isomorphes à $\underline{O}_{G,e} \otimes_k \overline{k}$, on voit que tous ces anneaux locaux sont réguliers, de sorte que $\overline{G}$ est lisse sur $\overline{k}$, donc G lisse sur k .

2. Composantes connexes d'un A-groupe localement de type fini.

2.1. Considérons d'abord un A-groupe quelconque G et soit G' la composante connexe de l'origine e de G . Cette composante connexe est évidemment fermée de sorte que nous pouvons l'identifier au sous-préschéma fermé réduit de G qui a G' pour espace sous-jacent.

PROPOSITION 2.1.1 : Pour toute extension K du corps résiduel k de A , $G'\otimes_A K$ a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine dans le K-groupe $G\otimes_A K$ (G' est géométriquement connexe).

Soit en effet $(G\otimes_A K)'$ la composante connexe de l'origine dans $G\otimes_A K$. Comme l'image de $(G\otimes_A K)'$ dans G est connexe et contient l'élément neutre de G , cette image est contenue dans G' de sorte que $(G\otimes_A K)'$ est contenu dans l'image réciproque $G'\otimes_A K$ de G' dans $G\otimes_A K$. La proposition résulte donc de la connexité de $G'\otimes_A K$ qui est prouvée dans le lemme 2.1.2 :

LEMME 2.1.2 : Soient X et Y deux préschémas connexes sur un corps k . Si X contient un point rationnel, $X\times_k Y$ est connexe.

Nous donnons ci-dessous une démonstration directe de ce résultat de EGA (IV 4.5.8 et 4.5.14).

Supposons d'abord Y non vide, connexe et affine d'algèbre B . Dans ce cas, $X\times_k Y$ est le spectre de la $\underline{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente $\underline{B} = \underline{O}_X\otimes_k B$. Nous voulons montrer que toute partie U de $X\times_k Y$ qui est ouverte, fermée et non vide coïncide avec $X\times_k Y$. Et en effet U est affine sur X et a pour $\underline{O}_X$-Algèbre affine un facteur direct de $\underline{B}$.

Il résulte donc du lemme 2.1.3 ci-dessous que l'image de U dans X est ouverte et fermée, i.e. coïncide avec X tout entier. Cette image contient en particulier un point rationnel x de X , de sorte que U rencontre l'image réciproque de x dans $X \times_k Y$. Comme cette dernière est isomorphe à Y , donc est connexe, U contient cette image réciproque. Le même résultat serait valable pour le complémentaire de U dans $X \times_k Y$, si U était distincte de $X \times_k Y$, ce qui serait absurde.

Si Y est maintenant un k-préschéma quelconque, ce qui précède montre que les fibres de la projection canonique $X \times_k Y \longrightarrow Y$ sont connexes. Si x est un point rationnel de X , ces fibres rencontrent toutes le sous-préschéma $\{x\} \times_k Y$ qui est lui-même connexe, d'où la proposition.

LEMME 2.1.3 : <u>Soient</u> X <u>un préschéma et</u> $\underline{A}$ <u>une</u> $\underline{O}_X$-<u>Algèbre quasi-cohérente qui est un facteur direct d'un</u> $\underline{O}_X$-<u>Module libre</u>. <u>L'image de Spec</u> $\underline{A}$ <u>dans</u> X <u>est alors ouverte et fermée</u>.

Soit V cette image. Il est clair que V est contenue dans le support de $\underline{A}$. Réciproquement, si x appartient au support de $\underline{A}$, $\underline{A}_x$ est non nul et est un $\underline{O}_{X,x}$-module libre (Kaplansky). Par conséquent la fibre de Spec $\underline{A}$ en x , qui est affine d'algèbre $\underline{A}_x \otimes_{\underline{O}_{X,x}} k(x)$ n'est pas vide. On voit donc que l'image de Spec $\underline{A}$ coïncide avec le support de $\underline{A}$.

Si s est la section unité de $\underline{A}$, l'égalité $s_x = 0$ entraîne que s est nul dans un voisinage du point x de sorte que le support de $\underline{A}$ est fermé. On peut supposer d'autre part que $\underline{A}$ est un facteur direct de la somme directe d'une famille $(\underline{O}_X^{\alpha})$ d'exemplaires de $\underline{O}_X$. Soit alors

φ^α la restriction à $\underline{A}$ de la projection canonique de $\coprod_\alpha \underline{O}_X^\alpha$ sur $\underline{O}_X^\alpha$; si x est un point de X, tout homomorphisme de $\underline{O}_{X,x}$-modules $\Psi_x : \underline{A}_x \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est de la forme $a \longmapsto \sum_\alpha \xi^\alpha \varphi^\alpha(a)$ où (ξ^α) est une famille d'éléments de $\underline{O}_{X,x}$. Comme $\underline{A}_x$ est libre et non nul, on peut choisir les ξ^α et a de telle façon qu'on ait $1 = \sum_\alpha \xi^\alpha \varphi^\alpha(a) = \xi^{\alpha_1}\varphi^{\alpha_1}(a) + \dots + \xi^{\alpha_n}\varphi^{\alpha_n}(a)$. L'égalité $1 = \xi^{\alpha_1}\varphi^{\alpha_1}(a) + \dots + \xi^{\alpha_n}\varphi^{\alpha_n}(a)$ reste alors valable dans un voisinage de x, ce qui montre que a, donc $\underline{A}$ sont non nuls dans un voisinage de x ("le support d'un module projectif est ouvert").

2.2. Les notations étant toujours celles de 2.1, il est clair que G' est un préschéma réduit au-dessus de $\operatorname{Spec} k \subset \operatorname{Spec} A$. Le lemme 2.1.2 montre que $G' \times_k G'$ est connexe, de sorte que $(G' \times_k G')_{red}$ est le sous-préschéma réduit de $G \times_A G$ qui a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine. En particulier, le morphisme multiplication $\mu : G \times_A G \longrightarrow G$ induit un morphisme $\mu' : (G' \times_k G')_{red} \longrightarrow G'$ qui fait de G' un groupe dans la sous-catégorie pleine de (Sch/k) formée des k-préschémas réduits.

2.3. Conformément à nos conventions de 1.1, nous supposons de nouveau à partir de maintenant que G est localement de type fini sur A. Alors G est localement noethérien, donc localement connexe de sorte que la composante connexe de l'élément neutre est ouverte dans G. Nous noterons G° le sous-préschéma induit par G sur cet ouvert de sorte qu'avec les notations de 2.1 on a $G' = (G^\circ)_{red}$. Il résulte évidemment de 2.2 que G° est un <u>sous-préschéma en groupes</u> de G que nous appellerons <u>la composante neutre de</u> G.

Soient G^{α} une composante connexe quelconque de G et $\nu^{\alpha} : G^{\alpha} \times_A G^{\circ} \longrightarrow G$ le morphisme défini par les égalités $(\nu^{\alpha}(S))(g,\gamma) = g\gamma g^{-1}$ $(S \in (Sch/A)\ ,\ g \in G^{\alpha}(S)\ ,\ \gamma \in G^{\circ}(S))$. Si e est l'origine de G , la restriction de ν^{α} à $G^{\alpha} \times_A \{e\}$ est le morphisme nul; comme $G^{\alpha} \times_A G^{\circ}$ est connexe d'après 2.1.2 , on voit que ν^{α} se factorise à travers G° de sorte que G° est un <u>A-sous-groupe invariant</u> de G (car ce qui précède entraîne, que pour tout préschéma S sur A , $G^{\circ}(S)$ est un sous-groupe invariant de $G(S)$).

PROPOSITION 2.4 : <u>La composante neutre d'un A-groupe localement de type fini</u> G <u>est géométriquement irréductible et est de type fini sur</u> A .

Soit $\overline{k}$ la clôture algébrique du corps résiduel k de A et montrons d'abord que G° est géométriquement irréductible, c'est-à-dire que $G^{\circ} \otimes_A \overline{k}$ est irréductible. D'après 2.2 $(G \otimes_A \overline{k})_{red}$ est un $\overline{k}$-groupe localement de type fini et réduit, donc lisse sur $\overline{k}$ (1.3.1). A fortiori les anneaux locaux de $(G \otimes_A \overline{k})_{red}$ sont intègres de sorte que les composantes connexes de $G \otimes_A \overline{k}$, en particulier $G^{\circ} \otimes_A \overline{k}$, sont irréductibles.

Montrons maintenant que G° est de type fini sur A . Comme G° est localement de type fini sur A , il suffit de prouver que G° est quasi-compact. Pour cela, soit V un ouvert affine de G°. Comme G° est irréductible, cet ouvert est dense dans G° de sorte que V.V coïncide avec G° (0.5); comme V.V est l'image de $V \times_A V$ par le morphisme multiplication, V.V est quasi-compact.

<u>COROLLAIRE</u> 2.4.1 : <u>Toute composante connexe de</u> G <u>est irréductible et de type fini sur</u> A .

On peut supposer en effet A égal à son corps résiduel k . Soit alors H une composante connexe de G , x un point fermé de H , $k(x)$ le corps résiduel de x et K l'extension normale de k engendrée par $k(x)$. La projection canonique $\pi : H \otimes_k K \longrightarrow H$ est ouverte et fermée de sorte que toute composante connexe de $H \otimes_k K$ est la somme des images de $G° \otimes_k K$ par les translations définies par les points de $\pi^{-1}(x)$. Comme $H \otimes_k K$ est de type fini, H l'est.

Si H n'était pas irréductible, on pourrait choisir x de telle façon que x appartienne à deux composantes irréductibles distinctes. L'anneau local $\underline{O}_{H,x}$ aurait alors deux idéaux premiers minimaux distincts ainsi que l'anneau local de tout point de $H \otimes_k K$ au-dessus de x (going down theorem de Cohen-Seidenberg, Bourbaki, <u>Alg</u>. <u>com</u>. chap. VI); or nous venons de voir que $H \otimes_k K$ est la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de $G° \otimes_k K$, qui est irréductible ...

3. Construction de groupes-quotient (cas des groupes de type fini).

3.1. Soient A un anneau local artinien et $u : F \longrightarrow G$ un homomorphisme de A-groupes. Si $\mu : F \times_A F \longrightarrow F$ et $\nu : G \times_A G \longrightarrow G$ désignent les morphismes multiplication et λ le morphisme composé

$$F \times_A G \xrightarrow{u \times \mathrm{Id}G} G \times_A G \xrightarrow{\nu} G$$

on rappelle que le quotient à gauche $F \backslash G$ de G par F est le co-noyau du (Sch/A)-groupoïde G_* décrit ci-dessous

$$F \times_A F \times_A G \overset{\mathrm{Id}F \times \lambda}{\underset{\mathrm{pr}_{2,3}}{\overset{\mu \times \mathrm{Id}G}{\rightrightarrows}}} F \times_A G \underset{\mathrm{pr}_2}{\overset{\lambda}{\rightrightarrows}} G$$

(pr_2 et $\mathrm{pr}_{2,3}$ sont les projections de $F \times_A G$ et $F \times_A (F \times_A G)$ sur les deuxièmes facteurs). Nous dirons que G_* est le groupoïde de base G défini par u (confer V, 2a; comme dans l'exposé V, nous ne suivons pas en VI_A la convention de IV 4.6.15).

Comme l'unique A-morphisme $F \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ est universellement ouvert (EGA IV 2.4.9), pr_2 est un morphisme ouvert; il en va donc de même pour λ qui est composé de pr_2 et de l'automorphisme σ de $F \times_A G$ qui est défini par les formules suivantes : $\sigma(S)(x,y) = (x,(u(S)(x)).y)$ où S est un A-préschéma variable, x et y appartenant à $F(S)$ et $G(S)$. On voit de la même façon que pr_2 et λ sont plats lorsque F est plat sur A .

Remarquons aussi pour terminer ces préliminaires que tout

A-morphisme s : Spec $A \longrightarrow G$ définit un automorphisme du groupoïde G_* qui induit sur G , $F\times_A G$ et $F\times_A F\times_A G$ respectivement les automorphismes r_s , $\mathrm{Id}\, F\times_A r_s$ et $\mathrm{Id}\, F\times_A \mathrm{Id}\, F\times_A r_s$. Nous noterons encore r_s cet automorphisme de G_* et nous dirons que r_s est la translation à droite définie par s (confer 0.4).

3.2. THEOREME : Soient F et G des groupes plats et localement de type fini sur un anneau local artinien A . Soit $u : F \longrightarrow G$ un homomorphisme de A-groupes quasi-compact et de noyau fini. Alors :

(i) Le quotient à gauche $F\backslash G$ de G par F existe et la suite

$$F\times_A G \underset{pr_2}{\overset{\lambda}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{\text{canonique}} F\backslash G$$

est exacte dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) Le morphisme canonique $G \longrightarrow F\backslash G$ est surjectif et ouvert et $F\backslash G$ est une somme directe de préschémas de type fini sur A .

(iii) Le morphisme canonique $F\times_A G \longrightarrow G \times_{F\backslash G} G$ est surjectif .

(iv) Si u est un monomorphisme, $F\times_A G \longrightarrow G\times_{F\backslash G} G$ est un isomorphisme et $G \longrightarrow F\backslash G$ est plat.

Dans la démonstration de ce théorème A' désignera une A-algèbre locale, finie et libre sur A. Si R est une relation faisant intervenir A' , nous dirons que $R(A')$ est vraie quand A' est assez grande s'il existe une algèbre A_1 locale, finie et libre sur A telle que la relation $R(A')$ soit vérifiée pour chaque algèbre A' locale, finie et libre sur A_1 . Nous allons d'abord prouver notre théorème lorsque F et G sont de type fini sur A :

3.2.1. Supposons un instant que tout point de G possède un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par G_* sur W possède une quasi-section (V § 6). Le théorème 3.2 résulte alors de V. 6.1. Nous allons montrer qu'en outre toute partie finie de $F\backslash G$ est alors contenue dans un ouvert affine :

Si U est une quasi-section du groupoïde induit par G_* sur un ouvert saturé W de G , $U\otimes_A A'$ est en effet une quasi-section du (Sch/A')-groupoïde induit par $G_*\otimes_A A'$ sur $W\otimes_A A'$. De plus, si U_* est le (Sch/A)-groupoïde induit par G_* sur U , $U_*\otimes_A A'$ s'identifie au (Sch/A')-groupoïde induit par $G_*\otimes_A A'$ dans $U\otimes_A A'$. Il résulte donc des démonstrations de l'exposé V que la construction du quotient $F\backslash G$ commute à l'extension $A \longrightarrow A'$ de la base du type considéré ici.

Soient donc $x_1, \ldots, x_n$ des points de $F\backslash G$ que nous pouvons supposer fermés et $g_1, \ldots, g_n$ des points fermés de G se projetant sur $x_1, \ldots, x_n$; soient U un ouvert affine partout dense de $F\backslash G$, V l'image réciproque de U dans G et soit A' une A-algèbre assez grande pour les besoins de notre cause : alors l'image réciproque de $g_1, \ldots, g_n$ dans $G\otimes_A A'$ est formée de points $g'_1, \ldots, g'_p$ qui sont strictement rationnels sur A' (1.2) ; en outre, si A' est assez grande, l'ouvert partout dense $\bigcap_i (V\otimes_A A')^{-1}.g'_i$ contient un point x strictement rationnel sur A' . On a donc $x \in (V\otimes_A A')^{-1}.g'_i$ d'où $g'_i \in (V\otimes_A A').x$. Comme $(V\otimes_A A').x$ est l'image de $V\otimes_A A'$ par un automorphisme du groupoïde $G_*\otimes_A A'$, l'image

$(U \otimes_A A').x$ de $(V \otimes_A A').x$ dans $(F\backslash G) \otimes_A A'$ est l'image de $U \otimes_A A'$ par l'automorphisme induit sur $(F \backslash G) \otimes_A A'$. Donc $(U \otimes_A A').x$ est un ouvert affine de $(F\backslash G) \otimes_A A'$ contenant $g'_1, \ldots, g'_p$.

Pour terminer la démonstration on montre comme dans V § 5b) que $(U \otimes_A A').x$ contient un ouvert affine W' qui contient $g'_1, \ldots, g'_p$ et qui est saturé pour la relation d'équivalence

$$(F\backslash G) \otimes_A A' \otimes_A A' \rightrightarrows (F\backslash G) \otimes_A A'$$

induite par les deux injections canoniques de A' dans $A' \otimes_A A'$. L'image de W' dans $F\backslash G$ contient alors $g_1, \ldots, g_n$ et est un ouvert affine de $F\backslash G$ (V 4.1).

3.2.2. Pour toute algèbre A' sur A (du type considéré en 4.1.), désignons maintenant par $U(A')$ l'ensemble des points de $G \otimes_A A'$ ayant un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur W possède une quasi-section. Il est bien clair que $U(A')$ est saturé pour les opérations de $G(\mathrm{Spec}\, A')$ sur $G \otimes_A A'$. Nous allons voir que, lorsque A' est assez grande, $U(A')$ est égale à $G \otimes_A A'$:

La preuve se fait par récurrence sur $\dim (G - U(A))$: soient $g_1, \ldots, g_n$ des points fermés appartenant aux diverses composantes irréductibles de $G - U(A)$; si A' est assez grande, les points $g'_1, \ldots g'_p$ de $G \otimes_A A'$ se projetant sur $g_1, \ldots, g_n$ sont strictement rationnels sur A' ; de même, $U(A) \otimes_A A'$ contient un point strictement rationnel x ($U(A)$ n'est pas vide d'après V 8.1). Par conséquent, $U(A')$ contient $(U(A) \otimes_A A').x^{-1}.g'_i$

pour tout i ; donc $U(A')$ contient $g'_1, \ldots, g'_p$ et on a

$$\dim (G \otimes_A A' - U(A')) < \dim (G - U(A))$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors l'existence d'une algèbre A'' sur A' telle qu'on ait $U(A'') = (G \otimes_A A') \otimes_{A'} A'' = G \otimes_A A''$.

3.2.3. Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence de $F\backslash G$ quand F et G sont de type fini sur A : soit A' assez grande sur A pour que $U(A')$ coïncide avec $G \otimes_A A'$ (confer 3.2.2).
Nous poserons $A'' = A' \otimes_A A'$ et, pour tout A-préschéma X , nous désignerons par X' et X'' les produits fibrés $X \otimes_A A'$ et $X \otimes_A A''$. D'après 3.2.1 et 3.2.2 les quotients $F'\backslash G'$ et $F''\backslash G''$ existent et on a le diagramme commutatif

$$(*)\quad \begin{tikzcd}
F'' \times_{A''} G'' \arrow[r, shift left, "pr''_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda''"'] \arrow[d, shift right, "w_1"'] \arrow[d, shift left, "w_2"] & G'' \arrow[r, "p''"] \arrow[d, shift right, "v_1"'] \arrow[d, shift left, "v_2"] & F''\backslash G'' \arrow[d, shift right, "u_1"'] \arrow[d, shift left, "u_2"] \\
F' \times_{A'} G' \arrow[r, shift left, "pr'_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda'"'] \arrow[d, "h"] & G' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & F'\backslash G' \\
F \times_A G \arrow[r, shift left, "pr_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda"'] & G &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, pr'_2 et λ' (resp. pr''_2 et λ'') sont obtenus à partir de pr_2 et λ par des changements de base évidents ; les morphismes g et h sont induits par l'injection canonique $A \to A'$. On y désigne par p' et p'' les morphismes canoniques ; les morphismes v_1 , v_2 et w_1 , w_2 sont induits par les deux injections canoniques de A' dans A'' ; enfin, si

$\pi' : F'\backslash G' \longrightarrow \operatorname{Spec} A'$ est le morphisme structural, il résulte de ce que la construction du quotient $F'\backslash G'$ commute aux deux changements de base $f_1 , f_2 : \operatorname{Spec} A'' \rightrightarrows \operatorname{Spec} A'$ qu'on a des isomorphismes canoniques i_1 et i_2 de $F''\backslash G''$ sur $(F'\backslash G')_{\pi',f_1}^{\times} \operatorname{Spec} A''$ et $(F'\backslash G')_{\pi',f_2}^{\times} \operatorname{Spec} A''$. Les morphismes u_1 et u_2 sont composés de i_1 et i_2 et des projections de $(F'\backslash G')_{\pi',f_1}^{\times} \operatorname{Spec} A''$ et $(F'\backslash G')_{\pi',f_2}^{\times} \operatorname{Spec} A''$ sur $F'\backslash G'$.

Or, lorsqu'on a un diagramme du type $(*)$, $\operatorname{Coker}(pr_2, \lambda)$ existe si et seulement si il en va de même pour $\operatorname{Coker}(u_1,u_2)$ et ces deux conoyaux s'identifient. L'existence de $F\backslash G$ résultera donc de celle de $\operatorname{Coker}(u_1,u_2)$. Or il résulte de la compatibilité de la formation de $F\backslash G$ avec les extensions de la base considérées ici que le morphisme composé

$$(F'\backslash G')_{\pi',f_1}^{\times} \operatorname{Spec} A'' \xrightarrow{i_1^{-1}} F''\backslash G'' \xrightarrow{i_2} (F'\backslash G')_{\pi',f_2}^{\times} \operatorname{Spec} A''$$

est une donnée de descente sur $F'\backslash G'$ relativement à $f : \operatorname{Spec} A' \rightarrow \operatorname{Spec} A$. D'après SGA VIII § 7.6 et 3.2.1 cette donnée de descente est effective, c'est-à-dire que $\operatorname{Coker}(u_1,u_2)$ existe (on pourrait d'ailleurs utiliser directement V 4.1).

3.2.4. Pour terminer la preuve du théorème 3.2 dans le cas où F et G sont de type fini sur A , il reste à étudier le quotient $F\backslash G$.
D'après V 6.1 les assertions (ii), (iii) et (iv) "deviennent vraies" après le changement de base $f : \operatorname{Spec} A' \longrightarrow \operatorname{Spec} A$; d'après EGA IV 2.6.1 , 2.6.2 et 2.7.1 , ces assertions étaient donc vraies avant le changement de base. Enfin, pour prouver la deuxième assertion de (i), il n'y a qu'à se reporter à V § 6c).

4. Construction de groupes-quotient (cas général).

Nous supposons maintenant satisfaites les hypothèses du théorème 3.2, F et G n'étant pas nécessairement de type fini sur A .

4.1. Considérons tout d'abord une composante connexe G^{α} de G et montrons que le saturé $\overline{G^{\alpha}}$ de G^{α} pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde G_* est une partie ouverte et fermée de G (autrement dit est la réunion de certaines composantes connexes de G). Ce saturé est l'image de $F \times_A G^{\alpha}$ par λ , donc est ouvert dans G (confer § 3.1). Si k est le corps résiduel de A et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k , il reste à montrer que l'image de $(F \times_A G^{\alpha}) \otimes_A k$ par $\lambda \otimes_A k$ est fermée dans $G \otimes_A k$, ou encore, d'après SGA 1 VIII 4.4, que l'image de $(F \times_A G^{\alpha}) \otimes_A \overline{k}$ par $\lambda \otimes_A \overline{k}$ est fermée. Comme $G^{\alpha} \otimes_A \overline{k}$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes de $G \otimes_A \overline{k}$, on est ramené au cas où A est un corps algébriquement clos, ce que nous allons supposer : dans ce cas, $\overline{G^{\alpha}}$ est la réunion des images de G^{α} par les translations à gauche $\ell_{u(x)}$, où x parcourt les points fermés de F ; l'assertion résulte donc de ce que ces images sont des composantes connexes de G .

4.2. Prenons en particulier pour G^{α} la composante connexe G° de l'origine de G . Alors $\overline{G^{\circ}}$ contient évidemment l'image de F par u qui n'est autre que la classe d'équivalence de l'origine. D'autre part, si F^{β} est une composante connexe de F , $F^{\beta} \times_A G^{\circ}$ est connexe (2.1.2) de sorte que l'image de $F^{\beta} \times_A G^{\circ}$ par λ est contenue dans la composante connexe de $u(F^{\beta})$ dans G . Autrement dit, $\overline{G^{\circ}}$ est la réunion des composantes connexes qui rencontrent l'image de F .

On remarquera aussi que le sous-préschéma ouvert de G qui a $\overline{G^\circ}$ pour espace sous-jacent est un sous-groupe de G (que nous notons encore $\overline{G^\circ}$) : en effet le morphisme inversion de G conserve l'image de F et commute les composantes connexes de G qui rencontrent cette image; il suffit donc de montrer que $\nu : G\times_A G \longrightarrow G$ applique $\overline{G^\circ}\times_A\overline{G^\circ}$ dans $\overline{G^\circ}$ et pour cela on peut supposer que A est un corps algébriquement clos (avec les notations de 4.1 , $\overline{G^\circ}\otimes_A\overline{k}$ s'identifie en effet au saturé de $(G\otimes_A\overline{k})^\circ$ par la relation d'équivalence définie par l'homomorphisme $u\otimes_A\overline{k}$); si G^γ et G^δ sont alors des composantes connexes de $\overline{G^\circ}$, $G^\gamma\times_A G^\delta$ est connexe et son image par ν rencontre l'image de F ; par conséquent, $u(G^\gamma\times_A G^\delta)$ est contenu dans une composante connexe de G rencontrant $u(F)$, c.q.f.d.

4.3. Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G_* de base G défini par u est la somme directe des groupoïdes $\overline{G_*^\alpha}$ induits par G_* sur les différentes parties ouvertes et fermées de G de la forme $\overline{G^\alpha}$. Le conoyau de G_* est donc la somme directe des conoyaux de ces groupoïdes $\overline{G_*^\alpha}$, qu'on est amené à étudier séparément.

Considérons tout d'abord le groupoïde $\overline{G_*^\circ}$ induit par G_* sur $\overline{G^\circ}$. Il est clair que $\overline{G_*^\circ}$ est le groupoïde de base $\overline{G^\circ}$ défini par l'homomorphisme de F dans $\overline{G^\circ}$ induit par u (§ 3.1). Le conoyau dont nous voulons prouver l'existence s'identifie donc à $F\backslash\overline{G^\circ}$. Considérons d'autre part le groupoïde

$$G_2^\circ \;\overset{\ell'_2}{\underset{\ell'_0}{\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{\ \ell'_1\ }}}}}\; G_1^\circ \;\overset{\ell_1}{\underset{\ell_0}{\rightrightarrows}}\; G_0^\circ = G^\circ$$

induit par $\overline{G^\circ_*}$ sur G°. Si l'on se reporte à la construction explicitée en V § 3b), l'objet noté alors $Y_o \times_{X_o} X_1$ n'est autre que $F \times_A G^\circ$, de sorte que G°_1 est l'image réciproque de G° par le morphisme $F \times_A G^\circ \longrightarrow \overline{G^\circ}$ induit par λ. Je dis que cette image réciproque est $F_o \times_A G^\circ$, si l'on note F_o l'image réciproque de G° par u : en effet, si F^β est une composante connexe de F_o et e l'élément neutre de G, $F^\beta \times_A G^\circ$ est connexe (2.1.2) et $\lambda(F \times_A G^\circ)$ est contenu dans G° ; réciproquement, si F^β est une composante connexe de F non contenue dans F_o, l'image de $F^\beta \times_A G^\circ$ est encore connexe et contient $u(F^\beta)$; si $u(F^\beta)$ n'est pas contenu dans G°, $\lambda(F^\beta \times_A G^\circ)$ ne rencontre pas G°.

Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G°_* induit par G_* sur G° est le groupoïde de base G° défini par l'homomorphisme $F_o \longrightarrow G^\circ$ induit par u ; d'après le paragraphe 4, ce groupoïde possède un conoyau qui n'est autre que $F_o \backslash G^\circ$. Je dis maintenant que $F_o \backslash G^\circ$ s'identifie à $F \backslash \overline{G^\circ}$: en effet, la démonstration est analogue à celle de l'assertion (i) du lemme V § 6.1 ; considérons le diagramme

$$\overline{G^\circ} \xleftarrow{\ v\ } F \times_A G^\circ \xrightarrow{\ pr_2\ } G^\circ$$

où v est le morphisme induit par λ. Comme pr_2 possède une section, pr_2 est un épimorphisme effectif et universel de sorte que $F_o \backslash G^\circ$ coïncide avec $\mathrm{Coker}(v_o, v_1)$, où

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, shift left=2, "v'_2"] \arrow[r, "v'_1" description] \arrow[r, shift right=2, "v'_0"'] & V_1 \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_0"'] & V = F \times_A G^\circ \end{tikzcd}$$

est l'image réciproque du groupoïde G°_* par pr_2 (V § 3 a)), c'est-à-dire également l'image réciproque de $\overline{G^\circ_*}$ par le morphisme composé $F\times_A G^\circ \xrightarrow{\text{inclusion}} F\times_A \overline{G^\circ} \xrightarrow{pr_2} \overline{G^\circ}$.

De même, comme v est fidèlement plat et quasi-compact, $F\backslash\overline{G^\circ}$ coïncide avec le conoyau de l'image réciproque de $\overline{G^\circ_*}$ par le changement de base v . Or cette image réciproque est isomorphe à V_* d'après V § 3 c); il résulte de là que l'inclusion canonique de G°_* dans $\overline{G^\circ_*}$ induit un isomorphisme de $F_o\backslash G^\circ$ sur $F\backslash\overline{G^\circ}$.

On remarque enfin que la construction de $F\backslash\overline{G^\circ}$ commute aux changements de base finis et localement libres parce qu'il en va de même pour $F_o\backslash G^\circ$.

4.4. Il reste à construire le conoyau du groupoïde $\overline{G^\alpha_*}$ lorsque G^α est une composante connexe quelconque de G : si A' est une A-algèbre locale, finie et libre assez grande (confer 3.2), $G^\alpha\otimes_A A'$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes $G_1^!, \ldots, G_n^!$ de $G\otimes_A A'$ qui possèdent toutes un point strictement rationnel. Pour tout i , il existe donc une translation à droite r_i de $G\otimes_A A'$ qui applique $G^\circ\otimes_A A'$ sur $G_i^!$; cette translation induit un isomorphisme du groupoïde $\overline{G^\circ_*}\otimes_A A'$ sur $\overline{(G_i^!)}_*$ de sorte que le groupoïde induit par $G_*\otimes_A A'$ sur le saturé de $G_i^!$ possède un conoyau. Comme $(\overline{G^\alpha})_*\otimes_A A'$ est la somme directe d'un certain nombre d'entre les $\overline{(G_i^!)}_*$, $(\overline{G^\alpha})_*\otimes_A A'$ possède un conoyau; ce conoyau est la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de $F_o\otimes_A A'\backslash G^\circ\otimes_A A'$ de sorte que toute partie finie de ce conoyau est contenue dans un ouvert affine ; de plus, la construction de ce conoyau commute aux extensions finies et localement libres de la base. On voit donc comme en 3.2.3 que ce conoyau est de la forme $Y \otimes_A A'$, où Y est un conoyau de $(\overline{G^{\alpha}})_*$.

4.5. Nous avons donc construit $F\backslash G$. Les autres assertions du théorème 3.2 se ramènent directement à des assertions concernant les groupoïdes $\overline{G^{\alpha}_*}$. Comme en V § 6 il suffit de prouver (ii), (iii) et (iv) ; d'après SGA VIII il suffit de vérifier les assertions correspondantes du groupoïde $\overline{G^{\alpha}_*} \otimes_A A'$ qui est isomorphe à la somme directe d'un nombre fini d'exemplaires de $\overline{G^{\circ}_*} \otimes_A A'$ (confer 4.4), de sorte qu'on est ramené au groupoïde $\overline{G^{\circ}_*}$. Pour ce dernier on continue de calquer la preuve établie en V § 6 comme on a commencé à le faire en 4.3.

4.6. Ajoutons pour terminer ce paragraphe quelques remarques concernant le lemme 6.1 et le § 9 a) de l'exposé V : <u>avec les hypothèses et les notations de</u> V § 9 a), nous cherchons une condition sous laquelle la construction du conoyau du (Sch/S)-groupoïde X_* commute à une extension $\pi : S' \longrightarrow S$ de la base. Comme les conoyaux de X_* et X'_* s'identifient aux conoyaux des groupoïdes U_* et U'_* induits par X_* et X'_* sur les quasi-sections U et U', on est ramené au cas d'un (Sch/S)-groupoïde vérifiant les hypothèses du théorème V 4.1. Si $g : U_o \longrightarrow Y$ est le morphisme canonique de $U_o = U$ sur le conoyau Y de U_*, nous voulons que la suite de $\underline{O}_{Y'}$-Modules

$$(*) \qquad \underline{O}_{Y'} \longrightarrow g'_*(\underline{O}_{U'_o}) \rightrightarrows (gu_1)'_*(\underline{O}_{U'_1}) = (gu_o)'_*(\underline{O}_{U'_1})$$

soit exacte. <u>Si</u> S <u>est localement noethérien et</u> X_o <u>de type fini sur</u> S, ou bien si (d_o, d_1) est un couple d'équivalence, il résulte de EGA III 1.4.5 que la suite $(*)$ s'identifie à l'image réciproque de la suite

$$(**) \qquad \underline{O}_Y \longrightarrow g_*(\underline{O}_{U_o}) \rightrightarrows g_* u_{1*}(\underline{O}_{U_1}) = g_* u_{o*}(\underline{O}_{U_1})$$

chaque fois que S' est plat sur S . Comme $(**)$ est une suite exacte, on voit que la construction du conoyau de X_* commute aux extensions plates de la base sous les hypothèses mentionnées.

4.7. Considérons maintenant le cas du groupoïde G_* du théorème 3.2 lorsqu'on suppose provisoirement F et G de type fini sur A . D'après 3.2.2 il existe une algèbre A' locale, finie et libre sur A telle que le groupoïde $G_* \otimes_A A'$ possède "localement" des quasi-sections. Pour toute extension $T \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ de la base, la suite

$$(F''\backslash G'')\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T \rightrightarrows (F'\backslash G')\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T \longrightarrow (F\backslash G)\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$$

déduite du diagramme $(*)$ de 3.2.3 est exacte. Si l'on suppose de plus T plat sur $\operatorname{Spec} A$, $(F''\backslash G'')\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$ et $(F'\backslash G')\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$ s'identifient respectivement aux conoyaux de $(G_* \otimes_A A'')\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$ et $(G_* \otimes_A A')\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$ d'après 4.6. Le diagramme déduit de $(*)$, 3.2.3 par le changement de base $T \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ montre alors que $(F\backslash G)\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$ s'identifie au conoyau de $G_*\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$. Un raisonnement analogue est valable dans le cas général :

Sous les hypothèses du théorème 3.2 , pour tout A-préschéma plat T , $(F\backslash G)\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$ s'identifie au quotient à gauche de $G\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$ par $F\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}T$.

5. Compléments

5.1. Nous reprenons les notations du § 3 et les hypothèses du théorème 3.2; on a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F\times_A G\times_A G \arrow[r, "F\times\nu"] \arrow[d, shift right, "pr_2\times G"'] \arrow[d, shift left, "\lambda\times G"] & F\times_A G \arrow[d, shift right, "pr_2"'] \arrow[d, shift left, "\lambda"] \\
G\times_A G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "can\times G"] & G \arrow[d, "can."] \\
(F\backslash G)\times_A G & F\backslash G
\end{tikzcd}$$

qui satisfait aux égalités $pr_2\circ(F\times\nu) = \nu\circ(pr_2\times G)$ et $\lambda\circ(F\times\nu) = \nu\circ(\lambda\times G)$ En outre, comme G est supposé plat sur A, la suite verticale de gauche est exacte d'après 4.7, de sorte que ν induit un morphisme de A-préschémas

$$\rho : (F\backslash G)\times_A G \longrightarrow F\backslash G \quad .$$

Ce morphisme ρ fait opérer G à droite sur $F\backslash G$ comme on le vérifie immédiatement; de plus, le morphisme canonique $G \longrightarrow F\backslash G$ commute aux opérations de G à droite sur G et $F\backslash G$.

5.2. Lorsque l'homomorphisme de A-groupes $u : F \longrightarrow G$ est un monomorphisme, on peut retrouver 5.1 en se servant des résultats de l'exposé IV. En effet, le morphisme canonique $p : G \longrightarrow F\backslash G$ est fidèlement plat et ouvert d'après 3.2 ; il est donc couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 6.3.1) et l'on peut appliquer les corollaires IV 5.2.2 et IV.5.2.4.

En particulier, si nous supposons, en plus des hypothèses de 3.2 , que u est l'inclusion dans G d'un sous-groupe invariant F , il existe sur $F\backslash G$ une et une seule structure de A-groupe telle que le morphisme canonique $p : G \longrightarrow F\backslash G$ soit un homomorphisme de A-groupes.

5.3. Nous allons maintenant passer en revue quelques énoncés de l'exposé IV :

5.3.1. Les énoncés IV 5.2.7 et IV 5.3.1 se traduisent comme suit : soient F et G deux groupes localement de type fini et plats sur A , F étant un sous-groupe invariant fermé de G . Les applications $H \longmapsto F\backslash H$ et $H' \longmapsto H' \times_{F\backslash G} G$ définissent une correspondance biunivoque entre les A-sous-groupes plats de G contenant F et les A-sous-groupes plats de $F\backslash G$. Dans cette bijection les sous-groupes fermés (resp. invariants) de G contenant F correspondent aux sous-groupes fermés (resp. invariants) de $F\backslash G$.

5.3.2. La proposition IV 5.2.9 implique le résultat suivant : soient F , H et G des groupes localement de type fini et plats sur A ; on suppose F contenu et fermé dans G , H contenu dans G et contenant F, F invariant dans H . Dans ces conditions, $F\backslash H$ opère librement à gauche sur $F\backslash G$, le préschéma quotient $(F\backslash H)\backslash(F\backslash G)$ existe et on a un isomorphisme canonique de préschémas à groupe d'opérateurs G :

$$(F\backslash H)\backslash(F\backslash G) = H\backslash G \quad .$$

5.3.3. De IV 5.2.8 , enfin, découle l'assertion que voici : soient F, H et G des groupes localement de type fini et plats sur A ; on suppose que F est contenu, fermé et invariant dans G , que H est contenu dans G et que $F \cap H$ est plat sur A . Soit alors $F \overset{\tau}{\times}_A H$ le A-groupe qui a pour préschéma sous-jacent le produit $F \times_A H$, la multiplication étant définie par le morphisme " $((x, \ell),(y,m)) \longmapsto (x\ell y \ell^{-1}, \ell m)$ "; de même, soient $u : H \cap F \longrightarrow F \overset{\tau}{\times}_A H$ le monomorphisme $x \longmapsto (x^{-1}, x)$ et F.H le quotient $(F \cap H) \backslash (F \overset{\tau}{\times}_A H)$. Dans ces conditions il existe un isomorphisme canonique

$$F \backslash (F.H) = (F \cap H) \backslash H$$

5.4. Soit $u : F \longrightarrow G$ un homomorphisme quasi-compact de groupes localement de type fini et plats sur A ; supposons que le noyau de u soit également plat sur A . Dans ce cas, le groupe-quotient $\mathrm{Ker}\, u \backslash F$ existe d'après le théorème 3.2 et 5.2 ; de plus, u induit un monomorphisme $v : \mathrm{Ker}\, u \backslash F \longrightarrow G$ (IV 5.2.6) et, $\mathrm{Ker}\, u \backslash F$ est plat sur A d'après 3.2 (iv). D'autre part, $\mathrm{Ker}\, u \backslash F$ s'identifie au faisceau-quotient de $\widehat{F}$ par $\mathrm{Ker}\, \hat{u}$ pour la topologie (fpqc) de $(Sch/_A)$ (confer 5.2); il en résulte que $F \backslash G$ s'identifie à $(\mathrm{Ker}\, u \backslash F) \backslash G$ car le faisceau-quotient $\widehat{F} \backslash \widehat{G}$ pour la topologie canonique s'identifie au faisceau-quotient $(\mathrm{Ker}\, \hat{u} \backslash \widehat{F}) \backslash \widehat{G}$).
A fortiori v induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\, u \backslash F$ sur l'image réciproque dans G du point distingué de $F \backslash G$ (de sorte que v est une immersion fermée; confer VI_B). Lorsque F et G sont des A-groupes commutatifs, cette image réciproque est l'image de u dans la catégorie des A-groupes abéliens, alors que $\mathrm{Ker}\, u \backslash F$ est la coimage de u. D'où :

<u>THEOREME</u> : <u>La catégorie des groupes commutatifs de type fini sur un corps est abélienne</u>.

En effet, lorsque A est un corps, Ker u est plat sur A quelque soit u .

5.5. Soit G un groupe localement de type fini et plat sur un anneau artinien local A. On sait que la composante connexe de l'origine G^o est un sous-groupe invariant de G (2.3). Ce sous-groupe G^o opère à gauche sur toutes les composantes connexes G^α de G de sorte que $G^o \backslash G$ est la somme directe des $G^o \backslash G^\alpha$. En particulier, la composante connexe de l'origine dans $G^o \backslash G$ n'est autre que $G^o \backslash G^o \simeq \operatorname{Spec} A$ et $G^o \backslash G \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ est un isomorphisme local à l'origine; par conséquent, $G^o \backslash G$ est non ramifié sur $\operatorname{Spec} A$ (3.3); comme $G^o \backslash G$ est également plat sur $\operatorname{Spec} A$ d'après le théorème 4.2 (iv), <u>on voit que</u> $G^o \backslash G$ <u>est un groupe étale sur</u> $\operatorname{Spec} A$.

5.6. Soient maintenant k un corps parfait et G un groupe localement de type fini sur k. Nous avons vu (0.2) que G_{red} est alors un sous-schéma en groupes de G. De plus, la classe d'équivalence de l'origine de G pour l'opération de G_{red} à gauche sur G est tout l'espace sous-jacent à G. Il résulte donc du théorème 4.2 que le quotient $G_{red} \backslash G$ est le spectre d'une k-algèbre finie et locale.

<u>PROPOSITION</u> : <u>Soit</u> $u : F \longrightarrow G$ <u>un homomorphisme de groupes localement de type fini sur un corps parfait</u> k. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) u <u>est plat</u>.

(ii) $u^o : F^o \longrightarrow G^o$ <u>est dominant et le morphisme</u> $v : F_{red} \backslash F \longrightarrow G_{red} \backslash G$ <u>induit par</u> u <u>est plat</u>.

Considérons en effet le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} F_{red} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u_{red}"'] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & F_{red}\backslash F \arrow[d, "v"'] \\ G_{red} \arrow[r, "j"] & G \arrow[r, "q"] & G_{red}\backslash G \end{tikzcd}$$

où i et j désignent les inclusions, p et q les projections canoniques. D'après le théorème 4.2 (iv) p et q sont fidèlement plats, par conséquent, si u est plat, $qu = vp$ est plat, donc également v.

Réciproquement, si v est plat, F et G sont plats sur $G_{red}\backslash G$; d'après SGA 1 IV 5.9 il suffit donc de monter que le morphisme $u^{-1}(G_{red}) \longrightarrow G_{red}$ induit par u est plat ; cela est vrai parce que G_{red} est réduit (3.3.1).

E x p o s é VI_B

GENERALITES SUR LES PRESCHEMAS EN GROUPES

par J.E. BERTIN

Cet exposé, qui ne correspond à aucun exposé oral du séminaire, est destiné à regrouper un certain nombre de résultats techniques couramment utilisés concernant les préschémas en groupes (*).

1. Morphismes de groupes localement de type fini sur un corps.

1.1. Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes et $u : G \to H$ un morphisme de A-groupes. Alors u induit un homomorphisme de groupes $u(A) : G(A) \longrightarrow H(A)$. Comme H(A) opère sur H par translation à droite, u(A) définit par restriction une opération de G(A) sur H. Cette opération est compatible avec le morphisme u et l'opération de G(A) sur G définie par translations à droite. Comme G(A) opère transitivement sur les points strictement rationnels (VI_A 0.4) de G, on voit que ces points "se comportent tous de la même manière à l'égard de u" ; de là sourdent les propriétés suivantes :

Proposition 1.2. Soit $u : G \longrightarrow H$ un morphisme quasi-compact de A-groupes localement de type fini sur A. Alors l'ensemble u(G) est fermé dans H et on a $\dim G = \dim u(G) + \dim \operatorname{Ker} u$.

(*) Cet exposé a été assez sérieusement remanié depuis son édition multigraphiée, notamment les §§ 10 et 11 ont été entièrement rerédigés.

Comme u commute avec les symétries de G et H, l'image u(G) est invariante par la symétrie de H ; il en est donc de même de l'adhérence $\overline{u(G)}$ de u(G) dans H. Soit d'autre part L l'ensemble des points de $H\times_A H$ dont les deux projections appartiennent à u(G) ; il est clair que L est l'image du morphisme $u\times_A u : G\times_A G \longrightarrow H\times_A H$; donc le morphisme de multiplication de H envoie L dans u(G), autrement dit $u(G).u(G) = u(G)$. D'autre part le lemme 1.2.1 ci-dessous montre que $\overline{L}$, adhérence de L dans H, est l'ensemble des points de $H\times_A H$ dont les deux projections appartiennent à $\overline{u(G)}$; donc $\overline{u(G)}.\overline{u(G)} = \overline{u(G)}$ de sorte que le sous-préschéma réduit de G qui a pour espace sous-jacent $\overline{u(G)}$ est muni naturellement d'une structure de groupe dans la catégorie $(Sch/k)_{red}$, où k est le corps résiduel de A (cf. VI_A 0.2).

Montrons la première assertion de 1.2 : quitte à remplacer A par la clôture algébrique de son corps résiduel k, nous pouvons supposer que A est un corps k algébriquement clos (EGA IV 2.3.12). Quitte à remplacer u par $u_{red} : G_{red} \longrightarrow H_{red}$, on peut supposer G et H réduits ; dans ce cas, ainsi que nous venons de le voir, $\overline{u(G)}$ est l'espace sous-jacent à un sous-préschéma en groupes réduits de G ; nous pouvons donc supposer u dominant. Alors G(k) opère transitivement dans l'ensemble des composantes connexes de H et il suffit de montrer que $u(G) \cap H^o$ est fermé : on est ramené au cas où H est connexe, donc irréductible et de type fini (VI_A 2.4). Alors u est de type fini puisque quasi-compact et localement de type fini ; comme H est noethérien, u(G) est constructible (EGA IV 1.8.5), donc contient un ouvert V de H (EGA 0_{IV} 9.2.3), et alors $H = V.V \subset u(G).u(G) = u(G)$ (VI_A 0.5).

Montrons la seconde assertion. Rappelons tout d'abord que le foncteur Ker u (cf. I) est représentable par $u^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de H. Lorsque u est localement de type fini, Ker u est donc localement de type fini sur A. On se ramène comme précédemment, grâce cette fois-ci à (EGA IV 4.1.4), au cas où A est un corps algébriquement clos k, où G et H sont irréductibles et de type fini et où u est dominant : en effet k étant algébriquement clos, il est clair que les composantes connexes de G, sur l'ensemble desquelles G(k) opère transitivement, ont toutes même dimension, et que si u° est la restriction de u à G°, alors $(\operatorname{Ker} u)^{\circ} \subset \operatorname{Ker} u^{\circ}$, et $\dim \operatorname{Ker} u^{\circ} = \dim \operatorname{Ker} u$. On voit de même qu'alors u est de type fini sur k. Si h désigne le point générique de H, $\dim u^{-1}(h) = \dim G - \dim H$ (EGA IV 10.6.1 (ii)). D'après (EGA IV 9.2.3 et 9.2.6) l'ensemble des $y \in H$ tels que $\dim u^{-1}(y) = \dim u^{-1}(h)$ contient un ouvert non vide V. Puisque u est dominant, $U = u^{-1}(V)$ est alors un ouvert non vide de G, et contient un point fermé x de G (puisque G est un préschéma de Jacobson (EGA IV 10.4.6)). Alors la translation à droite r_x est un isomorphisme de Ker u sur $u^{-1}(u(x))$, si bien que :

$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim u^{-1}(u(x)) = \dim u^{-1}(h) = \dim G - \dim H, \text{ cqfd.}$$

Lemme 1.2.1. Soient $f : X' \longrightarrow X$ et $g : Y' \longrightarrow Y$ deux morphismes quasi-compacts et dominants de préschémas sur un anneau local artinien A ; alors $f \times_A g : X' \times_A Y' \longrightarrow X \times_A Y$ est dominant.

En effet, on a $f \times_A g = (f \times_A \mathrm{id}_{Y'}) \circ (\mathrm{id}_X \times_A g)$. Il suffit donc de montrer que $f \times_A \mathrm{id}_{Y'}$ et $\mathrm{id}_X \times_A g$ sont dominants. On peut pour cela remplacer A par son corps résiduel k. Dans ce cas X et Y' sont plats sur A = k, et comme $f \times_A \mathrm{id}_{Y'}$ (resp. $\mathrm{id}_X \times_A g$) est déduit de f (resp. g) par le changement de base plat $Y' \longrightarrow A$ (resp. $X \longrightarrow A$), il est dominant (EGA IV 2.3.7).

Contre exemple 1.2.2. Soient k un corps de caractéristique O, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe additif G_a. Soit $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, u(G) n'est pas fermé dans H.

Proposition 1.3. Soient k un corps, G un k-groupe localement de type fini, $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de k-groupes, x un point de G. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est quasi-fini (resp. non ramifié, resp. plat, resp. lisse, resp. étale) au point x.

(ii) u est localement quasi-fini (resp. non ramifié, resp. plat, resp. lisse, resp. étale).

Il suffit de montrer que (i) entraîne (ii). D'après (EGA IV 2.7.1 et 17.7.1), on peut supposer k algébriquement clos et $x \in G(k)$. Soit alors U l'ouvert non vide de G formé des points où u est quasi-fini (resp. non ramifié, resp. plat, resp. lisse, resp. étale). Il suffit de montrer que tout point fermé y de G appartient à U, puisque G est un préschéma de Jacobson (EGA IV 10.4.6). Il existe alors une translation qui envoie x sur y, ce qui montre que u est quasi-fini (resp. non ramifié, resp. plat, resp. lisse, resp. étale) en y, cqfd.

Corollaire 1.3.1. Soient k un corps et G un k-groupe. Alors, pour que G soit localement quasi-fini (resp. non ramifié, resp. lisse, resp. étale) sur k, il faut et il suffit que G soit quasi-fini (resp. non ramifié, resp. lisse, resp. étale) sur k en un point.

Il suffit d'appliquer 1.3 au cas où H est le k-groupe unité, compte tenu de ce que l'ensemble des points en lesquels G est de type fini sur k est ouvert, et du lemme suivant :

Lemme 1.3.1.1. Soient k un corps et G un k-groupe. S'il existe un ouvert non vide U de G tel que U soit localement de type fini sur k, alors G est localement de type fini sur k.

Soient $x \in G$ et $y \in U$. Soit k' une extension de k composée des extensions $\varkappa(x)$ et $\varkappa(y)$. Posons $G' = G \otimes_k k'$, $U' = U \otimes_k k'$. Il existe alors un point rationnel $x' \in G'$ au-dessus de x et un point rationnel $y' \in U'$ au-dessus de y. Alors $V' = x'.y'^{-1}.U'$ est un ouvert contenant x' et localement de type fini sur k'. La projection $G' \longrightarrow G$ étant ouverte (EGA IV 2.4.6), la projection de V' sur G est un ouvert V de G contenant x et localement de type fini sur k, d'après (EGA IV 17.7.5), cqfd.

Corollaire 1.3.2. Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes localement de type fini, $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de A-groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est universellement ouvert,

(ii) u est ouvert,

(iii) u est ouvert en un point de G,

(iv) l'application $u^o : G^o \longrightarrow H^o$ déduite de u est dominante, ou ce qui revient au même (1.2 et VI_A 2.4), u^o est surjective,

(v) il existe une composante connexe $G^\frown$ de G telle que, si $H^\frown$ désigne la composante connexe de H contenant $u(G^\frown)$, l'application $u^\frown : G^\frown \to H^\frown$ déduite de u soit dominante.

Il est clair que (i) entraîne (ii), et que (ii) entraîne (iii). Puisque G^o (resp. $G^\frown$) est ouvert dans G (VI_A 2.3) et que H^o (resp. $H^\frown$) est irréductible (VI_A 2.4.1), on voit que (ii) entraîne (iv) (resp. que (iii)) entraîne (v). Reste donc à montrer que (v) implique (i) (car, (iv) étant un cas particulier de (v), cela montrera aussi que (iv) entraîne (i)).

L'ouvert $G^\wedge$(resp. $h^\wedge$) de G (resp. H) sera muni de sa structure de préschéma induit, et $u^\wedge$ désignera le morphisme $u^\wedge\colon G^\wedge \longrightarrow H^\wedge$ déduit de u. Soit k le corps résiduel de A. Puisque $G^\wedge$ est quasi-compact sur A (VI_A 2.4.1) et que $H^\wedge$ est séparé sur A (VI_A 0.2), $u^\wedge$est quasi-compact, donc $u^\wedge \otimes_A k$ est quasi-compact et dominant ; il en est de même de $u^\wedge \otimes_A \overline{k}$ (où $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k) d'après (EGA IV 2.3.7). Puisque $G^\wedge \otimes_A \overline{k}$ est réunion de composantes connexes de $G \otimes_A \overline{k}$, il est clair que $G \otimes_A \overline{k}$, $H \otimes_A \overline{k}$ et $u \otimes_A \overline{k}$ vérifient l'assertion (v). Nous sommes ainsi ramenés au cas où A = k est un corps algébriquement clos, compte tenu de (EGA IV 2.6.4).

Dans ce cas, nous pouvons de plus remplacer u par u_{red}, et nous sommes ramenés au cas où H est réduit. Alors $H^\wedge$ est réduit, et le théorème de platitude générique (EGA IV 6.9.1) affirme que, puisque $u^\wedge$ est dominant, $u^\wedge$ (donc aussi u) est plat au point générique de $G^\wedge$, si bien que u est plat (1.3), donc universellement ouvert (EGA 2.4.6).

Proposition 1.4. *Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes localement de type fini, et $u : G \longrightarrow H$ un morphisme quasi-compact de A-groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est propre,*

(ii) *il existe $h \in H$ tel que la fibre $u^{-1}(h)$ soit non vide et propre sur $\kappa(h)$,*

(iii) Ker u *est propre.*

Il est clair que (i) entraîne (iii), et que (iii) entraîne (ii). D'autre part, il résulte des hypothèses que u est de type fini et séparé

(EGA I 5.5.1) (puisque G est séparé (VI_A 0.2)). Il reste donc à montrer que l'assertion (ii) entraîne que u est universellement fermé, si bien que nous pouvons supposer A égal à son corps résiduel k, et même que k est algébriquement clos et que $h \in H(k)$ (EGA IV 2.6.4). Nous avons vu (1.2) qu'alors u(G) est l'ensemble sous-jacent à un sous-préschéma en groupes réduit fermé de H ; toute immersion fermée étant propre (EGA II 5.4.2), nous pouvons supposer que u est surjectif, et que H est réduit. Puisque u est surjectif, le groupe G(k) opère transitivement sur l'ensemble des points fermés de H ; quel que soit le point fermé y de H, $u^{-1}(y)$ est donc propre sur $\kappa(y)$. D'après (EGA IV 9.6.1), l'ensemble des $y \in H$ tels que $u^{-1}(y)$ ne soit pas propre sur k(y) est localement constructible;puisqu'il ne contient aucun point fermé, il est vide (EGA IV 10.1.2). Considérons alors le point générique de H^o. D'après (EGA IV 8.10.5) utilisé suivant la méthode 8.1.2 b), il existe un ouvert non vide V de H^o tel que la restriction de u au-dessus de l'ouvert V soit propre. Il est clair alors que les g. V ($g \in G(k)$) forment un recouvrement ouvert de H tel que, pour tout $g \in G(k)$, la restriction de u au-dessus de l'ouvert g.V soit propre ; on en déduit que u est propre (EGA IV 2.4.3 (vii)).

Corollaire 1.4.1. Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes localement de type fini, $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de A-groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est localement quasi-fini,

(ii) u est quasi-fini en un point,

(iii) Ker u est discret,

(iv) la restriction de u à chaque composante connexe de G est finie.

Enfin, si u est quasi-compact, ces assertions sont équivalentes à la suivante :

(v) u est fini.

Il est clair que (iv) entraîne (iii), que (iii) entraîne (ii) (EGA I 6.4.4), et que dans le cas où u est quasi-compact, les assertions (iv) et (v) sont équivalentes. On a déjà vu que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes (1.3). Montrons enfin que (i) entraîne (iv). Soit $G^{\wedge}$ une composante connexe de G ; puisque $G^{\wedge}$ est de type fini sur A (VI_A 2.4.1) et que H est séparé (VI_A 0.2), la restriction $u^{\wedge}$ de u à $G^{\wedge}$ est de type fini et séparé, puisque $G^{\wedge}$ est séparé sur A (EGA I 5.5.1). Il suffit donc de montrer que $u^{\wedge}$ est universellement fermé ; nous pouvons donc supposer que A est égal à son corps résiduel k, et même que k est algébriquement clos (EGA IV 2.6.4), car $G^{\wedge}\otimes_A \overline{k}$, où $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k, est la somme d'un nombre fini de composantes connexes de $G \otimes_A \overline{k}$. Soit alors g un point fermé de $G^{\wedge}$, si $u^{o} : G^{o} \longrightarrow H$ est la restriction de u à G^{o}, on a $u^{\wedge} = r_{u(g^{-1})} \circ u^{o} \circ r_g$, où r_g désigne la translation à droite par g, et pour montrer que $u^{\wedge}$ est propre, il suffit de montrer que u^{o} est propre. Par hypothèse, u est localement quasi-fini, donc la fibre $\mathrm{Ker}\, u$ est discrète (et non vide) ; nous avons vu que u^{o} est de type fini, donc la fibre $\mathrm{Ker}\, u^{o}$ est finie (EGA II 6.2.2), donc propre, et non vide ; donc u^{o} est propre (1.4), donc fini (EGA III 4.4.2) puisqu'il est quasi-fini.

Corollaire 1.4.2. Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes localement de type fini, $u : G \longrightarrow H$ un morphisme quasi-compact de A-groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une immersion fermée,

(ii) u est un monomorphisme,

(iii) Ker u *est isomorphe au* k-*groupe unité*.

En particulier, *tout sous-préschéma en groupes de* H *est fermé*.

Il est clair que (i) entraîne (ii), et, si l'on considère les foncteurs que représentent respectivement G et H, il est immédiat que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si Ker u est le k-groupe unité, Ker u est une fibre propre et non vide, donc (1.4), u est un monomorphisme propre, et de présentation finie puisque H est localement noethérien (EGA IV 6.1), donc est une immersion fermée (EGA IV 8.11.5).

Le dernière assertion résulte de ce que, puisque H est localement noethérien, toute immersion $G \longrightarrow H$ est quasi-compacte (EGA I 6.6.4).

Contre-exemple 1.4.3. Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe G_a. Soit $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, Ker u = 0, mais u n'est pas une immersion fermée (1.2.2).

Nous utiliserons plus loin les deux résultats suivants qui auraient dû figurer dans l'Exposé VI_A :

Lemme 1.5. *Soient* k *un corps et* G *un* k-*groupe localement de type fini*. *Toute composante irréductible de* G *a même dimension que* G, *autrement dit*, *quel que soit* $g \in G$, *on a* $\dim_g G = \dim G$.

Les deux assertions sont équivalentes (EGA IV 10.6.3 et 10.7.1). Soit $G^{\wedge}$ une composante irréductible de G. Alors si $\overline{k}$ désigne la clôture algébrique de k, $G^{\wedge}\otimes_k \overline{k}$ est réunion de composantes irréductibles de $G\otimes_k \overline{k}$ (EGA IV 4.4.1) ; on est donc ramené au cas où k est algébriquement clos (EGA IV 4.1.4). Dans le cas, $G^{\wedge}$ se déduit de G^o par translation, donc $\dim G^{\wedge} = \dim G^o = \dim G$.

Proposition 1.6. Soient S un préschéma de caractéristique zéro, G un S- préschéma en groupes localement de présentation finie le long de la section unité ε. Puisque G soit lisse sur S le long de la section unité, il faut et il suffit que le $\mathcal{O}_S$-Module $\omega_{G/S} = \varepsilon^*(\Omega^1_{G/S})$, (appelé Module conormal à la section unité de G), soit localement libre.

Rappelons qu'un préschéma S est dit de caractéristique zéro si pour tout point fermé x de S, le corps $\kappa(x)$ est de caractéristique zéro.

Rappelons aussi (II 4.11) que, si π désigne le morphisme structural $G \to S$, on a $\Omega^1_{G/S} = \pi^*(\omega_{G/S})$, si bien qu'il revient au même de dire que le $\mathcal{O}_S$-Module $\omega_{G/S}$ est localement libre, ou que le $\mathcal{O}_G$-Module $\Omega^1_{G/S}$ est localement libre.

La proposition est alors une conséquence immédiate de (EGA IV 16.12.2 et 17.12.5).

Corollaire 1.6.1. (Cartier) Etant donné un corps k de caractéristique zéro, tout k-groupe localement de type fini sur k sur k est lisse sur k.

En effet, il est alors clair que le k-module $\omega_{G/k}$ est localement libre, donc (1.7) G est lisse sur k au point unité e, donc lisse sur k (1.3.1).

2. "Propriétés ouvertes" des groupes et des morphismes de groupes localement de présentation finie.

2.0. Dans tout ce qui suit, S désignera un préschéma quelconque ; un S-préschéma en groupes sera appelé un S-groupe G. Etant donné un S-groupe G, nous noterons π ou π_G le morphisme structural $G \to S$, ε la section unité, c la symétrie et μ le morphisme de multiplication $G \times_S G \to G$.

Etant donnéeune propriété $\mathbb{P}(u)$ pour un morphisme de S-préschémas

$u : X \longrightarrow Y$, nous dirons que $\mathbb{P}(u)$ est stable par changement de base si, chaque fois que u vérifie $\mathbb{P}(u)$, il en est de même du morphisme $u_{(Y')}$, quel que soit le S-morphisme $Y' \longrightarrow Y$. On dit que $\mathbb{P}(u)$ est de nature locale pour la topologie $\mathbb{T}$ (cf. IV 4 et 6) si $\mathbb{P}(u)$ vérifie les deux conditions suivantes :

a) $\mathbb{P}(u)$ est stable par changement de base,

b) chaque fois qu'il existe une famille de S-morphisme $Y_i \longrightarrow Y$ couvrante pour la topologie $\mathbb{T}$ et telle que chacun des morphismes $u_{(Y_i)}$ vérifie $\mathbb{P}(u)$, alors u vérifie $\mathbb{P}(u)$.

Proposition 2.1. Soit $\mathbb{P}(u)$ une propriété pour un morphisme de S-préschémas. Supposons que $\mathbb{P}(u)$ soit de nature locale pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte. Soient G et H deux S-groupes et $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de S-groupes. Supposons G plat et universellement ouvert sur S. Soit W le plus grand ouvert de H au-dessus duquel u vérifie la propriété $\mathbb{P}(u)$ et soit $V = u^{-1}(W)$. Alors il existe un ouvert U de S tel que V soit un sous-préschéma en groupes ouvert de $G|U$.

L'existence d'un plus grand ouvert W de H au-dessus duquel u vérifie $\mathbb{P}(u)$ résulte de ce que $\mathbb{P}(u)$ est de nature locale pour la topologie de Zariski. Puisque π_G est universellement ouvert, $\pi_G(V)$ est un ouvert U de S. Il suffit de montrer que V est un sous-préschéma en groupes de $G|U$. Nous pouvons donc supposer que $U = S$.

Posons alors $G' = G\times_S V$, $H' = H\times_S V$, $V' = V\times_S V$, $W' = W\times_S V$ et $u' = u_{(V)}$; soit W_1' le plus grand ouvert de H' au-dessus duquel u' vérifie $\mathbb{P}(u)$; puisque V est plat et universellement ouvert sur S, il en est de même de H' sur H, et le lemme 2.1.1 ci-dessous montre que $W_1' = W'$. Considérons alors l'automorphisme de V-préschémas a (resp. b) de G' (resp. H'), translation à droite par le symétrique de la section diagonale δ (resp. par le symétrique de $u(\delta)$), défini par $a(g,v) = (g.v^{-1},v)$ (resp. $b(h,v) = h.\ u(v^{-1}),v)$), quels que soient le morphisme $T \longrightarrow S$, $g \in G(T)$, $v \in V(T)$ et $h \in H(T)$. Il est clair que $u' \circ a = b \circ u'$, ce qui montre que W' est stable par b, donc que V' est stable par a, si bien que V est un sous-préschéma en groupes de G.

Lemme 2.1.1. <u>Soit</u> $\mathbb{P}(u)$ <u>une propriété pour un</u> S-<u>morphisme</u> u. <u>Supposons</u> $\mathbb{P}(u)$ <u>de nature locale pour la topologie</u> <u>fpqc</u>. <u>Soit</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un</u> S-<u>morphisme de préschémas</u>, <u>et soit</u> $g : Y' \longrightarrow Y$ <u>un</u> S-<u>morphisme plat et ouvert</u>. <u>Soit</u> W (<u>resp</u>. W_1') <u>le plus grand ouvert de</u> Y (<u>resp</u>. Y') <u>au-dessus duquel</u> f (<u>resp</u>. $f' = f_{(Y')}$) <u>vérifie</u> $\mathbb{P}(u)$. <u>Alors</u> $W_1' = W\times_Y Y'$.

Posons $W' = W\times_Y Y'$; puisque $\mathbb{P}(u)$ est stable par changement de base, il est clair que $W' \subset W_1'$. Posons $W_1 = g(W_1')$, $V_1 = f^{-1}(W_1)$ et $V_1' = V_1 \times_{W_1} W_1'$; il est clair que $V_1' = f'^{-1}(W_1')$. Puisque g est plat et ouvert, le morphisme $W_1' \longrightarrow W_1$ déduit de g est fidèlement plat et ouvert, donc couvrant pour la topologie fpqc. Puisque le morphisme $V_1' \longrightarrow W_1'$ déduit de f' vérifie $\mathbb{P}(u)$, il en est de même du morphisme $V_1 \longrightarrow W_1$ déduit de f, donc $W_1 \subset W$, et $W_1' \subset g^{-1}(W_1) \subset g^{-1}(W) = W'$; donc $W' = W_1'$, cqfd.

Remarque 2.1.2. Un grand nombre de propriétés pour un morphisme sont de nature locale pour la topologie fpqc (cf. EGA IV 2.6 et 2.7) ; citons celles d'être plat, lisse, non ramifié, étale (EGA IV 17.7.3), localement quasi-fini.

La démonstration de 2.1 n'utilise en fait que des changements de base par des morphismes plats ; la proposition s'appliquera donc à une propriété vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie fpqc, et stables par changements de base par des morphismes plats (exemple : celle d'être quasi-compact et dominant).

Bien entendu, on peut énoncer une proposition analogue concernant les propriétés de nature locale pour une topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la topologie de Zariski, la condition à vérifier sur G étant alors que $\mathcal{T}$ soit universellement ouvert et couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

En particulier, si G est plat et localement de présentation finie sur S, on a un énoncé analogue pour les propriétés stables par changements de base par des morphismes plats et localement de présentation finie, et vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie fpqc (par exemple, celles d'être régulier, réduit, de Cohen-Macaulay, etc... (EGA IV 6.8)).

Proposition 2.2. *Soient* G *et* H *deux* S-*groupes et* u : G $\longrightarrow$ H *un morphisme de* S-*groupes*. *Alors* :

(i) *Supposons* G *ou* H *plat sur* S, *et* G *ou* H *localement de présentation finie sur* S, *alors le plus grand ouvert* V *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit plate et localement de présentation finie* (*resp*. *lisse*, *resp*. *étale*) *est un sous-préschéma en groupes ouvert de* $G|U$, *où* U *désigne un ouvert convenable de* S.

(ii) *Supposons* G *ou* H *universellement ouvert sur* S, *alors le plus grand ouvert* V *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit universellement ouverte est un sous-préschéma en groupes ouvert de* $G|U$, *où* U *est un ouvert convenable de* S.

Montrons d'abord (i). Montrons que la restriction π_V de π_G à V est plate et localement de présentation finie :

a) si π_G est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_V.

b) Si π_H est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_V, comme composé de la restriction de u à V et de π_H.

Donc, dans les quatre cas envisagés dans l'énoncé, π_V est plat et localement de présentation finie, donc universellement ouvert (EGA IV 2.4.6). Posons $U = \pi_V(V)$; U est donc un ouvert de S. Il suffit alors de montrer que V est un sous-préschéma en groupes ouvert de $G|U$; nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons alors $G' = G\times_S V$, $H' = H\times_S V$, $V' = V\times_S V$ et $u' = u_{(V)}$. Alors V étant plat et localement de présentation finie sur S, il en est de même de H' sur H. D'après EGA IV 17.7.4, V' est alors le plus grand ouvert de G' tel que la restriction de u' à V' soit plate et localement de présentation finie (resp. lisse, resp. étale). Les automorphismes a et b étant définis comme dans la démonstration de 2.1, il est alors clair que V' est stable par a, donc que V est un sous-préschéma en groupes de G.

Montrons (ii). La restriction π_V de π_G à V est un morphisme universellement ouvert, soit parce qu'il en est de même de π_G, soit comme composé de la restriction de u à V et de π_H dans le cas où π_H est universellement ouvert. Posons $U = \pi_V(V)$; U est alors un ouvert de S. Il suffit de montrer que V est un sous-préschéma en groupes ouvert de $G|U$. Nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons comme précédemment $G' = G\times_S V$, $H' = H\times_S V$, $V' = V\times_S V$ et $u' = u_{(V)}$. Alors $\pi_V : V \longrightarrow S$ est surjectif et universellement ouvert, il en est de même de $G' \longrightarrow G$, si bien que V' est le plus grand ouvert de G' tel que la restriction de u' à V' soit universellement ouverte, en vertu de (EGA IV 14.3.4) et (ii). Les automorphismes a et b étant définis comme précédemment, il est alors clair que V' est stable par a, donc que V est un sous-préschéma en groupes de G.

Corollaire 2.3. Soit G un S-groupe. Le plus grand ouvert V de G tel que V soit plat et localement de présentation finie (resp. lisse, resp. étale, resp. universellement ouvert) sur S est un sous-préschéma en groupes ouvert de $G|U$, où U désigne un ouvert convenable de S.

Il suffit d'appliquer 2.2 au cas où H est le S-groupe unité et où u est l'unique morphisme de S-groupes $G \longrightarrow H$, car alors π_H est un morphisme et $\pi_G = \pi_H \circ u$.

Corollaire 2.4. Soit G un S-groupe ; supposons qu'il existe un voisinage X de la section unité tel que X soit plat et localement de présentation finie (resp. lisse, resp. étale, resp. universellement ouvert) sur S ; il existe alors un sous-préschéma en groupes ouvert V de G tel que V soit plat et localement de présentation finie (resp. lisse, resp. étale, resp. universellement ouvert) sur S.

Il suffit d'appliquer 2.3 en remarquant qu'ici avec les notations de 2.2, on a $\varepsilon(S) \subset V$, donc $U = S$.

Proposition 2.5. Soit $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de S-groupes.
(i) Supposons que G soit plat et de présentation finie sur S aux points de sa section unité, et que H soit de présentation finie sur S aux points de sa section unité. Alors l'ensemble U des points $s \in S$ tels que u_s soit plat (resp. lisse, resp. étale) est ouvert dans S.

Si, en particulier, on suppose G plat sur S, et G et H localement de présentation finie sur S, alors l'ensemble V des points de G où u est plat (resp. lisse, resp. étale) est égal à $G|U$.

(ii) Supposons que u soit localement de présentation finie (resp. localement de type fini) aux points de la section unité de G, et que, pour tout $s \in S$, G_s soit localement de type fini sur $\kappa(s)$ (condition vérifiée si G est de type fini sur S aux points de la section unité (1.3.1.1)). Alors, l'ensemble U des $s \in S$ tels que u_s soit non ramifié (resp. localement quasi-fini) est ouvert dans S.

Si on suppose de plus que u est localement de présentation finie (resp. localement de type fini), alors l'ensemble V des points de G où u est non ramifié (resp. quasi-fini) est égal à $G|U$.

Montrons (i). Notons d'abord (1.3.1.1) que, pour tout $s \in S$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Soit Y l'ensemble des points de H où π_H est de présentation finie, et soit X l'ensemble des points de $u^{-1}(Y)$ où π_G est plat et de présentation finie. Rappelons (EGA IV 1.4.2 et 11.3.1) que X (resp. Y) est ouvert dans G (resp. H). Soit $u_X : X \longrightarrow Y$ le morphisme déduit de u. Puisque Y (resp. X) contient la section unité de H(resp. G), la restriction π_X de π_G à X est surjective, et le morphisme $S \longrightarrow X$ déduit de ε_G est une S-section de X. Soit V_X l'ensemble des points de X où u_X est plat (resp. lisse, resp. étale). Soit $x \in X$ et posons $s = \pi_X(x)$; alors d'après (EGA IV 11.3.10), (resp. 11.3.10 et 17.5.1, resp. 11.3.10 et 17.6.1), x appartient à V_X si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, resp. étale) au point x, ou, ce qui revient au même (1.3), si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, resp. étale). Par conséquent on a $U = \varepsilon_G^{-1}(V_X)$ et

$V_X = \pi_X^{-1}(U)$. Rappelons (EGA IV 11.3.1 (resp. 17.3.7)) que V_X est ouvert dans X, donc dans G, si bien que U est ouvert dans S.

La seconde assertion résulte de ce qu'on vient de voir, car alors, $X = G$, $Y = H$, $V_X = V$, donc $V = \pi_G^{-1}(U)$.

L'assertion (ii) se montre de manière analogue, en utilisant (1.3) et le fait que pour qu'un S-morphisme $u : X \longrightarrow Y$ localement de présentation finie (resp. localement de type fini) soit non ramifié (resp. quasi-fini) en un point $x \in X$, il faut et il suffit que, si s désigne la projection de x sur S, u_s soit non ramifié (resp. quasi-fini) au point x (EGA IV 17.4.2 et $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}20$).

Corollaire 2.6. *Soit* $u : G \longrightarrow H$ *un morphisme de S-groupes qui soit un morphisme radiciel (ce qui est le cas si u est un monomorphisme* (EGA I 3.5.4)). *On suppose G et H localement de présentation finie sur S et G plat sur S. Alors l'ensemble U des $s \in S$ tels que u_s soit une immersion ouverte est ouvert dans S, et la restriction de u au-dessus de U est une immersion ouverte.*

D'après (2.5 (i)), l'ensemble U' des points $s \in S$ tels que u_s soit étale est ouvert dans S. Puisque u est radiciel, il en est de même de u_s, quel que soit $s \in S$, donc d'après (EGA IV 17.9.1), $U = U'$, ce qui montre que U est ouvert. Enfin, d'après (2.5 (i)), la restriction de u au-dessus de U est étale ; puisque u est radiciel, cette restriction est une immersion ouverte (EGA IV 17.9.1).

Proposition 2.7. *Soit G un S-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *G est non ramifié sur S aux points de la section unité,*

(ii) *la section unité est une immersion ouverte,*

(iii) *G est de présentation finie sur S aux points de la section unité, et* quel que soit $s \in S$, G_s est non ramifié sur $\varkappa(s)$.

Si, de plus, on suppose G localement de présentation finie sur S, alors chacune des trois conditions précédentes est équivalente à la suivante :

(iv) G est non ramifié sur S.

L'équivalence des assertions (i) et (ii) résulte du lemme plus général (2.7.1) ci-dessous. Remarquons (1.3.1.1) que l'une ou l'autre des conditions (i) ou (iii) entraîne que, quel que soit $s \in S$, G_s est localement de type fini sur $\varkappa(s)$. Alors (EGA IV 17.4.1), l'assertion (i) équivaut au fait que, quel que soit $s \in S$, G_s est non ramifié sur $\varkappa(s)$ au point e_s, unité de G_s, ou encore (1.3.1), au fait que G_s est non ramifié sur $\varkappa(s)$, donc les assertions (i) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si G est localement de présentation finie sur S, les assertions (iii) et (iv) sont équivalentes (EGA IV 17.4.1).

Lemme 2.7.1. Soit G un S-préschéma muni d'une section ε. Pour que G soit non ramifié sur S aux points de cette section, il faut et il suffit que ε soit une immersion ouverte.

On sait déjà que la condition est nécessaire (EGA IV 17.4.1 a) $\Longrightarrow$ b")). Réciproquement, si ε est une immersion ouverte, alors la restriction à $\varepsilon(S)$ du morphisme structural $C \longrightarrow S$ est un isomorphisme, donc G est non ramifié sur S aux points de $\varepsilon(S)$.

Corollaire 2.8. Soit $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de S-groupes. Supposons que u soit localement de présentation finie (resp. localement de type fini) et que pour tout $s \in S$, G_s soit localement de type fini sur $\varkappa(s)$. Les conditions *suivantes sont équivalentes* :

(i) u *est non ramifié* (*resp.* *localement quasi-fini*),

(ii) *quel que soit* $s \in S$, $u_s : G_s \longrightarrow H_s$ *est non ramifié*, (*resp.* *localement quasi-fini*),

(iii) Ker u *est non ramifié* (*resp.* *localement quasi-fini*) *sur* S,

(iv) *la section unité* $S \longrightarrow$ Ker u *est une immersion ouverte* (*resp.* *les fibres de* Ker u *sont discrètes*).

Il est clair que les assertions (i) et (i)) sont équivalentes (EGA IV 17.4.1) (resp. $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}20$). Le rappel (2.8.1) ci-dessous montre que (i) entraîne (iii). De plus, (iii) entraîne que, quel que soit $s \in S$, si e_s désigne l'élément unité de H_s, $(\mathrm{Ker}\ u)_s = \mathrm{Ker}\ u_s = u_s^{-1}(e_s)$ est non ramifié (resp. localement quasi-fini) sur $k(s)$, donc (puisque $k(s) \xrightarrow{\sim} k(e_s)$) que u_s est non ramifié (resp. quasi-fini) au point unité de G_s, donc que u_s est non ramifié (resp. localement quasi-fini) (1.3). Donc (iii) entraîne (ii). Enfin, les assertions (iii) et (iv) sont équivalentes (2.7).

Rappel 2.8.1. Rappelons (I) qu'étant donné un morphisme $u : G \longrightarrow H$ de S-groupes, on appelle *noyau de u*, et on note Ker u le sous-foncteur en groupes de G défini en posant, quel que soit le morphisme $f : T \longrightarrow S$

$$\mathrm{Ker}\ u\ (T) = \{a \in G(T)\ /\ u \circ a = \varepsilon_H \circ f\} \quad .$$

Il est clair (EGA I 4.4.1) que ce foncteur est représentable par le S-groupe $G \times_H S = u^{-1}(\varepsilon_H(S))$, noté simplement Ker u. En particulier, le morphisme structural Ker $u \longrightarrow S$ se déduit de u par changement de base.

Lemme 2.9. *Soit* $\pi : G \longrightarrow S$ *un morphisme admettant une* S-*section* ε.

(i) Si π est injectif, il est entier (*).

(ii) Si π est localement de type fini, et si, pour tout $s \in S$, π_s est un isomorphisme, alors π est un isomorphisme (**).

Remarquons tout d'abord, que d'après le lemme (2.9.1) ci-dessous, π, étant un homéomorphisme, est un morphisme affine.

Si π est injectif, ε est surjectif. Puisque ε est une immersion surjective, $\varepsilon(S)$ est isomorphe au sous-préschéma fermé de G défini par un Nilidéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$. Puisque ε est une S-section du morphisme π, on a une décomposition en somme directe : $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_S$-Modules. Puisque $\mathcal{J}$ est un Nilidéal de $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{J}$ est évidemment entier sur $\mathcal{O}_S$, donc $\mathcal{O}_X$ est entier sur $\mathcal{O}_S$, et π est entier.

Supposons maintenant que π soit localement de type fini. Alors ε est localement de présentation finie (EGA IV 1.4.3 (v)), donc $\mathcal{J}$ est un idéal de type fini de $\mathcal{O}_X$ (EGA IV 1.4.1). Quel que soit $s \in S$, on a $\mathcal{O}_{X_s} = \kappa(s) \oplus (\mathcal{J} \otimes \kappa(s))$. Par hypothèse, ε est un isomorphisme, donc $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_S} \kappa(s) = 0$, pour tout $s \in S$, donc a fortiori $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \kappa(x) = 0$ pour tout $x \in X$, ce qui entraîne, d'après le lemme de Nakayama, que $\mathcal{J} = 0$, donc que π est un isomorphisme.

Lemme 2.9.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préschémas qui soit un homéomorphisme ; alors f est un morphisme affine (***).

(*) C'est aussi un cas particulier de EGA IV 18.12.11, car π est évidemment un homéomorphisme universel.

(**) C'est aussi une conséquence immédiate de EGA IV 18.12.6.

(***) Cf. EGA IV 18.12.7.1 pour un résultat un peu plus général, se prouvant par la même démonstration.

Il suffit de montrer que tout point $y \in Y$ possède un voisinage ouvert W tel que la restriction de f au-dessus de W soit un morphisme affine. Soit donc $y \in Y$, et soit V un voisinage ouvert affine de y dans Y. Soit $V' = f^{-1}(V)$. Alors V' est un voisinage ouvert de $x = f^{-1}(y)$ dans X. Il existe un voisinage ouvert affine W' de x dans X contenu dans V'. Posons alors $W = f(W')$. Alors W est un voisinage ouvert de y dans Y contenu dans le schéma affine V, donc W est un schéma. Puisque W' est un schéma affine la restriction de f au-dessus de W est alors un morphisme affine (EGA II 1.2.3).

Corollaire 2.10. Soit G un S-groupe localement de type fini. Supposons que, quel que soit $s \in S$, G_s soit le $\kappa(s)$-groupe unité, alors G est le S-groupe unité.

Plus généralement :

Corollaire 2.11. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme localement de type fini. Pour que f soit un monomorphisme, il faut et il suffit que pour tout $s \in S$, f_s soit un monomorphisme.

Il est clair que la condition est nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. Si, pour tout $s \in S$, f_s est un monomorphisme, a fortiori pour tout $y \in Y$, f_y est un monomorphisme ; nous pouvons donc supposer que $Y = S$.

D'après (EGA I 5.3.8), pour montrer que f est un monomorphisme, il suffit de montrer que $\Delta_f : X \longrightarrow X\times_S X$ est un isomorphisme, ou, ce qui revient au même, que la première projection $p : X\times_S X \longrightarrow X$ est un isomorphisme. Mais, si f_s est un monomorphisme, il résulte de même de (EGA I 5.3.8) que la première projection $X_s \times_{\kappa(s)} X_s \longrightarrow X_s$ (qui s'identifie à p_s) est un isomorphisme. Or p possède la S-section Δ_f, donc le lemme (2.9) affirme que si pour tout $s \in S$, p_s est un isomorphisme, alors il en est de même de p, cqfd.

Corollaire 2.12. Soit G un S-préschéma possèdant une S-section ε. Supposons que le morphisme structural $\pi : G \longrightarrow S$ soit fermé. Soit $s \in S$ tel que π soit de présentation finie au point $\varepsilon(s)$, et que $\varepsilon_s : \mathrm{Spec}\,(\varkappa(s)) \longrightarrow G_s$ soit un isomorphisme (ou, ce qui revient au même, que $\pi_s : G_s \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\varkappa(s)$ soit un isomorphisme). Alors il existe un voisinage ouvert U de s dans S tel que $\varepsilon\times_S U : U \longrightarrow G\times_S U$ soit un isomorphisme.

Soit V l'ensemble des points de G où π est non ramifié ; on sait que V est ouvert (EGA 17.3.7) et contient $\varepsilon(s)$. Donc $U = \varepsilon^{-1}(V)$ est un ouvert de S contenant s, et tel que pour tout $t \in U$, π soit non ramifié en $\varepsilon(t)$. On vérifie aisément que si π est fermé, il en est de même de $\pi\times_S U$, donc nous pouvons supposer que $U = S$.

Alors $G - \varepsilon(S)$ est une partie fermée X de G (2.7.1), ne rencontrant pas G_s donc, puisque π est fermé, $\pi(X)$ est une partie fermée F de S ne rencontrant pas s ; posons $U = S - F$; U est un ouvert de S tel que $\varepsilon\times_S U$ soit un isomorphisme de U sur $G|U$.

3. Composante neutre d'un groupe localement de présentation finie

3.0. Etant donnée une partie A (resp. B) d'un S-préschéma X (resp. Y), par abus de notation, $A\times_S B$ désignera la partie de $X\times_S Y$ formée des points dont la première projection appartient à A et à la deuxième à B.

Etant donnée une partie A d'un S-groupe G, nous dirons que A est stable pour la loi de groupe de G si on a : $c(A) \subset A$ et $\mu(A\times_S A) \subset A$.

Définition 3.1. *Soit T un S-foncteur en groupes vérifiant la condition suivante* :

(+) *quel que soit* $s \in S$, *le foncteur* $T_s = T \otimes_S \varkappa(s)$ *est représentable*.

Soit alors T_s^o la composante connexe de l'élément neutre du $\varkappa(s)$-groupe T_s. On définit un sous-S-foncteur en groupes de T, appelé *composante neutre de T*, noté T^o, en posant quel que soit le morphisme $S' \longrightarrow S$:

$$T^o(S') = \{u \in T(S') \mid \forall s \in S,\ u_s(S'_s) \subset T_s^o\} \quad .$$

On a ainsi défini le foncteur $T \longmapsto T^o$ de $(\widehat{Sch/S})$-gr. dans $(\widehat{Sch/S})$-gr.

Remarques 3.2. (i) Soit T un S-foncteur en groupes vérifiant la condition (+), alors Lie (T^o/S) = Lie (T/S), en vertu de l'exposé II.

(ii) Si T et T' sont deux S-foncteurs en groupes vérifiant (+), alors :

a) si $T \subset T'$, alors $T^o \subset T'^o$,

b) si $T \subset T'$ et $T'^o \subset T$, alors $T^o = T'^o$,

c) si pour tout $s \in S$, T_s est localement de type fini sur $\varkappa(s)$, alors T^o satisfait la propriété (+), et on a $(T^o)^o = T^o$.

Proposition 3.3. *Soit T un S-foncteur en groupes vérifiant la condition* (+), *et soit S' un S-préschéma* ; *alors* $(T \times_S S')^o = T^o \times_S S'$, *autrement dit le foncteur* $T \longmapsto T^o$ *commute aux changements de base*, *i.e. le diagramme suivant est commutatif* :

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{Sch/S})\text{-gr} \arrow[r, "T \mapsto T^o"] \arrow[d] & (\widehat{Sch/S})\text{-gr.} \arrow[d] \\
(\widehat{Sch/S'})\text{-gr} \arrow[r] & (\widehat{Sch/S'})\text{-gr.}
\end{tikzcd}$$

Il suffit en effet de vérifier que, pour tout $s' \in S'$, dont on désigne par s l'image dans S, on a : $T_s^o \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s') = ((T\times_S S')\otimes_{S'} \kappa(s'))^o$, ce qui résulte de ($VI_A$ 2.1.1), car $(T\times_S S')\otimes_{S'} \kappa(s') = T_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$.

<u>Cas particulier</u> 3.4. Soit G un S-groupe ; notons $\underline{G}^o$ le sous-ensemble de G réunion des G_s^o lorsque s parcourt S. Alors $\underline{G}^o$ est une partie de G stable pour la loi de groupe de G (cf. 3.0) et quel que soit le morphisme $S' \longrightarrow S$, on a :

$$G^o(S') = \{ u \in G(S') \mid u(S') \subset \underline{G}^o \} \quad .$$

Lorsque $\underline{G}^o$ est une partie ouverte de G, il est clair que G^o est représentable par le sous-préschéma de G induit sur l'ouvert $\underline{G}^o$.

<u>Proposition</u> 3.5. <u>Soient</u> S <u>un préschéma quasi-compact et quasi-séparé</u>, <u>et</u> G <u>un</u> S-<u>groupe à fibres localement de type fini</u>. <u>Il existe alors un ouvert quasi-compact</u> U <u>de</u> G <u>contenant</u> $\underline{G}^o$.

La section unité ε étant une immersion, $\varepsilon(S)$ est un sous-espace quasi-compact de G, donc il existe un ouvert quasi-compact V de G qui contient $\varepsilon(S)$. Puisque S est quasi-séparé, et que V est quasi-compact, V est quasi-compact sur S (EGA IV 1.2.4), donc $V\times_S V$ est quasi-compact sur S, donc quasi-compact. Alors $V.V = (V\times_S V)$ est quasi-compact. Posons $V_s = V\cap G_s$, $V_s^o = V\cap G_s^o$. Alors V_s^o est un ouvert de G_s^o, dense dans G_s^o puisque G_s^o est irréductible (VI_A 2.4), donc $V_s^o.V_s^o = G_s^o$ (VI_A 0.5), ce qui montre que $V_s.V_s \supset G_s^o$, donc que $V.V \supset \underline{G}^o$. Enfin, puisque $V.V$ est quasi-compact, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $V.V$ et a fortiori $\underline{G}^o$.

<u>Corollaire</u> 3.6. <u>Soit</u> G <u>un</u> S-<u>groupe à fibres connexes et localement de type fini</u>. <u>Alors</u> G <u>est quasi-compact sur</u> S.

Notre assertion étant locale sur S (EGA I 6.6.1), on est ramené au cas où S est affine ; d'après (3.5), il existe alors un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{G}^o = G$, donc G est quasi-compact, donc quasi-compact sur le schéma affine S (EGA I 6.6.1).

Proposition 3.7. *Soit G un S-groupe localement de présentation finie ; alors $\underline{G}^o$ est ind-constructible dans G. Si on suppose que G est quasi-séparé sur S, et que S est quasi-compact et quasi-séparé, alors $\underline{G}^o$ est constructible. Par conséquent si G est quasi-séparé sur S, $\underline{G}^o$ est localement constructible.*

Montrons d'abord la première assertion. Puisque π est localement de présentation finie, étant donné $s \in S$, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(U) \subset V$ et que le morphisme $\pi' : U \longrightarrow V$ déduit de π soit de présentation finie. Posons alors $T = \varepsilon^{-1}(U)$ et $W = \pi'^{-1}(T)$. Alors le morphisme $\pi'' : W \longrightarrow T$ déduit de π' est de présentation finie, et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : T \to W$ déduit de ε. Pour tout $t \in T$, G_t^o étant irréductible (VI_A 2.4), $W \cap G_t^o$ est dense dans G_t^o, donc irréductible, donc connexe : c'est la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. La réunion W^o des $W \cap G_t^o$, pour $t \in T$, est localement constructible dans W, d'après (EGA IV 9.7.12). Mais il résulte de (VI_A 0.5) que $W^o.W^o$ est égal à $\underline{G}^o \cap \pi^{-1}(T)$. Or, puisque π est localement de présentation finie, il en est de même de μ (VI_A 0.1), donc du morphisme $\mu'' : W \times_T W \longrightarrow \pi^{-1}(T)$ déduit de μ. Par conséquent $\underline{G}^o \cap \pi^{-1}(T) = \mu''(W^o \times_T W^o)$ est ind-constructible dans $\pi^{-1}(T)$ (EGA IV 1.9.5 (viii)), car puisque W^o est localement constructible dans W, il est clair sur $W^o \times_T W^o$ est localement constructible dans $W \times_T W$. Ce qui montre que $\underline{G}^o$ est ind-constructible dans G.

Supposons maintenant S quasi-compact et quasi-séparé et G quasi-séparé sur S ; alors (3.5), il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{G}^o$. Puisque G est quasi-séparé sur S, G est quasi-séparé, donc l'ouvert U est rétrocompact (EGA IV 1.2.7), et il suffit de montrer que $\underline{G}^o$ est constructible dans U (EGA 0_{III} 9.1.8). De plus, U étant quasi-compact, donc quasi-compact sur S (EGA IV 1.2.4), et quasi-séparé sur S, la restriction de à U est de présentation finie, et d'après (EGA IV 9.7.12), $\underline{G}^o$ est localement constructible dans U, donc constructible dans U, puisque U est quasi-compact et quasi-séparé (EGA IV 1.8.1).

Corollaire 3.8. Soient S_o un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, I un ensemble préordonné filtrant croissante, $(A_i)_{i\in I}$ un système inductif de $\mathcal{O}_{S_o}$-Algèbres commutatives et quasi-cohérentes, $A = \varinjlim A_i$, $S_i = \operatorname{Spec} A_i$ pour $i \in I$, et $S = \operatorname{Spec} A$ (cf. EGA II 1.3.1). Soit G un S_o-préschéma en groupes localement de présentation finie. Alors d'application canonique $\varinjlim G^o(S_i) \longrightarrow G^o(S)$ est bijective.

Puisque G est localement de présentation finie sur S, l'application canonique : $\varinjlim G(S_i) \longrightarrow G(S)$ est bijective (EGA IV 8.14.2 c)). Il s'ensuit immédiatement que l'application canonique $\varinjlim G^o(S_i) \longrightarrow G^o(S)$ est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $s \in G^o(S) \subset G(S)$. Il existe $i \subset I$ tel que s se factorise au moyen de $s_i \in G(S_i)$ à travers $S \longrightarrow S_i$; par hypothèse, $s^{-1}(\underline{G}^o) = S$. Mais (3.7), G^o est ind-constructible dans S, donc $s_i{}^{-1}(\underline{G}^o)$ l'est dans S_i. Il résulte alors de (EGA IV 8.3.4) qu'il existe un indice $j \geq i$ tel que s_j^{-1} $(\underline{G}^o) = S_j$, où s_j est l'application déduite de s_i par le changement de base $S_j \longrightarrow S_i$. Cela montre que $s_j \in G^o(S_j)$, donc que s provient d'un élément de $\varinjlim G^{o}(S_i)$.

Proposition 3.9. *Soit G un S-groupe localement de présentation finie. Supposons que G^o soit représentable ; alors le morphisme canonique $i : G^o \longrightarrow G$ est une immersion ouverte ; de plus, G^o est quasi-compact sur S.*

Puisque G^o est un sous-foncteur du foncteur G, le morphisme i est un monomorphisme, donc est radiciel. D'après le définition du foncteur G^o, on vérifie immédiatement sur la définition (EGA IV 17.1.1) que i est un morphisme formellement étale (en remarquant que G^o est l'image de i dans G). Enfin, il résulte de la caractérisation (EGA IV 8.14.2 c)) des S-préschémas localement de présentation finie à l'aide du foncteur qu'ils représentent, et de (3.8), que, puisque G est localement de présentation finie sur S, il en est de même de G^o. Donc i est localement de présentation finie ; c'est donc un morphisme radiciel et étale; donc une immersion ouverte (EGA IV 17.9.1).

La dernière assertion résulte de (3.6).

Théorème 3.10. *Soit G un S-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *G est lisse sur S aux points de la section unité.*

(ii) *G est plat et localement de présentation finie sur S aux points de la section unité, et pour tout $s \in S$, G_s est lisse sur $\kappa(s)$.*

(iii) *Il existe un sous-préschéma en groupes ouvert G' de G, lisse sur S.*

(iv) *G^o est représentable par un sous-préschéma ouvert de G, lisse sur S.*

Il est clair que (iv) entraîne (iii), que (iii) entraîne (i), que (i) entraîne (iii) (2.4) et que (i) équivaut à (ii) (1.3.1 et EGA IV 17.5.1).

Montrons enfin que (iii) entraîne (iv). Le lemme 3.10.1 ci-dessous montre que G' contient G^o, et que $G'^o = G^o$. Comme il suffit de montrer que

$\underline{G^o}$ est ouvert dans G (3.4), on peut supposer que $G' = G$. Alors π est localement de présentation finie, donc, étant donné $s \in S$, on peut construire, comme dans la démonstration de (3.7), un ouvert T de S contenant s, et l'ouvert W tels que le morphisme $\pi'' : W \longrightarrow T$ déduit de π' soit de présentation finie et admette comme section le morphisme $\varepsilon'' : T \longrightarrow W$ déduit de ε. Pour tout $t \in T$, $W \cap G_t^o$ est alors la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. Puisque π est lisse, il en est de même de π'' qui est donc réduit et de présentation finie : alors (EGA IV 15.6.5), la réunion W^o des $W \cap G_t^o$ pour $t \in T$ est ouverte dans W. Mais il résulte de (VI_A 0.5) que $W^o.W^o$ est égal à $\underline{G^o} \cap \pi^{-1}(T)$. Pour montrer que $\underline{G^o}$ est ouvert, il suffit de montrer que tout $s \in S$ possède un voisinage T dans S tel que $\underline{G^o} \cap \pi^{-1}(T)$ soit ouvert dans $\pi^{-1}(T)$. Nous pouvons donc supposer désormais que $T = S$; il reste à montrer que $W^o.W^o$ est ouvert dans G. Puisque π est universellement ouvert, il en est de même de μ (VI_A 0.1). Donc puisque W^o est ouvert dans G, il en est de même de $W^o.W^o = \mu(W^o \times_S W^o)$, c.q.f.d.

Ce résultat sera amélioré en (4.4).

<u>Lemme</u> 3.10.1. <u>Soit</u> G <u>un</u> S-<u>groupe à fibres localement de type fini</u>. <u>Alors tout sous-préschéma en groupes ouvert</u> G' <u>de</u> G <u>contient</u> $\underline{G^o}$, <u>et vérifie</u> : $\underline{G^o} = \underline{G'^o}$.

Soit $s \in S$; posons $G''_s = G'_s \cap G^o_s$; alors G''_s est un ouvert de G^o_s qui est dense dans G^o_s puisque G^o_s est irréductible (VI_A 2.4), donc $G''_s.G''_s = G^o_s$ (VI_A 0.5), ce qui montre que $G^o_s = G''_s.G''_s \subset G'_s.G'_s = G'_s$, donc que $\underline{G^o} \subset G'$. Donc $\underline{G^o}$ est un sous-foncteur du foncteur G', et il résulte de (3.2 (ii) c)) que $\underline{G'^o} = G^o$, donc $\underline{G'^o} = \underline{G^o}$.

Proposition 3.11. Soient G et H deux S-groupes localement de présentation finie, et $u : G \longrightarrow H$ un morphisme de S-groupes ; alors, si u est plat, l'application $u^{o} : G^{o} \longrightarrow H^{o}$ déduite de u est surjective ; la réciproque est vraie si G est plat sur S et si H est à fibres réduites.

Supposons donc u plat ; alors pour tout $s \in S$, u_s est plat et localement de présentation finie, donc ouvert (EGA 2.4.6), donc le morphisme $u_s^{o} : G_s^{o} \longrightarrow H_s^{o}$ est dominant. Puisque G_s^{o} est de type fini sur $\varkappa(s)$ (VI_A 2.4) et que H_s est séparé sur $\varkappa(s)$ (VI_A 0.2), u_s^{o} est quasi-compact (EGA I 6.6.4), donc surjectif (1.2). Donc u^{o} est surjectif.

Réciproquement, supposons u^{o} surjectif, G plat sur S et H à fibres réduites. Alors, pour tout $s \in S$, u_s^{o} est surjectif, et H_s est réduit ; donc H_s^{o} est localement noethérien et intègre, et u_s^{o} est de type fini, donc plat au point générique de G_s (EGA IV 6.9.1), donc u_s est plat (1.3), si bien que u est plat (EGA IV 11.3.11).

4. Dimension des fibres des groupes localement de présentation finie.

Proposition 4.1. Soit G un S-préschéma localement de type fini, muni d'une S-section ε, et tel que pour tout $s \in S$, on ait $\dim G_s = \dim_{\varepsilon(S)} G_s$ (ce qui est le cas si G est un S-groupe (1.5)). Alors la fonction $s \longmapsto \dim G_s$ est semi-continue supérieurement dans S. Si de plus, G est localement de présentation finie sur S, cette fonction est localement constructible.

Soit $\pi : G \longrightarrow S$ le morphisme structural. Le théorème de Chevalley (EGA IV 13.1.3) affirme que la fonction $x \longmapsto \dim_x \pi^{-1}(\ (x))$ est semi-continue

supérieurement dans G. Or, pour tout $s \in S$,
$\dim G_s = \dim \pi^{-1}(s) = \dim_{\varepsilon(s)} \pi^{-1}(\pi(\varepsilon(s)))$; et puisque la fonction $s \mapsto \varepsilon(s)$ est continue dans S, la fonction composée $s \mapsto \dim G_s$ est semi-continue supérieurement dans S.

Supposons G localement de présentation finie sur S. Pour montrer que la fonction $s \mapsto \dim G_s$ est localement constructible, on voit en raisonnant comme précédemment qu'il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est localement constructible dans G, ce qui résulte de (EGA IV 9.9.1).

__Proposition__ 4.2. __Soit__ G __un__ S-__préschéma localement de présentation finie, muni d'une__ S-__section__ ε __et vérifiant les deux conditions suivantes__ :

a) __Pour tout__ $s \in S$ __et tout__ $x \in G_s$, __on a__ $\dim G_s = \dim_x G_s$ (__ou__, __ce qui revient au même__, __pour tout__ $s \in S$, __toutes les composantes irréductibles de__ G_s __ont même dimension__).

b) __Pour tout__ $s \in S$, __si on note__ G_s^o __la composante connexe de__ G_s __contenant__ $\varepsilon(s)$, G_s^o __est géométriquement irréductible__.

(__Rappelons qu'un__ S-__groupe__ G __vérifie les conditions__ a) __et__ b) (1.5 __et__ VI_A 2.4.1)). __Les conditions suivantes sont équivalentes__ :

(i) G __est universellement ouvert sur__ S __aux points de__ G_s^o.

(i bis) G __est universellement ouvert sur__ S __en les points de__ $\varepsilon(s)$.

(ii) __La fonction__ $t \mapsto \dim G_t$ __est constante dans un voisinage de__ s __dans__ S.

Evidemment (i) $\Longrightarrow$ (i bis). Montrons que (i) bis entraîne (ii). Soit T l'ensemble des $t \in S$ tels que $\dim G_t = \dim G_s$. D'après (4.1), T est localement constructible, donc (EGA IV 1.10.1) pour montrer que T est un voisinage de s, il suffit de montrer que toute générisation s' de s appartient à T. Or (EGA IV 14.3.13 b')) si x désigne le point générique de G_s^o, on a, pour toute générisation s' de s : $\dim G_{s'} \geq \dim_x G_s = \dim G_s$; or, d'après (4.1), la fonction $s \longmapsto \dim G_s$ étant semi-continue supérieurement, on a $\dim G_{s'} \leqq \dim G_s$; donc $s' \in T$, cqfd.

Montrons que (ii) entraîne (i). Puisque π est localement de présentation finie, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(U) \subset V$ et que le morphisme $\pi' : U \longrightarrow V$ déduit de π soit de présentation finie. Posons alors $T = \varepsilon^{-1}(U)$ et $W = \pi'^{-1}(T) = U \cap \pi^{-1}(T)$. Alors le morphisme $\pi'' : W \longrightarrow T$ déduit de π' est de présentation finie et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : T \longrightarrow W$ déduit de ε. De plus, pour tout $t \subset T$, G_t^o étant irréductible, $W \cap G_t^o$ est dense dans G_t^o, donc irréductible, donc connexe : c'est donc la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. D'après (EGA IV 10.7.1 et 10.6.2), $W \cap G_t^o$ étant un ouvert dense de G_t^o, on a $\dim (W \cap G_t^o) = \dim G_t^o = \dim G_t$, donc la fonction $t \longmapsto \dim W \cap G_t^o$ est constante dans un voisinage de s dans T. Montrons enfin que, quel que soit $t \in T$, $W \cap G_t^o$ est géométriquement irréductible : soit K une extension de $\kappa(t)$, alors $(W \cap G_t^o) \otimes_{\kappa(t)} K = (W \otimes_{\kappa(t)} K) \cap (G_t^o \otimes_{\kappa(t)} K)$ est un ouvert non vide de $G_t^o \otimes_{\kappa(t)} K$, qui est irréductible, donc est irréductible.

Nous sommes alors dans les conditions d'application de (EGA IV 15.6.6 (ii)) qui affirme que π'' (donc π) est universellement ouvert aux points de $W \cap G_s^o$. Mais, d'après (EGA IV 14.3.3.1 (ii)), le sous-ensemble de G_s formé des points où est universellement ouvert est formé dans G_s ; puisqu'il contient $W \cap G_s^o$, il contient donc son adhérence G_s^o, cqfd.

Corollaire 4.3. Soit G un S-groupe plat et localement de présentation finie. Alors la fonction $s \mapsto \dim G_s$ est localement constante sur S.

Cela résulte immédiatement de (4.2), car tout morphisme plat et localement de présentation finie est universellement ouvert (EGA IV 2.4.6).

Corollaire 4.4. Soit G un S-groupe localement de présentation finie sur S aux points de la section unité. Considérons les conditions :

(i) G est lisse sur S aux points de la section unité (cf. 3.10).

(ii) Pour tout $s \in S$, G_s est lisse sur $\kappa(s)$, et la fonction $s \mapsto \dim G_s$ est localement constante sur S.

(iii) Pour tout $s \in S$, G_s est lisse sur $\kappa(s)$, et il existe un voisinage V de la section unité tel que la restriction à V du morphisme structural $\pi : G \to S$ soit universellement ouverte.

(iv) Pour tout $s \in S$, G^o_s est lisse sur $\kappa(s)$, et G^o est représentable par un sous-préschéma en groupes ouvert de G, universellement ouvert sur S.

Alors on a les implications suivantes :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). Si on suppose de plus S réduit, alors les conditions (i) à (iv) sont équivalentes, et impliquent que G^o est lisse sur S.

Montrons que (i) entraîne (ii). D'après (EGA IV 17.10.2) la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) = \dim \pi^{-1}(\pi(x))$ (1.5) est continue au voisinage de la section unité ; donc la fonction $s \mapsto \dim G_s$ est continue dans S, donc localement constante dans S. D'autre part, pour tout $s \in S$, G_s est lisse sur $\kappa(s)$ (1.3.1).

Montrons que (ii) entraîne (iv). La question est locale sur S, car il suffit de montrer que G^o est ouvert dans G (3.4), les propriétés de G^o

citées dans l'énoncé résultant de (2.4, 4.2). Etant donné $s \in S$, contruisons comme dans la démonstration de (3.10), W, T, π'', ε'' et W^o. Il résulte alors de (EGA IV 15.6.7) que W^o est ouvert dans W. Il résulte de (4.2) que π est universellement ouvert en tout point de W^o, donc (VI_A 0.1) μ est universellement ouvert en tout point de $W^o \times_S . W^o$, ce qui montre que $W^o . W^o$ est ouvert, et on termine comme dans la démonstration de (3.10).

Il est clair que (iv) entraîne (iii).

Le fait que (iii) entraîne (ii) résulte de (4.2) appliqué à V.

Montrons enfin que si S est réduit, (iv) entraîne (i) : on peut supposer évidemment $G = G^o$, donc G est de présentation finie sur S en vertu de (5.4) ci-dessous, et la conclusion résulte alors de (EGA IV 15.6.7) (impliquant que G est <u>plat</u> sur S) et de (3.10).

5. <u>Séparation des groupes et espaces homogènes</u>

<u>Proposition</u> 5.1. <u>Pour qu'un</u> S-<u>groupe</u> G <u>soit séparé</u>, <u>il faut et il suffit que la section unité de</u> G <u>soit une immersion fermée</u>.

La condition est nécessaire (EGA I 5.4.6) ; elle est suffisante en vertu du diagramme cartésien suivant (VI_A 0.3) :

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \arrow[r, "\mu \circ (id_G \times c)"] & G \\ G \arrow[u, "\Delta_{G/S}"] \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

<u>Proposition</u> 5.2. <u>Si</u> S <u>est discret</u>, <u>tout</u> S-<u>groupe est séparé</u>.

En effet, S est alors égal à $\coprod_{s \in S} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,s}$, et il suffit de montrer que pour tout $s \in S$, $G | \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,s}$ est séparé (EGA I 5.5.5), ce qui résulte de (VI_A 0.2), puisque $\mathcal{O}_{S,s}$ est un anneau local artinien.

Théorème 5.3. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes localement de présentation finie sur S et universellement ouvert le long de la section unité, H un S-préschéma sur lequel G opère de façon que le morphisme :

$$G \times_S H \longrightarrow H \times_S H$$

$$(g, h) \longmapsto (g.h, h)$$

soit surjectif (intuitivement H est un espace homogène sous G). On suppose de plus que pour tout $s \in S$, il existe un sous-préschéma ouvert U de H, séparé sur S, tel que U_s soit dense dans H_s. Alors H est séparé sur S.

Corollaire 5.4. Soient S, G, H comme ci-dessus et, supposons de plus H à fibres connexes, alors H est séparé sur S et quasi-compact sur S.

En effet, comme H_s est connexe, H_s est aussi irréductible (s'il n'est pas vide) de sorte que si U est un ouvert affine de H tel que U_s soit non vide, U_s est dense dans H_s, et le théorème s'applique.

Corollaire 5.5. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes, localement de présentation finie, à fibres connexes, et universellement ouvert sur S. Alors G est séparé et de présentation finie sur S.

En effet, on vient de voir que G est séparé sur S, donc quasi-séparé. D'autre part G est quasi-compact sur S d'après 3.6.

5.6. Démonstration de 5.3. Avant d'établir 5.3, prouvons quelques lemmes. Le lemme suivant remplace avantageusement EGA IV 19.5.10, en ce qu'il est indépendant d'hypothèses noethériennes.

Lemme 5.6.1. Soient S un préschéma, $f : X \longrightarrow S$ un S-préschéma localement de présentation finie, s un point de S, x un point fermé de X_s, z le point générique d'une composante irréductible Z de X_s, contenant x telle que $\dim_x(X_s) = \dim Z$ et supposons que f soit universellement ouvert en z (donc aussi en x). Alors il existe un morphisme $g : S'' \longrightarrow S' \longrightarrow S$ avec $S' \longrightarrow S$ étale de présentation finie couvrant s, $S'' \longrightarrow S'$, fini, de présentation finie, surjectif, tel que $g^{-1}(s)$ soit réduit à un point s", et un S-morphisme $h : S'' \longrightarrow X$ tel que $h(s'') = X$.

Il est clair que l'on peut supposer X affine de présentation finie sur S, puis par passage à la limite remplacer S par Spec $O_{S,s}$, puis supposer S strictement hensélien, de point fermé s. Soit alors $n = \dim_x X_s$. Le choix d'un système de paramètres de $O_{X_s,x}$ et le "Main Theorem", montrent alors, que quitte à restreindre X, il existe un S-morphisme quasi-fini et de présentation finie $u : X \longrightarrow S[T_1,..,T_n] = Y$. De plus u(x) est un point fermé de Y_s et on peut supposer que $u^{-1}u(x)$ a un espace sous-jacent réduit à un point. Soit V le sous-schéma de X image réciproque par u d'une section de Y au-dessus de S passant par u(x). Donc V est quasi-fini sur S et contient x comme unique point au-dessus de s. Comme S est hensélien, $V = V' \amalg V''$, avec V' fini sur S et V" au-dessus de S-s, de sorte que V' est spectre d'un anneau local. Montrons que $V' \longrightarrow S$ est surjectif. Pour cela, on peut remplacer S par le sous-schéma fermé réduit sous-jacent à une composante irréductible de S, puis supposer S normal, donc géométriquement unibranche. Comme f est universellement ouvert en z, il existe une composante irréductible $\mathfrak{z}$ de X contenant z et équidimensionnelle sur S (de dimension relative n) au point z. Comme u est quasi-fini et Y de dimension relative n, nécessairement $\mathfrak{z}$ domine Y. Toujours parce que u est quasi-fini, $\mathfrak{z}$ va être aussi équidimensionnelle sur Y au point

x. Comme $O_{Y,u(x)}$ est géométriquement unibranche (EGA IV 14.4.1.1.), le théorème de Chevalley nous dit que u est universellement ouvert en x, donc V et aussi V' sont universellement ouverts sur S en x, a fortiori, V' domine S.

Corollaire 5.6.2. *Soient* S, G, H, s, *comme dans le théorème*, U *un sous-préschéma ouvert de* H *tel que* U_s *soit dense dans* H_s *et soit* T *une partie de* H_s. *Alors il existe un morphisme* $g : S'' \longrightarrow S' \longrightarrow S$ *comme dans le lemme* 1 *et un élément* $b \in G(S'')$ *tel que* $g^{-1}(T)$ *soit contenu dans* b. U.

Quitte à restreindre S, on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert V de la section unité de G qui est de présentation finie et universellement ouvert sur S. On va construire b dans V(S"). On voit alors que l'on peut encore remplacer S par le spectre d'un hensélisé strict de $O_{S,s}$. On peut supposer les $a_i \in T$ *fermés* dans H_s. Si certains des points a_i ont des corps résiduels qui sont des extensions(nécessairement radicielles finies) non triviales de $\kappa(s)$, quitte à faire une suite finie d'extensions plates, finies, de présentation finie, du type $O_{S,s} \longrightarrow O_{S,s}[T]/(T^p - x)$ $(x \in O_{S,s})$, on voit que l'on peut supposer les a_i rationnels. L'hypothèse faite sur H, entraîne qu'il existe, pour i = 0, 1,..,n, des points fermés b_i' de $G_s \times H_s$ qui s'en vont, par le morphisme canonique, sur les points (a_i, a_o) de $H_s \times H_s$. Procédant comme plus haut, on peut supposer les b_i' rationnels, donc de la forme (b_i, h_o) où $b_i \in G_s(\kappa(s))$ est tel que $a_i = b_i . a_o$. Soit alors W_s l'ouvert de G_s image réciproque de U_s par le morphisme : $b \longmapsto b.a_o$. L'hypothèse faite sur U_s entraîne que W_s est dense dans G_s. Si b_s est un point rationnel de G_s, on a alors les équivalences suivantes :

$$a_i \in b_s.U_s \iff b_s^{-1}b_i.a_o \in U_s \iff b_s^{-1}b_i \in W_s \iff b_s \in b_i W_s^{-1} .$$

Comme W_s est dense dans G_s, il en est de même des $b_i W_s^{-1}$ et de leur intersection. On peut donc trouver un point fermé x de $V_s \cap [\bigcap_i b_i W_s^{-1}]$. Quitte à faire une extension finie surjective, de présentation finie, on peut supposer, d'après le lemme 1, qu'il existe une section b de G passant par x. Il est clair que la section b répond à la question.

Lemme 5.6.3. Soit X un S-préschéma. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) X est séparé sur S.

ii) Pour tout S-préschéma T, toute section $h : T \longrightarrow X_T$ est une immersion fermée.

iii) Pour tout S préschéma réduit T, deux morphismes f_1 et $f_2 : T \longrightarrow X$ qui coïncident sur un ouvert dense U de T coïncident.

iv) Pour tout S-préschéma T, tout point $t \in T$ et tout couple de points rationnels x_1, x_2 de $X_t = X \times_S \operatorname{Spec} \kappa(t)$, il existe un morphisme $g : T'' \to T' \to T$ avec $T' \to T$ ouvert, $T'' \to T'$ fermé dominant, avec $g^{-1}(t) \neq \emptyset$, et enfin sous-préschéma ouvert V de $X_{T''}$, séparé sur T'', qui contienne $g^{-1}(x_1)$ et $g^{-1}(x_2)$.

i) $\Longrightarrow$ iv) : on prend T'' = T et $V = X_T$.

iv)$\Longrightarrow$ iii) : on peut supposer T = S. Comme T est réduit, pour voir que $f_1 = f_2$, il suffit alors de voir que $f_1 = f_2$ ensemblistement. Soit donc $t \in T$ et montrons que $f_1(t) = f_2(t)$. Soit $g : T'' \to T' \to T$ comme dans iv). Comme U est dense dans T et que $T' \to T$ est ouvert, l'image réciproque U' de U dans T' est dense dans T'. Soit U'l'image réciproque de U' dans T'' et $\overline{U}''$ son adhérence dans T''. Comme $T'' \to T'$ est fermé dominant, $\overline{U}'' \to T'$ est surjectif, donc $\overline{U}'' \wedge g^{-1}(t)$ n'est pas vide. Il est clair alors que l'on peut remplacer

$\overline{U}$ et $\overline{T}$ par les sous-préschémas réduits de T" ayant U" et $\overline{U}$" pour espaces sous-jacents et remplacer f_1 et f_2 par leurs images réciproques par le changement de base $\overline{U}" \longrightarrow T$. Bref, nous pouvons supposer qu'il existe un ouvert V de X_T, séparé sur T qui contient $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Soit $W = f_1^{-1}(V) \wedge f_2^{-1}(V)$, c'est un ouvert de T, contenant t,et $U \cap W$ est dense dans W. On peut donc remplacer T par W. Mais alors il est clair que $f_1 = f_2$, donc $f_1(t) = f_2(t)$.

iii) $\Longrightarrow$ ii). On peut supposer T réduit. Soit E le sous-préschéma h(T) de X_T et soit $\overline{E}$ le sous-préschéma fermé réduit de X_T ayant l'adhérence de E pour espace sous-jacent, de sorte que E est un sous-préschéma ouvert dense de E. Après changement de base $\overline{E} \longrightarrow S$; on a deux sections de $X_{\overline{E}}$ qui coïncident sur E, donc elle coïncident et par suite $E = \overline{E}$.

ii) $\Longrightarrow$ i). On prend T = X et pour h la section diagonale.

Le théorème résulte alors trivialement du lemme 2 iv) $\Longrightarrow$ i) et du corollaire au lemme 1.

Contre-exemple 5.6.4. Tout S-groupe G n'est pas séparé. Soit S un préschéma ayant un point fermé non isolé s ; soit G le préschéma obtenu en recollant deux exemplaires de S le long de l'ouvert $S - \{s\}$, on voit aisément que G n'est pas séparé sur S, et qu'il est muni d'une structure naturelle de groupe dont toutes les fibres sont neutres, sauf la fibre G_s qui est isomorphe au groupe à deux éléments $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$.

Corollaire 5.6.5. Soit G un S-groupe localement de présentation finie, à fibres connexes, et universellement ouvert sur S ; alors G est de présentation finie sur S.

Cela résulte de (5.3) et de (3.6).

Remarque 5.7. Une démonstration analogue à celle de (5.3), mais utilisant (4.7) permet d'établir le résultat suivant :

Soit G un S-groupe localement de présentation finie et universellem[ent] ouvert sur S aux points de G^{o}. Soient σ et τ deux S-sections de G^{o} (i.e. soi[ent] $\sigma, \tau \in G^{o}(S)$). Alors le sous-préschéma de S des coïncidences de σ et τ est f[...]

6. Sous-foncteurs et sous-préschémas en groupes (*).

Définition 6.1. (i) Soient X un S-foncteur (c'est-à-dire un foncteur de $(Sch/S)^{o}$ dans (Ens)), G un S-foncteur en groupes, u et v deux S-morphismes de X dans G. On appelle transporteur de u dans v et on note $\mathrm{Transp}(u,v)$ le sous S-foncteur T de G défini par $T(S') = \{g \in G(S') \mid (\mathrm{int}\, g) \circ u_{S'} = v_{S'}\}$.

(ii) Soient G un S-foncteur en groupes, X et Y deux sous S-foncteurs de G ; on appelle transporteur de X dans Y (resp. transporteur strict de X dans Y) et on note $\mathrm{Transp}(X,Y)$ (resp. $\mathrm{Transpstr}_G(X,Y)$) le sous-S-foncteur T de G défini par $T(S') = \{g \in G(S') \mid (\mathrm{int}\, g)(X_{S'}) \subset Y_{S'}$ (resp. $(\mathrm{int}\, g)(X_{S'}) = Y_{S'})\}$.

Notons qu'on a $\mathrm{Transpstr}_G(X,Y) = \mathrm{Transp}_G(X,Y) \cap c(\mathrm{Transp}_G(Y,X))$, où c désigne la symétrie de G.

(iii) Soient G un S-foncteur en groupes, X un S-foncteur, u un S-morphisme de X dans G ; on appelle centralisateur de u le sous-S-foncteur en groupes $\mathrm{Centr}(u) = \mathrm{Transp}(u,u)$ de G.

(iv) Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur de G, i le S-morphisme canonique $H \longrightarrow G$; on appelle centralisateur de H dans G (resp. normalisateur de H dans G) le sous-S-foncteur en groupes de G

(*) Sur ce même thème, voir également les résultats de XI 6, dont la place natu[-] relle serait dans le présent exposé VI_B . On y trouvera en particulier des critères de représentabilité pour certains sous-foncteurs en groupes d'un schéma en groupes donné.

$\mathrm{Centr}_G H$ = Centr(i) = Transp(i,i) (resp $\mathrm{Norm}_G H$ = $\mathrm{Transpstr}_G(H,H)$). Enfin, on appelle centre de G le S-foncteur en groupes Centr G = $\mathrm{Centr}_G G$.

Proposition 6.2. Soit G un S-groupe . Considérons pour un sous-foncteur T du foncteur G, la propriété suivante :

(+) pour tout $s \in S$, T_s est représentable par un sous-préschéma fermé de G_s.

(i) Soient X un S-préschéma et u et v deux S-morphismes de X dans G. Alors Transp (u,v) vérifie la condition (+).

(ii) Soient $u : X \longrightarrow G$ et $v : Y \longrightarrow G$ deux monomorphismes de préschémas ; supposons que pour tout $s \in S$, v_s soit une immersion fermée, alors $\mathrm{Transp}_G(X,Y)$ vérifie la condition (+) ; supposons que pour tout $s \in S$, u_s et v_s soient des immersions fermées ; alors $\mathrm{Transpstr}_G(X,Y)$ vérifie la condition (+).

(iii) Soit $u : H \longrightarrow G$ un monomorphisme ; alors $\mathrm{Centr}_G H$ vérifie la condition (+) ; si, de plus, pour tout $s \in S$, u_s est une immersion fermée, alors $\mathrm{Norm}_G H$ vérifie la condition (+).

(iv) Soit $u : X \longrightarrow G$ un morphisme ; alors Centr(u) vérifie la condition (+).

Il suffit de démontrer (i) et (ii) ; l'assertion (i) résulte de (VIII 6.5 b)) (*) appliqué aux S-morphismes : $q_1, q_2 : G \rightrightarrows \mathrm{Hom}_S(X,G)$ définis par $q_1(g) = (\mathrm{int}\ g) \circ u$ et $q_2(g) = v$, compte tenu de ce que pour tout $s \in S$, G_s est séparé (VI_A 0.2). L'assertion (ii) résulte de (VIII 6.5 e)).

Remarque 6.3. Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe et H un sous-préschéma en groupes de G ; supposons G et H de type fini sur k et réduits ;

(*) Le lecteur observera que les développements de (VIII n° 6 et de XI n° 6) ne dépendent pas des numéros antérieurs de ces exposés, ni des exposés VI et VII, et auraient pu venir dès le présent exposé, où était leur place naturelle.

alors $\underline{\mathrm{Norm}_G}H$ (resp. $\underline{\mathrm{Centr}_G}H$) est représentable par un sous-préschéma en groupes de G, dont le sous-préschéma réduit associé n'est autre que le normalisateur (resp. le centralisateur) de H dans G au sens de Bible.

Proposition 6.4. Soient G un S-groupe, et $u : X \longrightarrow G$ un monomorphisme de S-préschémas. Posons $T = \underline{\mathrm{Transp}}_G(X,X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T est un sous-foncteur en groupes de G.

(ii) $T = \underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X,X) = \underline{\mathrm{Norm}}_G X$

Ces conditions sont vérifiées dans chacun des deux cas suivants :

a) X est de présentation finie sur S.

b) T est représentable par un préschéma de présentation finie sur S.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de ce que, quel que soit le morphisme $S' \longrightarrow S$, quels que soient $t,t' \in T(S')$, on a $t.t' \in T(S')$ et de ce que $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X,X) = T \cap c(T)$ (6.1 (ii)).

Plaçons-nous dans le cas a). Soit $t \in T(S)$, alors int(t) est un monomorphisme de X dans X, donc un S-automorphisme de X (EGA IV 17.9.6), si bien que t appartient à $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X,X)$, d'où a).

Dans le cas b), il est clair que $\mu(T\times_S T) \subset T$, et l'assertion résulte du lemme suivant :

Lemme 6.4.2. Soit G un S-préschéma de présentation finie, muni d'une loi associative (au sens de EGA 0_{III} 8.2.5). Supposons que pour tout S-préschéma S' et tout $g \in G(S')$, les translations à droite et à gauche par g dans l'ensemble G(S') soient injectives et que $G(S) \neq \emptyset$. Alors G est un S-groupe.

Il suffit de montrer que, quel que soit le S-préschéma S', l'ensemble G(S') est un groupe ; or, de l'hypothèse résulte aussitôt que les translations à droite et à gauche par tout élément $g \in G(S')$ dans $G_{S'}$, sont des S-monomorphismes de G_S, dans $G_{S'}$. Ce sont donc des S-automorphismes, puisque G est de présentation finie sur S (EGA IV 17.9.5), si bien que les translations à droite et à gauche par g dans l'ensemble G(S') sont bijectives, et on est ramené au lemme suivant :

Lemme 6.4.3. *Soit G un ensemble non vide muni d'une loi associative telle que les translations à droite et à gauche soient bijectives. Alors G est un groupe.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Définition 6.5. *Soient G un S-groupe et soit $u : H \longrightarrow G$ un monomorphisme. On appelle* centralisateur connexe de H dans G *et on note* $\mathrm{Centr}^o_G H$ *la composante neutre du foncteur* $\mathrm{Centr}_G H$ (cf. 3.1 *et* 6.2 (iv)). *Lorsque pour tout* $s \in S$, u_s *est une immersion fermée* (*ce qui a lieu lorsque H est un S-préschéma en groupes, que G et H sont localement de type fini sur S et que u est un S-morphisme de groupes quasi-compact* (1.4.2)), *on appelle* normalisateur connexe de H dans G, *et on note* $\mathrm{Norm}^o_G H$ *la composante neutre du foncteur* $\mathrm{Norm}_G H$. *Etant donné un morphisme* $u : X \longrightarrow G$, *on définit de même le foncteur* $\mathrm{Centr}^o(u)$.

Proposition 6.5.1. *Soient G un S-groupe localement de présentation finie et quasi-séparé sur S, H un S-groupe lisse à fibres connexes et* $u : H \longrightarrow G$ *un monomorphisme. Soit N le normalisateur* (*cf.* I *ou* 6.1) *de H dans G. On verra* (XI 6.11) (*) *que N est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de G et de présentation finie sur G. Ceci étant, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme canonique* $H \longrightarrow N$ *est une immersion ouverte.*

(ii) $N^o = H$ (*cf.* 3.10).

(*) Voir note page 40.

(iii) Pour tout $s \in S$, on a : $H_s = (N_s)^o$.

La condition (i) entraîne (ii) d'après (3.10.1), puisque $H^o = H$. Il est clair que (ii) entraîne (iii), car $H_s = (N^o)_s = (N_s)^o$.

Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Puisque $H_s = (N^o)_s$, quel que soit $s \in S$, $H_s \longrightarrow N_s$ est une immersion ouverte, de plus H et N sont localement de présentation finie sur S et H est plat sur S, donc (EGA IV 17.9.5), $H \longrightarrow N$ est une immersion ouverte.

Définition 6.6. Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur en groupes ; on dit que H est invariant (resp. central, resp. caractéristique) dans G si $\mathrm{Norm}_G H = G$ (resp. si $\mathrm{Centr}_G H = G$, resp. si, quels que soient le S-préschéma T et l'automorphisme $a \in \mathrm{Aut}_{T\text{-gr.}} G$, on a : $a(H_T) \subset H_T$), autrement dit, si, quel que soit le S-préschéma T, le sous-groupe H(T) de G(T) est invariant dans G(T) (resp. central dans G(T), resp. invariant par tout automorphisme de G_T).

Si H est central (resp. caractéristique), il est invariant.

Remarque 6.7. Soient G et H deux S-groupes et $u : H \longrightarrow G$ un monomorphisme. Pour que H soit invariant (resp. central, resp. caractéristique) dans G, il faut et il suffit que le morphisme

$\mu o((c \circ pr_2),(\mu o (u \times id_G)) : H \times_S G \longrightarrow G$ (défini par $(h,g) \longmapsto g^{-1}.hg$ quels que soient $g \in G(S')$ et $h \in H(S')$) se factorise à travers u (resp. soit égal à $u \circ pr_1$, resp. que pour tout S-préschéma T et tout T-automorphisme de groupe a de $G \times_S T$, $a \circ u_{(T)}$ se factorise à travers u(T)).

Exemple 6.8. Soit G un S-foncteur en groupes. Alors Centr G est caractéristique et central. Si, pour tout $s \in S$, G_s est représentable, G^o est caractéristique.

Cela résulte des définitions et de (3.3).

7. Sous-groupes engendrés ; groupe des commutateurs

Dans ce numéro, k désigne un corps fixé.

Proposition 7.1. Soient G un k-groupe, $(X_i)_{i \in I}$ une famille de k-préschémas séparables (EGA IV 4.6.2) ; pour tout $i \in I$, soit $f_i : X_i \longrightarrow G$ un k-morphisme.

(i) Il existe un plus petit sous-k-préschéma en groupes fermé de G majorant chacun des f_i, soit $\Gamma_G((f_i)_{i \in I})$. C'est un k-préschéma séparable (donc lisse dans le cas où G est supposé localement de type fini sur k).

(ii) Posons $X = \coprod_{i \in I} X_i$, et soit $f : X \longrightarrow G$ le morphisme dont la restriction à X_i est f_i, pour tout $i \in I$. Posons $X^1 = X \amalg X$, soit $f^1 : X^1 \longrightarrow G$ le morphisme dont les restrictions à X sont respectivement f et c o f. Pour tout $n > 1$, posons $X^n = X^1 x_k X^{n-1}$ et $f^n = \mu \circ (f^1 x_k f^{n-1}) : X^n \longrightarrow G$. Alors $\Gamma_G((f_i)_{i \in I})$ est le sous-préschéma réduit de G ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de la réunion des $f^n(X^n)$, pour $n > 1$.

(iii) Pour tout k-préschéma S, $(\Gamma_G((f_i)_{i \in I}))_S$ est le plus petit sous-préschéma en groupes fermé de G_S majorant chacun des $f_{i,S} : X_S \longrightarrow G_S$. Si on suppose que G est localement de type fini sur k, alors $(\Gamma_G((f_i)_{i \in I}))_S$ est le plus petit sous-préschéma en groupes de G_S majorant chacun des $f_{i,S}$.

Remarquons tout d'abord, que pour démontrer (i) et (iii), en définissant X et f comme dans (ii), on est ramené au cas où I est réduit à un élément.

Soit H le sous-préschéma réduit de G d'ensemble sous-jacent $\bigcup_{n \geq 1} f^n(X^n)$. Alors H est séparable (EGA IV 11.10.7). Il est clair que tout sous-préschéma fermé de G qui domine f domine aussi H. Donc pour montrer (i) et (ii), il suffit de montrer que H est un sous-préschéma en groupes de G, donc que la restriction de c à H et la restriction de μ à $H \times_k H$ se factorisent à travers l'injection $H \longrightarrow G$. Puisque H est séparable, $H \times_k H$ est réduit, et il suffit de vérifier que $c(H) \subset H$ et que $\mu(H \times_k H) \subset H$ (ensemblistement). Mais d'après (EGA IV 11.10.6), la réunion des $f^n{}_{(H)}(X^n \times_k H)$ est dense dans $H \times_k H$. De même, quel que soit $n \geq 1$, la réunion des $f^m_{(X^n)}(X^n \times_k X^m)$, pour $m \geq 1$, est dense dans $X^n \times_k H$. Donc il suffit de montrer que $\mu(f^n{}_{(H)}(f^m{}_{(X^n)}(X^n \times_k X^m))) \subset H$ et que $c(f^n(X^n)) \subset H$. Or $\mu(f^n{}_{(H)}(f^m{}_{(X^n)}(X^n \times_k X^m))) = \mu((f^n \times_k f^m)(X^n \times_k X^m))$ $= f^{n+m}(X^{n+m}) \subset H$; et, puisque $c(f^1(X^1)) \subset f^1(X^1)$, on a, quel que soit n, $c(f^n(X^n)) \subset f^n(X^n) \subset H$. Ce qui démontre (i) et (ii).

Montrons maintenant (iii). Soit G' un sous-préschéma en groupes fermé de G_S majorant f_S ; il s'agit de montrer que G' majore H_S, ou, ce qui revient au même, que $H_S = H_S \times_{G_S} G'$. Posons $H'_S = H_S \times_{G_S} G' = G' \cap H_S$. Puisque G' et H_S majorent tous deux les f^n_S, il en est de même de H'_S. Or (EGA IV 11.10.6), puisque la famille des $f^n : X^n \longrightarrow H$ est schématiquement dominante, il en est de même de la famille des $f^n_S : X^n_S \longrightarrow H_S$, si bien que H'_S, qui majore chacun des f^n_S, est égal à H_S (EGA IV 11.10.1 c)). Montrons maintenant la seconde assertion de (iii) dans le cas où G est localement de type fini sur k. Soit G' un sous-préschéma en groupes de G_S majorant f_S. Il s'agit de même de montrer que, si on pose $H'_S = H_S \times_{G_S} G'$, on a $H'_S = H_S$. Il suffit pour cela de montrer que H'_S est fermé dans H_S et d'appliquer le raisonnement précédent. Il suffit donc de montrer que H_S et H'_S ont même ensemble sous-jacent, a fortiori il suffit de montrer que, pour tout $s \in S$, $H_{S,s} = H'_{S,s}$. Mais alors $H'_{S,s} = G'_S \times_{\varkappa(s)} H_{S,s}$; et G'_s, étant un sous-$\varkappa(s)$-préschéma en groupes de $G_{S,s}$, est fermé (1.4), donc $H'_{S,s}$ est fermé dans $H_{S,s}$; et alors le raisonnement du début, appliqué à $H'_{S,s}$, à $H_{S,s}$ et aux $f^n_{S,s}$ montre que $H'_{S,s} = H_{S,s}$, cqfd.

Définition et remarque 7.2. (i) Etant donné un k-groupe G, une famille $(X_i)_{i \in I}$ de k-préschémas séparables, et pour chaque $i \in I$, un k-morphisme $f_i : X_i \longrightarrow G$, on appelle sous-préschéma en groupes fermé de G engendré par la famille $(f_i)_{i \in I}$, et nous noterons dans ce numéro $\Gamma_G((f_i)_{i \in I})$, le plus petit sous-préschéma en groupes fermé de G majorant chacun des f_i. Dans le cas où i est l'injection d'un sous-préschéma X de G séparable sur k, on écrit $\Gamma_G(X)$ au lieu de $\Gamma_G(i)$.

(ii) Il est clair que si X_1 et X_2 sont deux k-préschémas séparables et $f_1 : X_1 \longrightarrow G$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow G$ deux k-morphismes tels que les ensembles $\overline{f_1(X_1)}$ et $\overline{f_2(X_2)}$ soient égaux, alors $\Gamma_G(f_1) = \Gamma_G(f_2)$.

(iii) Soit E une partie de G telle que le sous-préschéma réduit $\overline{E}$ de G soit séparable, on appelle sous-préschéma en groupes fermé de G engendré par E, et on note $\Gamma_G(E)$ le sous-préschéma en groupes $\Gamma_G(i)$, où i est l'injection du sous-préschéma réduit $\overline{E}$ de G dans G.

(iv) Dans le cas où G est localement de type fini sur k, tout sous-préschéma en groupes de G étant fermé (1.4), on parlera de "sous-préschéma en groupes engendré" au lieu de "sous-préschéma en groupes fermé engendré".

(v) Soit X un k-préschéma séparable et $f : X \longrightarrow G$ un k-morphisme. Supposons que f(X) contienne l'élément unité e de G. Posons $X'^1 = X \times_k X$ et $f'^1 = \mu o\, (f \times_k (c \circ f))$, et pour $n > 1$, $X'^n = X'^1 \times_k X'^{n-1}$ et $f'^n = \mu o (f'^1 \times_k f'^{n-1})$. Alors $\Gamma_G(f)$ est le sous-préschéma réduit de G dont l'espace sous-jacent est l'adhérence de la réunion, pour $n \geq 1$ des $f'^n(X'^n)$. En effet, puisque f(X) contient e, on a : $f(X) \subset f'^1(X'^1) \subset f^2(X^2)$ (notation de 7.1 (ii)). Puisqu'on a aussi $f^1(X^1) \subset f'^1(X'^1) \subset f^2(X^2)$, pour qu'il existe un entier n tel que $f^n(X^n) = \Gamma_G(f)$, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $f'^m(X'^m) = \Gamma_G(f)$.

(vi) Il résulte de la remarque précédente que, si X est un k-préschéma séparable et géométriquement connexe, et si $f : X \longrightarrow G$ est un k-morphisme tel que $f(X)$ contienne l'élément neutre de G, alors le k-groupe $\Gamma_G(f)$ est connexe. En effet, chacun des X'^n est alors connexe, si bien que la réunion des $f'^n(X'^n)$ (qui contiennent chacun e) est connexe, il en est donc de même de son adhérence $\Gamma_G(f)$.

(vii) Soient A et B deux sous-k-préschémas en groupes séparables d'un k-groupe. On appelle sous-préschéma en groupes des commutateurs de A et B dans G et on note $(A,B)_G$ ou simplement (A,B) le sous-préschéma en groupes fermé de G engendré par le morphisme $\nu : A \times_k B \longrightarrow G$ défini par : $(a,b) \longmapsto a.b.a^{-1}.b^{-1}$ pour $a \in A(S)$ et $b \in B(S)$. Lorsque G est séparable sur k, on appelle groupe dérivé de G, et on note $\underline{Der}(G)$, le groupe (G,G). Pour qu'un k-groupe séparable G soit commutatif, il faut et il suffit que $\underline{Der}(G)$ soit le k-groupe unité.

(viii) Il nous arrivera de poser $\Gamma'_G = \bigcup_{n > 1} f^n(X^n)$ (avec les notations de 7.1 (ii)). Notons que $\Gamma'_G(f)$ est une partie de G stable pour la loi de groupe (au sens de 3.0).

Corollaire 7.3. Soient G un k-groupe, X un k-préschéma séparable, $f : X \rightarrow G$ un k-morphisme. Soit S un k-préschéma.

(i) Soit $u \subset \mathrm{End}_{S\text{-gr.}} G_S$ tel que l'on ait l'inclusion de préfaisceaux $u(f_S(X_S)) \subset f_S(X_S)$ (où $f_S(X_S)$ désigne le sous-préfaisceau de G_S image de X_S par f_S). Alors, on a $u((\Gamma_G(f))_S) \subset (\Gamma_G(f))_S$ (en tant que préfaisceaux).

(i bis) Soit $u \in \mathrm{Aut}_{S\text{-gr}}\, G_S$ tel qu'on ait $u(f_S(X_S) = f_S(X_S)$ (en tant que préfaisceaux) ; alors on a $u((\Gamma_G(f))_S) = (\Gamma_G(f))_S$ (en tant que préfaisceaux).

(ii) Soit $u \in \mathrm{End}_{S\text{-gr.}} G_S$ tel que la restriction de u au préfaisceau $f_S(X_S)$ soit l'identitité ; alors la restriction de u au préschéma $(\Gamma_G(f))_S$ est l'automorphisme identique.

(iii) Soit Y un k-préschéma séparable et $g : Y \longrightarrow G$ un k-morphisme. Supposons que, quel que soit le k-préschéma S', pour $a \in X(S')$ et $f \in Y(S')$, $f \circ a$ et $g \circ b$ commutent (resp. $(\mathrm{int}\,(f \circ a))\,(g_{S'}(Y_{S'})) = g_{S'}(Y_{S'})$). Alors on a $\Gamma_G(f) \subset \mathrm{Centr}_G\, \Gamma_G(g)$ (resp. $\Gamma_G(f) \subset \mathrm{Norm}_G\, \Gamma_G(g)$) (en tant que préfaisceaux).

(iv) Soit x un point de G rationnel sur k. Alors le k-groupe $\Gamma_G(\{x\})$ est commutatif.

(v) Soient A et B deux sous-préschémas en groupes de G séparables sur k. Si A et B sont invariants (resp. caractéristiques), il en est de même de (A,B).

Montrons (i). Posons $H = (\Gamma_G(f))_S$ et $H' = u^{-1}(H)$. D'après (7.1 (iii)), il suffit de montrer que f_S se factorise à travers H'. Par hypothèse, $u \circ f_S$ appartient à $u(f_S(X_S))(X)$, donc à $(f_S(X_S))(X)$, donc a fortiori à $H(X)$, ce qui signifie que $u \circ f_S$ se factorise à travers l'injection canonique de H dans G_S, donc que f_S se factorise à travers H', cqfd.

Il est clair que (i bis) est une conséquence de (i).

Montrons (ii). Puisque G est séparé sur k (VI_A 0.2) G_S est séparé sur S, donc la section unité de G_S est une immersion fermée (5.1), si bien que Ker ($\mu \circ (u,c)$) est un sous- préschéma en groupes fermé de G_S (μ (resp. c) désignant la multiplication (resp. la symétrie) de G_S). Par hypothèse le préfaisceau Ker ($\mu \circ (u,c)$) contient le préfaisceau $f_S(X_S)$, donc Ker ($\mu \circ (u,c)$) contient $(\Gamma_G(f))_S$ (7.1 (iii)).

Montrons (iii). Rappelons (6.2 (iii)) que $\mathrm{Centr}_G\, \Gamma_G(g)$ (resp. $\mathrm{Norm}_G\, \Gamma_G(g)$) est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de G. Par hypothèse compte tenu de (ii) (resp. (i)), $\mathrm{Centr}_G\, \Gamma_G(g)$ (resp. $\mathrm{Norm}_G\, \Gamma_G(g)$) contient f(X) en tant que préfaisceau, il contient donc $\Gamma_G(f)$, cqfd.

L'assertion (iv) est un cas particulier de (iii), où l'on prend pour f et g l'injection du préschéma réduit de G ayant pour espace sous-jacent le point fermé $\{x\}$ dans G. Ce sous-préschéma est séparable puisque $\kappa(x) = k$.

Montrons enfin (v). Soient S un k-préschéma, et u un automorphisme intérieur (resp. un automorphisme de S-groupes) de G_S. Par hypothèse, $u(A_S) = A_S$, et $u(B_S) = B_S$; on en déduit aisément, avec les notations de (7.2 (vii)), que $u(\nu_S(A_S \times_S B_S)) = \nu_S(A_S \times_S B_S)$; donc, d'après (i), on a $u((A,B)) = (A,B)$, cqfd.

Proposition 7.4. Soient G un k-groupe localement de type fini, X un k-préschéma séparable, de type fini, et soit $f : X \longrightarrow G$ un k-morphisme. Supposons que X soit géométriquement connexe et que f(X) contienne l'élément neutre e de G. Alors (notations de (7.1 (ii)), il existe un entier N tel qu'on ait

$$f^N(X^N) = \Gamma_G(f) \qquad \text{(ensemblistement)}.$$

D'après (7.1 (iii) et EGA IV 2.6.1), nous pouvons supposer k algébriquement clos. D'après la remarque (7.2 (vi)), nous pouvons supposer que $G = G^o$; enfin, d'après la remarque (7.2 (v)), il suffit de montrer qu'il existe un entier N tel que (notations de (7.2 (v)) l'on ait : $f'^N(X'^N) = \Gamma_G(f)$.

Premier cas. Supposons X irréductible. Alors les $\overline{f'^n(X'^n)}$ forment une suite croissante de fermés irréductibles dans l'espace G, qui est noethérien, puisque $G = G^o$ est de type fini sur k (VI_A 2.4). Donc cette suite est stationnaire, et il existe un entier m tel que $\overline{f'^m(X'^m)} = \Gamma_G(f)$. De plus, puisque X et G sont de type fini sur k, les f'^n sont de type fini. Par conséquent, $f'^m(X'^m)$ est constructible dans G (EGA IV 1.8.5), donc contient un ouvert U de son adhérence $\Gamma_G(f)$ (EGA 0_{IV} 9.2.3). Alors (VI_A 0.5), on a $\Gamma_G(f) \subset U.U \subset f'^{2m}(X'^{2m}) \subset \Gamma_G(f)$, si bien que $f'^{2m}(X'^{2m}) = \Gamma_G(f)$.

Deuxième cas. Supposons que X ait deux composantes irréductibles A_1 et A_2. Alors il existe $a \in (A_1 \cap A_2)(k)$, puisque X est connexe. Donc les quatre parties irréductibles $A_i \times_k A_j (i,j = 1,2)$ recouvrent $X \times_k X$, et l'image de chacune d'entre elles par f'^1 contient e. Si f'^1_{ij} désigne la restriction de f'^1 au sous-préschéma réduit $A_i \times_k A_j$, posons
$Y = (A_1 \times_k A_1) \times_k (A_1 \times_k A_2) \times_k (A_2 \times_k A_2) \times_k (A_2 \times_k A_1)$ et
$g = \mu \circ ((\mu \circ ((f'^1_{11}) \times_k (f'^1_{12})) \times_k (\mu \circ ((f'^1_{22}) \times_k (f'^1_{21}))))$. Alors Y est irréductible, réduit et de type fini, donc on vient de voir qu'il existe un entier m tel que $g'^m(Y'^m) = \Gamma_G(g)$. Mais en fait, $f'^1(X'^1) \subset g(Y) \subset f'^4(X'^4)$, si bien que $\Gamma_G(f) = \Gamma_G(g)$ et que $f'^{4m}(X'^{4m}) = \Gamma_G(f)$.

Cas général. Raisonnons par récurrence sur le nombre des composantes irréductibles de X (ce nombre est fini puisque X, étant de type fini sur k, est noethérien). Supposons la proposition démontrée dans le cas où X a au plus r-1 composantes irréductibles, et supposons qu'il en ait r, à savoir $A_1 \dots A_r$. Alors e appartient à l'un des A_i, supposons par exemple que $e \in A_1$. Posons alors $Y = \Gamma_G(f_r)$, où f_r désigne la restriction de f au-sous-préschéma réduit $A_1 \cup \dots \cup A_{r-1}$ (nous supposons la numérotation des A_i choisie de façon que ce préschéma soit connexe, ce qui est toujours possible). Posons $Z = \overline{f(A_r)}$. Alors Y est un sous-groupe irréductible réduit et fermé de G (7.2 (vi)). Soit alors $T = Y \cup Z$ et i l'injection du sous-préschéma fermé réduit T de G. Il est clair (7.2 (ii)) que $\Gamma_G(i) = \Gamma_G(f)$ et que T est connexe (car puisque X est connexe, $A_1 \cup \dots \cup A_{r-1}$ et A_r ont en commun un point a, et Y et Z ont en commun le point f(a)). De plus, $e \in T$, et T a au plus deux composantes irréductibles, puisque Y et Z sont irréductibles. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier m tel que, si on note X_r le sous-préschéma réduit $A_1 \cup \ldots \cup A_{r-1}$ de X, on ait : $f_r'^m(X_r'^m) = \Gamma_G(f_r) = Y$. Donc, puisque $X_r' \subset X$ et $Z \subset \overline{f(X)}$, on a $f(X) \subset Y \cup Z \subset f'^m(X'^m)$. D'autre part, puisque T a au plus deux composantes irréductibles, on a déjà vu qu'il existe un entier p tel que $i'^p(T'^p) = \Gamma_G(i)$. Or $\Gamma_G(i) = \Gamma_G(f)$, et $T \subset \overline{f'^m(X'^m)}$, donc $\overline{f'^{mp}(X'^{mp})} = \Gamma_G(f)$, et on montre, comme dans le premier cas, que cette dernière égalité entraîne $f'^{2mp}(X'^{2mp}) = \Gamma_G(f)$, cqfd.

Lemme 7.5. *Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes, X un S-préschéma, $f : X \to G$ un S-morphisme. On suppose X et G localement de présentation finie sur S, et que pour tout $s \in S$ et pour tout point maximal g de G_s, il existe un point x de X tel que $f(x)=g$ et que f soit plat en x. Alors le morphisme $\mu \circ (f \times_S f) : X \times_S X \to G$ est couvrant pour la topologie fppf.*

Notons que l'ensemble V des points de X en lesquels f est plat est ouvert et que $f | V$ est un morphisme ouvert (EGA IV 11.3.1) ; donc quitte à remplacer X par V, on peut supposer f plat. Soit $U = f(X)$, qui est un ouvert de G. Alors $X \times_S X \to G$ est égal au composé $X \times_S X \to U \times_S U \to G$, où le premier morphisme est fidèlement plat et localement de présentation finie, puisque $X \to U$ l'est. Il suffira donc de prouver qu'il en est de même de $U \times_S U \to G$. Or $G \to S$ étant localement de présentation finie et plat, il en est de même de $\mu : G \times_S G \to G$ (qui est isomorphe à un morphisme déduit du précédent $G \to S$ par un changement de base $G \to S$, cf. VI_A 0.1), donc aussi du morphisme induit $U \times_S U \to G$. Pour prouver qu'il est surjectif, il suffit de regarder fibre par fibre, où cela résulte de VI_A 0.5.

Proposition 7.6. *Soient G un k-groupe localement de type fini, X un k-préschéma séparable et localement de type fini, et $f : X \to G$ un k-morphisme. Pour que* le foncteur $\Gamma_G(f)$ soit le faisceau associé pour la topologie fppf (ou la topologie fpqc) au sous-préfaisceau en groupes de G engendré par l'image du morphisme de foncteurs f, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\bigcup_{n \geq 1} f^n(X^n) = \Gamma_G(f)$$

Lorsque G est de type fini sur k, cette condition implique déjà qu'il existe un entier n tel que $f^n : X^n \longrightarrow \Gamma_G(f)$ soit couvrant fpqc (et a fortiori surjectif).

Posons $X^{\infty} = \coprod_{n \geq 1} X^n$; soit $f^{\infty} : X^{\infty} \longrightarrow \Gamma_G(f)$ le morphisme dont la restriction à chacun des X^n est le morphisme $X^n \longrightarrow \Gamma_G(f)$ déduit de f^n. Le faisceau considéré dans l'énoncé est alors le faisceau image de X^{∞} par f^{∞} ; donc (IV 4.4.3), dire que le foncteur $\Gamma_G(f)$ est le faisceau considéré revient à dire que f^{∞} est couvrant. Montrons que, pour que f^{∞} soit couvrant, il faut et il suffit que f^{∞} soit surjectif. La condition est évidemment nécessaire ; réciproquement, si f^{∞} est surjectif, alors : $\mu\text{o}\,(f^{\infty} \times_k f^{\infty}) : X^{\infty} \times_k X^{\infty} \rightarrow \Gamma_G(f)$ est couvrant (7.5) ; or puisque $X^n \times_k X^m$ est canoniquement isomorphe à X^{n+m}, et que dans cet isomorphisme, $\mu\text{o}\,(f^n \times_k f^m)$ correspond à f^{n+m}, il est clair que $\mu\text{o}(f^{\infty} \times_k f^{\infty})$ se factorise à travers f^{∞}, si bien que f^{∞} est couvrant. Enfin, dire que f^{∞} est surjectif revient à dire que $\bigcup_{n \geq 1} f^n(X^n) = \Gamma_G(f)$. Si G donc $\Gamma_G(f)$ est de type fini, on en conclut qu'il existe n avec $f^n(X^n) = \Gamma_G(f)$, car les $f^n(X^n)$ sont des parties ind-constructibles des $\Gamma_G(f)$ (EGA IV 1.8.4) de réunion $\Gamma_G(f)$, et on applique EGA IV 1.9.9. Cela achève de prouver 7.6.

Remarque 7.6.1. Evidemment les conditions équivalentes de 7.6 impliquent que le faisceau F envisagé est représentable. La réciproque est fausse en général (prendre X réduit à un point !). Noter cependant qu'il résulte de EGA IV 8.14.2 que si F est représentable, il est localement de présentation finie sur k, donc la question est alors si le monomorphisme dominant $F \longrightarrow \Gamma_G(f)$ est un isomorphisme, ou encore, une immersion fermée. Ce sera le cas en vertu de 1.4.2 si F est de type fini, par exemple si F connexe (3.5), par exemple si X est connexe et si f(X) contient l'élément unité de G.

Lemme 7.7. *Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe localement de type fini, X un k-préschéma séparable et localement de type fini, $f : X \to G$ un k-morphisme et H un sous-préschéma en groupes de G tel que $H \subset f(X)$. Posons $\Gamma' = \bigcup_{n \geq 1} f^n(X^n)$. Soit Γ'_o (resp. H_o) le groupe des points de G(k) appartenant à Γ' (resp. à H) (cf. 7.2 (viii)). Supposons que H_o soit d'indice fini dans Γ'_o. Alors il existe un entier m tel que $f^m(X^m) = \Gamma_G(f)$ (cf. 7.6), et $\Gamma_G(f)$ est réunion d'un nombre fini de translatés de H.*

Quel que soit $n \geq 1$, $f^n(X^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV 1.9.5 (viii)), il en est donc de même de Γ', si bien que, puisque G est un préschéma de Jacobson, Γ'_o est dense dans Γ'. Par hypothèse, il existe une suite finie $a_1,\ldots,a_r$ de points de Γ'_o telle que $\Gamma'_o = a_1.H_o \cup \ldots \cup a_r.H_o$, d'où $\Gamma_G(f) = \overline{\Gamma'} = \overline{\Gamma'_o} = \overline{a_1.H_o \cup \ldots \cup a_r.H_o} = \overline{a_1.H_o} \cup \ldots \cup \overline{a_r.H_o} = a_1.\overline{H_o} \cup \ldots \cup a_r.\overline{H_o}$ puisque la translation par a_i est un homéomorphisme de G sur G, si bien que $\Gamma_G(f) = a_1.H \cup \ldots \cup a_r.H$. Il est d'autre part clair qu'il existe un entier p tel que chacun des a_i ($1 \leq i \leq r$) appartienne à $f^p(X^p)$. Enfin, puisque $H \subset f(X)$, quel que soit i, on a : $a_i.H \subset f^{p+1}(X^{p+1})$, si bien que $f^{p+1}(X^{p+1}) = \Gamma_G($

Proposition 7.8. *Soient G un k-groupe localement de type fini, A et B deux sous-k-préschémas en groupes séparables (i.e. lisses) de G. Supposons remplie l'une des conditions a) ou b) suivantes :*

a) A et B sont invariants et de type fini sur k.

b) A est connexe et B est de type fini sur k.

Alors (A,B) est de type fini sur k, et le foncteur défini par (A,B) est le faisceau associé pour la topologie fppf (ou la topologie fpqc) au préfaisceau en groupes des commutateurs de A et B dans G. De plus, $(A,B)^{o} = (A,B^{o}).(A^{o},B)$.

D'après (7.6) pour montrer que (A,B) est le faisceau associé désiré, il suffit de montrer qu'il existe un entier n tel que $\nu^{n}(A\times_{k}B)^{n}) = (A,B)$ (notations de (7.2 (vii)). Pour montrer cela, ainsi que pour montrer les deux autres assertions, on peut supposer k algébriquement clos (7.1 (iii), EGA IV 2.6.1 et 2.7.1 et VI_{A} 2.1.1).

Soient alors $B^{o},\ldots,B^{p}$ les composantes connexes de B et $A^{o},\ldots,A^{q}$ celles de A (ces composantes sont en nombre fini puisque A et B sont supposés de type fini sur k, donc noethériens). Soit ν_{ij} la restriction de ν à $A^{i}\times_{k}B^{j}$. Alors chacun des A^{i} et des B^{j} est irréductible (VI_{A} 2.4.1), il en est donc de même de $A^{o}\times_{k}B^{j}$ et de $A^{i}\times_{k}B^{o}$. Puisque l'élément neutre de G appartient à A^{o} et à B^{o}, il appartient à $\nu_{oj}(A^{o}\times_{k}B^{j})$ et à $\nu_{io}(A^{i}\times_{k}B^{o})$. Alors chacun des $\Gamma_{G}(\nu_{oj})$ et des $\Gamma_{G}(\nu_{io})$ est connexe (7.2 (vi)). De même, si u_{oj} (resp. u_{io}) désigne l'injection de $\Gamma_{G}(\nu_{oj})$ (resp. $\Gamma_{G}(\nu_{io})$) dans G, $(A^{o},B) = \Gamma_{G}((u_{oj})_{j=o}^{p})$ et $(A,B^{o}) = \Gamma_{G}((u_{io})_{i=o}^{q})$ sont connexes. De plus, on déduit aisément de (7.4) et des constructions précédentes, qu'il existe un indice n tel que (A^{o},B) et (A,B^{o}) soient inclus dans $\nu^{n}((A\times_{k}B)^{n})$. Dans le cas b), on a $(A,B) = (A^{o},B)$, et on a terminé.

Plaçons-nous maintenant dans le cas a). Soit H le sous-préschéma en groupes de G engendré par la réunion de (A,B^{o}) et de (A^{o},B) ; toujours

d'après (7.4), H est connexe, et il existe un entier m tel que $\nu^m((A\times_k B)^m) \supset H$.
Donc l'ensemble sous-jacent à H n'est autre que $(A,B^o).(A^o,B)$.

Etant donnée une partie X de G stable pour la loi de groupe (cf. 3.0) nous noterons X_o le groupe des points fermés de G appartenant à X. Posons $\Gamma' = \bigcup_{q\geq 1} \nu^q((A\times_k B)^q)$. Alors, d'après la prop. 7.9 ci-dessous, on a : $(A^o B)_o = (A_o^o, B_o)$, $(A,B^o)_o = (A_o,B_o^o)$ et $\Gamma'_o = (A_o,B_o)$, si bien que $H_o = (A_o^o,B_o).(A_o,B_o^o)$ est d'indice fini dans Γ'_o (Bible exp. 3, appendice) puisque A_o et B_o sont invariants, et que A_o^o (resp. B_o^o) est l'indice fini dans A (resp. B). Nous sommes alors dans les conditions du lemme (7.7) : puisque $\nu^m((A\times_k B)^m)$ H, il existe un entier p tel que $\nu^{mp}((A\times_k B)^{mp}) = (A,B)$, et il existe une suite finie $a_1,\ldots,a_n$ de points fermés de G telle que : $(A,B) = a_1.H \cup\ldots\cup a_n.H$. Alors puisque H est de type fini sur k, chacun des $a_i H$ est quasi-compact, donc leur réunion (A,B) est quasi-compacte, donc de type fini sur k. Puisque H est irréductible, il en est de même de chacun des $a_i.H$ et puisque $e\in H$, il est clair que $H = (A,B)^o$, cqfd.

Proposition 7.9. *Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe localement de type fini.*

(i) *Soient A et B deux parties ind-constructibles de G. Notons $A_o = A(k) \subset G(k)$ l'ensemble des points fermés de G appartenant à A. Alors $(A.B)_o = A_o.B_o$, le second produit étant pris dans le groupe $G_o = G(k)$.*

(ii) *Soient X un k-préschéma séparable et localement de type fini, et $f : X \longrightarrow G$ un k-morphisme. Posons $\Gamma'_G(f) = \bigcup_{n\geq 1} f^n(X^n)$. Alors $(\Gamma'_G(f))_o$ est le sous-groupe de $G_o = G(k)$ engendré par $(f(X))_o$.*

(iii) *En particulier, soient A et B deux sous-préschémas en groupes lisses de*

G ; posons $\Gamma' = \bigcup_{n \geq 1} \nu^n(A \times_k B)^n)$ (notations de 7.2 (vii)). Alors Γ'_o est le groupe des commutateurs de A_o et B_o dans G_o.

Montrons d'abord la première assertion. Il est clair que $A_o.B_o \subset (A.B)_o$. Réciproquement, soit $z \in (A,B)_o$. Alors $\mu^{-1}(z)$ est un fermé de $G \times_k G$, et $A \times_k B$ (cf. 3.0) est une partie ind-constructible de $G \times_k G$, si bien que $\mu^{-1}(z) \cap (A \times_k B)$ est une partie ind-constructible non vide de $G \times_k G$; elle contient donc un point fermé de G (EGA IV 10.1.2) dont les projections x et y sont des points fermés de G (EGA IV 10.4.7) tels que $x \in A$, $y \in B$ et $x.y = z$, si bien que $(A,B)_o = A_o.B_o$.

Pour montrer la seconde assertion, remarquons que, f^n étant localement de type fini, $f^n(X^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV 1.9.5). La première assertion permet alors de montrer par récurrence que, si on pose $A = (f(X))_o$, on a : $(f^n(X^n))_o = (A \cup A^{-1})^n$, et par conséquent, $(\Gamma'_G(f))_o = \bigcup_{n \geq 1} (f^n(X^n))_o = \bigcup_{n \geq 1} (A \cup A^{-1})^n$, qui est le sous-groupe de G_o engendré par $A = (f(X))_o$.

La troisième assertion résulte de la seconde et des définitions.

Corollaire 7.10. Sous les conditions de 7.8, si k est algébriquement clos, alors $(A,B)(k)$ est le sous-groupe des commutateurs de $A(k)$ et $B(k)$ dans $G(k)$.

En effet, il suffit d'appliquer 7.9 (iii), 7.8 et 7.6.

8. Préschémas en groupes résolubles et nilpotents

8.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\mathbb{T}$ une topologie sur $\mathcal{C}$ (IV) G un préfaisceau en groupes sur $\mathcal{C}$, A et B deux sous-préfaisceaux en groupes de G. On note $\underline{\mathrm{Comm}}(A,B)$ le préfaisceau en groupes des commutateurs des préfaisceaux A et B dans le préfaisceau G. Si G, A et B sont des faisceaux, on note $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathbb{T}}(A,B)$ le faisceau associé au préfaisceau $\underline{\mathrm{Comm}}(A,B)$.

Si A est invariant dans G, on montre aisément que $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathbb{T}}(G,G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathbb{T}}(G,A)$) est le plus petit sous-faisceau en groupes invariant C de G tel que le faisceau quotient G/C (resp. A/C) soit commutatif (resp. central dans G/C).

Proposition 8.2. *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie,* $\mathbb{T}$ *une topologie sur* $\mathcal{C}$, G *un faisceau en groupes sur* $\mathcal{C}$, n *un entier positif ou nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Si on pose :* $K_o = G$, *et pour* $p \geq 1$, $K_p = \underline{\mathrm{Comm}}(K_{p-1},K_{p-1})$ (*resp.* $K_p = \underline{\mathrm{Comm}}(G,K_{p-1})$), *alors* K_n *est le préfaisceau en groupes unité.*

(ii) *Si on pose* $K'_o = G$, *et pour* $p \geq 1$, $K'_p = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathbb{T}}(K'_{p-1},K'_{p-1})$ (*resp.* $K'_p = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathbb{T}}(G,K'_{p-1})$), *alors* K'_n *est le faisceau en groupes unité.*

(iii) *Il existe une suite* $H_o = G, H_1,\ldots,H_n$ *de sous-faisceaux invariants de* G, *telle que, quel que soit* i, *le faisceau quotient* H_i/H_{i+1} (*resp.* G/H_i) *soit commutatif* (*resp. central dans* G/H_{i+1}) *et que* H_n *soit le faisceau unité.*

Il est clair que $K_n \subset K'_n$; par conséquent (ii) entraîne (i).

Montrons que (i) entraîne (ii). Il résulte de (IV 4.4.7) que si on note $\overline{A}$ le faisceau associé à un préfaisceau A, et si A et B sont deux sous-préfaisceaux en groupes de G, alors on a : $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathbb{T}}(\overline{A},\overline{B}) \subset \overline{\underline{\mathrm{Comm}}(A,B)}$. On en déduit aisément par récurrence qu'on a $K'_p \subset \overline{K}_p$, donc $K'_n \subset \overline{K}_n$; par conséquent, si K_n est le préfaisceau unité, $\overline{K}_n = K_n$ est le faisceau unité, donc K'_n est le faisceau unité.

Enfin les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes d'après la remarque (8.1).

Lorsque ces conditions sont satisfaites, le faisceau G est dit résoluble de classe n (resp. nilpotent de classe n). Lorsqu'il existe un entier n tel que ces conditions soient satisfaites, on dit que G est résoluble (resp. nilpotent). On notera que cette condition est indépendante de $\mathbb{T}$.

Proposition 8.3. *Soient* k *un corps*, S *un* k-*préschéma non vide*, Ω *une extension algébriquement close de* k, G *un* k-*groupe lisse de type fini*. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) G *est résoluble de classe* n (*resp*. *nilpotent de classe* n).

(ii) $G \times_k S$ *est résoluble de classe* n (*resp*. *nilpotent de classe* n).

(iii) *Le groupe* $G(\Omega)$ *est résoluble de classe* n (*resp*. *nilpotent de classe* n).

(iv) *Si on pose* $K_o = G$, *et pour* $p \geq 1$, $K_p = (K_{p-1}, K_{p-1})$ (*resp*. $K_p = (G, K_{p-1})$) (cf. 7.8), K_n *est le* k-*groupe unité*.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de la définition (8.2), étant donné que la formation du préfaisceau en groupes des commutateurs commute aux changements de base (IV 4.1.3).

L'équivalence des conditions (i) et (iv) résulte de (7.8).

Pour montrer que les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes, on peut supposer que $k = \Omega$, et alors l'équivalence des conditions (iii) et (iv) résulte de (7.10).

Proposition 8.4. *Soit* G *un* S-*groupe de présentation finie*, *tel que pour tout* $s \in S$, G_s *soit lisse sur* $\varkappa(s)$. *Soit* T *l'ensemble des* $s \in S$ *tels que* G_s *soit résoluble* (*resp*. *nilpotent*). *Alors* T *est localement constructible dans* S. *Si on suppose de plus* G *plat et séparé sur* S (*i.e.* *lorsque* G *est lisse de* présentation finie et séparé sur S), alors T est fermé dans S.

Il est clair qu'on peut supposer S affine d'anneau A. Il existe alors (10.1 et 10.10 b)) (*) un sous-anneau noethérien A' de A et un A'-groupe de type fini G' tel que $G'\otimes_{A'}A$ soit isomorphe à G. De plus (EGA IV 10.8.5 et 11.2.6), si G est plat et séparé sur S, on peut supposer G' plat et séparé sur Spec A'. De même (EGA IV 9.7.7 et 9.3.3), on peut supposer que, pour tout $s' \in S'$, G'_s est lisse sur $\varkappa(s)$. D'autre part puisque, si s' désigne l'image de s dans Spec A', on a : $G'_{s'}\otimes_{\varkappa(s')}\varkappa(s) \simeq G_s$, pour que G_s soit résoluble (resp. nilpotent), il faut et il suffit qu'il en soit de même de $G'_{s'}$ (8.3). Nous somme donc ramenés au cas où S est un schéma affine noethérien.

Montrons alors que T est constructible. En appliquant le critère (EGA 0_{III} 9.2.3), on voit, en raisonnant comme précédemment, qu'on est ramené à montrer que, dans le cas où S est noethérien et intègre, T ou S-T contient un ouvert non vide de S.

Supposons donc S intègre noethérien de point générique η. Posons, quel que soit $s \in S$, $K_s^o = G_s$, et $K_s^p = (K_s^{p-1}, K_s^{p-1})$ (resp. $K_s^p = (G, K_s^{p-1})$).

Montrons d'abord que la suite des sous-préschémas fermés K_η^p est stationnaire ; il résulte de (7.3(v)) que chacun des K_η^p est invariant, donc la suite des K_η^p est décroissante ; cette suite est alors stationnaire puisque G_η est noethérien ; il existe donc un entier n tel que, pour tout $p \geq n$, on ait : $K_\eta^p = K_\eta^n$.

(*) Nous nous servirons au cours de cette démonstration de résultats établis au numéro 10 qui ne dépendent, pas plus que le numéro 9, du présent n° 8.

D'autre part, nous verrons en (10.12 et 10.13) qu'il existe un ouvert non vide S' de S et un S'-groupe de présentation finie D tel que pour tout $s \in S'$, on ait $D_s = K^n_s$ et $(D_s,D_s) = D_s$ (resp. $(G_s,D_s) = D_s$). Nous pouvons supposer que S' = S. Alors, quel que soit $s \in S$, et quel que soit $p \geq n$, on a $D_s = K^p_s$, si bien que G_s est résoluble (resp. nilpotent) si et seulement si D_s est isomorphe au $\varkappa(s)$-groupe unité.

Mais d'après (EGA IV 9.6.1) (xi), l'ensemble des $s \in S'$ tels que le morphisme structural $D_s \longrightarrow \operatorname{Spec} \varkappa(s)$ soit un isomorphisme est constructible, donc ou bien est rare, ou bien contient un ouvert non vide de S.

Montrons que si G est plat et séparé sur S, T est fermé ; puisque T est localement constructible, pour que T soit fermé (EGA IV 1.10.1), il faut et il suffit que T soit stable par spécialisation.

Soit donc $s \in S$ et s' une spécialisation de s dans S. Puisqu'on s'est ramené au cas où S est noethérien, d'après (EGA II 7.1.9), il existe un de valuation discrète A et un morphisme $A \longrightarrow S$ tel que s (resp. s') soit l'image du point générique α (resp. du point fermé a) de A. Il suffit alors de montrer que si on pose $G' = G \otimes_S A$, et si G'_α est résoluble (resp. nilpotent), il en est de même de G'_a. Remarquons que, puisque G est plat et séparé sur S, G'_α est plat et séparé sur A, de sorte qu'on est ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A.

Puisque G'_α est supposé résoluble (resp. nilpotent), il existe un entier q tel que K^p_α (avec les notations introduites précédemment) soit isomorphe au $\varkappa(\alpha)$-groupe unité. Soit $\overline{K^n}$ l'adhérence schématique (au sens de (EGA 2.8.5)) de K^n_α dans G. Montrons, par récurrence sur p, que $(\overline{K^p_\alpha})_a \supset K^p_a$. Notons d'abord que, puisque G est plat sur A, $\overline{G_\alpha}$ est égal à G (EGA IV 2.8.5), donc $\overline{(K^o_\alpha)}_a = K^o_a$.

Notons $\bar\nu$, $\bar\nu_a$, ν_a, ν_α les morphismes

$\overline{K^p_\alpha} \times_A \overline{K^p_\alpha} \longrightarrow G$, $(\overline{K^p_\alpha})_a \times_{\varkappa(a)} (\overline{K^p_\alpha})_a \longrightarrow G_a$, $K^p_a \times_{\varkappa(a)} K^p_a \longrightarrow G_a$,

$K^p_\alpha \times_{\varkappa(\alpha)} K^p_\alpha \longrightarrow G_\alpha$ (resp. $G \times_A \overline{K^p_\alpha} \longrightarrow G$, $G_a \times_{\varkappa(a)} (\overline{K^p_\alpha})_a \longrightarrow G_a$,

$G_a \times_{\varkappa(a)} K^p_a \longrightarrow G_a$, $G_\alpha \times_{\varkappa(\alpha)} K^p_\alpha \longrightarrow G_\alpha$, définis comme dans (7.2 (vii)). Alors puisque ν_α se factorise à travers K^{p+1}_α, $\bar\nu$ se factorise à travers $\overline{K^{p+1}_\alpha}$ qui est évidemment un sous-préschéma en groupes de G, donc $\overline{K^{p+1}_\alpha}$ contient $\Gamma_G(\bar\nu)$. D'après (7.1 (iii)), $(\Gamma_G(\bar\nu))_a = \Gamma_{G_a}(\bar\nu_a)$; d'après, l'hypothèse de récurrence, $K^p_a \times_{\varkappa(a)} K^p_a \subset (\overline{K^p_\alpha})_a \times_{\varkappa(a)} (\overline{K^p_\alpha})_a$ (resp. $G_a \times_{\varkappa(a)} K^p_a \subset G_a \times_{\varkappa(a)} (\overline{K^p_\alpha})_a$), si bien que $K^{p+1}_a = \Gamma_{G_a}(\nu_a) \subset \Gamma_{G_a}(\bar\nu_a) \subset (\overline{K^{p+1}_\alpha})_a$.

Mais puisque K^q est isomorphe $\varkappa(\alpha)$-groupe unité, et que le A-groupe unité est plat sur A et est isomorphe à un sous-préschéma fermé de G (G étant séparé sur A (5.1)), il résulte de (EGA IV 2.8.5) que $\overline{K^q_\alpha}$ est isomorphe au A-groupe unité, donc que $K^q_a \subset (\overline{K^q_\alpha})_a$ est isomorphe au $\varkappa(a)$-groupe unité, si bien que G_a est résoluble (resp. nilpotent), cqfd.

9. Faisceaux quotients.

Le présent numéro se borne pour l'essentiel à un rappel dans le cas particulier d'espaces homogènes, de groupes, de faits généraux bien connus sur le passage au quotient par des relations d'équivalences plates (cf. IV).

<u>Définition</u> 9.1. <u>Etant donné un monomorphisme</u> u : G' $\longrightarrow$ G <u>de</u> S-<u>groupes</u>, <u>on note</u> G/G' (<u>resp</u>. G'\G) <u>et on appelle</u> faisceau quotient à droite (resp. à gauche) de G par G' <u>le faisceau</u> (<u>pour la topologie</u> fpqc) <u>quotient de</u> G <u>par la</u>

relation d'équivalence définie par le monomorphisme : $G\times_S G' \xrightarrow{\delta\circ(\mathrm{id}_G\times u)} G\times_S G$ (resp. $G'\times_S G \xrightarrow{\gamma\circ(u\times\mathrm{id}_G)} G\times_S G$), où δ (resp. γ) désigne l'automorphisme de $G\times_S G$ défini par $(g,h)\longmapsto(g,g.h)$ (resp. $(h,g)\longmapsto h.g,g)$) pour $g\in G(T)$ et $h\in G'(T)$.

Proposition 9.2. Soit $u : G'\to G$ un monomorphisme de S-groupes. Supposons que G/G' soit représentable par un S-préschéma G''. Alors :

(i) Le morphisme canonique $p : G\to G''$ est couvrant pour la topologie fpqc.

(ii) Si on pose $\varepsilon'' = p\circ\varepsilon$ (ce morphisme s'appelle section unité de G''), les diagrammes suivants sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} G\times_S G' \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_G\times u)"] \arrow[d, "pr_1"'] & G \arrow[d, "p"] \\ G \arrow[r, "p"] & G'' \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} G' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi'"'] & G \arrow[d, "p"] \\ S \arrow[r, "\varepsilon''"] & G'' \end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, u est une immersion.

(iii) Il existe sur G'' une structure unique de S-préschéma à groupe d'opérateurs à gauche G, telle que p soit un morphisme de S-préschémas à groupe d'opérateurs G.

(iv) Si on suppose de plus que G' est invariant dans G, il existe sur G'' une structure unique de S-groupe telle que p soit un morphisme de S-groupes.

(v) Soit S_o un S-préschéma ; posons $G_o = G\times_S S_o$, $G'_o = G'\times_S S_o$; alors G_o/G'_o est représentable par $G''_o = G''\times_S S_o$.

(vi) Soit $\mathbb{P}$ une propriété pour un S-morphisme. Supposons $\mathbb{P}$ stable par changement de base ; alors si $p : G\to G''$ vérifie $\mathbb{P}$, il en est de même du morphisme structural $\pi' : G' \longrightarrow S$.

(vii) Soit $\mathbb{P}$ une propriété pour un S-morphisme. Supposons $\mathbb{P}$ de nature locale pour la topologie fpqc (cf. 2.0). Alors, pour que le morphisme $p : G \longrightarrow G''$ vérifie $\mathbb{P}$, il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\pi' : G' \longrightarrow S'$.

(viii) Soit $\mathbb{P}$ une propriété pour un S-morphisme ; supposons $\mathbb{P}$ de nature locale pour la topologie fpqc, et stable par composition ; alors, si les morphismes structuraux $G'' \longrightarrow S$ et $G' \longrightarrow S$ vérifient $\mathbb{P}$, il en est de même du morphisme structural $G \longrightarrow S$.

(ix) Supposons G réduit ; alors G'' est réduit.

(x) Pour que G'' soit séparé sur S, il faut et il suffit que u soit une immersion fermée, ou encore que ε'' soit une immersion fermée.

(xi) Pour que G' soit plat sur S, il faut et il suffit que p soit un morphisme plat, ou encore fidèlement plat. Dans ce cas, pour que G'' soit plat sur S, il faut et il suffit que G soit plat sur S.

(xii) Pour que G' soit plat et localement de présentation finie sur S, il faut et il suffit que $p : G \longrightarrow G''$ soit fidèlement plat et localement de présentation finie. Sous ces conditions, pour que G'' soit localement de présentation finie (resp. localement de type fini, resp. de type fini, resp. lisse, resp. étale, resp. non ramifié, resp. localement quasi-fini, resp. quasi-fini) sur S, il suffit qu'il en soit de même de G sur S, (et la condition est également nécessaire dans les deux premiers cas, cf. (viii)).

(xiii) Supposons G' plat et de présentation finie sur S. Alors p est de présentation finie et fidèlement plat ; de plus, pour que G soit de présentation finie sur S, il faut et il suffit qu'il en soit de même de G''.

Rappelons que la relation d'équivalence considérée est effective universelle (IV 4.4.9). Alors les assertions (i), (iii), (iv), (v) et la première assertion de (ii) résultent de (IV 4.4.3, 5.2.2, 5.2.4, 3.4.5 et 3.3.2 (iii)). La seconde assertion de (ii) résulte de la première, comme le montre le diagramme cartésien suivant, puisque $(G\times_S G')\times_G S$ est isomorphe à G' :

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, "((\varepsilon \circ \pi'),\, id_{G'})"] \arrow[d, "\pi'"'] & G\times_S G' \arrow[r, "\mu\circ(id_G\times u)"] \arrow[d, "pr_1"'] & G \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[r, "\varepsilon"] & G \arrow[r, "p"] & G''
\end{tikzcd}$$

Enfin, il est clair que ε'' est une S-section de G'', donc une immersion (EGA I 5.3.13) ; d'après le diagramme cartésien précédent, il en est de même de u, ce qui achève de montrer (ii). De plus, (vi) est une conséquence immédiate du second diagramme cartésien de (ii).

Montrons (vii). D'après (i), p est couvrant pour la topologie fpqc ; donc, d'après (ii), pour montrer que p vérifie $\mathbb{P}$, il suffit de montrer que la première projection $pr_1 : G\times_S G' \longrightarrow G$ vérifie $\mathbb{P}$, ce qui résulte de ce que $\mathbb{P}$ est stable par changement de base, puisque pr_1 provient de π' par changement de base.

Il est clair que (viii) résulte de (vii), car $\pi = \pi'' \circ p$, où $\pi'' : G'' \longrightarrow S$ désigne le morphisme structural.

Montrons (ix). D'après (i), p est un épimorphisme ; muisque G est réduit, p se factorise à travers l'immersion $G''_{red} \longrightarrow G$, qui est donc aussi un épimorphisme, donc un isomorphisme (IV 4.4.4).

Montrons (x). Si G'' est séparé sur S, ε'' est une immersion fermée (EGA I 5.4.6) ; d'après (ii), si ε'' est une immersion fermée, il en est de même de u ; enfin, si u est une immersion fermée, il en est de même de $\mu\circ(id_G\times u) : G\times_S G' \longrightarrow G\times_S G$; donc, d'après le lemme (9.2.1) ci-dessous, G''

est séparé sur S.

L'assertion (xi) résulte de (vii) et de (EGA IV 2.2.13).

L'assertion (xii) résulte de (vii), de (EGA IV 17.7.5 et 17.7.7) et de ce que, p étant universellement ouvert, quel que soit $s \in S$, si l'espace sous-jacent à G_s est discret, il en est de même de l'espace sous-jacent à G_s.

Enfin, l'assertion (xiii) résulte de (vii), (viii), et de (EGA IV 17.7.5).

Lemme 9.2.1. *Soient* X *un* S-*préschéma et* R *une relation d'équivalence définie sur* X *par le monomorphisme* $v : R \longrightarrow X\times_S X$. *Supposons* R *effective*. *Alors* :

(i) v *est une immersion*.

(ii) *Pour que* $Y = X/R$ *soit séparé sur* S, *il faut et il suffit que* v *soit une immersion fermée*.

Rappelons (IV 3.3.2) que par définition le morphisme naturel $R \longrightarrow X\times_Y X$ est un *isomorphisme*. On en déduit (EGA I 5.3.5) le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "v"] \arrow[d] & X\times_S X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\Delta_{Y/S}"] & Y\times_S Y \end{tikzcd} \quad .$$

Alors, puisque $\Delta_{Y/S}$ est une immersion (EGA I 5.3.9), il en est de même de v. De même, si Y est séparé sur S, $\Delta_{Y/S}$ est une immersion fermée, donc il en est de même de v. Réciproquement, puisque p est couvrant pour la topologie fpqc (IV 4.4.3), que la propriété pour un morphisme d'être une immersion fermée est de nature locale pour la topologie fpqc (EGA IV 2.7.1) et que $p\times_S p$ est aussi couvrant pour la topologie fpqc (IV 4.2.3), si v est une immersion fermée, il en est de même de $\Delta_{Y/S}$, donc Y est séparé sur S.

Remarque 9.2.2. Sous les hypothèses générales de (9.2), si on suppose G' plat et localement de présentation finie sur S, alors p est couvrant pour la topologie fpqc (9.2 (vii), donc les assertions (vii) et (viii) de (9.2) peuvent être étendues aux propriétés $\mathbb{P}$ de nature locale pour la topologie fppf.

Remarque 9.3. a) La question de savoir si un quotient G/G' est ou non représentable est souvent délicate ; dans ce séminaire nous démontrons la représentabilité de certains quotients particuliers.

En général, pour pouvoir affirmer que le quotient G/G' est représentable, il ne suffit pas de supposer G et G' de présentation finie sur S et G' plat sur S, car même lorsque G et G' sont lisses sur S, il se peut que G soit à fibres connexes, et que G' ne soit pas fermé dans G ; par suite G/G' devrait être séparé (5.3), ce qui est en contradiction avec (9.2(x)).

Pour obtenir un tel contre-exemple, on peut prendre pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète, poser $G = (G_m)_S$. Considérons d'autre part un entier $n > 1$, inversible sur S ; alors $\mu_n = \mathrm{Ker}\,(G \xrightarrow{n} G)$ est un sous-groupe fermé de G étale sur S (cf. VII). Soit G' le sous-groupe ouvert de μ_n obtenu en ôtant de μ_n la partie fermée de la fibre fermée de μ_n complémentaire de l'origine. Alors G' n'est pas fermé dans G, donc G/G' n'est pas représentable. (On peut aussi fabriquer de tels exemples où G' est lisse à fibres connexes).

b) Il n'est pas exclu que G/G' soit représentable en revanche, lorsque G et G' sont de présentation finie sur S, et que G' est plat sur S et fermé dans G (*). Sous ces hypothèses, on sait que G/G' est représentable dans les cas particuliers suivants :

1°- S est le spectre d'un anneau artinien (VI_A).

2°- G' est propre sur S et G quasi-projectif sur S (V 7.1).

3°- S est régulier de dimension 1 (Raynaud, à paraître).

10. Passage à la limite projective dans les préschémas en groupes et les préschémas à groupe d'opérateurs.

10.0. Rappelons le résultat essentiel de (EGA IV 8.8) : Etant donnée la situation suivante : S_o un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, I un ensemble préordonné filtrant croissant, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ un système inductif de $\mathcal{O}_{S_o}$-Algèbres commutatives quasi-cohérentes, $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}_i$, $S_i = \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}_i$ pour $i \in I$, et $S = \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}$, alors la catégorie des S-préschémas de présentation finie est déterminée à équivalence près par la donnée des catégories des S_i-préschémas de présentation finie, des foncteurs entre ces catégories $\rho_{ij} : X_i \mapsto X_i \times_{S_i} S_j$ pour $i \leqq j$, et isomorphismes de transitivité $\rho_{jk} \circ \rho_{ij} \xrightarrow{\sim} \rho_{ik}$. Précisons. Etant donné $j \in I$, et un S_j-préschéma de présentation finie X_j, nous poserons, pour tout $i \in I$ tel que $j \leqq i$, $X_i = X_j \times_{S_j} S_i$, et $X = X_j \times_{S_j} S$. Alors (EGA IV 8.8.2) :

i) Etant donné $j \in I$, et deux S_j-préschémas de présentation finie X_j et Y_j, l'application canonique de $\varinjlim_{i\geq j} \mathrm{Hom}_{S_i}(X_i, Y_i)$ dans $\mathrm{Hom}(X,Y)$ est bijective.

ii) Pour tout S-préschéma de présentation finie X, il existe un indice $j \in I$, un S_j-préschéma de présentation finie X_j et un S-isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X_j \times_{S_j} S$.

(*) C'est trop optimiste, comme le montre M. Raynaud dans sa thèse (loc. cit. X 14).

On en conclut (EGA IV 8.8.3) que, chaque fois qu'on aura un diagramme D portant sur un nombre fini d'objets et de flèches de la catégorie des S-préschémas de présentation finie, on peut trouver un indice $i \in I$ et un diagramme D_i dans la catégorie des S_i-préschémas de présentation finie, tels que le diagramme D provienne à isomorphisme près du diagramme D_i par changement de base $S \longrightarrow S_i$. On peut même trouver i et D_i tels que tout carré cartésien de D provienne d'un carré cartésien de D_i.

10.1. De plus, un grand nombre de propriétés courantes pour un morphisme, stables par changement de base, possèdent la propriété suivante ; étant donné un indice $j \in I$ deux S_j-préschémas de présentation finie X_j et Y_j et un S_j-morphisme $u_j : X_j \longrightarrow Y_j$, pour que $u = u_j \times_{S_j} S$ ait la propriété $\mathbb{P}$, il faut et il suffit qu'il existe un indice $i \in I$ tel que $j \leqq i$ et que $u_i = u_j \times_{S_j} S_i$ ait la propriété $\mathbb{P}$. Il en est ainsi dans le cas où $\mathbb{P}$ est l'une des propriétés suivantes pour un morphisme : être séparé, surjectif, radiciel, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, propre, projectif, quasi-projectif, un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée, lisse, non ramifié ou étale (EGA IV 8.10.5, 11.2.6 et 17.7.6). Remarquons qu'il en est encore ainsi <u>dans le cas où</u> $\mathbb{P}$ <u>est la propriété d'être couvra</u> <u>pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie</u> (notée fppf) en effet, étant donnés deux S-préschémas de présentation finie X et Y, et un S-morphisme $u : X \longrightarrow Y$, il résulte de (IV 6.3.1 (i)) que, pour que u soit couvrant pour la topologie fppf, il faut et il suffit qu'il existe un S-présché Z et un S-morphisme $v : Z \longrightarrow Y$ fidèlement plat et de présentation finie qui se factorise à travers u.

Le but de ce numéro est de donner des variantes de ce genre de résultats pour la catégorie des S-groupes de présentation finie, celle des S-préschémas à groupe d'opérateurs, et pour certaines propriétés pour des monomorphismes de groupes (être invariant, central à faisceau quotient représentable, etc ...).

Les deux résultats préliminaires de ce type sont les suivants :

10.2. Dans la situation rappelée au début de (10.0), soient $j \in I$, G_j et H_j deux S_j-groupes de présentation finie ; posons, pour tout $i \in I$ tel que $j \leq i$, $G_i = G_j \times_{S_j} S_i$, $G = G_j \times_{S_j} S$, et définissons de même G H_i et H. Alors l'application canonique de $\varinjlim_{i \geq j} \mathrm{Hom}_{S_i\text{-gr.}}(G_i, H_i)$ dans $\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(G,H)$ est bijective.

10.3. Dans la situation rappelée au début de (10.0), soit G un S-groupe de présentation finie ; alors il existe un indice $j \in I$, un S_j-groupe de présentation finie G_j, et un S-isomorphisme de groupes de G sur $G_j \times_{S_j} S$.

Les assertions (10.2) et (10.3) sont des conséquences faciles de (10.0) et (10.1), compte tenu de l'interprétation de la structure de S-groupe donnée en (EGA 0_{III} 8.2.5 et 8.2.6).

10.4. Soient $j \in I$, G_j et H_j deux S_j-groupes de présentation finie, et $u_j : G_j \rightarrow H_j$ un morphisme de S_j-groupes. Pour que $u = u_j \times_{S_j} S$ soit un monomorphisme central (resp. un monomorphisme invariant), il faut et il suffit qu'il existe $i \in I$, $i \geq j$ tel que $u_i = u_j \times_{S_j} S_i$ ait la même propriété.

C'est une conséquence immédiate de (10.0) et (10.1) compte tenu de la caractérisation donnée en (6.7) des monomorphismes de groupes centraux et invariants.

Corollaire 10.5. Soit $j \in I$, et soit G_j un S_j-groupe de présentation finie. Pour que $G = G_j \times_{S_j} S$ soit commutatif, il faut et il suffit qu'il existe $i \in I$, $i \geq j$, tel que $G_i = G_j \times_{S_j} S_j$ soit commutatif.

En effet, il revient au même de dire qu'un S-groupe est commutatif, ou que, considéré comme sous-préschéma en groupes de lui-même, il est central.

Proposition 10.6. Dans la situation rappelée au début de (10.0), soient $j \in I$, G_j un S_j-groupe de présentation finie, G'_j un sous-préschéma en groupes de G_j plat et de présentation finie sur S_j. Pour que $G_j \times_{S_j} S/G'_j \times_{S_j} S$ soit représentable (pour la topologie fpqc), il faut et il suffit qu'il existe $i \in I$, $i \geq j$, tel que $G_j \times_{S_j} S_i/G'_j \times_{S_j} S_i$ soit représentable.

C'est une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 10.7. Soit $\mathbf{T}$ la topologie fppf ou fpqc ; soient $j \in I$, X_j un S_j-préschéma de présentation finie, et R_j une relation d'équivalence sur X_j définie par un S_j-monomorphisme $v_j : R_j \longrightarrow X_j \times_{S_j} X_j$ tel que le morphisme $pr_{1,j} \circ v_j : R_j \rightarrow X_j$ déduit de v_j par composition avec la première projection $X_j \times_{S_j} X_j \longrightarrow X_j$ soit plat et de présentation finie. Alors, pour que le faisceau quotient $X_j \times_{S_j} S/R_j \times_{S_j} S$ pour la topologie $\mathbf{T}$ soit représentable, il faut et il suffit qu'il existe $i \in I$, $i \geq j$, le faisceau quotient $X_j \times_{S_j} S_i/R_{j S_j} S_i$ pour la topologie $\mathbf{T}$ soit représentable.

Compte tenu des énoncés de (EGA IV 8.8.2, 8.8.3, 8.10.5 et 11.2.6) rappelés en (10.0), ce lemme est conséquence du résultat suivant :

Lemme 10.8. Soit $\mathbf{T}$ la topologie fppf ou fpqc ; soient X un S-préschéma de présentation finie (resp. localement de présentation finie), R une relation d'équivalence sur X définie par un monomorphisme $v : R \longrightarrow X \times_S X$ tel que $pr_1 \circ v$ soit plat et de présentation finie (resp. plat et localement de présentation finie). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le faisceau quotient X/R pour la topologie $\mathbb{T}$ est représentable.

(ii) Il existe un S-préschéma de présentation finie (resp. localement de présentation finie) Y et un morphisme fidèlement plat $p : X \to Y$ tel que le diagramme

$$(D) \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "pr_1 \circ v"] \arrow[d, "pr_2 \circ v"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

(où pr_1 et pr_2 sont les projections $X \times_S X \rightrightarrows X$) soit cartésien.

Notons d'abord que d'après (IV 3.3.2 et 4.4.3), pour que le faisceau X/R pour la topologie $\mathbb{T}$ soit représentable par Y, il faut et il suffit que le diagramme (D) soit cartésien et que p soit couvrant pour la topologie $\mathbb{T}$.

Montrons que i) entraîne ii). L'hypothèse (i) implique que le diagramme (D) est cartésien, donc que $pr_1 \circ v$ se déduit de p par changement de base par p, et que p est couvrant pour la topologie fpqc. Puisque $pr_1 \circ v$ est fidèlement plat et de présentation finie, (resp. fidèlement plat et localement de présentation finie), il en est de même de p (EGA IV 2.7.1), et comme X est de présentation finie (resp. localement de présentation finie) sur S, il en est de même de Y (EGA IV 17.7.4).

Montrons que ii) entraîne i). Il suffit de montrer que p est couvrant pour la topologie fppf ; or p est fidèlement plat par hypothèse, et localement de présentation finie, puisque X et Y sont localement de présentation finie sur S.

10.9. Dans la situation rappelée au début de (10.0), soient $j \in I$, et G_j un S_j-groupe de présentation finie. Pour que $G^\circ = (G_j \times_{S_j} S)^\circ$ soit représentable, il faut et il suffit qu'il existe $i \in I$, $i \geq j$, tel que $(G_i)^\circ = (G_j \times_{S_j} S_i)^\circ$ soit représentable.

La condition est suffisante (3.3).

Montrons que la condition est nécessaire. En effet, G° est de présentation finie sur S et ouvert dans G (3.9). D'après (10.0), il existe $i \in I$, $i \geq j$, et un sous-préschéma en groupes ouvert G_i° de G_i tel que $G_i^\circ \times_{S_i} S = G^\circ$. Le morphisme structural $G^\circ \to S$ est connexe (i.e. à fibres géométriquement connexes (VI_A 2.1.1). Alors, (EGA IV 9.3.3 et 9.7.7), quitte à augmenter i, on peut supposer que le morphisme structural $G_i^\circ \longrightarrow S$ est connexe, donc que l'espace sous-jacent à G_i° n'est autre que $(G_i)^\circ$ (3.10.1), donc que G_i° représente $(G_i)^\circ$.

10.10. Rappelons deux cas particuliers très utiles de la situation énoncée en (10.0) :

a) Etant donné un point x d'un préschéma X, on pose $S_o = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et on considère la famille $(S_i)_{i\in I}$ filtrante décroissante des voisinages ouverts affines de x ; alors $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$. En particulier, si x est le point générique d'un schéma intègre X, on trouve $S = \operatorname{Spec} \kappa(x)$.

b) On pose $S_o = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, et on considère la famille $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ préordonnée par inclusion des sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini de l'anneau d'un schéma affine S. Etant donné que les $\mathfrak{a}_i$ sont des anneaux noethériens, cela permet dans de nombreux cas de passer du cas noethérien au cas général.

Nous allons maintenant donner deux résultats concernant le cas particulier envisagé en a).

Proposition 10.11. Soient S un préschéma intègre de point générique η, G un S-groupe de présentation finie, X un S-préschéma de présentation finie, u et v deux S-morphismes de X dans G, $i : H \longrightarrow G$ et $j : K \longrightarrow G$ deux monomorphismes de présentation finie. Alors :

(i) il existe un ouvert non vide S' de S tel que si on note G' (resp. H', resp. X', resp. u', resp. v') la restriction de G(resp. H, resp. X, resp. u, resp. v) au-dessus de l'ouvert S' de S, le foncteur $\mathrm{Transp}(u',v')$ (resp. $\mathrm{Centr}(u')$, $\mathrm{Centr}_{G'}H'$) soit représentable par un sous-S'-préschéma fermé de présentation finie T'_1 (resp. C'_1, resp. C'_2) de G'.

(ii) supposons que K_η soit fermé dans G_η (ce qui est le cas si K est un sous-S-préschéma en groupes de G (1.4.2)) ; alors il existe un ouvert non vide S' de S tel que si on note G' (resp. H', resp. K') la restriction de G (resp. H, resp. K) au-dessus de l'ouvert S' de S, le foncteur $\mathrm{transp}_{G'}(H',K')$ (resp. $\mathrm{Norm}_{G'}K'$) soit représentable par un sous-S'préschéma fermé de présentation finie T'_2 (resp. N') de G'.

(iii) supposons que H_η et K_η soient fermés dans G_η (ce qui est le cas si H et K sont des sous-préschémas en groupes de G (1.4.2)) ; alors il existe un ouvert non vide S' de S tel que si on note G' (resp. H', resp. K') la restriction de G (resp. H, resp. K) au-dessus de l'ouvert S' de S, le foncteur $\mathrm{Transpstr}_{G'}(H',K')$ soit représentable par un sous-S'-préschéma fermé de présentation finie de G'.

Puisque G_η , X_η , H_η , K_η sont plats sur le corps $\kappa(\eta)$, et que G_η est séparé sur $\kappa(\eta)$ (VI_A 0.2), d'après (10.2, 10.10 a), EGA IV 8.8.2 et 8.10.5), il existe un ouvert affine S' de S tel que G' soit un S'-groupe de présentation fini, plat et séparé sur S', et que X', H' et K' soient plats et de présentation finie sur S'. Si on suppose H_η (resp. K_η) fermé dans G_η, on peut choisir S' de sorte que H' (resp. K') soit fermé dans G'. D'après (EGA IV 11.3.15), quitte à remplacer S' par un ouvert affine de S', on peut supposer que G', H', K' et X' sont essentiellement libres sur S' (au sens de VIII (6.1)). Il résulte alors de (VIII 5.5 b) et e)(*)) que, sous les hypothèses de l'énoncé, les foncteurs considérés sont représentables par des sous-préschémas fermés (donc de présentation finie sur S') de G'.

Proposition 10.12. Soient S un préschéma intègre, G un S-groupe de présentation finie, A et B deux sous-préschémas en groupes de présentation finie de G, à fibre générique lisse, tels que A soit à fibre générique connexe (resp. A et B soient invariants dans G). Alors il existe un ouvert non vide S' de S et un sous-préschéma en groupes fermé, D' de présentation finie, à fibres lisses de $G' = G|S'$, tel que D' soit à fibres connexes (resp. soit invariant dans G'), et que D' représente le faisceau associé, pour la topologie fppf ou fpqc, au préfaisceau en groupes des commutateurs de A et B dans G. En particulier, pour tout $s \in S'$, on a $D'_s = (A_s, B_s)$ avec les notations de (7.2 (vii)).

(*) Voir note page 40.

Soit η le point générique de S ; posons $D'_\eta = (A_\eta, B_\eta)$. D'après (7.8) (resp. 7.3 v)), D'_η est connexe (resp. invariant dans G_η). D'après (10.1 et 10.10 a)), il existe un ouvert non vide S' de S et un sous-S'-préschéma en groupes D' de présentation finie et fermé dans G', à fibres séparables (EGA IV 9.7.7 et 9.3.3), ayant D'_η pour fibre au point η, et tel que D' soit à fibres connexes (i.e. géométriquement connexes (VI_A 2.1.1)) (resp. soit invariant dans G') (EGA IV 9.7.7 et 9.3.3, (resp. (10.4)). De plus, nous avons vu, au cours de la démonstration de (7.8), qu'il existe un entier n tel que $\nu_\eta^n((A_\eta \times_{\varkappa(\eta)} B_\eta)^n) = D'$, où $\nu_\eta : A_\eta \times_{\varkappa(\eta)} B_\eta \to G_\eta$ est défini comme en (7.2 (vii)). Nous pouvons définir, par les mêmes formules qu'en (7.2 (vii)) et 7.1 (ii)), les morphismes $\nu' : A' \times_{S'} B' \to G'$ et $\nu'^n : (A' \times_{S'} B')^n \longrightarrow G'$, on a bien $\nu'^n{}_{(\varkappa(\eta))} = \nu_\eta^n$. Par conséquent (EGA IV 8.8.3, 8.10.5 et 11.2.6), on peut choisir S' tel que le morphisme ν'^n soit plat et se factorise à travers D', et que le morphisme $(A' \times_{S'} B')^n \to D'$ déduit de ν'^n soit surjectif. Alors (7.5) le morphisme $(A' \times_{S'} B')^{n+1} \longrightarrow D'$ déduit de ν'^{n+1} est couvrant pour la topologie fppf (et a fortiori pour la topologie fpqc). Donc D' représente le faisceau associé, pour la topologie fppf ou fpqc, au préfaisceau des commutateurs de A et B dans G. De plus, pour tout $s \in S'$, le morphisme $(A_s \times_{\varkappa(s)} B_s)^n \longrightarrow D'_s$ déduit de ν_s^n est surjectif ; donc (7.6), (A_s, B_s) représente le faisceau des commutateurs de A_s et B_s dans G_s (pour la topologie fppf ou fpqc), d'où $D'_s = (A_s, B_s)$.

<u>Corollaire</u> 10.13. <u>Soient</u> S <u>un préschéma intègre de point générique</u> η, G <u>un</u> S-<u>groupe de présentation finie</u>, D <u>un sous</u>-S-<u>préschéma en groupes de présentation finie de</u> G <u>à fibres lisses et invariant dans</u> G. <u>Supposons qu'on ait</u> $(D_\eta, D_\eta) = D_\eta$ (<u>resp</u>. $(G_\eta, D_\eta) = D_\eta$). <u>Il existe alors un ouvert non</u>

vide S' de S tel que pour tout $s \in S'$, on ait $(D_s, D_s) = D_s$ (resp. $(G_s, D_s) = D_s$).

Cela résulte immédiatement de (10.12) et de (EGA IV 8.8.2.5).

Les énoncés (10.2) et (10.3) concernant la catégorie des S-groupes de présentation finie s'étendent à la catégorie des couples formés d'un S-groupe de présentation finie et d'un S-préschéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G. De façon précise :

10.14. (i) Dans la situation rappelée au début de (10.0), soient $j \in I$, et G_j et G'_j deux S_j-groupes de présentation finie, H_j (resp. H'_j) un S_j-préschéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G_j (resp. G'_j). Posons, pour $i \in I$, $i > j$, $G_i = G_j \times_{S_j} S_i$ et $G = G_j \times_{S_j} S$, et définissons de même G'_i, G', H_i, H, H'_i, et H'. Notons $\mathrm{Dihom}_{S\text{-gr.}}((G,H),(G',H'))$ l'ensemble des di-morphismes de S-groupes et de S-préschémas à groupe d'opérateurs du couple (G,H) dans le couple (G',H'). Alors l'application canonique de $\varinjlim_{i \geq j} \mathrm{Dihom}_{S_i\text{-gr.}}((G_i,H_i),(G'_i,H'_i))$ dans $\mathrm{Dihom}_{S\text{-gr.}}((G,H),(G',H'))$ est bijective.

(ii) Dans la situation rappelée au début de (10.0), soient G un S-groupe de présentation finie et H un S-préschéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G ; il existe alors un indice $j \in J$, un S_j-groupe de présentation finie G_j, un S_j-préschéma de présentation finie H_j à groupe d'opérateurs G_j et un di-isomorphisme de S-groupes et de S-préschémas à groupes d'opérateurs de $(G_j \times_{S_j} S, H_j \times_{S_j} S)$ sur (G,H).

Définition 10.15. Etant donné un S-foncteur en groupes G et un S-foncteur H à groupe d'opérateurs G, on dit que H est un S-foncteur en espaces homogènes sous G pour la topologie **T**, si le morphisme canonique $G \times_S H \longrightarrow H \times_S H$ (défini par

$(g,h) \mapsto (g.h,h)$ pour $g \in G(T)$, $h \in H(T)$) est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie $\mathbb{T}$.

Si G est un S-groupe et si H est un S-préschéma à groupe d'opérateurs G, dire que H est un S-préschéma en espaces homogènes sous G pour la topologie $\mathbb{T}$ revient donc à dire que le morphisme canonique $G \times_S H \longrightarrow H \times_S H$ défini comme précédemment est couvrant pour la topologie $\mathbb{T}$ (IV 4.4.3).

De même, dire qu'un S-préschéma H à groupe d'opérateurs un S-groupe G est un fibré principal homogène sous G pour la topologie $\mathbb{T}$ (IV 5.1.5) revient à dire (IV 5.6 (ii)) que le morphisme canonique $G \times_S H \longrightarrow H \times_S H$ est un isomorphisme et que le morphisme structural $H \longrightarrow S$ est couvrant pour la topologie $\mathbb{T}$.

10.16. Dans la situation rappelée au début de (10.0), soient $j \in I$, G_j un S_j-groupe de présentation finie, H_j un S_j-préschéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G_j. Pour que $H = H_j \times_{S_j} S$ soit un S-préschéma en espaces homogènes sous $G = G_j \times_{S_j} S$ (resp. un fibré principal homogène sous G) pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie, il faut et il suffit qu'il existe un indice $i \in I$, $i \geq j$, tel que $H_i = H_j \times_{S_j} S_i$ soit un S_i-préschéma en espaces homogènes sous $G_i = G_j \times_{S_j} S_i$ (resp. un fibré principal homogène sous G_i).

Compte tenu de (10.14) et de (EGA IV 8.8.2, 8.8.3 et 8.10.5), l'énoncé résulte de la propriété concernant les morphismes couvrants pour la topologie fppf rappelée en (10.0).

11. Préschémas en groupes affines.

11.0. Notations : soient S un préschéma, X un S-préschéma, $f : X \longrightarrow S$ le morphisme structural ; on pose $\mathcal{A}(X) = f_*(\mathcal{O}_X)$.

Lemme 11.1. Soient X et Y deux S-préschémas quasi-compacts et quasi-séparés sur S, $f:X \longrightarrow S$ et $g:Y \longrightarrow S$ les morphismes structuraux. Alors l'homomorphisme canonique

$$\varphi : \mathcal{A}(X)\otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}(Y) \longrightarrow \mathcal{A}(X\times_S Y)$$

est un isomorphisme dans chacun des cas suivants :

a) f et g sont affines

b) f ou g est plat et affine

c) g est plat et $f_*(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_S$-Module plat.

Dans le cas b), on peut supposer que c'est g qui est plat et affine. Posons $S' = \operatorname{Spec}\mathcal{A}(X)$, $Y' = Y\times_S S'$, $g' = g\times_S S'$ et notons v le morphisme $S' \rightarrow S$. Alors Y est quasi-compact et quasi-séparé sur S, et, ou bien S' est plat sur S (cas c) d'après (EGA III (1.4.15.5)), ou bien g est affine (cas a) et b)). Alors (EGA III 1.4.15 et IV 1.2.7 ou II 1.5.2), on a :

$$g'_*(\mathcal{O}_{Y'}) = v^* g_*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{A}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} .$$

D'après (EGA II 1.2.7), f se factorise à travers v au moyen d'un morphisme $p : G \rightarrow S'$, et on a : $X\times_S Y = X\times_{S'} Y'$ et $p_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{S'}$. Puisque v et f sont quasi-compacts et quasi-séparés, il en est de même de p (EGA IV 1.2.2 et 1.2.4). Ou bien Y est plat sur S (cas b) et c)) et alors Y' est plat sur S', ou bien X est affine sur S (cas a)), et alors p est un isomorphisme. Dans le premier cas, on peut de nouveau appliquer (EGA III 1.4.15 et IV 1.2.7), et dans les deux cas, on trouve :

$p'_*(\mathcal{O}_{X\times_S Y}) = g'^* p_*(\mathcal{O}_X) = g'^*(\mathcal{O}_{S'}) = \mathcal{O}_{Y'}$, ou $p' = p\times_{S'} Y'$.

D'où : $\mathcal{Q}(X\times_S Y) = v_* g'_* p'_*(\mathcal{O}_{X\times_S Y}) = v_* g'_*(\mathcal{O}_{Y'}) = v_*(\mathcal{Q}(Y)\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'}) =$ $\mathcal{Q}(Y)\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{Q}(X)$ d'après (EGA II 1.4.7).

Corollaire 11.2. On définit un foncteur $X \longmapsto \mathrm{Spec}\,\mathcal{Q}(X)$ de la sous-catégorie pleine des $Sch_{/S}$ des X-préschémas plats quasi-compacts et quasi-séparés sur S tel que $\mathcal{Q}(X)$ soit un $\mathcal{O}_S$-Module plat, dans celle des S-préschémas plats et affines sur S. Ce foncteur commute aux produits finis, donc transforme S-groupes en S-groupes.

Définition 11.3. Etant donné un S-groupe G plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S, tel que $\mathcal{Q}(G)$ soit plat sur $\mathcal{O}_S$, nous noterons G_{af} , et nous appellerons enveloppe affine de G le S-groupe $G_{af} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{Q}(G)$.

11.4. Etant donnés deux $\mathcal{O}_S$-Modules $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ quasi-cohérents, notons $\mathrm{Hom}_S(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$ le S-foncteur des morphismes de S-foncteurs de $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ dans $\mathbb{V}(\mathcal{E})$, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$ le sous-S-foncteurs de $\mathrm{Hom}_S(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$ formé des $\mathcal{O}_S$-homomorphismes de $\mathcal{O}_S$-foncteurs en modules (cf. I). Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))(T)$ est en correspondance biunivoque canonique avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod.}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_T, \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_T)$, i.e. $\mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E})) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(\mathbb{W}(\mathcal{E}), \mathbb{W}(\mathcal{F}))$.

Soit X un S-préschéma. Alors l'ensemble des morphismes de S-foncteurs de X dans $\mathrm{Hom}_S(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$ est en correspondance biunivoque avec $\mathrm{Hom}_S(X\times_S \mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$, donc l'ensemble des morphismes de S-foncteurs de X dans

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$ est en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_S(X\times_S\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod.}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}(X\times_S\mathbb{V}(\mathcal{F})))$ (EGA II 1.7.13).

Proposition 11.5. Soient X un S-préschéma quasi-compact quasi-séparé sur S, $f : X \longrightarrow S$ le morphisme structural, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\mathcal{O}_S$-Modules quasi-cohérents. On suppose vérifiée l'une des deux conditions suivantes :

a) f est affine

b) $\mathcal{F}$ est plat sur $\mathcal{O}_S$.

Alors :

i) l'homomorphisme canonique $\varphi : \mathcal{A}(X) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathfrak{S}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{A}(X\times_S\mathbb{V}(\mathcal{F}))$ est un isomorphisme (où $\mathfrak{S}(\mathcal{F})$ désigne l'Algèbre symétrique de $\mathcal{F}$).

ii) l'ensemble des morphismes de S-foncteurs de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$ est en correspondance biunivoque avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod.}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}(X)\otimes\mathcal{F})$.

Pour montrer i), d'après (11.1 a) et b)), il suffit de montrer que si $\mathcal{F}$ est plat sur $\mathcal{O}_S$, alors $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ est plat sur S. D'après (EGA III 1.4.15.5) il suffit de voir que si $\mathcal{F}$ est plat sur $\mathcal{O}_S$, il en est de même de $\mathfrak{S}\mathcal{F}$, ce qui est un corollaire d'un résultat dû à Daniel LAZARD, suivant lequel tout module plat sur un anneau est une limite inductive filtrante de modules libres de type fini.

Montrons maintenant ii). Soit α un morphisme de S-foncteur de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$; il lui correspond un homomorphisme ρ de $\mathcal{O}_S$-Modules de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}(X\times_S \mathbb{V}(\mathcal{F})) = \mathcal{A}(X) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathfrak{S}(\mathcal{F})$ tel que si η est une S-section de X, l'homomorphisme $(\mathcal{A}(\eta) \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{S}\mathcal{F}}) \circ \rho : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathfrak{S}\mathcal{F} = \mathfrak{S}\mathcal{F}$ corresponde à $\alpha(\eta)$. Mais puisque $\alpha(\eta) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))(S)$, $\mathcal{A}(\eta)\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{S}\mathcal{F}}$ se factorise à travers l'homomorphisme canonique injectif $\mathcal{F} \longrightarrow \mathfrak{S}\mathcal{F}$. On a donc, pour chaque S-section η de X un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathcal{A}(X)\otimes \mathbb{S}\mathcal{F} \arrow[d] \arrow[dl, "\mathcal{A}(\eta)\otimes \mathrm{id}"'] \\ \mathbb{S}\mathcal{F} & \mathcal{F} \arrow[l] \end{tikzcd}$$,

ce qui montre que ρ se factorise à travers l'homomorphisme canonique injectif $\mathcal{A}(X)\otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}(X)\otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{S}\mathcal{F}$, donc ρ peut être considéré comme un homomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}(X)\otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$.

Réciproquement, soit $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod.}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}(X)\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{F}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod.}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}(X\times_S \mathbb{V}(\mathcal{F})))$; il lui correspond un morphisme α de X dans $\mathrm{Hom}_S(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$. Pour tout S-préschéma T et toute T-section η de $X\times_S T$, $\alpha(\eta)$ correspond à $\mathcal{A}(\eta) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{S}\mathcal{F}\otimes \mathcal{O}_T}$, homomorphisme de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ dans $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$, donc $\alpha(\eta) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{F}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))(T)$, ce qui montre que α est un morphisme de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{E}), \mathbb{V}(\mathcal{F}))$, ce qui prouve ii).

11.6. Soient G un S-groupe plat quasi-compact et quasi-séparé sur S, tel que $\mathcal{A}(G)$ soit un $\mathcal{O}_S$-Module plat $\mathcal{A}$, et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent et plat. Notons qu'un morphisme de S-foncteurs de G dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{W}(\mathcal{E})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{V}(\mathcal{E}), \mathbb{V}(\mathcal{E}))$ définit une <u>opération</u> de G sur $\mathcal{E}$, si et seulement si le morphisme correspondant $\theta : G\times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{E})$ vérifie les deux conditions suivantes :

1°) si $\mu : G\times_S G \longrightarrow G$ désigne le morphisme structural, le diagramme

$$\begin{tikzcd} G\times_S G\times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{id}_G\times\theta"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathcal{E})}"'] & G\times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\theta"] \\ G\times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{V}(\mathcal{E}) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

2°) si $\varepsilon : S \to G$ est la section unité de G, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S\times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \arrow[rr, "\varepsilon \times \mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathcal{E})}"] & & G\times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \arrow[dl, "\theta"] \\
& \mathbb{V}(\mathcal{E}) \arrow[ul, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Il revient alors au même de dire que le morphisme $\rho : \mathcal{E} \to \mathcal{A}(G)\otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E}$ déduit de θ vérifie les deux axiomes suivants :

(CM 1) Si $\Delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes \mathcal{A} = \mathcal{A}(G\times_S G)$ est l'homomorphisme $\mathcal{A}(\theta)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & & \mathcal{A}\otimes\mathcal{E} \arrow[ll, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\otimes\rho"'] \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{E} \arrow[u, "\Delta\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}"] & & \mathcal{A} \arrow[ll, "\rho"'] \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(CM 2) Si $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}_S$ est l'homomorphisme $\mathcal{A}(\varepsilon)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_S\otimes\mathcal{E} & & \mathcal{A}\otimes\mathcal{E} \arrow[ll, "\eta\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}"'] \\
& \mathcal{E} \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Il revient au même de dire que le morphisme $\theta_{af} : G_{af}\times_S \mathbb{V}(\mathcal{E}) \to \mathbb{V}(\mathcal{E})$ correspondant à ρ définit une opération de G_{af} sur $\mathcal{E}$ (comparer I 4.2).

Par conséquent, il y a correspondance biunivoque entre opérations de G sur $\mathcal{E}$ et opérations de G_{af} sur $\mathcal{E}$.

Lemme 11.7. Soient G un S-groupe quasi-compact et quasi-séparé sur S, plat et tel que $\mathcal{A}(G)$ soit un $\mathcal{O}_S$-Module plat $\mathcal{A}$, et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent. On suppose soit que G est affine sur S, soit que $\mathcal{E}$ est plat sur S. Soit $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{E}$ un homomorphisme définissant une opération de G sur $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}_o$ un sous-$\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent de $\mathcal{E}$ tel que l'homomorphisme $\mathcal{E}_o \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{E}$ déduit de ρ se factorise à travers l'homomorphisme canonique (injectif, grâce au fait que $\mathcal{A}$ est plat !) $\mathcal{A}\otimes\mathcal{E}_o \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{E}$ au moyen de l'homomorphisme $\rho_o : \mathcal{E}_o \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{E}_o$. Alors ρ définit une opération de G sur $\mathcal{E}_o$ (qu'on appellera opération induite sur $\mathcal{E}_o$ par ρ, et on dira que $\mathcal{E}_o$ est stable sous ρ).

Cela résulte immédiatement des définitions et de (11.6). On remarquera cependant qu'en général l'application canonique $\mathbb{W}(\mathcal{E}_o) \longrightarrow \mathbb{W}(\mathcal{E})$ n'est pas injective.

Lemme 11.8. Soient G un S-groupe quasi-séparé et quasi-compact sur S tel que $\mathcal{A}(G)$ soit un $\mathcal{O}_S$-Module libre $\mathcal{A}$ de base (φ_i), $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent. On suppose soit que G est affine sur S, soit que G et $\mathcal{E}$ sont plats sur S. Soit $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{E}$ un homomorphisme définissant une opération de G sur $\mathcal{E}$, et soit $x \in \Gamma(S,\mathcal{E})$. Posons $\rho(x) = \sum \varphi_i \otimes x_i$, où les $x_i \in \Gamma(S,\mathcal{E})$ sont bien déterminés par cette relation). Alors le sous-module $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ engendré par les x_i est stable sous ρ, quasi-cohérent et de type fini sur $\mathcal{O}_S$, et $x \in \Gamma(S,\mathcal{F})$.

Il est clair que $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent et de type fini. L'axiome (OM I) montre que $\sum \Delta(\varphi_i) \otimes x_i = \sum \varphi_i \otimes \rho(x_i)$; d'autre part, $\Delta(\varphi_i) = \sum \varphi_j \otimes a_{ij}$, d'où

$\Sigma \varphi_j \otimes a_{ij} \otimes x_i = \Sigma \varphi_i \otimes \rho(x_i)$, d'où, puisque les φ_i forment une base de $\mathcal{A}$, $\rho(x_i) = \Sigma a_{ji} \otimes x_i$, où $a_{ji} \in \Gamma(S, \mathcal{A})$, ce qui montre que $\rho(\mathcal{J}) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{J}$, donc $\mathcal{J}$ est stable sous ρ. Enfin l'axiome (CM 2) montre que $x = \sum_i \eta(\varphi_i)\, x_i \in \Gamma(S, \mathcal{J})$.

Proposition 11.9. *Soit* G *un* S-*groupe quasi-compact quasi-séparé sur* S *tel que* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ *devienne localement libre après extension fidèlement plate quasi-compacte de la base* S (*ce qui est le cas par exemple lorsque* G *est un groupe réductif, comme nous le verrons dans* XXV), *et soit* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{O}_S$-*Module quasi-cohérent. On suppose soit que* G *est affine sur* S, *et soit* G *et* $\mathcal{E}$ *sont plats sur* S. *Soit* $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$ *un homomorphisme définissant une opération de* G *sur* $\mathcal{E}$. *Alors, pour tout sous*-$\mathcal{O}_S$-*Module quasi-cohérent* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{E}$ *il existe un plus petit sous*-$\mathcal{O}_S$-*Module quasi-cohérent* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{E}$ *contenant* $\mathcal{F}$ *qui soit stable sous* ρ. *Sa formation commute à toute extension de la base* $S' \longrightarrow S$. *Lorsque* $\mathcal{F}$ *est de type fini, il en est de même de* $\widetilde{\mathcal{F}}$.

On se ramène aisément par descente fidèlement plate au cas où $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module libre, auquel cas la proposition est conséquence du lemme 11.8.

Corollaire 11.10. *Soient* S *un schéma quasi-compact et quasi-séparé*, G *un* S-*groupe quasi-séparé et quasi-compact sur* S, *tel que* $\mathcal{A}(G)$ *devienne localement libre après extension fidèlement plate quasi-compacte de la base* S, *et soit* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{O}_S$-*Module quasi-cohérent. On suppose soit que* G *est affine sur* S, *soit que* G *et* $\mathcal{E}$ *sont plats sur* S. *On se donne une opération de* G *sur* $\mathcal{E}$. *Alors* $\mathcal{E}$ *est limite inductive d'une famille filtrante croissante de sous*-$\mathcal{O}_S$-*Modules quasi-cohérents de type fini de* $\mathcal{E}$ *stables sous* G.

C'est une conséquence immédiate de (11.9) car $\mathcal{E}$ est limite inductive de ses sous-Modules quasi cohérents de type fini (EGA I 9.4.9, IV 1.7.7).

Remarque 11.10.1. J.P. Serre a remarqué que dans 11.9 (donc aussi dans 11.10) il suffisait de supposer que pour toute ouvert affine U de S, il existe un morphisme fidèlement plat $U' \longrightarrow U$, avec U' affine d'anneau A', tel que $\mathcal{E} \otimes_U U'$ soit défini par un A'-module projectif (pas nécessairement libre). De plus, lorsque S est localement noethérien régulier et de dimension 1, cette hypothèse peut être remplacée par la seule hypothèse que G soit plat sur S (ce qui implique que $\mathfrak{a}(G)$ est plat) ; voir à ce sujet J.P. Serre, Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés, Pub. Math. n° 39, p. 37-52.

Proposition 11.11. Soit G un groupe algébrique sur le corps k. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est affine.

(ii) G est quasi-affine.

(iii) On peut faire opérer G fidèlement sur un k-schéma quasi-affine.

(iv) On peut faire opérer G fidèlement sur un vectoriel sur k (pas nécessairement de dimension finie).

(v) G est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe $Gl(n)_k$.

Démonstration. On a (i) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement, et (ii) $\Longrightarrow$ (iii), car G opère fidèlement sur lui-même par translations à gauche. On a (iii) $\Longrightarrow$ (iv), car si G opère sur X quasi-compact et quasi-séparé sur k, il opère aussi sur le vectoriel $\Gamma(X,\underline{O}_X)$, grâce au fait que la formation de $f_*(\underline{O}_X)$ ($f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ le morphisme structural) commute à tout changement de base $S \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ (EGA IV 1.7.12) ; donc il opère sur l'enveloppe affine

$X' = \mathrm{Spec}(\Gamma(X,\underline{O}_X))$, et le morphisme canonique $X \longrightarrow X'$ est évidemment compatible avec l'action de G ; ceci dit, si X est quasi-affine i.e. $X \longrightarrow X'$ est une immersion ouverte, et si G opère fidèlement sur X, il opère fidèlement sur X', ou ce qui revient au même, sur le vectoriel $V = \Gamma(X,\underline{O}_X)$, ce qui prouve l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv).

Supposons maintenant (iv), i.e. que G opère fidèlement sur le vectoriel V. Alors, en vertu de 11.10, V est limite inductive de sous-espaces vectoriels V_i de dimension finie, stables sous l'action de G. Si K_i est le noyau de l'action induite de G sur V_i , i.e. de $G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{V_i}$, alors K_i est un sous-schéma fermé de G, et l'hypothèse que G opère fidèlement s'exprime aussitôt par le fait que l'intersection des K_i est le sous-groupe unité de G. Comme G est noethérien, il s'ensuit que l'un des K_i est déjà réduit au groupe unité, donc que $G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{V_i}$ est un monomorphisme. C'est donc une immersion fermée en vertu de (1.4.2), ce qui prouve que (iv) $\Longrightarrow$ (v). Comme (v) $\Longrightarrow$ (i) trivialement, cela prouve 11.11.

<u>Remarque</u> 11.11.1. M. Raynaud nous signale qu'on peut généraliser 11.11 au cas d'un schéma en groupes quasi-compact et quasi-séparé G sur un schéma S localement noethérien régulier de dimension ≤ 1, en supposant de plus G <u>plat</u> sur S. On a alors équivalence des conditions suivantes :

(i) G est affine sur S.

(ii) G est quasi-affine sur S.

(iii) On peut faire opérer G fidèlement sur un S-schéma quasi-affine.

(iv) On peut faire opérer G fidèlement sur un Module quasi-cohérent plat sur S.

(v) (Si G est de type fini sur S et S noethérien), G est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un $\underline{Aut}_V$, où V est un Module localement libre de type fini sur S.

Lemme 11.12. Soient k un corps, G un k-groupe quasi-compact. Posons $A = \mathcal{a}(G)$. Etant donné $x \in A$, il existe une sous-k-algèbre de type fini V de A tel que $x \in V$, que $\Delta(V) \subset V \otimes_k V$ et $u(V) \subset V$, où u désigne l'involution de A correspondant à la symétrie de G.

D'après (11.3), on peut remplacer G par G_{af}, donc on peut supposer G affine.

Soit (φ_i) une base de A. Alors $\Delta(x) = \Sigma\, \varphi_i \otimes a_i$ et $\Delta(\varphi_i) = \Sigma\, \varphi_j \otimes b_{ji}$; l'axiome (HA1) de (I 4.2) montre que $\Sigma\, \varphi_i \otimes \Delta(a_i) = \Sigma\, \Delta(\varphi_i) \otimes a_i$, d'où $\Delta(a_i) = \Sigma\, b_{ij} \otimes a_j$. Soit alors V la sous-k-algèbre de A engendrée par les b_{ij} et les $u(b_{ij})$. Il est clair que V est une k-algèbre de type fini. L'axiome (HA1) montre aussi que $\Sigma\, \Delta(\varphi_j) \otimes b_{ji} = \Sigma\, \varphi_j \otimes \Delta(b_{ji})$, et on en déduit que $\Delta(b_{ij}) = \Sigma\, b_{ik} \otimes b_{kj}$ et que $\Delta(u(b_{ij})) = \Sigma\, u(b_{kj}) \otimes u(b_{ik})$. Puisque Δ est un homomorphisme d'algèbres, on en déduit que $\Delta(V) \subset V \otimes_k V$ et $u(V) \subset V$. Enfin l'axiome (HA2) de (I 4.2) montre que $a_i = \Sigma\, \eta(a_j)\, b_{ij}$ et que $x = \Sigma\, \eta(\varphi_i) a_i$ si bien que $x \in V$.

Proposition 11.13. Soient k un corps et G un k-groupe affine d'algèbre A. Alors G est limite projective d'un système filtrant croissant de k-groupes affines de type fini, dont les morphismes de transition sont fidèlement plats.

Comme l'ensemble des sous-k-algèbres de type fini de A stables par Δ et u est stable par engendrement, A est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(B_i)_{i \in I}$ de sous-k-algèbres de type fini stables par Δ et u. Alors, chaque algèbre B_i, munie de l'homomorphisme $B_i \longrightarrow B_i \otimes_k B_i$ déduit de Δ et de la restriction de u à B_i est munie d'une structure d'hyperalgèbre associative augmentée involutive, donc (I 4.2) est la k-algèbre d'un k-groupe affine G_i, de type fini sur k. Enfin, puisque $A = \varinjlim V_i$, $G = \varprojlim G_i$ (EGA IV 8.2.3). Les morphismes de transition sont fidèlement plats d'après le lemme suivant :

Lemme 11.14. *Soient* k *un corps*, G *et* H *deux* k-*groupes affines de type fini*, $u : G \longrightarrow H$ *un morphisme de* k-*groupes*, *et* $u^\circ : B \longrightarrow A$ *l'homomorphisme de* k-*algèbres correspondant*. *Pour que* u *soit fidèlement plat*, *il faut et il suffit que* u° *soit injectif*.

La condition est évidemment nécessaire (EGA IV 2.2.3 et 0_{IV} 6.6.1). Montrons qu'elle est suffisante. Posons K = Ker u. Alors G/K est un k-groupe de type fini (VI_A 5.2), et u se factorise en $G \xrightarrow{p} G/K \xrightarrow{v} H$, où p est fidèlement plat (VI_A 3.2) et où v est un monomorphisme de k-groupes de type fini, donc une immersion fermée (1.4.2). Puisque H est un schéma affine, et que v est une immersion fermée, G/K est un schéma affine (EGA I 4.2.3), et, si on note C l'algèbre de G/K, l'homomorphisme $v^\circ : B \longrightarrow C$ est surjectif (loc. cit.). Or, puisque u° est injectif, et que $u^\circ = p^\circ \circ v^\circ$, v° est aussi injectif : c'est un isomorphisme, donc v est un isomorphisme, et, puisque p est fidèlement plat, il en est de même de u.

Définition 11.15. *Etant donné un corps* k, *un* k-*espace vectoriel* V, *un* k-*groupe* G *opérant sur* V, *et un vecteur* $v \in V$, *on dit que* v *est* semi-invariant *sous* G *si le sous-espace vectoriel* kv *est stable sous* G.

Notons A l'algèbre de G, et $\rho : V \longrightarrow A \otimes_k V$ l'application linéaire qui définit l'opération de G sur V. Dire que v est semi-invariant sous G revient à dire qu'il existe $\lambda \in A$ tel que, pour tout $w \in kv$, $\rho(w)=\lambda \otimes w$. Lorsque $v \neq 0$, l'élément $\lambda \in A$ est bien déterminé par cette relation, on l'appellera poids de l'élément semi-invariant v. Dire que v est semi-invariant d'invariant λ revient à dire que $\varphi(g,v) = \lambda(g)\, v$ pour tout $g \in G(k)$, où $\lambda : G \to \underline{G}_{m,k}$ est le morphisme définit par λ. On voit donc que λ est un caractère de G, appelé caractère associé à l'élément semi-invariant v.

Théorème 11.16. (Chevalley). Soient k un corps, G un k-groupe algébrique affine, H un sous-préschéma en groupes fermé de G. Alors il existe un nombre fini d'éléments a_i linéairement indépendants de l'algèbre A de G, tels que H soit le plus grand sous-préschéma en groupes fermé de G sous lequel les a_i soient semi-invariants ; on peut de plus supposer que tous les a_i ont même poids sous H.

Rappelons que, puisque G est affine, il en est de même de H (I 4.2.3). Soit A (resp. B) l'algèbre de G (resp. H) ; d'après EGA I 4.2.3, il existe un idéal I de A tel que B soit isomorphe à A/I. Puisque G opère sur lui-même par translations à gauche, il opère aussi sur A, cette opération se traduisant par l'application diagonale $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A$ (I 4.2 et 4.7.2). Puisque G est de type fini sur k, A est de type fini sur k, donc I admet un système fini de générateurs $(g_1,\dots,g_r)$. Il résulte de (11.9) qu'il existe un sous-espace vectoriel V de dimension finie de A stable sous G, et contenant chacun des g_i. Posons alors $W = V \cap I$, c'est un espace vectoriel sur k de dimension finie, dont nous noterons d la dimension. Puisque V contient tous les g_i, W engendre l'idéal I. Notons $p : A \longrightarrow A/I = B$ l'application canonique, et $q = p \otimes id_A = A \otimes_k A \longrightarrow (A/I) \otimes_k A$. Alors l'action de H sur A est déterminée par $q \circ \Delta : A \longrightarrow B \otimes_k A$. Puisque H est un sous-préschéma en groupes de G, l'application diagonale $A/I \longrightarrow (A/I) \otimes_k (A/I) = ((A/I) \otimes_k A)/((A/I) \otimes_k I)$ se déduit de $q \circ \Delta$ par passage au quotient, ce qui montre que $(q \circ \Delta)(I) \subset (A/I) \otimes_k I$, autrement dit, I est stable sous H. Puisque V est stable sous G, donc sous H, on voit que W est stable sous H.

Posons $E = \wedge^d V$, soit $(w_1, \ldots, w_d)$ une base de W sur k, et soit $(e_o, \ldots, e_n)$ une base de E sur k contenant $e_o = w_1 \wedge \ldots \wedge w_d$. L'opération de G sur v détermine canoniquement une opération de G sur $\wedge^d V$, qui définit une application linéaire $\rho : E \longrightarrow A \otimes_k E$. Posons $\rho(e_i) = \Sigma\, a_j^i \otimes e_j$, et $a_i = a_i^o$. Puisque W est stable sous H, si on pose $\sigma = (p \otimes id_E) \circ \rho : E \longrightarrow (A/I) \otimes_k E$, il est clair que $\sigma(e_o)$ est proportionnel à e_o, autrement dit, pour $1 \leqq i \leqq n$, on a $a_i \in I$. L'axiome (CM1) de (I 4.7.2) appliqué à $\rho(e_o) = \Sigma\, a_i \otimes e_i$ montre que $\Sigma \Delta(a_i) \otimes e_i = \Sigma\, a_i \otimes \rho(e_i) = \Sigma\, a_i \otimes a_j^i \otimes e_j$, d'où on déduit que $\Delta(a_i) = a_o \otimes a_i + \sum_{j \geq 1} a_j \otimes a_i^j$; donc, puisque pour $j \geq 1$, $a_j \in I$, on voit que $q \circ \Delta(a_i) = p(a_o) \otimes a_i$, si bien que pour $1 \leqq i \leqq n$, a_i est semi-invariant sous H de poids $p(a_o)$, indépendant de i. Extrayons du système $(a_1, \ldots, a_n)$, un système maximal de vecteurs linéairement indépendants, dont on peut supposer qu'il se note $(a_1, \ldots, a_m)$. Alors les a_i, $i = 1, \ldots, m$ sont linéairement indépendants, semi-invariants sous H, et de même poids.

Réciproquement, soit H' un sous-préschéma en groupes fermé de G sous lequel chacun des a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ est semi-invariant. Montrons que $H^1 = H$. Il existe de même un idéal I' de A tel que l'algèbre B' de H' soit isomorphe à A/I' ; notons $p' : A \longrightarrow A/I'$ l'application canonique, et $q' = p' \otimes id_A$. Par hypothèse, pour $1 \leqq i \leqq m$, il existe $\lambda_i \in B'$ tel que $q' \circ \Delta(a_i) = \Sigma p'(a_j) \otimes a_i^j = \lambda_i \otimes a_i$. Or l'axiome (CM2) de (I 4.7.2) montre que $e_i = \Sigma\, \eta(a_j^i)\, e_j$, donc que $\eta(a_j^i) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) ; l'égalité $\Sigma\, p'(a_j) \otimes \eta\, (a_j^i) = \lambda_j \otimes \eta(a_i)$ s'écrit donc $p'(a_i) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq m$, car $\eta(a_i) = \eta(a_i^o) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq m$; par conséquent, on a $a_i \in I'$ pour $1 \leqq i \leqq m$, si bien que $a_i \in I'$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Donc, si on pose $\sigma' = (p' \otimes id_E) \circ \Delta$, $\sigma'(e_o) = \Sigma\, p'(a_i) \otimes e_i$ est proportionnel à e_o, de sorte que $q' \circ \Delta\, (W) \subset A/I' \otimes_k W$, autrement dit que W est stable sous H'. Puisque W engendre l'idéal I, I est stable sous H', donc $q' \circ \Delta(I) \subset (A/I') \otimes_k I$, et $q' \circ \Delta$ définit par passage au quotient une application linéaire $A/I \longrightarrow (A/I') \otimes_k (A/I) = ((A/I') \otimes_k A)/((A/I') \otimes_k I)$ donc la restriction à $H' \times_k H$ du morphisme de multiplication de G se factorise à travers H, ce qui implique que H' est un sous-préschéma en groupes de H, cqfd.

Théorème 11.17. (Chevalley). *Soient* k *un corps*, G *un* k-*groupe affine* (*non nécessairement algébrique*), *et* H *un sous-préschéma en groupes fermé de* G *invariant dans* G; *alors le faisceau quotient* (*pour la topologie* fpqc) G/H *est représentable par un* k-*groupe* affine.

Premier cas : Supposons d'abord G algébrique. D'après (VI_A 3.2), le conoyau K de l'injection $H \longrightarrow G$ existe, le morphisme canonique $p : G \longrightarrow K$ est couvrant pour la topologie fpqc, et K représente le faisceau quotient G/H pour la topologie fpqc ; il s'agit donc de montrer que K est affine. Supposons d'abord k algébriquement clos, G réduit et connexe et H réduit. D'après (BIBLE 4, cor du th. 1), il existe une représentation linéaire de dimension finie $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ telle que $(\operatorname{Ker} \rho)_{red} = H$. Par 11.11, $G/\operatorname{Ker} \rho$ est affine donc $(G/H)/(\mathrm{Ker}\ \rho/H)$ est affine, donc aussi G/H, le groupe $\mathrm{Ker}\ \rho/H$ étant fini.

Si k est algébriquement clos, et G et H réduits, alors $(G/H)/(G^{o}/H \cap G^{o})$ est fini, comme quotient de G/G^{o}, et $G^{o}/H \cap G^{o}$ est affine, donc G/H est affine.

Dans le cas où k est algébriquement clos, et G et H quelconques, $(G\times_k H)_{red}$ est isomorphe à $(G_{red})\times_k(H_{red})$, donc $(G_{red})/(H_{red})$ est isomorphe à $(G/H)_{red}$. Puisque $(G_{red})/H_{red})$ est affine, il en est de même de G/H (EGA I 5.1.10), car, puisque G/H est de type fini sur k, son nilradical est nilpotent.

Dans le cas où k est quelconque, $G \otimes_k \overline{k}\ /\ H \otimes_k \overline{k}$ est isomorphe à $(G/H) \otimes_k \overline{k}$ (9.2 v)), donc puisque le premier est affine, il en est de même du second, donc G/H est affine

<u>Deuxième cas</u> : Cas général. D'après (11.13), l'algèbre A de G est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(A_i)_{i\in I}$ de sous-algèbres de type fini de A stables par l'application diagonale et l'involution. D'après (EGA I 4.2.3), H est affine, et si on note B l'algèbre de H, l'homomorphisme $A \longrightarrow B$ déduit de l'injection $H \longrightarrow G$ est surjectif. Posons $I = \mathrm{Ker}\ (A \rightarrow B)$, $I_i = I \cap A_i$ et $B_i = A_i/I_i$; puisque la structure d'hyperalgèbre associative augmentée involutive de A passe au quotient à travers I, on vérifie aisément que celle de A_i passe au quotient à travers I_i, si bien que B_i est l'algèbre d'un k-groupe affine de type fini H_i ; il est clair que $B = \varinjlim B_i$. D'après (EGA I 4.2.3), H_i est isomorphe à un sous-préschéma en groupes fermé de G_i. D'après (6.7) le fait que H soit invariant dans G s'exprime en disant qu'un

certain morphisme $H \times_k G \longrightarrow G$ se factorise à travers l'injection $H \longrightarrow G$, autrement dit que l'homomorphisme correspondant $A \longrightarrow B \otimes_k A$ se factorise à travers l'homomorphisme canonique $A \longrightarrow B$; on vérifie aisèment que l'homomorphisme $A_i \longrightarrow B_i \otimes_k A_i$ défini de manière analogue se factorise à travers $A_i \longrightarrow B_i$, donc que H_i est invariant dans G_i. D'après ce qui a été vu précédemment, G_i étant de type fini sur k, G_i / H_i est représentable par un k-groupe affine K_i, dont nous noterons C_i l'algèbre. Posons alors $C = \varinjlim C_i$, et soit $K = \varprojlim K_i$ le k-préschéma affine d'algèbre K (EGA IV 8.2.3).

Montrons que K représente G/K ; pour cela, il suffit de vérifier que $H \times_k G \xrightarrow{\sim} G \times_k G$, et que le morphisme $G \longrightarrow K$ est couvrant pour la topologie fpqc. (IV 4.4.3). Or pour chaque i, ou $H_i \times_k G_i \xrightarrow{\sim} G_i \times_{k_i} G_i$, donc il en est de même du morphisme obtenu en passant à la limite projective ; enfin chacun des morphismes $G_i \longrightarrow K_i$ est fidèlement plat (9.2 (xi)), autrement dit C_i est fidèlement plat sur A_i ; puisque $A = \lim A_i$ et $C = \lim C_i$, on en déduit que C est fidèlement plat sur A, si bien que $G \longrightarrow K$ est un morphisme fidèlement plat. Puisque ce morphisme est affine, il est quasi-compact, donc couvrant pour la topologie fpqc, cqfd.

E x p o s é VII_A

ETUDE INFINITESIMALE DES SCHEMAS EN GROUPES

par P. GABRIEL

Dans l'exposé II nous nous étions limités à l'étude des invariants différentiels du premier ordre et nous n'avions pas abordé certains phénomènes spéciaux à la caractéristique $p > 0$ ou à la caractéristique 0. Notre objet dans la partie A de cet exposé est de combler cette lacune. D'ailleurs, l'étude infinitésimale d'ordre quelconque d'un schéma en groupes est reliée à celle du groupe formel associé; l'objet de la deuxième partie de cet exposé est de présenter les premières définitions et propriétés concernant les groupes formels.

A) Opérateurs différentiels et p-Algèbres de Lie*

1. Opérateurs différentiels

Dans les paragraphes 1, 2 et 3 qui suivent, S désigne un préschéma et les produits considérés sont des produits cartésiens dans la catégorie des S-préschémas. Si X est un S-préschéma, nous notons $p_{X/S}$, p_X ou simplement p le morphisme structural de X dans S .

1.1. Soit $u : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S-préschémas et munissons l'image directe $u_*(\underline{O}_Y)$ du faisceau structural de Y de la structure de $\underline{O}_X$-Module induite par u . Le faisceau $\mathcal{H} = \mathcal{H}om_{p_X^{-1}(\underline{O}_S)}(\underline{O}_X, u_*(\underline{O}_Y))$ des homomorphismes

(*) La partie A du présent exposé n'avait pas été traitée sérieusement dans les exposés oraux.

de $p_X^{-1}(\underline{O}_S)$-Modules de $\underline{O}_X$ dans $u_*(\underline{O}_X)$ est donc muni naturellement d'une structure de $\underline{O}_X$-bi-Module : si U est un ouvert de X , f et d des sections de $\underline{O}_X$ et $\mathcal{H}$ sur U , $f\,d$ et $d\,f$ sont respectivement les morphismes $x \longmapsto f\,d(x)$ et $x \longmapsto d(f\,x)$ de $\underline{O}_X$ dans $u_*(\underline{O}_Y)$. Nous écrirons désormais $(\text{ad } f)d$ au lieu de $fd - df$.

Une S-déviation d'ordre $\leqslant n$ est par définition un couple $D = (u,d)$ formé d'un morphisme de S-préschémas $u: Y \longrightarrow X$ et d'un morphisme de $p^{-1}(\underline{O}_S)$ -Modules $d : \underline{O}_X \longrightarrow u_*(\underline{O}_Y)$ tel que

$$(*) \qquad (\text{ad } f_o)(\text{ad } f_1)\dots(\text{ad } f_n)\; d = 0$$

pour tout ouvert U de X et toutes les suites de $n+1$ sections $f_o,\dots f_n$ de $\underline{O}_X$ sur U . Si les égalités $(*)$ sont vérifiées, nous dirons aussi que d est une S-déviation de u d'ordre $\leqslant n$. En particulier, une S-déviation d'ordre $\leqslant 0$ est un morphisme de $\underline{O}_X$-Modules de $\underline{O}_X$ dans $u_*(\underline{O}_Y)$.

Un morphisme de $p^{-1}(\underline{O}_S)$-Modules d de $\underline{O}_X$ dans $u_*(\underline{O}_Y)$ est une S-déviation de u si, pour tout point y de Y , il existe un voisinage ouvert U de $u(y)$ dans X et un voisinage ouvert V de y dans Y vérifiant les conditions suivantes : a) $u(V) \subset U$; b) si $v : V \longrightarrow U$ est le morphisme induit par u , il y a un entier n tel que le morphisme $\underline{O}_U \longrightarrow v_*(\underline{O}_V)$ induit par d soit une S-déviation d'ordre $\leqslant n$. Si d est une S-déviation de u , nous disons aussi que le couple $D = (u,d)$ est une S-déviation et il nous arrivera d'écrire $Y \xrightarrow{D} X$ ou $Y \xrightarrow[u]{d} X$. Lorsque d est l'homomorphisme d'Algèbres qui définit u , nous écrirons aussi u au lieu de D .

1.2. Considérons maintenant deux S-déviations $D=(u,d)$ et $E=(v,e)$:

$$Z \xrightarrow{\quad E \quad} Y \xrightarrow{\quad D \quad} X$$

Lorsque U parcourt les ouverts de X , les applications composées

$$\Gamma(v^{-1}u^{-1}U,\underline{O}_Z) \xleftarrow{e(u^{-1}U)} \Gamma(u^{-1}U,\underline{O}_Y) \xleftarrow{d(U)} \Gamma(U,\underline{O}_X)$$

définissent une S-déviation de uv que nous noterons de ; lorsque d est d'ordre $\leqslant m$ et e d'ordre $\leqslant n$, de est d'ordre $\leqslant m+n$. Nous écrirons aussi $D\circ E = (uv, de)$ et nous dirons que $D\circ E$ ou DE est la S-déviation composée. Lorsque d est l'homomorphisme d'Algèbres définissant u ($D = u$ avec la convention ci-dessus), on dit aussi que DE est l'image de E par u.

L'application $(D,E) \longmapsto D\circ E$ que nous venons de définir nous permettra désormais de parler de la catégorie des S-déviations qui a pour objets les S-préschémas, pour morphismes les S-déviations.

1.2.1. Supposons par exemple Y égal à $I_Z = \operatorname{Spec} \underline{O}_Z[T]/(T^2)$ et v égal à la section définie par l'homomorphisme d'Algèbres de $\underline{O}_Z[T]/(T^2)$ dans $\underline{O}_Z$ qui s'annule sur la classe t de T modulo T^2. On peut prendre alors pour e le morphisme de $\underline{O}_Z$-Modules qui s'annule sur la section unité de $\underline{O}_Z[T]/(T^2)$ et qui envoie t sur la section unité de $\underline{O}_Z$. Si l'on pose $D = u$ et $w = uv$, de est alors simplement une S-dérivation de $\underline{O}_X$ dans $w_*(\underline{O}_Z)$; pour tout S-morphisme $w : Z \longrightarrow X$ on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les S-dérivations de $\underline{O}_X$ dans $w_*(\underline{O}_Z)$ et les S-déviations de w de la forme $u\circ E$, où u parcourt les morphismes de I_Z dans X prolongeant w.

1.2.2. Si d est une S-déviation de u, d est évidemment une S'-déviation de u pour tout morphisme $s : S \longrightarrow S'$. D'autre part, soient $t : T \longrightarrow S$ un morphisme de but S, $u_T : Y_T \longrightarrow X_T$ le morphisme déduit de u par changement de base et t_Y, t_X les projections canoniques de Y_T, X_T dans Y, X. Il existe alors une T-déviation de u_T et une seule que nous noterons d_T ou $d \times T$ et qui vérifie l'égalité $t_X d_T = d t_Y$. Si l'on pose $D = (u,d)$, on écrira aussi $D_T = (u_T, d_T)$ et nous dirons que d_T et D_T sont déduits de d et D par changement de base.

Soient par exemple $u : Y \longrightarrow X$ et $v : Z \longrightarrow T$ deux S-morphismes, d et e des S-déviations de u et v. Nous noterons $d \times e$ (produit de d et e) la S-déviation de $u \times v$ égale à $d_T \circ e_Y = e_X \circ d_Z$. Si l'on pose $D = (u,d)$ et $E = (v,d)$, nous écrirons aussi $D \times E = (u \times v, d \times e)$.

1.3. Supposons maintenant Y égal à S ; alors $u : S \longrightarrow X$ est une section de $p : X \longrightarrow S$, c'est-à-dire une immersion ; on peut alors donner des S-déviations de u l'interprétation que voici : soient I_u le noyau de l'homomorphisme de $u^{-1}(\underline{O}_X)$ dans $\underline{O}_S$ qui définit u, d un morphisme de $p^{-1}(\underline{O}_S)$-Modules de $\underline{O}_X$ dans $u_*(\underline{O}_S)$ et $d' : u^{-1}(\underline{O}_X) \longrightarrow \underline{O}_S$ le morphisme associé canoniquement à d. Alors d est une S-déviation de u d'ordre $\leqslant n$ si et seulement si d' s'annule sur I_u^{n+1}.

Cette interprétation peut être généralisée comme suit : soient $u : Y \longrightarrow X$ un S-morphisme quelconque et Γu le graphe de u, c'est-à-dire le morphisme $Y \longrightarrow Y \times X$ de composantes $\mathrm{Id}\, Y$ et u. Pour toute S-déviation d de u d'ordre $\leqslant n$, on obtient par composition

$$Y \xrightarrow{\text{diag.}} Y \times Y \xrightarrow[u_Y]{d_Y} Y \times X$$

une Y-déviation de Γu d'ordre $\leqslant n$ que nous noterons Γd (le graphe de d). On obtient ainsi une bijection $d \longmapsto \Gamma d$ de l'ensemble des S-déviations de u d'ordre $\leqslant n$ sur l'ensemble des Y-déviations de Γu d'ordre $\leqslant n$. La bijection réciproque associe à une Y-déviation $Y \xrightarrow[\Gamma u]{e} Y \times X$ la S-déviation composée

$$Y \xrightarrow[\Gamma u]{e} Y \times X \xrightarrow{pr_2} X$$

Appelons J le noyau de l'homomorphisme d'Algèbres

$$(\Gamma u)^{-1}(\underline{O}_{Y \times X}) \longrightarrow \underline{O}_Y$$

qui définit Γu . Tenant compte de ce qui précède, on voit alors que les S-déviations de u d'ordre $\leqslant n$ correspondent canoniquement aux morphismes de $\underline{O}_Y$-Modules de $(\Gamma u)^{-1}(\underline{O}_{Y\times X})$ dans $\underline{O}_Y$ qui s'annulent sur J^{n+1} .

1.4. Soit X un S-préschéma. On appelle S-<u>opérateur différentiel</u> (resp. S-opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$) sur X toute S-déviation (resp. toute S-déviation d'ordre $\leqslant n$) du morphisme identique de X . D'après 1.1 , un S-opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$ est donc un endomorphisme de $p^{-1}(\underline{O}_S)$-Module de $\underline{O}_X$ qui vérifie les égalités (*) de 1.1.

Nous désignerons par $\mathrm{Dif}^n_{X/S}$ le $\Gamma(\underline{O}_S)$-module formé des S-opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant n$, par $\mathrm{Dif}_{X/S}$ celui formé de tous les S-opérateurs différentiels. Comme nous l'avons vu en 1.2 , on peut composer les S-déviations de Id X , ce qui munit $\mathrm{Dif}_{X/S}$ d'une structure de $\Gamma(\underline{O}_S)$-algèbre ; nous dirons que c'est l'<u>algèbre des opérateurs différentiels de</u> X/S. De même, nous noterons $\underline{\mathrm{Dif}}_{X/S}$ le faisceau $U \longmapsto \mathrm{Dif}_{X\times U/U}$, où U parcourt les ouverts de S .

1.4.1. Comme nous l'avons vu en 1.3 , on peut interpréter les opérateurs différentiels de X/S au moyen du graphe du morphisme identique de X , c'est-à-dire du morphisme diagonal $\Delta = \Delta_{X/S}$ de X dans $X\times X$. Traduisons dans le contexte actuel les énoncés de 1.3 :

Munissons $\underline{O}_{X\times X}$ de la structure de $pr_1^{-1}(\underline{O}_X)$-Algèbre définie par pr_1 , de sorte que $\Delta^{-1}(\underline{O}_{X\times X})$ est muni d'une structure d'Algèbre sur $\underline{O}_X = \Delta^{-1}pr_1^{-1}(\underline{O}_X)$. Soient $I_{X/S}$ le noyau de l'homomorphisme

$$\Delta^a_{X/S} : \Delta^{-1}(\underline{O}_{X\times X}) \longrightarrow \underline{O}_X$$

définissant Δ et $P^m_{X/S}$ la $\underline{O}_X$-Algèbre $\Delta^{-1}(\underline{O}_{X\times X})/I^{m+1}_{X/S}$. Si V est un ouvert affine de S et U un ouvert affine de X au-dessus de V, l'ensemble des sections de $P^m_{X/S}$ sur U est donc égal à $A \otimes_k A / I^{m+1}$, où l'on a posé $k = \Gamma(V, \underline{O}_S)$, $A = \Gamma(U, \underline{O}_X)$ et où I est l'idéal engendré par les éléments $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, $a \in A$. Ceci étant, <u>on a</u> d'après 1.3 <u>un isomorphisme canonique</u>

$$j_X : \mathrm{Dif}^m_{X/S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(P^m_{X/S}, \underline{O}_X)$$

qu'on peut définir comme suit : si d appartient à $\mathrm{Dif}^m_{X/S}$ et si c est une section de $P^m_{X/S}$ sur U de la forme $a \otimes b + I^{m+1}$, on a $j_X(d)(c) = a.d(b)$.

1.4.2. Soient d un opérateur différentiel et u une section de X sur S. Nous appelons <u>valeur de</u> d <u>en</u> u <u>la</u> S-<u>déviation composée</u>

$$S \xrightarrow{u} X \xrightarrow[\mathrm{Id}\ X]{d} X$$

D'après 1.3 et 1.4.1, si d est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$, du et d sont associés canoniquement à des morphismes

$d' : u^{-1}(\underline{O}_X)/I_u^{m+1} \longrightarrow \underline{O}_S$ et $d'' : P^m_{X/S} \longrightarrow \underline{O}_X$. Il est clair qu'on peut construire d' à partir de d'' de la manière suivante :

le carré

$$\begin{array}{ccc} X \simeq S \times X & \xrightarrow{u \times X} & X \times X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ S & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

est cartésien, ce qui permet d'identifier X à $S \times_X (X \times X)$, u à $S \times_X \Delta$, donc $u^*(P^m_{X/S})$ à $u^{-1}(\underline{O}_X)/I_u^{m+1}$. On identifie ainsi $u^*(d'')$ à un morphisme $u^{-1}(\underline{O}_X)/I_u^{m+1} \longrightarrow \underline{O}_S$, qui n'est autre que d'.

1.5. Posons comme d'habitude $I_S = \operatorname{Spec} \underline{O}_S[T]/(T^2)$. Soient $s : S \longrightarrow I_S$ la section zéro (II 2.1) et σ la déviation canonique de s que nous avons définie en 1.2.1 : la déviation σ est donc l'homomorphisme de $\underline{O}_S$-Modules qui s'annule sur la section unité de $\underline{O}_S[T]/(T^2)$ et qui envoie la classe t de T modulo T^2 sur la section unité de $\underline{O}_S$.

Soit X un S-préschéma. A tout I_S-automorphisme u de $I_S \times X$ induisant l'identité sur X est associé par composition un opérateur différentiel D_u de X :

$$X \simeq S\times X \xrightarrow{\sigma \times X} I_S\times X \xrightarrow{u} I_S\times X \xrightarrow{pr_2} X$$

D'après II 4.11 , <u>l'application</u> $u \longmapsto D_u$ <u>est un isomorphisme de l'algèbre de Lie du foncteur en groupes</u> <u>Aut</u> X <u>sur l'algèbre de Lie des</u> $p^{-1}(\underline{O}_S)$<u>-dérivations de</u> $\underline{O}_X$. L'isomorphisme réciproque associe à toute dérivation D l'automorphisme de $I_S\times X$ correspondant à l'automorphisme $a + bt \longmapsto a + (Da+b)t$ de $\underline{O}_S[T]/(T^2)$.

2. Opérateurs différentiels invariants sur les préschémas en groupes.

2.1. Soit G un S-préschéma en groupes. Nous désignons par ε ou $\varepsilon_G : S \longrightarrow G$ la section unité de G et par $U(G)$ le $\Gamma(\underline{O}_S)$-module des S-déviations de ε_G (ou S-déviations de l'origine) (1.1). Si d et e sont deux éléments de $U(G)$, $d\times e$ est une S-déviation de $\varepsilon\times\varepsilon : S \simeq S\times S \longrightarrow G\times G$. L'image de $d\times e$ par le morphisme multiplication $m : G\times G \longrightarrow G$ (1.2) sera appelé le produit de d et e et sera noté $d.e$. Le $\Gamma(\underline{O}_S)$-module $U(G)$ se trouve ainsi muni d'une structure de $\Gamma(\underline{O}_S)$-algèbre associative qui a ε_G pour élément unité (1.1). Nous dirons que $U(G)$ est l'algèbre infinitésimale de G. Lorsque T parcourt les préschémas au-dessus de S, l'algèbre infinitésimale $U(G_T)$ du T-groupe $G\times T$ varie évidemment de façon contravariante en T, de sorte que nous pourrons parler du foncteur algèbre infinitésimale. En particulier, lorsque T parcourt les ouverts de S, le foncteur $T \longmapsto U(G_T)$ est un faisceau d'algèbres que nous noterons $\underline{U}(G)$ et que nous appellerons l'Algèbre infinitésimale de G.

L'algèbre $U(G)$ est aussi un foncteur covariant en G : si $u : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme de S-groupes et d une S-déviation de ε_G, l'image de d par u est un élément $U(u)(d) = ud$ de $U(H)$. L'application $U(u) : U(G) \longrightarrow U(H)$ ainsi définie est évidemment un homomorphisme de $\Gamma(\underline{O}_S)$-algèbres. On définit de même un homomorphisme $\underline{U}(u)$ de $\underline{U}(G)$ dans $\underline{U}(H)$.

2.2. Soient maintenant d une S-déviation de l'origine de G et $d\times G$ la S-déviation de $\varepsilon\times G : G \simeq S\times G \longrightarrow G\times G$ obtenue à partir de d par changement de base. L'image de $d\times G$ par le morphisme multiplication $m : G\times G \longrightarrow G$ est un opérateur différentiel d^G de G sur S. De plus, l'application $d \longmapsto d^G$ est évidemment $\Gamma(\underline{O}_S)$-linéaire et le diagramme "commutatif"

$$
\begin{tikzcd}
& & G\times G\times G \arrow[rr, "m\times G"] \arrow[dr, "G\times m"] & & G\times G \arrow[dd, "m"] \\
& G\times G \arrow[ur, "d\times G\times G", "\mathcal{E}\times G\times G"'] \arrow[dr, "m"] & & G\times G \arrow[dr, "m"] & \\
G \arrow[ur, "e\times G", "\mathcal{E}\times G"'] \arrow[rr, "e^G", "\mathrm{Id}G"'] & & G \arrow[ur, "d\times G", "\mathcal{E}\times G"'] \arrow[rr, "d^G", "\mathrm{Id}G"'] & & G
\end{tikzcd}
$$

montre qu'on a $(d.e)^G = d^G.e^G$: la commutativité des deux triangles du bas résulte en effet de la définition de d^G et e^G ; d'autre part, la S-déviation composée de $e\times G$, $d\times G\times G$ et $m\times G$ coïncide avec $(d.e)\times G$; son image par m est donc égale à $(d.e)^G$.

On obtient ainsi un homomorphisme, appelé <u>translation à droite</u>, de la $\Gamma(\underline{O}_S)$-algèbre $U(G)$ dans $\mathrm{Dif}_{G/S}$. Si $\underline{\mathrm{Dif}}_{G/S}$ désigne le faisceau $U \longmapsto \mathrm{Dif}_{G\times U/U}$ sur S (1.4) , on définit de même une "Translation à droite" du faisceau $\underline{U}(G)$ dans $\underline{\mathrm{Dif}}_{G/S}$.

2.3. Nous allons maintenant caractériser les opérateurs différentiels de G sur S de la forme d^G : soient $g : S \longrightarrow G$ une section du morphisme structural de G et g_G la translation à droite de G par g , c'est-à-dire le morphisme composé

$$G \simeq G\times S \xrightarrow{\ G\times g\ } G\times G \xrightarrow{\ m\ } G$$

Pour tout opérateur différentiel D de G sur S , nous notons alors D^g l'opérateur $g_G^{-1} D g_G$ (1.2). Nous disons que D est <u>invariant à droite</u> si , pour tout changement de base $t : T \longrightarrow S$ et toute section $g : T \longrightarrow G\times T$, on a $(D_T)^g = D_T$.

LEMME : *Pour tout opérateur différentiel* D *de* G *sur* S , *les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) D *est invariant à droite*.

(ii) *Si* m *est le morphisme multiplication de* G , *on a* $Dm = m(D\times G)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): comme la condition (ii) est stable par changement de base, il suffit de montrer que (ii) entraîne l'égalité $D^{g} = D$ pour toute section $g : S \longrightarrow G$. Ceci résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G & G\times G \arrow[l, "m"'] & G \arrow[l, "h"'] \\
G \arrow[u, leftarrow, "D \mid \mathrm{Id}G"] & G\times G \arrow[u, leftarrow, "D\times G \mid \mathrm{Id}(G\times G)"] \arrow[l, "m"] & G \arrow[u, leftarrow, "D \mid \mathrm{Id}G"] \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd},$$

où h est le morphisme

$$G \xrightarrow{\sim} G\times S \xrightarrow{\quad G\times g \quad} G\times G$$

et $m\circ h$ la translation à droite par g .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : prenons en effet pour $t : T \longrightarrow S$ le morphisme structural $p : G \longrightarrow S$, pour section $g : T \longrightarrow G\times T$ le morphisme diagonal $\Delta : G \longrightarrow G\times G$. La translation à droite de $G\times G$ par Δ est alors le morphisme de $G\times G$ dans $G\times G$ qui a pour composantes m et pr_2 . L'égalité $(D_G)^{\Delta} = D_G$ équivaut alors à la commutativité du premier carré du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\Delta_{G\times G}"] \arrow[d, "D_G \mid \mathrm{Id}(G\times G)"] & G\times G \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "D_G \mid \mathrm{Id}(G\times G)"] & G \arrow[d, "D \mid \mathrm{Id}\ G"] \\
G\times G \arrow[r, "\Delta_{G\times G}"] & G\times G \arrow[r, "pr_1"] & G
\end{tikzcd}$$

L'égalité (ii) résulte donc de ce que $m = pr_1 \circ \Delta_{G\times G}$.

Considérons par exemple un élément d de l'algèbre infinitésimale $U(G)$. Les deux carrés du diagramme

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "d\times G\times G", "\varepsilon\times G\times G"'] \arrow[d, "m"'] & G\times G\times G \arrow[r, "m\times G"] \arrow[d, "G\times m"] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[r, "d\times G", "\varepsilon\times G"'] & G\times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

sont alors commutatifs. Comme on a $m\circ(d\times G) = d^G$ et $(m\times G)\circ(d\times G\times G) = d^G\times G$, on a aussi $d^G\circ m = m\circ(d^G\times G)$. Pour toute S-déviation d de l'origine, d^G est donc un opérateur différentiel invariant à droite.

2.4. Théorème : L'application $d \longmapsto d^G$ est un isomorphisme de l'algèbre infinitésimale $U(G)$ sur la sous-algèbre $\mathrm{Dif}^G_{G/S}$ de $\mathrm{Dif}_{G/S}$ formée des opérateurs différentiels invariants à droite.

Soit en effet D un opérateur différentiel quelconque de G sur S et désignons par D_o sa valeur à l'origine, c'est-à-dire la déviation composée $S \xrightarrow{\varepsilon} G \xrightarrow[\mathrm{Id}G]{D} G$. L'opérateur différentiel invariant à droite D_o^G est alors obtenu par composition

$$G \simeq S\times G \xrightarrow{\varepsilon\times G} G\times G \xrightarrow[\mathrm{Id}(G\times G)]{D\times G} G\times G \xrightarrow{m} G$$

Si D est invariant à droite, on a $Dm = m(D\times G)$, d'où $D = Dm(\varepsilon\times G) = m(D\times G)(\varepsilon\times G) = D_o^G$. En particulier, l'application $d \longmapsto d^G$ est surjective.

Réciproquement, soit d une S-déviation de l'origine. On a alors un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} G\times G & G \arrow[l, "d\times G"'] \\ G\times S\simeq G \arrow[u, "G\times\varepsilon"] & S \arrow[l, "d"] \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

d'où il résulte que $d = m(G\times\mathcal{E})d = m(d\times G)\mathcal{E} = (d^G)_o$. A fortiori, l'application $d \longmapsto d^G$ est injective.

Lorsque S varie, le théorème 2.4 implique évidemment que la Translation à droite $\underline{U}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Dif}}_{G/S}$ est un isomorphisme de $\underline{O}_S$-Algèbres de $\underline{U}(G)$ sur la sous-Algèbre $\underline{\mathrm{Dif}}^G_{G/S} : U \longmapsto \mathrm{Dif}^{G_U}_{G_U/U}$.

2.4.1. <u>Remarque</u> : Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, shift right, "p"'] & G\times G \arrow[l, "n"'] \arrow[d, shift right, "pr_1"'] \\ S \arrow[u, shift right, "\mathcal{E}"'] & G \arrow[l, "p"] \arrow[u, shift right, "\Delta"'] \end{tikzcd} ,$$

où n désigne le morphisme " $(x,y) \longmapsto yx^{-1}$ ". Celui-ci induit des morphismes

$$n' : n^{-1}(\underline{O}_G) \longrightarrow \underline{O}_{G\times G} \qquad \text{et} \qquad \Delta^{-1}n' : p^{-1}\mathcal{E}^{-1}(\underline{O}_G) \longrightarrow \Delta^{-1}\,\underline{O}_{G\times G}$$

Pour tout entier $m \geqslant 1$, $\Delta^{-1}n'$ définit par passage au quotient un homomorphisme de faisceaux

$$n^m : p^{-1}(P^m_{G/S}) \longrightarrow P^m_{G/S} ,$$

où nous avons posé $P^m_{G/S} = \mathcal{E}^{-1}(\underline{O}_G)/\, I^{m+1}_{\mathcal{E}}$ (confer 1.3 et 1.4 pour les notations). Comme le carré formé par les morphismes n , p , pr_1 et p est cartésien, n^m induit un <u>isomorphisme de</u> $p^*(P^m_{G/S})$ <u>sur</u> $P^m_{G/S}$. Les opérateurs différentiels de G sur S d'ordre $\leqslant m$ correspondent donc biunivoquement aux morphismes de $\underline{O}_G$-Modules

$$p^*(P^m_{G/S}) \longrightarrow \underline{O}_G$$

c'est-à-dire aux morphismes de $\underline{O}_S$-Modules

$$P^m_{G/S} \longrightarrow p_*(\underline{O}_G)$$

Dans cette bijection, les opérateurs différentiels invariants à droite sont associés aux flèches composées

$$P^m_{G/S} \longrightarrow \underline{O}_S \xrightarrow{\text{can.}} p_*(\underline{O}_G)$$

On retrouve ainsi l'isomorphisme du théorème 2.4.

2.5. Soit $\gamma : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}\ G$ l'homomorphisme de foncteurs en groupes qui associe à un S-morphisme $g : T \longrightarrow G$ la translation à gauche de G_T par g, c'est-à-dire le morphisme composé

$$G_T \simeq T \underset{T}{\times} G_T \xrightarrow{g\times G_T} G_T \underset{T}{\times} G_T \xrightarrow{m_T} G_T$$

Cet homomorphisme γ définit le diagramme d'ensembles ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}\ G \arrow[r, "\mathrm{Lie}\ \gamma"] & \mathrm{Lie}\ (\underline{\mathrm{Aut}}\ G) \arrow[d, "\beta"] \\ U(G) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Dif}_{G/S} \end{tikzcd}$$

où l'on désigne par β l'application $u \longmapsto D_u$ de 1.5, par δ la translation à droite définie en 2.2. Si x est un élément de Lie G, c'est-à-dire un morphisme de I_S dans G tel qu'on ait $xs = \varepsilon_G$ avec les notations de 1.5, on a le carré commutatif suivant qui détermine l'image de x par Lie γ :

$$\begin{tikzcd} I_S\times G \arrow[r, "(\mathrm{Lie}\,\gamma)(x)"] \arrow[d, "x\times G"] & I_S\times G \arrow[d, "pr_2"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

D'après 1.5 , l'image de $(\mathrm{Lie}\,\gamma)(x)$ par β est la déviation composée

$$G \simeq S\times G \xrightarrow[\mathrm{Id}]{\sigma \times G} I_S \times G \xrightarrow{x \times G} G\times G \xrightarrow{m} G$$

D'après 2.2 , cette déviation composée n'est autre que $(x\sigma)^G$. En notant α l'application $x \longmapsto x\sigma$ de Lie G dans U(G) , on a donc

$$\beta(\mathrm{Lie}\,\gamma) = \delta\alpha .$$

En particulier, α <u>est un homomorphisme injectif de</u> Lie G <u>dans l'algèbre de Lie sous-jacente à l'algèbre infinitésimale</u> U(G) .

3. Coalgèbres et dualité de Cartier

3.1. Soit S un préschéma (ou, plus généralement, un espace annelé). Une $\underline{O}_S$-Coalgèbre est un couple $(\underline{U}, \Delta_{\underline{U}})$ formé d'un $\underline{O}_S$-Module $\underline{U}$ et d'un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules $\Delta_{\underline{U}} : \underline{U} \longrightarrow \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U}$ (dit morphisme diagonal) tels que

(i) $\sigma \circ \Delta_{\underline{U}} = \Delta_{\underline{U}}$, où $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$.

(ii) Le carré

$$\begin{tikzcd} \underline{U} \arrow[r, "\Delta_{\underline{U}}"] \arrow[d, "\Delta_{\underline{U}}"'] & \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U} \arrow[d, "\underline{U} \otimes \Delta_{\underline{U}}"] \\ \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U} \arrow[r, "\Delta_{\underline{U}} \otimes \underline{U}"] & \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

(iii) Il existe un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules $\varepsilon_{\underline{U}} : \underline{U} \longrightarrow \underline{O}_S$, dit augmentation, tel que les morphismes composés

$$\underline{U} \xrightarrow{\Delta_{\underline{U}}} \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U} \xrightarrow{\underline{U} \otimes \varepsilon_{\underline{U}}} \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_S \simeq \underline{U}$$

$$\underline{U} \xrightarrow{\Delta_{\underline{U}}} \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U} \xrightarrow{\varepsilon_{\underline{U}} \otimes \underline{U}} \underline{O}_S \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U} \simeq \underline{U}$$

soient le morphisme identique de $\underline{U}$.

Si $\varepsilon_{\underline{U}}$ et $\varepsilon'_{\underline{U}}$ sont deux augmentations, on a $\varepsilon_{\underline{U}} \simeq (\varepsilon_{\underline{U}} \otimes \varepsilon'_{\underline{U}}) \circ \Delta_{\underline{U}} \simeq \varepsilon'_{\underline{U}}$; l'augmentation est donc déterminée de façon unique par (iii).

Si $(\underline{U}, \Delta_{\underline{U}})$ et $(\underline{V}, \Delta_{\underline{V}})$ sont deux $\underline{O}_S$-Coalgèbres, un morphisme de la première dans la seconde est un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules $f : \underline{U} \longrightarrow \underline{V}$ tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \underline{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_U"] & \underline{V} \arrow[d, "\Delta_V"] \\ \underline{U} \otimes \underline{U} \arrow[r, "f \otimes f"] & \underline{V} \otimes \underline{V} \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \underline{U} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_U"'] & & \underline{V} \arrow[dl, "\varepsilon_V"] \\ & \underline{O}_S & \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. Les morphismes de Coalgèbres se composent comme les morphismes de $\underline{O}_S$-Modules de sorte que nous pourrons parler de la catégorie des $\underline{O}_S$-Coalgèbres.

Cette catégorie possède des produits finis : l'objet final est le $\underline{O}_S$-Module $\underline{O}_S$, le morphisme diagonal étant l'identité; le produit de deux Coalgèbres $(\underline{U}, \Delta_{\underline{U}})$ et $(\underline{V}, \Delta_{\underline{V}})$ est le produit tensoriel $\underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{V}$, le morphisme diagonal étant le morphisme composé

$$\underline{U} \otimes \underline{V} \xrightarrow{\Delta_{\underline{U}} \otimes \Delta_{\underline{V}}} \underline{U} \otimes \underline{U} \otimes \underline{V} \otimes \underline{V} \xrightarrow{\underline{U} \otimes \sigma \otimes \underline{V}} \underline{U} \otimes \underline{V} \otimes \underline{U} \otimes \underline{V}$$

où $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$; les projections canoniques de $\underline{U} \otimes \underline{V}$ sur les facteurs $\underline{U}$ et $\underline{V}$ sont les morphismes $\underline{U} \otimes \varepsilon_{\underline{V}}$ et $\varepsilon_{\underline{U}} \otimes \underline{V}$.

3.1.1. Soit $\underline{A}$ une $\underline{O}_S$-Algèbre commutative, localement libre et de type fini en tant que $\underline{O}_S$-Module. Si nous posons

$$\underline{A}^* = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S\text{-Mod}}(\underline{A}, \underline{O}_S) \quad ,$$

le morphisme canonique φ de $\underline{A}^* \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}^*$ dans $(\underline{A} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A})^*$ est inversible. Si $m : \underline{A} \otimes \underline{A} \longrightarrow \underline{A}$ est le morphisme définissant la multiplication de $\underline{A}$, on obtient par composition un morphisme diagonal

$$\Delta_{\underline{A}^*} : \underline{A}^* \xrightarrow{m^*} (\underline{A} \otimes \underline{A})^* \xrightarrow{\varphi^{-1}} \underline{A}^* \otimes \underline{A}^*$$

Ce morphisme diagonal fait évidemment de $\underline{A}$ une $\underline{O}_S$-Coalgèbre qui a pour augmentation le morphisme transposé du morphisme $\underline{O}_S \longrightarrow \underline{A}$ défini par la section unité de $\underline{A}$. De plus, il est clair que <u>le foncteur $\underline{A} \mapsto \underline{A}^*$ est une antiéquivalence de la catégorie des $\underline{O}_S$-Algèbres, qui sont localement libres et de type fini en tant que $\underline{O}_S$-Modules, sur la catégorie des $\underline{O}_S$-Coalgèbres localement libres et de type fini en tant que $\underline{O}_S$-Modules.</u>

3.1.2. A toute $\underline{O}_S$-Coalgèbre $\underline{U}$ est associée canoniquement un S-foncteur $\mathrm{Spec}^*\underline{U} : (\mathrm{Sch}/S)^\circ \longrightarrow (\mathrm{Ens})$: remarquons en effet que, pour tout S-préschéma $q : T \longrightarrow S$, $q^*(\underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U})$ s'identifie à $q^*(\underline{U}) \otimes_{\underline{O}_T} q^*(\underline{U})$, de sorte que $q^*(\Delta_{\underline{U}})$ fait de $\underline{U}_T = q^*(\underline{U})$ une $\underline{O}_T$-Coalgèbre; nous pouvons donc poser par définition et avec un abus de notation évident

$$(\mathrm{Spec}^*\underline{U})(T) = \left\{ x \in \Gamma(T, \underline{U}_T) \;\middle|\; \varepsilon_{\underline{U}_T}(x) = 1 \text{ et } \Delta_{\underline{U}_T}(x) = x \otimes x \right\}$$

Les sections x de $\underline{U}_T$ correspondent évidemment aux morphismes de $\underline{O}_T$-Modules $\xi : \underline{O}_T \longrightarrow \underline{U}_T$; les conditions $\varepsilon(x) = 1$ et $\Delta(x) = x \otimes x$ expriment simplement que ξ est un morphisme de Coalgèbres. On a donc également

$$(\mathrm{Spec}^*\underline{U})(T) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_T\text{-Coal}}(\underline{O}_T , \underline{U}_T)$$

En particulier, si $\underline{A}$ est une $\underline{O}_S$-Algèbre commutative qui est localement libre de type fini en tant que $\underline{O}_S$-Module, on a des isomorphismes

$$(\mathrm{Spec}^* \underline{A}^*)(T) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_T\text{-Coal.}}(\underline{O}_T, \underline{A}^*_T) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{O}_T\text{-Al}}(\underline{A}_T, \underline{O}_T) \simeq (\mathrm{Spec}\ A)(T)$$

et

$$\mathrm{Spec}^* \underline{A}^* \simeq \mathrm{Spec}\ \underline{A} .$$

3.2. Une <u>$\underline{O}_S$-Coalgèbre en groupes</u>, c'est-à-dire un groupe de la catégorie des $\underline{O}_S$-Coalgèbres, consiste en la donnée d'une $\underline{O}_S$-Coalgèbre $(\underline{U}, \Delta_{\underline{U}})$ et d'un morphisme de $\underline{O}_S$-Coalgèbres $m_{\underline{U}} : \underline{U} \otimes \underline{U} \longrightarrow \underline{U}$. Un tel morphisme est un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules rendant commutatifs les diagrammes suivants

(iv)
$$\begin{tikzcd}
\underline{U}\otimes\underline{U}\otimes\underline{U}\otimes\underline{U} \arrow[d, "\underline{U}\otimes\sigma\otimes\underline{U}"] & & \underline{U}\otimes\underline{U} \arrow[ll, "\Delta_{\underline{U}}\otimes\Delta_{\underline{U}}"'] \arrow[dr, "m_{\underline{U}}"] & \\
\underline{U}\otimes\underline{U}\otimes\underline{U}\otimes\underline{U} \arrow[rr, "m_{\underline{U}}\otimes m_{\underline{U}}"] & & \underline{U}\otimes\underline{U} & \underline{U} \arrow[l, "\Delta_{\underline{U}}"']
\end{tikzcd}$$

(v)
$$\begin{tikzcd}
\underline{U}\otimes\underline{U} \arrow[rr, "m_{\underline{U}}"] \arrow[dr, "\varepsilon_{\underline{U}}\otimes\varepsilon_{\underline{U}}"'] & & \underline{U} \arrow[dl, "\varepsilon_{\underline{U}}"] \\
& \underline{O}_S &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme de $\underline{O}_S$-Coalgèbres $m_{\underline{U}}$ doit en outre vérifier les conditions $(ii)^*$, $(iii)^*$ et (vi) ci-dessous :

$(ii)^*$ Le carré
$$\begin{tikzcd}
\underline{U}\otimes\underline{U}\otimes\underline{U} \arrow[r, "\underline{U}\otimes m_{\underline{U}}"] \arrow[d, "m_{\underline{U}}\otimes\underline{U}"'] & \underline{U}\otimes\underline{U} \arrow[d, "m_{\underline{U}}"] \\
\underline{U}\otimes\underline{U} \arrow[r, "m_{\underline{U}}"] & \underline{U}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

$(iii)^*$ Il existe un morphisme de $\underline{O}_S$-Coalgèbres $\eta_{\underline{U}} : \underline{O}_S \longrightarrow \underline{U}$ tel que les morphismes composés

$$\underline{U} \simeq \underline{U}\otimes\underline{O}_S \xrightarrow{\underline{U}\otimes\eta_{\underline{U}}} \underline{U}\otimes\underline{U} \xrightarrow{m_{\underline{U}}} \underline{U}$$

et
$$\underline{U} \simeq \underline{O}_S\otimes\underline{U} \xrightarrow{\eta_{\underline{U}}\otimes\underline{U}} \underline{U}\otimes\underline{U} \xrightarrow{m_{\underline{U}}} \underline{U}$$

soient les morphismes identiques de $\underline{U}$.

(vi) Il existe un morphisme de $\underline{O}_S$-Coalgèbres $c_{\underline{U}} : \underline{U} \longrightarrow \underline{U}$ tel que le morphisme composé

$$\underline{U} \xrightarrow{\Delta_{\underline{U}}} \underline{U} \otimes \underline{U} \xrightarrow{c_{\underline{U}} \otimes \underline{U}} \underline{U} \otimes \underline{U} \xrightarrow{m_{\underline{U}}} \underline{U}$$

soit égal à $\eta_{\underline{U}} \circ \varepsilon_{\underline{U}}$.

3.2.1. Les morphismes $\eta_{\underline{U}}$ et $c_{\underline{U}}$ de $(iii)^*$ et (vi) sont évidemment uniques. Les conditions $(ii)^*$ et $(iii)^*$ expriment simplement que $m_{\underline{U}}$ fait de $\underline{U}$ une $\underline{O}_S$-Algèbre qui a pour section unité l'image par $\eta_{\underline{U}}$ de la section unité de $\underline{O}_S$. La condition (iv) exprime aussi que le morphisme diagonal $\Delta_{\underline{U}}$ est compatible avec la multiplication; et en effet, $\Delta_{\underline{U}} : U \longrightarrow \underline{U} \otimes \underline{U}$ doit être un homomorphisme de Coalgèbres en groupes, ce qui implique également la commutativité du triangle

$(v)^*$

$$\begin{tikzcd} & \underline{O}_S \arrow[dl, "\eta_{\underline{U}}"'] \arrow[dr, "\eta_{\underline{U}} \otimes \eta_{\underline{U}}"] & \\ \underline{U} \arrow[rr, "\Delta_{\underline{U}}"'] & & \underline{U} \otimes \underline{U} \end{tikzcd}$$.

D'autre part, comme dans toute catégorie, l'antipodisme $c_{\underline{U}}$ est un isomorphisme de $\underline{U}$ sur la Coalgèbre en groupes opposée; en particulier, $c_{\underline{U}}$ induit un isomorphisme d'algèbres de $\underline{U}$ sur l'algèbre opposée $\underline{U}^{\circ}$.

3.2.2. Comme le foncteur $\underline{U} \longmapsto \mathrm{Spec}^* \underline{U}$ commute aux produits finis, il transforme une Coalgèbre en groupes en un S-foncteur en groupes; et en effet, pour tout S-préschéma T , les éléments $x \in \Gamma(T, \underline{U}_T)$ appartenant à $(\mathrm{Spec}^* \underline{U})(T)$ forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre $\Gamma(T, \underline{U}_T)$; l'inverse de x n'est autre que $c_{\underline{U}}(x)$.

Soient par exemple $\underline{g}$ une $\underline{O}_S$-Algèbre de Lie et $\underline{U}(\underline{g})$ l'Algèbre enveloppante de $\underline{g}$, c'est-à-dire le faisceau sur S associé au préfaisceau qui attribue à tout ouvert V l'algèbre enveloppante $U(\Gamma(V, \underline{g}))$ de l'algèbre de Lie $\Gamma(V, \underline{g})$. Tout homomorphisme de $\underline{g}$ dans l'Algèbre de Lie sous-jacente à une $\underline{O}_S$-Algèbre se factorise d'une façon et d'une seule à travers le morphisme canonique de $\underline{g}$ dans $\underline{U}(\underline{g})$; en outre, cette propriété universelle entraîne, outre la fonctorialité de $\underline{U}(\underline{g})$ en $\underline{g}$, que l'Algèbre enveloppante d'un produit d'Algèbres de Lie s'identifie au produit tensoriel des Algèbres enveloppantes. En particulier, le morphisme diagonal $\delta : \underline{g} \longrightarrow \underline{g}\times\underline{g}$ induit un homomorphisme d'Algèbres $\Delta : \underline{U}(\underline{g}) \longrightarrow \underline{U}(\underline{g}\times\underline{g}) \simeq \underline{U}(\underline{g}) \otimes \underline{U}(\underline{g})$. Le morphisme nul $\underline{g} \longrightarrow 0$ induit un homomorphisme $\varepsilon : \underline{U}(\underline{g}) \longrightarrow \underline{U}(0) \simeq \underline{O}_S$. L'isomorphisme $x \longmapsto -x$ de $\underline{g}$ sur l'Algèbre de Lie opposée $\underline{g}^{\circ}$ induit un antiisomorphisme c de l'algèbre $\underline{U}(\underline{g})$. On vérifie alors facilement que la multiplication m de l'Algèbre $\underline{U}(\underline{g})$ fait de $(\underline{U}(\underline{g}),\Delta)$ une $\underline{O}_S$-Coalgèbre en groupes qui a ε pour augmentation et c pour antipodisme.

3.2.3. Soit $\underline{U}$ une $\underline{O}_S$-Coalgèbre en groupes. On vérifie facilement que $G = \operatorname{Spec}^*\underline{U}$ est un bon S-groupe (II 4.6). Comme on a

$$\Gamma(I_S,\underline{U}_{I_S}) \simeq \Gamma(S,\underline{U}) \oplus d\,\Gamma(S,\underline{U}) \quad ,$$

un élément $u_0 + du_1$ de $\Gamma(I_S,\underline{U}_{I_S})$ appartient à $(\operatorname{Spec}^*\underline{U})(I_S)$ si et seulement si l'on a

$$\Delta(u_0+du_1) = (u_0+du_1)\otimes(u_0+du_1) \quad \text{et} \quad \varepsilon(u_0+du_1) = 1 \quad ,$$

d'où $\quad \Delta u_0 + d\Delta u_1 = u_0 \otimes u_0 + (u_1 \otimes u_0 + u_0 \otimes u_1)d$ et $\varepsilon(u_0)+d\varepsilon(u_1)=1$

c'est-à-dire $\Delta u_0 = u_0 \otimes u_0$, $u_1 = u_1 \otimes u_0 + u_0 \otimes u_1$ et $\varepsilon(u_0)=1, \varepsilon(u_1)=0$.

En particulier, $(\operatorname{Lie} G)(T)$ est l'ensemble des éléments primitifs de $\Gamma(T,\underline{U}_T)$, c'est-à-dire des éléments u tels qu'on ait $\Delta u = u\otimes 1 + 1\otimes u$ (avec l'abus de notation évident déjà signalé).

La structure de $\Gamma(T,\underline{O}_T)$-module de $(\operatorname{Lie} G)(T)$ est évidemment induite par celle de $\Gamma(T,\underline{U}_T)$. D'autre part, considérons deux éléments primitifs u et v de $(\operatorname{Lie} G)(S)$ et posons $I = \operatorname{Spec} \underline{O}_S[d]/(d^2)$ et $I' = \operatorname{Spec} \underline{O}_S[d']/(d'^2)$. Comme la loi de composition de $G(I\times I')$ est induite par la multiplication de l'Algèbre $\underline{U}_{I\times I'}$, on a

$$(1 + ud)(1 + vd')(1 + ud)^{-1}(1 + vd')^{-1} = (1 + ud)(1 + vd')(1 - ud)(1 - vd)$$

$$= 1 + (uv-vu)dd'$$

D'où l'égalité $[u,v] = uv-vu$, qui prouve que G est très bon (II 4.10).

3.3. Supposons enfin que $\underline{U}$ soit une $\underline{O}_S$-Coalgèbre en groupes commutatifs, c'est-à-dire que le triangle

(i)*
$$\begin{tikzcd} \underline{U} \otimes \underline{U} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "m_{\underline{U}}"'] & & \underline{U} \otimes \underline{U} \arrow[dl, "m_{\underline{U}}"] \\ & \underline{U} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif ou encore que $m_{\underline{U}}$ fasse de $\underline{U}$ une $\underline{O}_S$-Algèbre commutative. Les conditions (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (i)*, (ii)*, (iii)* et (v)* signifient alors aussi que $\underline{U}$ est un cogroupe dans la catégorie des $\underline{O}_S$-Algèbres commutatives. En particulier, si de plus $\underline{U}$ est un $\underline{O}_S$-Module quasi-cohérent, Spec $\underline{U}$ est un S-préschéma en groupes commutatifs.

Un homomorphisme de S-groupes de Spec $\underline{U}$ dans $\underline{\underline{G}}_{m,S}$ (I 4.3.2) est alors induit par un homomorphisme de $\underline{O}_S$-Algèbres unitaires

$$\varphi : \underline{O}_S[T,T^{-1}] \longrightarrow \underline{U}$$

tel que $(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta' = \Delta_{\underline{U}} \circ \varphi$ (le morphisme diagonal Δ' de $\underline{O}_S[T,T^{-1}]$ envoie T sur $T \otimes T$). Un tel homomorphisme φ est déterminé par l'image $\varphi(T)$ qui doit être un élément inversible x de $\underline{U}$ tel que $\Delta_{\underline{U}} x = x \otimes x$; comme φ commute alors nécessairement avec l'augmentation, on a $\varepsilon_{\underline{U}} x = 1$ (l'augmentation de $\underline{O}_S[T,T^{-1}]$ envoie T sur 1).

On a donc $\quad \mathrm{Hom}_{S\text{-}Gr}(\mathrm{Spec}\ \underline{U}, \underline{\underline{G}}_{m,S}) \simeq (\mathrm{Spec}^{*}\underline{U})(S)$

Comme cette formule reste valable après tout changement de base, on a finalement

$$\mathrm{Spec}^{*}\underline{U} = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}Gr}(\mathrm{Spec}\ \underline{U}\ ,\ \underline{\underline{G}}_{m,S})$$

<u>pour toute $\underline{O}_S$-Coalgèbre en groupes commutatifs quasi-cohérente</u> $\underline{U}$.

3.3.1. Si l'on suppose de plus que $\underline{U}$ est un $\underline{O}_S$-Module localement libre de type fini, $\mathrm{Spec}^{*}\underline{U}$ est également représentable et l'on a

$$\mathrm{Spec}^{*}\underline{U} \simeq \mathrm{Spec}\ \underline{U}^{*} \qquad \text{(conf. 3.1.2)}$$

Le foncteur $\underline{U} \longmapsto \underline{U}^{*} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S\text{-Mod}}(\underline{U},\underline{O}_S)$ induit donc une dualité(+) de la catégorie des S-préschémas en groupes commutatifs qui sont finis localement libres sur S (c'est la <u>dualité de CARTIER</u>). D'après 3.3 , cette dualité associe $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}Gr}(G,\underline{\underline{G}}_{m,S})$ à un S-groupe G .

(+) Une dualité d'une catégorie $\underline{C}$ est un couple (D,φ) formé d'un foncteur contravariant D de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$ et d'un isomorphisme fonctoriel $\varphi : Id_{\underline{C}} \longrightarrow DD$ tel que les isomorphismes $\varphi D : D \longrightarrow DDD$ et $D\varphi : DDD \longrightarrow D$ soient réciproques l'un de l'autre.

4. "Frobeniuseries"

Soient p un nombre premier fixé et $(Sch/\mathbb{F}_p)$ la catégorie des préschémas de caractéristique p , c'est-à-dire des préschémas au-dessus du corps premier $\mathbb{F}_p$. Suivant les conventions générales de ce séminaire, nous identifions $(Sch/\mathbb{F}_p)$ à une sous-catégorie de $\widehat{(Sch/\mathbb{F}_p)}$ au moyen du foncteur h de I 1.1. Nous profitons de même de l'isomorphisme de $Hom(h_X,F)$ sur $F(X)$ défini en I 1.1 pour identifier ces deux ensembles chaque fois que X est un $\mathbb{F}_p$-préschéma et F un objet de $\widehat{(Sch/\mathbb{F}_p)}$. Si T est un $\mathbb{F}_p$-préschéma, un T-foncteur est un morphisme $q : F \longrightarrow T$ de $\widehat{(Sch/\mathbb{F}_p)}$ qui a T pour but ; pour tout T-préschéma $r : X \longrightarrow T$, l'ensemble des morphismes $s : X \longrightarrow F$ tels que $q\circ s = r$ sera alors noté $q(r)$, $q(X/T)$, $F(r)$ ou $F(X/T)$ (ou même $F(X)$ lorsqu'aucune confusion ne sera possible avec $Hom(h_X,F)$) .

4.1. Pour tout préschéma S de caractéristique p , nous notons $\underline{f}(S)$ ou $\underline{f}$ l'endomorphisme de S qui induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à S et qui associe x^p à une section x de $\underline{O}_S$ sur un ouvert U . Alors l'application $\underline{f} : S \longmapsto \underline{f}(S)$ est un endomorphisme du foncteur identique de $(Sch/\mathbb{F}_p)$, ce qui implique les résultats suivants : soit E un $\mathbb{F}_p$-foncteur, c'est-à-dire un objet de $\widehat{(Sch/\mathbb{F}_p)}$; l'application qui associe à tout $\mathbb{F}_p$-préschéma S l'endomorphisme $E(\underline{f}(S))$ de $E(S)$, est un endomorphisme fonctoriel de E que nous noterons $\underline{f}(E)$ ou $\underline{f}$; cette notation est compatible avec l'identification de $(Sch/\mathbb{F}_p)$ à une sous-catégorie de $\widehat{(Sch/\mathbb{F}_p)}$; de plus, l'application $E \longmapsto \underline{f}(E)$ est un endomorphisme du foncteur identique de $\widehat{(Sch/\mathbb{F}_p)}$ (que nous noterons encore $\underline{f}$) .

Pour tout préschéma S de caractéristique p et tout S-foncteur $q : X \longrightarrow S$, nous notons $X^{(p/S)}$ ou $X^{(p)}$ l'image réciproque $S \times_{\underline{f},q} X$ de X par le changement de base $\underline{f}(S)$. Le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\underline{f}(X)"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ S \arrow[r, "\underline{f}(S)"] & S \end{tikzcd}$$

induit alors un S-morphisme $\underline{F}(X/S)$ ou $\underline{F}$ de X dans $X^{(p/S)}$ tel que $\underline{f}(X) = pr_2 \circ \underline{F}(X/S)$. Nous dirons que $\underline{F}(X/S)$ est le morphisme de Frobenius de X relativement à S ; il est clair que l'application $\underline{F} : X \longmapsto \underline{F}(X/S)$ est un homomorphisme fonctoriel.

D'après les définitions, pour tout S-préschéma $K: T \to S$, l'application $\underline{F}(X/S)(K)$ peut donc être caractériséepar la commutativité du triangle

$$\begin{tikzcd} X^{(p/S)}(K) \arrow[rr, "\sim"] & & X(\underline{f}(S) \circ K) = X(K \circ \underline{f}(T)) \\ & X(K) \arrow[ul, "\underline{F}(X/S)(K)"] \arrow[ur, "X(\underline{f}(T))"'] & \end{tikzcd}$$

Par exemple, si X est le sous-préschéma de S défini par un Idéal quasi-cohérent $\underline{I}$, alors $X^{(p)}$ est le sous-préschéma de S défini par l'Idéal $\underline{I}^{\{p\}}$ engendré par les puissances p-ièmes des sections de $\underline{I}$; en outre, $\underline{F}(X/S)$ est alors l'immersion canonique de $\mathrm{Spec}(\underline{O}_S/\underline{I})$ dans $\mathrm{Spec}(\underline{O}/\underline{I}^{\{p\}})$.

4.1.1. Considérons maintenant un changement de base $t : T \longrightarrow S$. Comme le carré

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\underline{f}(T)"] \arrow[d, "t"'] & T \arrow[d, "t"] \\ S \arrow[r, "\underline{f}(S)"] & S \end{tikzcd}$$

est commutatif, l'image réciproque de $X \times_{q,t} T$ par $\underline{f}(T)$ s'identifie à l'image réciproque de $X \times_{q,\underline{f}(S)} S$ par t ; autrement dit, on a un isomorphisme canonique de $X_T^{(p/T)}$ sur $(X^{(p/S)})_T$. Il est clair que, dans cette identification, $\underline{F}(X_T/T)$ s'identifie à l'image réciproque $\underline{F}(X/S)_T$ de $\underline{F}(X/S)$.

En particulier, si S est le spectre du corps premier $\mathbb{F}_p$, $X^{(p/S)}$ est égal à X et $\underline{F}(X/S)$ à $\underline{f}(X)$. Par conséquent, $X_T^{(p/T)}$ s'identifie à X_T et $\underline{F}(X_T/T)$ à $\underline{f}(X)_T$. Soient par exemple E un ensemble et E_T le T-préschéma constant de type E ; on a alors $E_T^{(p/T)} \simeq E_T$ et $\underline{F}(E_T/T) \simeq \mathrm{Id}\, E_T$.

4.1.2. Le foncteur $X \longmapsto X^{(p/S)}$ commute évidemment aux produits; il transforme donc un S-groupe G en un S-groupe $G^{(p/S)}$; de plus, comme $\underline{F}$ est un homomorphisme fonctoriel, $\underline{F}(G/S)$ est un homomorphisme de S-groupes. Nous noterons ${}_{\underline{F}}G$ le noyau de cet homomorphisme : si $q : T \longrightarrow S$ est un préschéma au-dessus de S , il résulte de 4.1 que la valeur de ${}_{\underline{F}}G$ en q est le noyau de l'homomorphisme $G(\underline{f}(T)) : G(q) \longrightarrow G(q \circ \underline{f}(T))$ Par exemple, lorsque T est le préschéma I_R des nombres duaux sur un S-préschéma R , $\underline{f}(I_R)$ se factorise comme suit

$$I_R \xrightarrow{\text{can.}} R \xrightarrow{f(R)} R \xrightarrow{\text{can.}} I_R \quad .$$

Ceci montre que $({}_{\underline{F}}G)(I_R)$ contient le noyau du morphisme $G(I_R) \longrightarrow G(R)$ et qu'on a $\mathrm{Lie}\, G/S = \mathrm{Lie}\, ({}_{\underline{F}}G/S)$.

4.1.3. Plus généralement, pour tout S-foncteur X , nous définissons le S-foncteur $X^{(p^n)}$ par récurrence sur n à l'aide des formules

$$X^{(p)} = X^{(p/S)} \quad \text{et} \quad X^{(p^n)} = (X^{(p^{n-1})})^{(p)} \quad .$$

De même, $F^n(X/S)$ ou F^n désignent l'homomorphisme fonctoriel composé

$$X \xrightarrow{F(X/S)} X^{(p)} \xrightarrow{F(X^{(p)}/S)} X^{(p^2)} \dots X^{(p^{n-1})} \xrightarrow{F(X^{(p^{n-1})}/S)} X^{(p^n)}$$

Si G est un S-foncteur en groupes, $G^{(p^n)}$ en est un également et $F^n(G/S)$ est un homomorphisme de S-foncteurs en groupes. Nous noterons ${}_{F^n}G$ le noyau de $F^n(G/S)$ et nous dirons que G <u>est de hauteur</u> $\leqslant n$ si $F^n(G/S)$ est nul, c'est-à-dire si ${}_{F^n}G = G$.

<u>Le sous-foncteur en groupes</u> ${}_{F^n}G$ <u>de</u> G <u>est caractéristique</u>, en ce sens que, pour tout S-préschéma T, tout endomorphisme f du T-foncteur en groupes G_T induit un endomorphisme de $({}_{F^n}G)_T$: en effet, comme la construction de $G^{(p^n)}$ et de $F^n(G/S)$ commute aux changements de base d'après 4.1.1, on peut supposer $T = S$; dans ce cas, l'assertion résulte de ce que $F^n(G/S)$ est un homomorphisme fonctoriel.

On notera enfin que $F(X^{(p)}/S)$ coïncide avec $F(X/S)^{(p)}$.

4.1.4. Voici quelques exemples :

a) Considérons d'abord un groupe abélien "abstrait" M et le groupe diagonalisable $G = D_S(M)$ de type M (I 4.4) : pour tout S-préschéma T, $G(T)$ est donc le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{(Ab)}(M, \Gamma(T,\underline{O}_T)^*)$. Comme G est l'image réciproque du groupe diagonalisable $D(M)$ sur $\mathbb{F}_p$, $G^{(p)}$ s'identifie à G et $\underline{F}(G/S)(T)$ s'identifie à l'endomorphisme $x \longmapsto x^p$ de $G(T)$ (4.1.1). En particulier, lorsque M est égal à $\mathbb{Z}$, on a $D_S(M) = \underline{\underline{G}}_{m,S}$, de sorte que ${}_{\underline{F}}\underline{\underline{G}}_{m,S}$ <u>est le</u> S-<u>groupe</u> $\mu_{p,S}$ <u>qui associe à tout</u> S-<u>préschéma</u> T <u>le groupe des racines</u> p-<u>ièmes de l'unité de</u> $\Gamma(T,\underline{O}_T)$.

b) Considérons maintenant un préschéma S de caractéristique p et un faisceau de modules E sur S. D'après I 4.6.2, on a un isomorphisme canonique

$$W(E)^{(p)} \simeq W(E^{(p)}) \quad ,$$

où $E^{(p)}$ est l'image réciproque de E par $\underline{f}(S)$. De plus, d'après 4.1, l'application $\underline{F}(W(E))(q)$ est déterminée pour tout S-préschéma T par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(T, q^* f(S)^* E) \arrow[rr, "\sim", "\mathrm{can.}"'] & & \Gamma(T, \underline{f}(T)^* q^* E) \\
& \Gamma(T, q^* E) \arrow[ul, "\underline{F}(W(E)/S)(q)"] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd} \quad ,$$

où f' est l'application induite par $\underline{f}(T)$.

En particulier, si E est égal à $\underline{O}_S$, $W(E)$ s'identifie au groupe additif $\underline{\underline{G}}_{a,S}$. Dans ce cas, on a $E^{(p)} = E = \underline{O}_S$ et le morphisme de Frobenius $\underline{F}(\underline{\underline{G}}_{a,S}/S)$ applique $x \in \Gamma(T, O_T)$ sur x^p. Le noyau $\alpha_{p,S}$ du morphisme de Frobenius de $\underline{\underline{G}}_{a,S}$ associe donc à tout S-préschéma T l'ensemble des sections x de $\underline{O}_T$ telles que $x^p = 0$.

c) On verrait de même que, pour toute $\underline{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$, $(\mathrm{Spec}\,\mathcal{A})^{(p)}$ s'identifie au spectre $\mathrm{Spec}\,\mathcal{A}^{(p)}$ de l'image réciproque de $\mathcal{A}$ par $\underline{f}(S)$. Si π désigne l'endomorphisme $x \longmapsto x^p$ du faisceau d'anneaux $\underline{O}_S$, on a donc $\mathcal{A}^{(p)} = \mathcal{A} \otimes_\pi \underline{O}_S$ et il est clair que $\underline{F}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{A}/S)$ est induit par l'homomorphisme $a \otimes_\pi x \longmapsto a^p x$ de $\mathcal{A} \otimes_\pi \underline{O}_S$ dans $\mathcal{A}$.

Pour tout $\underline{O}_S$-Module quasi-cohérent E enfin, on a des isomorphismes canoniques

$$V(E)^{(p)} \simeq V(E^{(p)}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Sym}}(E)^{(p)} \simeq \underline{\mathrm{Sym}}(E^{(p)}) \quad ,$$

où $\underline{\mathrm{Sym}}\,E$ désigne l'Algèbre symétrique du $\underline{O}_S$-Module E.

d) Soient $\underline{U}$ une $\underline{O}_S$-Coalgèbre (3.1) et T un préschéma de caractéristique p . Si $\underline{U}^{(p/S)}$ ou $\underline{U}^{(p)}$ désignent l'image réciproque de la Coalgèbre $\underline{U}$ par f(S) , on a comme en b) un isomorphisme canonique

$$(\mathrm{Spec}^*\underline{U})^{(p)} \simeq \mathrm{Spec}^*\underline{U}^{(p)} \quad .$$

Si $\underline{U}$ est une Coalgèbre en groupes, la valeur de $_{\underline{F}}\mathrm{Spec}\ \underline{U}$ pour un S-préschéma T est donc l'ensemble des éléments γ de $\Gamma(T,\underline{U}_T)$ tels que

$$\varepsilon_{\underline{U}_T}(\gamma) = 1 \ , \ \Delta_{\underline{U}_T}\gamma = \gamma \otimes \gamma \qquad \text{et} \quad \gamma \otimes_{\underline{f}(T)} 1 = 1 \ .$$

4.2. Nous allons maintenant nous occuper d'une construction voisine de la précédente : soient S un préschéma de caractéristique p , X un S-préschéma et X^p_S le produit dans la catégorie (Sch/S) de p exemplaires de X . Nous désignons alors par $U^p(X)$ le sous-préschéma ouvert de X^p_S qui est la réunion des produits U^p_S , lorsque U parcourt les ouverts affines de X . Un point x de X^p_S appartient donc à $U^p(X)$ si et seulement si les projections $\mathrm{pr}_i x$ de x sur les facteurs de X^p_S appartiennent à un même ouvert affine de X. Par exemple, si toute partie finie de X est contenue dans un ouvert affine, on a $U^p(X) = X^p_S$.

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_p$ d'ordre p opère sur X^p_S par permutation des facteurs et laisse stable l'ouvert $U^p(X)$. Nous appellerons produit symétrique p-uple de X et nous noterons $\Sigma^p X$ le quotient de X^p_S par $\mathcal{S}_p$ dans la catégorie de tous les espaces annelés. La projection canonique $q : X^p_S \longrightarrow \Sigma^p X$ applique $U^p(X)$ sur un ouvert $V^p(X)$ du produit symétrique, qu'on peut décrire comme suit (confer V 4.1) : le faisceau structural de $\Sigma^p X$ induit sur $V^p(X)$ une structure de préschéma; le morphisme $q' : U^p(X) \longrightarrow V^p(X)$ induit par q est affine et même entier; lorsque U parcourt les ouverts affines de X qui se projettent dans un ouvert affine variable V de S , les $\Sigma^p U$ forment un recouvrement affine de $V^p(X)$; si k désigne l'algèbre affine de V et A celle de U , $\Sigma^p U$ a pour algèbre affine la sous-algèbre $\Sigma^p A$ de $\otimes_k^p A$ formé des tenseurs symétriques.

Considérons maintenant le morphisme diagonal δ de X dans $U^p(X)$. La restriction de δ à l'ouvert U ci-dessus est définie par l'homomorphisme d'algèbres $\eta : a_1 \otimes \ldots \otimes a_p \longmapsto a_1.a_2\ldots a_p$ de $\otimes_k^p A$ dans A . On a donc, si N est l'opérateur de symétrisation

$$\eta(N(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p)) = \eta(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} (a_{\sigma 1} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma p})) = p!a_1\ldots a_p = 0 .$$

Autrement dit, η s'annule sur le sous-espace $N(\otimes_k^p A)$ de $\Sigma^p A$ formé des tenseurs symétrisés. De plus, si f est un tenseur symétrique, on a évidemment $N(fa) = fN(a)$, ce qui montre que $N(\otimes_k^p A)$ est un idéal de $\Sigma^p A$.

Nous noterons désormais $U^{[p/S]}$ le spectre premier de l'algèbre $\Sigma^p A/N(\otimes_k^p A)$. Ce spectre est un sous-préschéma fermé de $\Sigma^p(U) = V^p(U)$ et la réunion des $U^{[p/S]}$ est un sous-préschéma fermé $X^{[p/S]}$ de $V^p(X)$. De plus, si $i(X)$ désigne l'inclusion de $X^{[p/S]}$ dans $V^p(X)$, nous venons de voir que $q' \circ \delta$ se factorise à travers $X^{[p/S]}$:

$$\begin{tikzcd}
X_S^p \arrow[d, "q\,(X)"'] & \supset & U^p(X) \arrow[d, "q'(X)"'] & & X \arrow[ll, "\delta\,(X)"'] \arrow[d, "\underline{F}'(X/S)"] \\
\Sigma^p(X) & \supset & V^p(X) & & X^{[p/S]} \arrow[ll, "i(X)"']
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $X^{[p/S]}$ est fonctoriel en X et que l'application $\underline{F}' : X \longmapsto \underline{F}'(X/S)$ est un homomorphisme fonctoriel.

4.2.1. Les préschémas $X^{[p/S]}$ et $X^{(p/S)}$ sont évidemment reliés : soient V un ouvert affine de S d'anneau affine k et U un ouvert affine de X

au-dessus de V ; soit A l'algèbre affine de U . Si π désigne l'endomorphisme $x \longmapsto x^p$ de k , $X^{(p/S)}$ a alors $k \underset{\pi}{\otimes} A$ pour algèbre affine. On vérifie en outre que l'application $\lambda \otimes a \longmapsto (\lambda a \otimes \ldots \otimes a \mod N(\otimes^p A))$ définit un homomorphisme de k-algèbres de $k \underset{\pi}{\otimes} A$ dans $\Sigma^p A / N(\otimes^p A)$; cet homomorphisme induit un morphisme $\varphi(U) : U^{[p/S]} \longrightarrow U^{(p/S)}$ tel que $\varphi(U) \circ F'(U/S) = F(U/S)$. "Recollant les morceaux", on obtient alors un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\underline{F}'(X/S)"'] \arrow[dr, "\underline{F}(X/S)"] & \\ X^{[p/S]} \arrow[rr, "\varphi(X)"] & & X^{(p/S)} \end{tikzcd}$$

Par exemple, si X est le sous-préschéma de S défini par un Idéal quasi-cohérent $\underline{I}$, $\underline{F}'(X/S)$ s'identifie au morphisme identique de X , de sorte que $\varphi(X)$ est l'immersion canonique de $\mathrm{Spec}(\underline{O}_S/\underline{I})$ dans $\mathrm{Spec}(\underline{O}_S/\underline{I}^{\{p\}})$. On voit ainsi que $\varphi(X)$ n'est pas un isomorphisme en général. Toutefois, lorsque M est un k-module libre, il est clair que l'application $\lambda \otimes m \longmapsto (\lambda m \otimes \ldots \otimes m \mod N(\otimes_k^p M))$ de $k \underset{\pi}{\otimes} M$ dans $\Sigma^p M / N(\otimes_k^p M)$ est bijective; cette application reste donc bijective lorsque M est k-plat, parce que tout module plat est une limite inductive filtrante de modules libres (LAZARD (*)). Il s'ensuit que $\varphi(X) : X^{[p/S]} \longrightarrow X^{(p/S)}$ <u>est un isomorphisme lorsque</u> X <u>est un</u> S-<u>préschéma plat</u>.

4.3. Considérons enfin un S-<u>préschéma en groupes abéliens</u> G : le morphisme composé $\mu(G) : U^p(G) \xrightarrow{\text{incl.}} G_S^p \longrightarrow G$, qui est défini par la multiplication, se factorise alors à travers $V^p(G)$, de sorte qu'on a le diagramme commutatif suivant :

(*) D. LAZARD GR. Acad. Sc. Paris <u>258</u>, 1964 p. 6313-6316.

$$\begin{tikzcd}
G & & U^p(G) \arrow[ll, "\mu(G)"'] \arrow[dl, "q'(G)"] & & G \arrow[ll, "\delta(G)"'] \arrow[dl, "\underline{F}'(G/S)"] \\
& V^p(G) \arrow[ul, "\nu(G)"] & & G[p/S] \arrow[ll, "i(G)"] \arrow[dl, "\varphi(G)"] & \\
& & G^{(p/S)} & &
\end{tikzcd}$$

Lorsque G est S-plat, $\varphi(G)$ est un isomorphisme et l'on peut définir un morphisme (dit Verschiebung)

$$\underline{V}(G/S) : G^{(p/S)} \longrightarrow G$$

à l'aide de la formule $\underline{V}(G/S) = \nu(G) \circ i(G) \circ \varphi(G)^{-1}$. Lorsque G parcourt les S-préschémas plats en groupes abéliens, l'application $\underline{V} : G \mapsto \underline{V}(G/S)$ est évidemment un homomorphisme fonctoriel; par conséquent, $\underline{V}(G/S)$ est un homomorphisme de groupes. Pour tout S-préschéma T enfin, l'application composée

$$G(T) \xrightarrow{\delta(G)(T)} U^p(G)(T) \xrightarrow{\mu(G)(T)} G(T)$$

applique $x \in G(T)$ sur $p.x$. Nous pouvons écrire $p.\mathrm{Id}_G$ au lieu de $\mu(G) \circ \delta(G)$, obtenant ainsi la formule classique

$$\underline{V}(G/S) \circ \underline{F}(G/S) = p.\mathrm{Id}_G \quad .$$

4.3.1. Par exemple, lorsque G est un S-préschéma constant en groupes abéliens, nous savons que $\underline{F}(G/S)$ s'identifie au morphisme identique de G (4.1.1). On a donc $\underline{V}(G/S) = p$.

Lorsque G est le S-groupe diagonalisable de type M , $\underline{F}(G/S)$ est égal à p d'après 4.1.2 ; on voit facilement que $\underline{V}(G/S)$ est le morphisme identique de G .

Lorsque E est un $\underline{O}_S$-Module plat et que G est le S-groupe $V(E)$, le morphisme $\underline{V}(G/S)$ est nul ainsi que $p.\mathrm{Id}_G$. On verra dans l'exposé VII_B qu'un groupe algébrique commutatif G sur un corps k est "unipotent" si et seulement si l'homomorphisme composé

$$G^{(p^n)} \xrightarrow{\underline{V}(G^{(p^{n-1})}/S)} G^{(p^{n-1})} \quad \ldots\ldots \quad G^{(p)} \xrightarrow{\underline{V}(G/S)} G$$

est nul pour un certain n (on a posé $G^{(p^n)} = (G^{(p^{n-1})})^{(p)}$).

4.3.2. Comme l'application $\underline{V} : G \longmapsto \underline{V}(G/S)$ est un homomorphisme fonctoriel lorsque G parcourt les S-<u>préschémas plats en groupes commutatifs</u>, le carré

$$\begin{array}{ccc} G^{(p)} & \xrightarrow{\underline{V}(G/S)} & G \\ {\scriptstyle \underline{F}(G/S)^{(p)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{F}(G/S)} \\ G^{(p^2)} & \xrightarrow{\underline{V}(G^{(p)}/S)} & G^{(p)} \end{array}$$

est commutatif ($\underline{F}(G/S)^{(p)}$ désigne l'image réciproque de $\underline{F}(G/S)$ pour le changement de base $\underline{f}(S)$). Comme il résulte directement des définitions que $\underline{F}(G/S)^{(p)}$ est égal à $\underline{F}(G^{(p)}/S)$, on a aussi

$$\underline{F}(G/S) \circ \underline{V}(G/S) = \underline{V}(G^{(p)}/S) \circ \underline{F}(G^{(p)}/S) = p.\mathrm{Id}_{G^{(p)}} .$$

4.3.3. Supposons enfin que G soit un S-<u>groupe fini commutatif localement libre</u>; soient A la $\underline{O}_S$-Algèbre affine de G et π l'endomorphisme du faisceau d'anneaux $\underline{O}_S$ qui envoie une section x de $\underline{O}_S$ sur x^p. On a alors un diagramme commutatif

$$
\text{(A)} \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\Delta^p(A)"] \arrow[dr, "a(A)"'] & & \otimes^p_{\underline{O}_S} A \arrow[rr, "m^p(A)"] \arrow[dr, "q(A)"] & & A \\
& \Sigma^p A \arrow[ur, "i(A)"] \arrow[dr, "r(A)"'] & & S^p A \arrow[ur, "b(A)"'] & \\
& & \underline{O}_S \otimes_{\pi} A \arrow[ur, "j(A)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

où les différentes lettres ont les significations suivantes : $m^p(A)$ est induit par la multiplication de A ; le morphisme $\Delta^p(A)$ est associé au morphisme $\mu(G)$ dont il est question plus haut (il est donc défini par le morphisme diagonal de la Coalgèbre A) ; on désigne par $\Sigma^p A$ la sous-Algèbre de $\otimes^p_{\underline{O}_S} A$ formée des sections invariantes sous l'action du groupe symétrique, par $i(A)$ l'inclusion de $\Sigma^p A$ dans le produit tensoriel ; de même, $S^p A$ est la composante de degré p de l'algèbre symétrique de A et $q(A)$ est la projection canonique. Comme $\Sigma^p A$ est l'algèbre affine de $V^p(A)$ avec les notations ci-dessus, le morphisme composé $i(G) \circ \varphi(G)^{-1}$ induit un homomorphisme d'Algèbres $r(A)$; cet homomorphisme s'annule sur les sections de la forme

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} a_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes a_{\sigma_p}$$

et envoie $x \otimes \dots \otimes x$ sur $1 \otimes x$. De même, $j(A)$ est le morphisme de $\underline{O}_S$-Modules $1 \otimes x \longmapsto q(x \otimes \dots \otimes x)$. Le composé $r(A) \circ a(A)$ est donc associé au morphisme Verschiebung $\underline{V}(G/S)$, tandis que $b(A) \circ j(A)$ est associé au morphisme de Frobenius $\underline{F}(G/S)$ ($a(A)$ et $b(A)$ sont tels que $i(A) \circ a(A) = \Delta^p(A)$ et $b(A) \circ q(A) = m^p(A)$) .

Le diagramme commutatif (A) ci-dessus est autodual ; soit en effet D le foncteur qui associe à tout $\underline{O}_S$-Module M le $\underline{O}_S$-Module dual $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(M, \underline{O}_S)$; il est clair que l'image de (A) par le foncteur D n'est autre que le diagramme (DA), les morphismes $Dr(A)$, $Da(A)$, $Dj(A)$ et $Db(A)$ s'identifiant respectivement à $j(DA)$, $b(DA)$, $r(DA)$ et $a(DA)$. On voit donc que <u>la dualité de Cartier</u> (3.3.1) <u>échange morphisme de Frobenius et Verschiebung</u>.

5. p-Algèbres de Lie.

Rappelons d'abord quelques résultats du Séminaire Sophus Lie :

5.1. Soient p un nombre premier, R un anneau commutatif de caractéristique p et A une R-algèbre associative, mais non nécessairement commutative. Si a et b sont deux éléments de A, nous posons $[a,b] = ab-ba$ et $ab = L_a(b) = R_b(a)$. On a alors :

$$(\mathrm{ad}\, x^p)(y) = [x^p, y] = (L_x^p - R_x^p)(y) = (L_x - R_x)^p(y) = (\mathrm{ad}\, x)^p(y)$$

d'où la première formule de Jacobson

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{ad}(x^p) = (\mathrm{ad}\, x)^p$$

De même, si $a_1, \dots, a_p$ sont p éléments arbitraires de A on a (confer 4.2)

$$(*) \quad N(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = \sum_{\sigma} a_{\sigma 1} \cdots a_{\sigma p} = \sum_{\tau} [a_{\tau 1}[a_{\tau 2}[\cdots [a_{\tau(p-1)}, a_p] \cdots]]]$$

où σ parcourt les permutations de p lettres et τ celles de $(p-1)$ lettres. Le deuxième membre vaut en effet

$$\sum (-1)^s \; a_{\tau i_1} \cdot a_{\tau i_2} \cdots a_{\tau i_r} \cdot a_p \cdot a_{\tau j_s} \cdots a_{\tau j_1}$$

où τ parcourt les permutations de $p-1$ lettres, $i_1, \dots, i_r$ les suites strictement croissantes d'entiers de l'intervalle $[1, p-1]$ et où $j_1, \dots, j_s$ désigne la suite strictement croissante dont les valeurs sont les entiers de $[1, p-1]$ différents de $i_1, \dots, i_r$. Pour une valeur fixée de r, la somme des termes $(-1)^s a_{\tau i_1} \cdots a_{\tau i_r} a_p a_{\tau j_s} \cdots a_{\tau j_1}$ vaut évidemment

$$(-1)^s \binom{p-1}{s} \sum a_{\rho 1} \cdots a_{\rho r}\, a_p\, a_{\rho(r+1)} \cdots a_{\rho(p-1)}$$

où ρ parcourt les permutations de $p-1$ lettres. Les égalités

$$(x-1)^p = x^p-1 = (x-1)(x^{p-1}+\ldots+1) \quad \text{et} \quad (x-1)^{p-1} = x^{p-1}+ \ldots + 1$$

montrent d'autre part que $(-1)^s\binom{p-1}{s}$ est égal à 1 en caractéristique p, ce qui prouve $(*)$.

En particulier, si x_o et x_1 sont deux éléments de A, on a

$$(x_o+x_1)^p = x_o^p+x_1^p + \sum x_{z(1)}\, x_{z(2)} \ldots x_{z(p)} \quad ,$$

où z parcourt les applications non constantes de $[1,p]$ dans $\{0,1\}$. On en tire $(x_o+x_1)^p = x_o^p + x_1^p + \sum_{0<r<p} \frac{1}{r!\,(p-r)!} N(x_o,x_o,\ldots,x_o,x_1,\ldots x_1)$,

d'où la <u>deuxième formule de Jacobson</u>

(ii) $$(x_o+x_1)^p = x_o^p + x_1^p - \sum_{0<r<p} \sum_t \frac{1}{r} \left[x_{t(1)} \left[x_{t(2)} \left[\cdots\left[x_{t(p-1)},x_1\right]\cdots\right]\right]\right]$$

où t parcourt les applications $[1,p-1] \longrightarrow \{0,1\}$ prenant r fois la valeur 0.

5.2. Soit maintenant $\underline{g}$ une R-algèbre de Lie. On dit qu'une application $x \longmapsto x^{(p)}$ de $\underline{g}$ dans $\underline{g}$ fait de $\underline{g}$ une <u>p-algèbre de Lie</u> sur R si les conditions suivantes sont vérifiées :

(0) $(\lambda x)^{(p)} = \lambda^p . x^{(p)} \quad , \quad \lambda \in R\,,\ x \in \underline{g}$

(i) $\mathrm{ad}\, x^{(p)} = (\mathrm{ad}\, x)^p \quad , \quad x \in \underline{g}$

(ii) $(x_o+x_1)^{(p)} = x_o^{(p)} + x_1^{(p)} - \sum_{0<r<p} \sum_t \frac{1}{r}\left[x_{t(1)} \left[x_{t(2)} \cdots \left[x_{t(p-1)},x_1\right]\cdots\right]\right]$

où t parcourt les applications $[1,p-1] \longrightarrow \{0,1\}$ prenant r fois la valeur 0 $(x_o, x_1 \in \underline{g})$.

Par exemple, si A est une R-algèbre, nous avons vu en 5.1 qu'on obtenait une p-algèbre de Lie $A_{\underline{g}}$ en prenant le R-module sous-jacent à A et en posant

$$[x\ ,\ y] = xy - yx \quad , \quad x^{(p)} = x^p \quad , \quad x,y \in A$$

Nous dirons que $A_{\underline{g}}$ est la p-algèbre de Lie sous-jacente à A .

Dans la suite nous considèrerons surtout des sous-p-algèbres de Lie de p-algèbres de la forme $A_{\underline{g}}$; en voici un exemple : soient S un préschéma de caractéristique $p > 0$ et X un S-préschéma. On rappelle qu'une dérivation de X sur S est un endomorphisme D du faisceau en groupes abéliens $\underline{O}_X$ tel que

$$D(\lambda . s) = \lambda . D(s) \qquad \text{et} \qquad D(s.t) = (Ds)t + s(Dt)$$

lorsque λ parcourt les sections de $\underline{O}_S$, s et t les sections de $\underline{O}_X$ sur des ouverts tels que les formules aient un sens. La formule de Leibniz

$$D^n(s.t) = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} (D^i s)(D^{n-i} t)$$

montre que D^p est encore une dérivation de X sur S compte tenu de l'égalité $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod p$ pour $i \neq 0,p$. Il s'ensuit que l'algèbre $\text{Dér}_{X/S}$ des dérivations de X sur S est une p-sous-algèbre de Lie de l'algèbre sur $\Gamma(S,\underline{O}_S)$ des opérateurs différentiels de X sur S .

5.2.1. Si $\underline{g}$ et $\underline{h}$ sont deux p-algèbres de Lie, un homomorphisme $h : \underline{g} \longrightarrow \underline{h}$ est une application R-linéaire de $\underline{g}$ dans $\underline{h}$ telle que $h([x,y]) = [h(x),h(y)]$ et $h(x^{(p)}) = h(x)^{(p)}$ si $x,y \in \underline{g}$. L'application composée de deux homomorphismes est encore un homomorphisme de sorte que nous pourrons parler de la catégorie des p-algèbres de Lie sur R . De même, si $(X,\underline{R})$ est un espace annelé, nous dirons qu'un $\underline{R}$-Module $\underline{g}$ est muni d'une structure de p-Algèbre de Lie sur $\underline{R}$ si, pour tout ouvert U, $\Gamma(U,\underline{g})$ est muni d'une structure de p-algèbre de Lie sur $\Gamma(U,\underline{R})$ et si les restrictions sont des homomorphismes.

5.3. Nous nous intéressons maintenant au foncteur adjoint à gauche du foncteur $A \longmapsto A_{\underline{g}}$ de 5.2 : soient $\underline{g}$ une p-algèbre de Lie sur l'anneau R de caractéristique p, $U(\underline{g})$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie sous-jacente à $\underline{g}$ (Bourbaki, Algèbre de Lie, § 2) et $i_{\underline{g}}$ ou $i : \underline{g} \longrightarrow U(\underline{g})$ l'application canonique. On sait que tout homomorphisme d'algèbres de Lie h de $\underline{g}$ dans l'algèbre de Lie sous-jacente à une R-algèbre unitaire A, se prolonge d'une manière et d'une seule en un homomorphisme de R-algèbres unitaires g de $U(\underline{g})$ dans A $(gi=h)$. En outre, h est un homomorphisme de p-algèbres de Lie si et seulement si g s'annule sur les éléments $i(x)^p - i(x^{(p)})$, lorsque x parcourt $\underline{g}$. Par conséquent, si $U_p^R(\underline{g})$ ou $U_p(\underline{g})$ désigne le quotient de $U(\underline{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $i(x)^p - i(x^{(p)})$, et si $j_{\underline{g}}$ ou $j : \underline{g} \longrightarrow U_p(\underline{g})$ est l'application composée de $i : \underline{g} \longrightarrow U(\underline{g})$ et de l'application canonique de $U(\underline{g})$ dans $U_p(\underline{g})$, on voit que tout homomorphisme de p-algèbres de Lie de $\underline{g}$ dans $A_{\underline{g}}$ se prolonge d'une manière et d'une seule en un homomorphisme d'algèbres unitaires $g : U_p(\underline{g}) \longrightarrow A$ $(gj = h)$.

On dit que $U_p(\underline{g})$ est l'algèbre enveloppante restreinte de $\underline{g}$.

5.3.1. Avec les notations de 5.3, posons maintenant $\underline{p}(x) = i(x)^p - i(x^{(p)})$. Pour tout élément y de $\underline{g}$, on a

$$\begin{aligned}\underline{p}(x)i(y) &= i(y)\underline{p}(x) + [\underline{p}(x),i(y)] = i(y)\underline{p}(x) + i((\mathrm{ad}\ x)^p y) - (\mathrm{ad}\ ix)^p(iy) \\ &= i(y)\underline{p}(x) \quad ,\end{aligned}$$

de sorte que $\underline{p}(x)$ appartient au centre de $U(\underline{g})$; en particulier, l'idéal à gauche engendré par les éléments $\underline{p}(x)$ est déjà bilatère. De plus, on a $\underline{p}(\lambda x) = \lambda^p \underline{p}(x)$ et $\underline{p}(x+y) = \underline{p}(x) + \underline{p}(y)$, si $\lambda \in R$ et $x,y \in \underline{g}$; en particulier, si (x_α) est une famille de générateurs du R-module $\underline{g}$, l'idéal à gauche engendré par les éléments $\underline{p}(x)$ est déjà engendré par les $\underline{p}(x_\alpha)$.

5.3.2. Lorsque $\underline{g}$ est une R-algèbre de Lie dont le R-module sous-jacent est libre de base (x_α), on peut définir comme suit une structure de p-algèbre de Lie sur $\underline{g}$: identifions $\underline{g}$ à un sous-module de $U(\underline{g})$ au moyen de i (Bourbaki, Alg. de Lie, I, § 2.7) et soit π l'application $r \mapsto r^p$ de R dans R. Si (y_α) est une famille quelconque d'éléments de $\underline{g}$ tels que $\mathrm{ad}\, y_\alpha = (\mathrm{ad}\, x_\alpha)^p$, il existe alors une application R-linéaire $\underline{q}$ de $R \otimes_\pi \underline{g}$ dans $U(\underline{g})$ qui envoie $1 \otimes x_\alpha$ sur $x_\alpha^p - y_\alpha$; de plus, comme on a

$$(\mathrm{ad}\, x_\alpha^p)(x) = (\mathrm{ad}\, x_\alpha)^p(x) = (\mathrm{ad}\, y_\alpha)(x)$$

pour tout $x \in \underline{g}$, $\underline{q}$ applique $\underline{g}^{(p)}$ dans le centre de $U(\underline{g})$.

Posant alors $x^{\{p\}} = x^p - \underline{q}(1 \otimes x)$ pour tout $x \in \underline{g}$, on vérifie sans peine que $x^{\{p\}}$ appartient à $\underline{g}$ et que l'application $x \mapsto x^{\{p\}}$ fait de $\underline{g}$ une p-algèbre de Lie. Autrement dit, <u>si (x_α) est une base du module sous-jacent à une algèbre de Lie $\underline{g}$ sur R, les structures de p-algèbre de Lie sur $\underline{g}$ correspondent biunivoquement aux familles (y_α) de $\underline{g}$ telles que</u> $\mathrm{ad}\, y_\alpha = (\mathrm{ad}\, x_\alpha)^p$.

5.3.3. <u>Proposition</u> : <u>Soit $\underline{g}$ une p-algèbre de Lie sur R dont le module sous-jacent est libre de base (x_α). Alors l'application $j : \underline{g} \to U_p(\underline{g})$ est injective et, si l'on pose $z_\alpha = j(x_\alpha)$, $U_p(\underline{g})$ a pour base les monômes</u> $\prod_\alpha z^{n_\alpha}$ ($0 \leq n_\alpha < p$; les n_α sont supposés nuls hormis un nombre fini d'entre eux ; on suppose la base totalement ordonnée et les produits effectués dans l'ordre croissant).

Soit en effet $n = (n_\alpha)$ une famille d'entiers naturels qui sont nuls hormis un nombre fini d'entre eux. Identifions $\underline{g}$ à un sous-module de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ au moyen de l'application canonique i ; posons $|n| = \sum_\alpha n_\alpha$, $x^n = \prod_\alpha x^{n_\alpha}$ et soit U^r le sous-module de $U(\mathfrak{g})$ qui est engendré par les x^n tels que $|n| \leqslant r$. Posons enfin $s = |n|$, $n_\alpha = m_\alpha + p\ell_\alpha$; avec $0 \leqslant m_\alpha < p$, et $Tn = \prod_\alpha x^{m_\alpha} \underline{p}(x_\alpha)^{\ell_\alpha}$ (confer 5.3.1). Il est clair que $Tn - \prod_\alpha x^{n_\alpha}$ appartient à U^{s-1}. D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, les Tn tels que $|n| = s$ forment donc une base de U^s modulo U^{s-1}. Lorsque $s = |n|$ varie, les Tn forment une base de $U(\mathfrak{g})$. Or le noyau J de l'application canonique de $U(\mathfrak{g})$ dans $U_p(\mathfrak{g})$ est l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ qui est engendré par les éléments centraux $\underline{p}(x_\alpha)$ (5.3.1); par conséquent, les Tn tels que $\ell = (\ell_\alpha) \neq 0$ forment une base de J ; les Tn, tels que $n_\alpha < p$ pour tout α, forment une base de $U(\mathfrak{g})$ modulo J, c.q.f.d.

5.3.3. bis Soient $\mathfrak{g}$ une p-algèbre de Lie sur R et $f : R \longrightarrow R'$ une extension de l'anneau de base. Je dis qu'il existe sur le R'-module $R' \otimes_R \mathfrak{g}$ une structure de p-algèbre de Lie et une seule telle que

$$[\lambda \otimes x, \mu \otimes y] = \lambda\mu \otimes [x,y] \qquad \text{et} \qquad (\lambda \otimes x)^{(p)} = \lambda^p \otimes x^{(p)}$$

Il en résultera en particulier, que le foncteur $\mathfrak{g} \longmapsto R' \otimes_R \mathfrak{g}$ est adjoint à gauche au foncteur "restriction des scalaires de R' à R".

L'unicité de la structure de p-algèbre de Lie de $R' \otimes_R \mathfrak{g}$ étant claire, prouvons l'existence : lorsque $\mathfrak{g}$ est libre de base (x_α) il existe d'après 5.3.1 une et une seule structure de p-algèbre de Lie sur l'algèbre de Lie $R' \otimes_R \mathfrak{g}$ telle que $(1 \otimes x_\alpha)^{(p)} = 1 \otimes (x_\alpha^{(p)})$; cette structure est celle que nous cherchons.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est une p-algèbre de Lie arbitraire, il existe une p-algèbre de Lie libre (en tant que R-module) L_o et un homomorphisme surjectif $q_o : L_o \longrightarrow \mathfrak{g}$; il suffit par exemple de prendre pour L_o la p-algèbre de Lie $R \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathfrak{g}$, où $\mathbb{F}_p$ désigne le corps premier de caractéristique

p , pour q_o l'homomorphisme $\lambda \otimes x \longmapsto \lambda . x$ ($\mathfrak{g}$ est libre sur $\mathbb{F}_p$!). Le noyau de q_o est alors un p-idéal de L_o , c'est-à-dire un idéal de l'algèbre de Lie L_o qui est stable pour l'endomorphisme $x \longmapsto x^{(p)}$; il y a donc également une p-algèbre de Lie libre (en tant que R-module) L_1 et un homomorphisme $q_1 : L_1 \longrightarrow L_o$ dont l'image est $\operatorname{Ker} q_o$:

$$L_1 \xrightarrow{q_1} L_o \xrightarrow{q_o} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

On en déduit une suite exacte de R'-algèbres de Lie

$$R'\otimes_R L_1 \xrightarrow{R'\otimes_R q_1} R'\otimes_R L_o \xrightarrow{R'\otimes_R q_o} R'\otimes_R \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

Comme $R'\otimes_R q_1$ est manifestement un homomorphisme de p-algèbres de Lie, le noyau de $R'\otimes_R q_o$ est un p-idéal, de sorte que l'opération puissance p-ième symbolique de $R'\otimes_R L_o$ induit par passage au quotient une application de $R'\otimes_R \mathfrak{g}$ dans $R'\otimes_R \mathfrak{g}$ (utiliser la formule (ii) de 5.2.) ; cette dernière munit $\mathfrak{g}$ de la structure de p-algèbre de Lie cherchée.

5.3.4. L'application canonique $j_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre enveloppante restreinte $U_p(\mathfrak{g})$ induit, pour toute extension $f : R \longrightarrow R'$ de l'anneau de base, un homomorphisme

$$R'\otimes_R j_{\mathfrak{g}} : R'\otimes_R \mathfrak{g} \longrightarrow R'\otimes_R U_p(\mathfrak{g}) \quad ,$$

d'où un homomorphisme h de $U_p(R'\otimes_R \mathfrak{g})$ dans $R'\otimes_R U_p(\mathfrak{g})$ tel que $h \circ j_{R'\otimes \mathfrak{g}} = R'\otimes_R j_{\mathfrak{g}}$. Il résulte évidemment des propriétés universelles de $R'\otimes \mathfrak{g}$ et de l'algèbre enveloppante restreinte que h est un isomorphisme, ce qui nous permettra d'identifier $U_p(R'\otimes_R \mathfrak{g})$ à $R'\otimes_R U_p(\mathfrak{g})$.

En particulier, si r est un élément de R et si R' est l'anneau localisé R_r , on voit que $\mathfrak{g}_r \simeq R_r \otimes_R \mathfrak{g}$ est muni canoniquement d'une structure de p-algèbre de Lie sur R_r , de sorte que le faisceau $\tilde{\underline{g}}$ sur Spec R est une p-Algèbre de Lie quasi-cohérente sur Spec R . De plus, l'algèbre enveloppante restreinte $U_p^{R_r}(\underline{g}_r)$ s'identifie à $U_p^R(\underline{g})_r$ de sorte que le faisceau associé au préfaisceau $V \longmapsto U_p(\Gamma(V,\underline{g}))$ est quasi-cohérent. Plus généralement, si S est un préschéma de caractéristique p et $\underline{G}$ une p-Algèbre de Lie quasi-cohérente sur $\underline{O}_S$, le faisceau associé au préfaisceau $V \longmapsto U_p(\Gamma(V,\underline{G}))$ est quasi-cohérent; il sera noté $\underline{U}_p(\underline{G})$ et appelé <u>l'Algèbre enveloppante restreinte de</u> $\underline{G}$. Si V est affine, $U_p(\Gamma(V,\underline{G}))$ s'identifie à l'ensemble des sections de $\underline{U}_p(\underline{G})$ sur V .

5.4. Le caractère universel de $U_p(\underline{g})$ entraîne que $U_p(\underline{g})$ est fonctoriel en $\underline{g}$: tout homomorphisme de p-algèbres de Lie $h : \underline{g} \to \underline{h}$ induit un homomorphisme d'algèbres unitaires $U_p(h)$ et un seul tel que $j_{\underline{h}} \circ h = U_p(h) \circ j_{\underline{g}}$. Voici quelques exemples :

a) Si $\underline{h} = 0$, $U_p(\underline{h})$ s'identifie à l'anneau de base et $U_p(h)$ est un homomorphisme d'algèbres $\varepsilon_{\underline{g}} : U_p(\underline{g}) \longrightarrow R$ appelé <u>augmentation</u>.

b) Prenons maintenant pour $\underline{h}$ l'algèbre $\underline{g}^\circ$ opposée à $\underline{g}$: $\underline{g}^\circ$ a même module sous-jacent que $\underline{g}$, même puissance p-ième symbolique, le crochet de deux éléments dans $\underline{g}^\circ$ étant l'opposé du crochet dans $\underline{g}$. Il est clair que nous pouvons identifier $U_p(\underline{g}^\circ)$ à l'algèbre opposée à $U_p(\underline{g})$. De plus, l'isomorphisme $x \longmapsto -x$ de $\underline{g}$ sur $\underline{g}^\circ$ induit un isomorphisme $c_{\underline{g}}$ de $U_p(\underline{g})$ sur $U_p(\underline{g}^\circ) \simeq U_p(\underline{g})^\circ$. On dit que $c_{\underline{g}}$ est l'<u>antipodisme</u> de $U_p(\underline{g})$.

c) Soient enfin $\underline{f}$ et $\underline{g}$ deux p-algèbres de Lie et $\underline{h}$ la <u>p-algèbre de Lie produit</u> $\underline{f} \times \underline{g}$ qui a pour R-module sous-jacent le produit direct $\underline{f} \times \underline{g}$, le crochet et la puissance symbolique étant définis par les formules

$$[(x,y),(x',y')] = ([x,x'],[y,y']) \quad \text{et} \quad (x,y)^{(p)} = (x^{(p)}, y^{(p)}) .$$

Si $h_1 : \underline{f} \longrightarrow \underline{k}$ et $h_2 : \underline{g} \longrightarrow \underline{k}$ sont deux homomorphismes de p-algèbres de Lie tels que $[h_1(x), h_2(y)] = 0$ pour tout x de $\underline{f}$ et tout y de $\underline{g}$, l'application $h_1+h_2 : (x,y) \longrightarrow h_1(x)+h_2(y)$ est un homomorphisme de p-algèbres de Lie ; réciproquement, tout homomorphisme de $\underline{f}\times\underline{g}$ dans $\underline{k}$ est de ce type, ce qui permet de caractériser $\underline{f}\times\underline{g}$ comme solution d'un problème universel. Par exemple, les applications $h_1 : x \longmapsto i_{\underline{f}}(x) \otimes 1$ et $h_2 : y \longmapsto 1 \otimes i_{\underline{g}}(y)$ induisent un homomorphisme h_1+h_2 de $\underline{f}\times\underline{g}$ dans la p-algèbre de Lie sous-jacente à $U_p(\underline{f}) \otimes U_p(\underline{g})$. Il résulte des caractères universels de $\underline{f}\times\underline{g}$ et des algèbres enveloppantes restreintes que h_1+h_2 se prolonge en un isomorphisme φ de $U_p(\underline{f}\times\underline{g})$ sur le produit tensoriel $U_p(\underline{f}) \otimes U_p(\underline{g})$.

Si $\underline{f} = \underline{g}$, l'application diagonale $\delta : x \longmapsto (x,x)$ de $\underline{g}$ dans $\underline{g}\times\underline{g}$ induit un homomorphisme de $U_p(\underline{g})$ dans $U_p(\underline{g}\times\underline{g})$. Nous noterons $\Delta_{\underline{g}}$ le composé de cet homomorphisme avec φ ; on voit facilement que $\Delta_{\underline{g}}$ et la multiplication de l'algèbre $U_p(\underline{g})$ font de $U_p(\underline{g})$ une R-coalgèbre en groupes (3.2) qui a $\varepsilon_{\underline{g}}$ pour augmentation et $c_{\underline{g}}$ pour antipodisme.

5.4.1. De même, soient S un préschéma de caractéristique p et $\underline{G}$ une $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie. Lorsque V parcourt les ouverts de S, les structures de coalgèbres en groupes définies précédemment sur les ensembles $U_p(\Gamma(V,\underline{G}))$ induisent sur l'Algèbre enveloppante restreinte $\underline{U}_p(\underline{G})$ une structure de $\underline{O}_S$-p-Coalgèbre en groupes. D'après 5.3.1 , le S-foncteur en groupes correspondant $\mathrm{Spec}^*\underline{U}_p(\underline{G})$ associe à tout S-préschéma T l'ensemble des sections x de $\underline{U}_p(\underline{G}\otimes_{\underline{O}_S}\underline{O}_T)$ telles que

$$\varepsilon(x) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta x = x \otimes x \;.$$

Ici ε désigne l'augmentation de $\underline{U}_p(\underline{G}\otimes_{\underline{O}_S}\underline{O}_T)$, Δ le morphisme diagonal et $x \otimes x$ l'image canonique de (x,x) dans $\Gamma(T, \underline{U}_p(\underline{G}_T)\otimes_{\underline{O}_T}\underline{U}_p(\underline{G}_T))$.

Lorsque $\underline{G}$ est localement libre de type fini en tant que $\underline{O}_S$-Module, $\mathrm{Spec}^*\underline{U}_p(\underline{G})$ est représentable par un S-préschéma fini, localement libre (5.3.3 et 3.1.2).

6. p-Algèbre de Lie d'un S-préschéma en groupes.

Soit S un préschéma de caractéristique $p > 0$. Au paragraphe 5 nous avons associé à toute $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie quasi-cohérente $\underline{G}$ un S-foncteur en groupes $\mathrm{Spec}\,\underline{U}_p^*(\underline{G})$. Nous allons voir maintenant que, pour tout S-préschéma en groupes G, l'Algèbre de Lie $\underline{\mathrm{Lie}}\,(G/S)$ définie en II 4.11 est munie naturellement d'une structure de $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie.

6.1. Identifions tout d'abord $\mathrm{Lie}(G/S)(S)$ et $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}\,G/S)(S)$ respectivement à des sous-algèbres de Lie de $U(G)$ et $\mathrm{Dif}_{G/S}$ au moyen des injections α et β de 2.5. L'Algèbre de Lie de $\underline{\mathrm{Aut}}\,G$ est donc identifiée à l'algèbre de Lie des S-dérivations de $\underline{O}_X$. D'après 5.2, cette dernière est une sous-p-algèbre de Lie de $\mathrm{Dif}_{G/S}$.

D'autre part, d'après II 4.1.4, l'image de $L = \mathrm{Lie}(G/S)(S)$ par la translation à droite $r : U(G) \longrightarrow \mathrm{Dif}_{G/S}$ est formée des dérivations invariantes à droite. Si x appartient à L, $r(x)^p$ n'est autre que $r(x^p)$ d'après 2.2. Comme $r(x)^p$ est encore une dérivation, on voit que x^p appartient à $\mathrm{Lie}(G/S)(S)$, qui <u>est donc une sous-p-algèbre de Lie de l'algèbre infinitésimale</u> $U(G)$.

6.1.1. Soit $h : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de S-préschémas en groupes. Il est clair que les homomorphismes $\mathrm{Lie}(h/S)(S)$ et $U(h)$ sont compatibles avec les identifications de $\mathrm{Lie}(G/S)(S)$ et $\mathrm{Lie}(H/S)(S)$ à des sous-p-algèbres de Lie de $U(G)$ et $U(H)$. Comme $U(h)$ est un homomorphisme d'algèbres, on voit donc que $\mathrm{Lie}(h/S)(S)$ est un homomorphisme de p-algèbres de Lie.

De même, si $s : T \longrightarrow S$ est un changement de base, l'application de $\mathrm{Lie}(G/S)(S)$ dans $\mathrm{Lie}(G/S)(T)$, qui est induite par s, est un homomorphisme de p-algèbres de Lie. On peut traduire cela en disant que le foncteur $\mathrm{Lie}(G/S)$ est muni d'une structure de $\underline{\underline{O}}_S$-p-algèbre de Lie. En particulier, lorsque T

parcourt les ouverts de S , on voit que le faisceau $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ est muni d'une structure de $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie.

6.2. Suivant une idée de Demazure, nous allons maintenant généraliser ce qui précède à certains S-foncteurs en groupes non nécessairement représentables. Pour cela, nous allons d'abord donner une autre définition de la puissance p-ième symbolique dans l'algèbre de Lie d'un S-préschéma en groupes G :

Soit D une dérivation de G à l'origine, c'est-à-dire la déviation de l'origine obtenue en composant la déviation canonique $\delta : S \longrightarrow I_S$ de 1.5 avec un prolongement x à I_S de la section unité $\varepsilon : S \longrightarrow G$. D'après la définition que nous avons donnée en 2.1 , D^p est la déviation composée suivante

$$S \simeq \underbrace{S \times S \times \dots \times S}_{p} \xrightarrow{\delta \times \dots \times \delta} I_S \times \dots \times I_S \xrightarrow{x \times \dots \times x} G \times \dots \times G \xrightarrow{m^{(p)}} G$$

où $m^{(p)}$ est le morphisme induit par la multiplication $m : G \times G \longrightarrow G$. Comme $I_S \times \dots \times I_S$ est affine sur S et a pour Algèbre affine $\underline{O}_S\,[d_1,\dots,d_p]\,/(d_1^2,\dots,d_p^2)$, la déviation $\delta \times \dots \times \delta$ est définie par un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules

$$\underline{O}_S[d_1,\dots,d_p]\,/(d_1^2,\dots,d_p^2) \longrightarrow \underline{O}_S$$

qui applique le monôme $d_1 d_2 \dots d_p$ sur 1 et les autres monômes $d_{i_1} \dots d_{i_r}$ sur 0 $(r < p)$. D'autre part, si pr_i désigne la projection de I_S^p sur le i-ième facteur et si x_i est l'image de x dans $G(I_S^p)$ par $G(pr_i)$, le morphisme composé $m^{(p)} \circ (x \times \dots \times x)$ n'est autre que le produit $x_1 x_2 \dots x_p$. Par conséquent, D^p est aussi la déviation composée suivante

$$S \xrightarrow{\delta \times \dots \times \delta} I_S \times \dots \times I_S \xrightarrow{x_1 x_2 \dots x_p} G \quad .$$

Cette description nous permet de redémontrer que D^p est une dérivation de G à l'origine : en effet, comme G est un très bon groupe (II 4.11), les images $G(pr_1)(x)$ et $G(pr_2)(x)$ de x dans $G(I_S \times I_S)$ commutent entre elles. Il s'ensuit que les éléments x_i de $G(I_S^p)$ commutent deux à deux, autrement dit que, pour toute permutation σ des facteurs de I_S^p, on a $(x_1 \ldots x_p) \circ \sigma = x_1 \ldots x_p$; il s'ensuit que $x_1 \ldots x_p$ se factorise à travers la projection canonique de I_S^p dans le produit symétrique $\Sigma^p I_S$ (4.2).

Le produit symétrique $\Sigma^p I_S$ a pour Algèbre affine une sous-Algèbre A de $\underline{O}_S[d_1, \ldots, d_p]/(d_1^2, \ldots, d_p^2)$ qui a pour base sur $\underline{O}_S$ les fonctions symétriques élémentaires $1 = \sigma_0$, σ_1, $\ldots$, σ_p de $d_1, \ldots, d_p$. Nous désignons par q l'homomorphisme de A dans $\underline{O}_S[d]/(d^2)$ qui annule $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ et envoie σ_p sur d, par i l'immersion fermée de I_S dans $\Sigma^p I_S$ qui est associée à q. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\delta \times \ldots \times \delta"] \arrow[d, "\delta"'] & I_S^p \arrow[r, "x_1 \ldots x_p"] \arrow[d, "can."] & G \\
I_S \arrow[r, "i"] & \Sigma^p I_S \arrow[r] & G \arrow[u, leftrightarrow, "Id\ G"']
\end{tikzcd}$$

qui montre que D^p est de la forme $y\delta$, c.q.f.d.

6.3. Soient $\mathfrak{S}_p$ le groupe symétrique d'ordre p et $I_S^p \times \mathfrak{S}_p$ la somme directe d'une famille d'exemplaires de I_S^p indexés par $\mathfrak{S}_p$. Nous notons $\pi : I_S^p \times \mathfrak{S}_p \longrightarrow I_S^p$ la projection canonique et $k : I_S^p \times \mathfrak{S}_p \longrightarrow I_S^p$ le morphisme définissant l'opération de $\mathfrak{S}_p$ sur I_S^p (si σ est un élément de $\mathfrak{S}_p$, la restriction de k à $I_S^p \times \sigma$ a $pr_{\sigma j}$ pour j-ième composante). Ceci étant, nous disons qu'<u>un foncteur</u> $X : (Sch/S)^\circ \longrightarrow (Ens)$ <u>vérifie la</u>

condition (F) si X transforme les sommes directes finies en produits directs et si, pour tout S-préschéma T, la suite

$$X(T \times_S \Sigma^p I_S) \longrightarrow X(T \times_S I_S^p) \overset{X(T\times_S \pi)}{\underset{X(T\times_S k)}{\rightrightarrows}} X(T \times_S I_S^p \times \gamma_p)$$

est exacte. Tout S-préschéma vérifie (F) ; si $\underline{F}$ est un $\underline{O}_S$-Module, $W(\underline{F})$ vérifie (F) ; toute limite projective de foncteurs vérifiant (F), vérifie aussi (F) ; si $\underline{Y}$ vérifie (F) et si X est un S-foncteur quelconque, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ vérifie (F).

Soit X un très bon groupe (II 4.10) vérifiant la condition (F). Désignant par $x : I_S \longrightarrow X$ un morphisme qui prolonge la section unité de X et reprenant les notations de 6.2, on voit comme ci-dessus que $x_1 \ldots x_p : I_S^p \longrightarrow X$ se factorise à travers $\Sigma^p I_S$

$$\begin{tikzcd} I_S^p \arrow[rr, "x_1\ldots x_p"] \arrow[dr, "\mathrm{can.}"'] & & X \\ & \Sigma^p I_S \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

et définit par composition un morphisme $x^{(p)}$

$$I_S \xrightarrow{\ i\ } \Sigma^p I_S \xrightarrow{\ \tau\ } X$$

que nous appellerons la puissance p-ième symbolique de x.

L'endomorphisme $x \longmapsto x^{(p)}$ de $\mathrm{Lie}(G/S)(S)$ est évidemment compatible avec les changements de base et est fonctoriel en G. Il serait intéressant de savoir pour quels G cet endomorphisme fait de $\mathrm{Lie}(G/S)(S)$ une p-algèbre de Lie.

6.4. La dernière définition de la puissance p-ième symbolique, que nous venons de donner, est particulièrement bien adaptée au calcul. Voici quelques exemples :

6.4.1. Soient M un groupe abélien "abstrait" et $D_S(M)$ le S-groupe diagonalisable de type M (I 4.4.2). Pour tout S-préschéma T, on a donc $D_S(M)(T) = \mathrm{Hom}_{(Ab)}(M, \underline{\underline{O}}(T)^*)$. Soit x un élément de $\mathrm{Lie}(D_S(M)/S)(S)$, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes abéliens

$$M \xrightarrow{\ x\ } \Gamma(S, \underline{O}_S + d\underline{O}_S)^*$$

de la forme $m \longmapsto 1 + d\xi(m)$, où $\xi \in \mathrm{Hom}_{(Ab)}(M, \underline{\underline{O}}(S))$. Avec les notations de 6.2 et 6.3, le produit $x_1 \ldots x_p$ associe à un élément m de M l'expression

$$(1 + d_1\xi(m)) \ldots\ldots\ldots\ldots (1 + d_p\xi(m))$$

c'est-à-dire $\quad 1 + \sigma_1\xi(m) + \sigma_2(\xi(m))^2 + \ldots + \sigma_p(\xi(m))^p$

Cette expression appartient bien à $\underline{\underline{O}}(\Sigma^p I_S)$. Projetant l'Algèbre affine A de $\Sigma^p I_S$ dans $\underline{O}_S[d]/(d^2)$ en annulant $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ et en envoyant σ_p sur d, on voit que $x^{(p)}$ est l'homomorphisme

$$m \longmapsto 1 + d(\xi(m))^p$$

de M dans $\Gamma(S, \underline{O}_S + d\underline{O}_S)$.

En résumé, si l'on identifie $\mathrm{Lie}(D_S(M)/S)(S)$ à $\mathrm{Hom}_{(Ab)}(M, \underline{\underline{O}}(S)^*)$ comme en 5.1, la puissance p-ième symbolique associe à ξ l'homomorphisme $\xi^{(p)} : m \longmapsto \xi(m)^p$.

6.4.2. Soient $\underline{F}$ un $\underline{O}_S$-Module et G le S-foncteur en groupes abéliens $W(\underline{F})$ (I 4.6). Soient y un élément de $W(\underline{F})(S) = \Gamma(S,\underline{F})$ et y' l'image canonique de y dans $W(\underline{F})(I_S)$. On sait que l'application $y \longmapsto dy'$ est une bijection de $W(\underline{F})(S)$ sur $\mathrm{Lie}(W(\underline{F})/S)(S)$. Si l'on pose $x = dy'$, la quantité x_i de 6.2 n'est autre que $d_i y''$, où y'' désigne l'image canonique de x dans $W(\underline{F})(I_S^p)$. Par conséquent le produit $x_1 \ldots x_p$ est égal à $(d_1+\ldots+d_p)y''$ et appartient à $W(\underline{F})(\sum^p I_S)$. Comme l'application de $\underline{\underline{O}}(\sum^p I_S)$ dans $\underline{\underline{O}}(I_S)$, qui définit le morphisme i de 6.1 , annule $d_1+\ldots+d_p$, on voit que $x^{(p)}$ est nul.

<u>Pour tout $\underline{O}_S$-Module $\underline{F}$, l'opération puissance p-ième symbolique dans l'algèbre de Lie de $W(\underline{F})$ est donc nulle</u>.

6.4.3. Soient X un S-préschéma, G le S-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}_S X$ et D une S-dérivation du faisceau structural $\underline{O}_X$. D'après 6.1 , D peut être identifié à un I_S-automorphisme x de X_{I_S} qu'on peut décrire comme suit : si s est une section de $\underline{O}_S[d]/(d^2)$ de la forme $a+db$, posons $D_{I_S} s = Da + d(Db)$; autrement dit, D_{I_S} est déduit de D par le changement de base $I_S \longrightarrow S$; l'automorphisme en question de X_{I_S} est alors associé à l'endomorphisme $s \longmapsto s+d(D_{I_S} s)$ de $\underline{O}_S[d]/(d^2)$.

De même, soit $D_{I_S^p}$ l'opérateur différentiel de $X_{I_S^p}$ déduit de D par le changement de base $I_S^p \longrightarrow S$. Avec les notations de 6.2 , l'automorphisme x_i de $X_{I_S^p}$ est alors associé à l'endomorphisme $s \longmapsto s + d_i(D_{I_S^p}(s))$ de $\underline{O}_S[d_1,\ldots,d_p]/(d_1^2,\ldots,d_p^2)$. Le produit $x_1 \ldots x_p$ est donc associé à l'endomorphisme

$$(1 + d_1 D_{I_S^p})(1 + d_2 D_{I_S^p}) \ldots\ldots (1 + d_p D_{I_S^p})$$

c'est-à-dire à $1 + \sigma_1 D_{I_S^p} + \sigma_2 (D_{I_S^p})^2 + \dots + \sigma_p (D_{I_S^p})^p$

Le coefficient de σ_p est $(D_{I_S^p})^p$, ce qui signifie que la bijection $D \mapsto x$ de l'algèbre de Lie des S-dérivations de $\underline{O}_X$ sur l'algèbre de Lie de $\underline{\mathrm{Aut}}_S X$ est un isomorphisme de p-algèbres de Lie.

6.4.4. En utilisant la même méthode, on voit que, pour tout $\underline{O}_S$-Module $\underline{F}$, la bijection décrite en II 4.5 est un isomorphisme de p-algèbres de Lie de $\mathrm{End}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}} W(\underline{F})$ sur $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}} W(\underline{F}) /S)(S)$.

De même, si $\underline{U}$ est une $\underline{O}_S$-Coalgèbre en groupes quasi-cohérente, et si G est le foncteur en groupes $\mathrm{Spec}^*\underline{U}$, on voit facilement que l'injection canonique de $\mathrm{Lie}(G/S)(S)$ dans $\Gamma(S,\underline{U})$, qui identifie $\mathrm{Lie}(G/S)(S)$ à l'ensemble des éléments primitifs de $\Gamma(S,\underline{U})$, est compatible avec la puissance p-ième.

7. Groupes radiciels de hauteur 1 .

Soit S un préschéma de caractéristique $p > 0$. Nous dirons qu'une $\underline{O}_S$-Algèbre A (resp. une $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie $\underline{L}$) est finie localement libre si le $\underline{O}_S$-Module sous-jacent à A (resp. $\underline{L}$) est localement libre et de type fini. Si $\underline{L}$ est une $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie finie localement libre, nous savons que le S-foncteur en groupes

$$\mathcal{G}_p(\underline{L}) = \mathrm{Spec}^* \underline{U}_p(\underline{L})$$

est représentable par un S-préschéma fini, localement libre (5.4.1). Nous allons voir que ce S-préschéma est solution d'un problème universel et nous allons caractériser les S-préschémas en groupes de la forme $\mathrm{Spec}^* \underline{U}_p(\underline{L})$.

7.1. Considérons d'abord une $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie quasi-cohérente $\underline{L}$. Lorsque V parcourt les ouverts de S , les applications $j : \Gamma(V,\underline{L}) \to U_p(\Gamma(V,\underline{L}))$ de 5.3 définissent un morphisme $\underline{j} : \underline{L} \longrightarrow \underline{U}_p(\underline{L})$. D'autre part, d'après 3.2.3 , la $\underline{O}_S$-Algèbre de Lie du S-foncteur en groupes $\mathcal{G}_p(\underline{L})$ est le noyau du morphisme

$$\Delta - \mathrm{in}_1 - \mathrm{in}_2 : \underline{U}_p(\underline{L}) \longrightarrow \underline{U}_p(\underline{L}) \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U}_p(\underline{L}) \quad ,$$

où Δ désigne le morphisme diagonal et où in_1 , in_2 sont les injections $x \longmapsto x \otimes 1$ et $x \longmapsto 1 \otimes x$. Il est clair que l'image de $\underline{j}$ est contenue dans le noyau $\underline{\mathrm{Lie}}\, \mathcal{G}_p(\underline{L})$ de $\Delta - \mathrm{in}_1 - \mathrm{in}_2$; c'est pourquoi nous noterons $\underline{j}_{\underline{L}} : \underline{L} \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}\, \mathcal{G}_p(\underline{L})$ le morphisme de $\underline{O}_S$-p-Algèbres de Lie qui est induit par $\underline{j}$ (6.4.4).

Considérons maintenant un très bon S-foncteur en groupes G vérifiant la condition (F) de 6.3 et soit $h : \mathcal{G}_p(\underline{L}) \longrightarrow G$ un homomorphisme de S-foncteurs en groupes. D'après 6.3 , le morphisme $\underline{\mathrm{Lie}}\, h : \underline{\mathrm{Lie}}\, \mathcal{G}_p(\underline{L}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}\, G$ est un homomorphisme de $\underline{O}_S$-Algèbres de Lie qui est compatible avec l'élévation à la puissance p-ième symbolique. Il en va donc de même pour le morphisme composé $(\underline{\mathrm{Lie}}\ h)\circ j_{\underline{L}}$. Si nous notons $\mathrm{Hom}_p(\underline{L},\underline{\mathrm{Lie}}\ G)$ l'ensemble des homomorphismes de $\underline{O}_S$-Algèbres de Lie, qui sont compatibles avec l'élévation à la puissance p-ième symbolique, on a donc une application $J(\underline{L},G) : h \longmapsto (\underline{\mathrm{Lie}}\ h)\circ j_{\underline{L}}$ de $\mathrm{Hom}_{S\text{-}Gr}(\mathcal{G}_p(\underline{L}),G)$ dans $\mathrm{Hom}_p(\underline{L},\ \underline{\mathrm{Lie}}\ G)$.

7.2. *Théorème : Si $\underline{L}$ est une $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie finie localement libre, l'application*

$$J(\underline{L},G) : \mathrm{Hom}_{S\text{-}Gr}(\mathcal{G}_p(\underline{L}),G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\underline{L}\ ,\ \underline{\mathrm{Lie}}\ G)$$

est bijective dans chacun des cas suivants :

(i) G *est un* S-*préschéma en groupes* ; (ii) G *est de la forme* $\underline{\mathrm{Aut}}_S\ X$, *où* X *est un* S-*préschéma* ; (iii) G *est de l'une des formes* $W(\underline{F})$ *ou* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}} W(\underline{F})$, *où* $\underline{F}$ *désigne un* $\underline{O}_S$-*Module quasi-cohérent.*

La démonstration du théorème s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME : *Si* $\underline{L}$ *est une* $\underline{O}_S$-*p-Algèbre finie localement libre, le* S-*groupe* $\mathcal{G}_p(\underline{L})$ *est annulé par le morphisme de Frobenius de* $\mathcal{G}_p(\underline{L})$ *relativement à* S .

Soient en effet $\underline{U}$ l'Algèbre enveloppante restreinte de $\underline{L}$ et posons $\underline{A} = \underline{U}^* = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(\underline{U},\underline{O}_S)$. Alors $\underline{A}$ est l'Algèbre affine de $\mathcal{G}_p(\underline{L})$. De plus, si $\underline{J}$ est l'Idéal d'augmentation de $\underline{U}$, c'est-à-dire l'Idéal engendré par l'image de $j_{\underline{L}} : \underline{L} \longrightarrow \underline{U}$, nous notons $\underline{I}$ l'orthogonal de $\underline{J}$ dans $\underline{A}$. On a donc $\underline{A}/\underline{I} \simeq \underline{O}_S$ et l'Idéal $\underline{I}$ définit la section unité de $\mathcal{G}_p(\underline{L})$.

Si π est l'endomorphisme $x \longmapsto x^p$ de $\underline{O}_S$, nous devons montrer que le morphisme $\Phi : a\otimes x \longmapsto ax^p$ de $\underline{O}_S \otimes_\pi \underline{A}$ dans $\underline{A}$ s'annule sur $\underline{O}_S \otimes_\pi \underline{I}$. Or Φ n'est autre que le composé suivant

$$\underline{O}_S \otimes_\pi \underline{A} \xrightarrow{\ j(\underline{A})\ } S^p\underline{A} \xrightarrow{\ b(\underline{A})\ } \underline{A} \quad ,$$

où $b(\underline{A})$ et $j(\underline{A})$ sont définis comme en 4.3.3. Comme le $\underline{O}_S$-Module dual de

$S^p\underline{A}$ n'est autre que le sous-Module $\sum {}^p\underline{U}$ de $\otimes\, {}^p\underline{U}$ formé des sections invariantes sous l'action du groupe symétrique d'ordre p , on voit que le transposé Φ^* de Φ est le morphisme composé suivant :

$$\underline{U} \xrightarrow{\ a(\underline{U})\ } \sum {}^p\underline{U} \xrightarrow{\ r(\underline{U})\ } \underline{O}_S \otimes_{\pi} \underline{U}$$

où $a(\underline{U})$ est induit par le morphisme $(\Delta \otimes \underline{U} \otimes \ldots \otimes \underline{U}) \ldots (\Delta \otimes \underline{U})\, \Delta$ de $\underline{U}$ dans $\otimes\, {}^p\underline{U}$ (Δ est le morphisme diagonal de $\underline{U}$) ; de même, $r(\underline{U})$ s'annule sur les tenseurs symétrisés et applique une section $x \otimes \ldots \otimes x$ sur $1 \otimes x$ (confer 4.3.3). Il reste maintenant à montrer que Φ^* annule l'idéal d'augmentation $\underline{J}$. Comme Φ^* est un homomorphisme d'Algèbres, il suffit de voir que Φ^* s'annule sur $\mathrm{Im}\, \underline{i}_{\underline{L}}$. Ceci résulte de la formule $\Delta s = s \otimes 1 + 1 \otimes s$, lorsque $s \in \mathrm{Im}\, \underline{i}_{\underline{L}}$.

7.2.1. Posons $G_p = \mathcal{G}_p(\underline{L})$. Nous allons d'abord prouver l'assertion (ii) du théorème 7.2 en conservant les notations ci-dessus. Comme tout élément de $\underline{I}$ a une puissance p-ième nulle et que $\underline{I}$ est un $\underline{O}_S$-Module de type fini, $\underline{I}$ est localement nilpotent. On a donc $(G_p)_{red} = S_{red}$. Or les homomorphismes h de G_p dans $\underline{\mathrm{Aut}}\, X$ correspondent biunivoquement aux opérations à gauche $h' : G_p \times X \longrightarrow X$ de G_p sur X . Pour une telle opération, si ε est la section unité de G_p , le morphisme composé

$$X \simeq S \times X \xrightarrow{\ \varepsilon \times X\ } G_p \times X \xrightarrow{\ h'\ } X$$

doit être l'identité. Comme $(G_p \times X)_{red}$ s'identifie à X_{red} , on voit que h' doit induire l'identité sur les préschémas réduits associés. En particulier, h' induit une opération de G_p sur tous les ouverts de X , de sorte qu'on se ramène facilement au cas où S et X sont affines, ou plus généralement au cas où X est affine au-dessus de S . Dans ce dernier cas, on applique le lemme suivant :

LEMME : Soient X un S-préschéma affine d'Algèbre $\underline{C}$ et G_p un S-préschéma en groupes fini localement libre d'Algèbre $\underline{A}$. Si nous posons $\underline{U} = \underline{A}^* = \underline{Hom}_{\underline{O}_S}(\underline{A}, \underline{O}_S)$, les opérations de G_p à gauche sur X correspondent biunivoquement aux représentations de l'Algèbre $\underline{U}$ dans le $\underline{O}_S$-Module $\underline{C}$ telles qu'on ait

$$u(1_{\underline{C}}) = \varepsilon(u) \cdot 1_{\underline{C}}$$

et

$$u(xy) = \sum_i \cdot v_i(x) w_i(y) \qquad \text{si } \Delta u = \sum_i v_i \otimes w_i$$

Dans ces formules, u désigne une section quelconque de $\underline{U}$ sur un ouvert affine V, x et y des sections de $\underline{C}$ sur V ; on désigne par $1_{\underline{C}}$ la section unité de $\underline{C}$, par ε et Δ l'augmentation et le morphisme diagonal de $\underline{U}$. Une opération h' de G à gauche sur X est définie par un homomorphisme d'Algèbres $\lambda : \underline{C} \longrightarrow \underline{A} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{C}$. Nous noterons μ le morphisme composé

$$\underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{C} \xrightarrow{\underline{U} \otimes \lambda} \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{C} \xrightarrow{\gamma \otimes \underline{C}} \underline{O}_S \otimes_{\underline{O}_S} \underline{C} \approx \underline{C}$$

où γ est la "contraction" de $\underline{A}^* \otimes_{\underline{O}_S} \underline{A}$ dans $\underline{O}_S$. On sait que l'application $\lambda \longmapsto (\gamma \otimes \underline{C})(\underline{U} \otimes \lambda)$ est une bijection de $\mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(\underline{C}, \underline{A} \otimes \underline{C})$ sur $\mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(\underline{U} \otimes \underline{C}, \underline{C})$. De plus, on voit facilement que λ est un homomorphisme d'Algèbres unitaires définissant une opération de G_p sur X si et seulement si μ satisfait aux conditions du lemme.

Il est d'ailleurs clair que, pour toute représentation de $\underline{U}$ dans le $\underline{O}_S$-Module $\underline{C}$, les sections u de $\underline{U}$ qui vérifient les conditions du lemme précédent forment une sous-Algèbre de $\underline{U}$. Dans le cas particulier qui nous intéresse, ces conditions sont donc satisfaites pour toutes les sections u, si elles sont vraies pour les sections u de $\mathrm{Im}\, \underline{i}_L$. Si u est une section de $\mathrm{Im}\, \underline{i}_L$, ces conditions signifient que $u(1_{\underline{C}}) = 0$ et que $u(xy) = u(x)y + xu(y)$. Tout homomorphisme h de $G_p = \mathcal{G}_p(\underline{L})$ dans $\underline{Aut}\ X$

définit donc un homomorphisme H de $\underline{U}$ dans $\mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(\underline{C},\underline{C})$ qui envoie $\mathrm{Im}\ \underline{i}_{\underline{L}}$ dans l'ensemble des $\underline{O}_S$-dérivations de $\underline{C}$. L'application $H \circ \underline{J}_{\underline{L}}$ est un homomorphisme de p-Algèbres de Lie de $\underline{L}$ dans le faisceau $\underline{\mathrm{Der}}_{X/S}$ des $\underline{O}_S$-dérivations de $\underline{C}$. De plus, l'application $h \longmapsto H \circ \underline{i}_{\underline{L}}$ est évidemment bijective; il resterait à vérifier qu'en identifiant $\underline{\mathrm{Der}}_{X/S}$ à $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}\ X/S)$ comme en 2.5, on identifie l'application $h \longmapsto H \circ \underline{i}_{\underline{L}}$ à celle du théorème 7.2.

7.2.2. Montrons maintenant comment l'assertion (i) du théorème 7.2. résulte de (ii) : si T est un S-préschéma et x un élément de $G(T)$, nous notons ℓ^T_x (resp. r^T_x) la translation à gauche (resp. à droite) de G_T qui est définie par x. Les applications $\ell^T : x \longmapsto \ell^T_x$ déterminent donc un homomorphisme ℓ de G dans $\underline{\mathrm{Aut}}\ G$. Soit d'autre part f un T-automorphisme de G_T ; on définit alors xf comme étant égal à $(r^T_x)^{-1} f\, r^T_x$; de cette façon G opère à gauche sur le S-foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}\ G$, donc aussi sur les foncteurs $T \longmapsto \mathrm{Hom}_{T\text{-}Gr}(\mathcal{G}_p(\underline{L}_T), \underline{\mathrm{Aut}}\ X_T)$ et $T \longmapsto \mathrm{Hom}_p(\underline{L}_T, \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}\ X_T/T))$. D'autre part, l'homomorphisme ℓ induit des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{T\text{-}Gr}(\mathcal{G}_p(\underline{L}_T), G_T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_p(\underline{L}_T, \underline{\mathrm{Lie}}(G_T/T)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{T\text{-}Gr}(\mathcal{G}_p(\underline{L}_T), \underline{\mathrm{Aut}}\ G_T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_p(\underline{L}_T, \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}\ G_T/T))
\end{array}$$

Les images des deux flèches verticales sont les sous-foncteurs formés des invariants sous l'action du S-groupe G. Comme la deuxième flèche horizontale est inversible d'après 7.2.1 et qu'elle est compatible avec l'action de G, la première flèche horizontale est aussi inversible.

7.2.3. Considérons enfin le cas de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}} W(\underline{F})$ (le cas de $W(\underline{F})$ est analogue). Posons $G_p = \mathcal{G}_p(\underline{L})$. Un homomorphisme de G_p dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}} W(\underline{F})$ est un homomorphisme multiplicatif de G_p dans $\underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}} W(\underline{F})$ qui est compatible avec les sections unités de G_p et de $\underline{\mathrm{End}}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}} W(\underline{F})$. Or un morphisme de S-foncteurs $h : G_p \longrightarrow \mathrm{End}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}} W(\underline{F})$ est par définition un endomorphisme de $W(\underline{O}_{G_p} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{F})$; d'après I 4.6.2 (ii), un tel endomorphisme est induit par un endomorphisme de $\underline{O}_{G_p} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{F}$, c'est-à-dire par un endomorphisme $\underline{A}$-linéaire du faisceau $\underline{A} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{F}$, où $\underline{A}$ est la $\underline{O}_S$-Algèbre affine de G_p . Un tel endomorphisme est de la forme $a \otimes x \longmapsto a\lambda(x)$, où λ est un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules de $\underline{F}$ dans $\underline{A} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{F}$. Si l'on pose $\mu = (\gamma \otimes \underline{F})(\underline{U} \otimes \lambda)$ comme en 7.2.1., h est finalement déterminé par $\mu : \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{F} \longrightarrow \underline{F}$. Les hypothèses faites sur h se traduisent en disant que μ définit une structure de $\underline{U}$-Module sur $\underline{F}$. Une telle structure de Module est définie par un homomorphisme de p-Algèbres de Lie de $\underline{L}$ dans $\mathrm{End}_{\underline{\underline{O}}_S\text{-mod}}(\underline{F})$ .....

7.3. <u>LEMME</u> : <u>Si $\underline{L}$ est une $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie finie localement libre, le morphisme $\underline{L} \longrightarrow \mathrm{Lie}\, \mathcal{G}_p(\underline{L})$ de 7.1 est inversible</u>.

Le problème est en effet local sur S . Nous pouvons donc supposer que S est affine d'anneau R et que $\underline{L}$ est le faisceau associé à une R-p-algèbre de Lie de base $x_1, \dots, x_r$. Nous pouvons alors utiliser les notations de 5.3. 3 et poser $z^n = \prod_i z^{n_i}$ pour tout r-uple $(n_1, \dots, n_r)$ formés d'entiers naturels tels que $0 \leq n_i < p$. Posant en outre $n! = \prod_i (n_i)!$ et munissant le monoïde $\mathbb{N}^r$ de l'ordre produit, on voit facilement qu'on a

$$\Delta \frac{z^n}{n!} = \sum \frac{z^m}{m!} \otimes \frac{z^{n-m}}{(n-m)!}$$

la somme étant étendue à tous les m de $\mathbb{N}^r$ tels que $0 \leq m \leq n$ (Δ est le morphisme diagonal de $\underline{U}$) . Comme les z^n forment une base de $\underline{U}_p(\underline{g})$, il est clair qu'on a $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ si et seulement si x est combinaison linéaire de $z_1, \ldots, z_r$, c.q.f.d.

7.4. Pour terminer l'exposé, nous allons donner une caractérisation des S-préschémas en groupes de la forme $\mathcal{G}_p(\underline{L})$, où $\underline{L}$ est une $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie finie localement libre.

Soient G un S-préschéma en groupes, ε_G la section unité et $\underline{I}$ le noyau du morphisme de $\varepsilon_G^{-1}(\underline{O}_G)$ dans $\underline{O}_S$ qui définit ε_G . L'image canonique de Lie(G/S)(S) dans U(G) (2.5) s'identifie d'après 1.3 aux morphismes de $\underline{O}_S$-Modules de $\varepsilon_G^{-1}(\underline{O}_G)$ dans $\underline{O}_S$ qui s'annulent sur la section unité de $\varepsilon_G^{-1}(\underline{O}_G)$ et sur $\underline{I}^2$. On retrouve ainsi l'isomorphisme canonique de Lie(G/S)(S) sur $\mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(\underline{I}/\underline{I}^2, \underline{O}_S)$ de l'exposé II . Nous poserons d'ailleurs $\omega_{G/S} = \underline{I}/\underline{I}^2$ comme dans l'exposé II, de sorte que le faisceau $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(\omega_{G/S}, \underline{O}_S)$.

THEOREME : Si G est un préschéma en groupes sur un préschéma S de caractéristique $p > 0$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une $\underline{O}_S$-p-Algèbre de Lie finie localement libre $\underline{L}$ telle que G soit isomorphe à $\mathcal{G}_p(\underline{L})$.

(ii) G est affine sur S ; $\omega_{G/S}$ est un $\underline{O}_S$-Module localement libre de type fini et l'Algèbre affine de G est localement isomorphe au quotient de l'Algèbre symétrique $\underline{S}_{\underline{O}_S}[\omega_{G/S}]$ par l'Idéal engendré par les puissances p-ièmes des sections de $\omega_{G/S}$.

(iii) G est localement de présentation finie sur S , de hauteur ≤ 1 (4.13) et $\omega_{G/S}$ est localement libre (*).

(*) La condition sur $\omega_{G/S}$ est en fait inutile, comme on voit aisément en se ramenant au cas où S est local de corps résiduel k, et en appliquant le théorème au cas du Groupe G_k .

7.4.1. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) étant claire, montrons d'abord que (i) entraîne (ii) : nous considérons pour cela la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \underline{L} \xrightarrow{i_L} \underline{J} \xrightarrow{\delta} \underline{J} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{J} \quad ,$$

où $\underline{J}$ est l'Idéal d'augmentation de $\underline{U} = \underline{U}_p(\underline{L})$ et où δ est le morphisme induit par $\Delta - in_1 - in_2$. Si q est la projection de $\underline{U}$ sur $\underline{J}$ qui s'annule sur la section unité de $\underline{U}$, δ peut aussi être caractérisé par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{U} & \xrightarrow{\Delta} & \underline{U} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{U} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q \otimes q} \\ \underline{J} & \xrightarrow{\delta} & \underline{J} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{J} \end{array}$$

De plus, la suite $(*)$ reste exacte après tout changement de base; par conséquent (Bourb., Alg. Com. II 3, prop. 6), la suite $(*)$ se scinde et donne par dualité une suite exacte

$$\underline{I} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{I} \xrightarrow{m} \underline{I} \longrightarrow \underline{Hom}_{\underline{O}_S}(\underline{L}, \underline{O}_S) \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\underline{I}$ désigne toujours l'Idéal d'augmentation de l'Algèbre affine $\underline{A}$ de $\mathcal{G}_p(\underline{L})$ et où m est induit par la multiplication de $\underline{A}$. Ceci montre que $\omega_{G/S}$ <u>est le dual de</u> $\underline{L}$, donc est fini localement libre.

Supposons maintenant S affine. Il y a alors une section $\sigma : \omega_{G/S} \longrightarrow \underline{I}$ de la projection canonique de $\underline{I}$ sur $\underline{I}/\underline{I}^2$; une telle section induit (lemme 7.2) un homomorphisme d'Algèbres $h : S_{\underline{O}_S}[\omega_{G/S}]/(x^p)_{x \in \omega_{G/S}} \longrightarrow \underline{A}$. Si l'on filtre $\underline{A}$ (resp. $\underline{S}_{\underline{O}_S}[\omega]/(x^p)_{x\in\omega}$) par les puissances de $\underline{I}$ (resp. de l'Idéal engendré par $\omega_{G/S}$), il est clair que h induit un épimorphisme des gradués associés. Donc h est un épimorphisme de $\underline{O}_S$-Modules localement libres de même rang; donc h est un isomorphisme.

7.4.2. Montrons enfin que (iii) entraîne (i) : comme le morphisme de Frobenius annule G , il est clair que la section unité de G induit un homéomorphisme de l'espace topologique sous-jacent à S sur l'espace sous-jacent à G . Nous pouvons donc identifier S au sous-préschéma fermé de G défini par un certain Idéal $\underline{I}$ de $\underline{O}_G$. Comme G est localement de présentation finie sur S et que toute section de $\underline{I}$ a une puissance p-ième nulle, $\underline{I}$ est localement nilpotent et G est affine sur S (EGA, I 5.1.9), donc fini sur S .

Soit donc $\underline{A}$ la $\underline{O}_S$-Algèbre affine de G ; posons $\underline{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ $\underline{A}_p = \underline{U}_p(\underline{L})^*$ et soit $G_p = \mathcal{G}_p(\underline{L})$ le spectre de $\underline{A}_p$. D'après le théorème 7.2 , l'identité de $\underline{L}$ est définie par un homomorphisme de groupes $h : \mathcal{G}_p(\underline{L}) \longrightarrow G$, donc par un homomorphisme de $\underline{O}_S$-Algèbres $a : \underline{A} \longrightarrow \underline{A}_p$. Il s'agit de montrer que a , qui induit par définition un isomorphisme de $\omega_{G/S}$ sur $\omega_{G_p/S}$, est un isomorphisme :

Pour cela, on peut se restreindre au cas où S est affine. Il y a alors une section τ de la projection canonique de $\underline{I}$ sur $\omega_{G/S}$. Comme toute section de $\underline{I}$ a une puissance p-ième nulle, τ induit un homomorphisme de $\underline{O}_S$-Algèbres

$$b : \underline{S}_{\underline{O}_S}[\omega_{G/S}]/(x^p)_{x \in \omega_{G/S}} \longrightarrow \underline{A}$$

Il est clair que b est un épimorphisme de $\underline{O}_S$-Modules (confer 7.4.1). D'autre part, nous avons vu en 7.4.1 que ab est un isomorphisme. Il en va donc de même pour a , c.q.f.d.

8. Cas d'un corps de base.

8.1. Résumons maintenant les résultats obtenus dans le cas où S est le spectre d'un corps k de caractéristique $p > 0$. Disons alors qu'un S-préschéma en groupes est algébrique si le préschéma sous-jacent est de type fini sur S : d'après le théorème 7.2 le foncteur $\mathcal{G}_p$, qui associe à toute k-p-algèbre de Lie $\underline{L}$ de dimension finie sur k le k-groupe $\mathcal{G}_p(\underline{L})$, est alors adjoint à gauche au foncteur qui associe à tout k-groupe algébrique sa p-algèbre de Lie sur k. D'après 7.3 et le théorème 7.4.1, le foncteur $\mathcal{G}_p : \underline{L} \longmapsto \mathcal{G}_p(\underline{L})$ induit une équivalence de la catégorie des k-p-algèbres de Lie de dimension finie, sur celle des k-groupes algébriques de hauteur ≤ 1. Comme $\mathcal{G}_p$ est un foncteur adjoint à gauche, il commute aux limites inductives; comme l'inclusion de la catégorie des k-groupes algébriques de hauteur ≤ 1 dans celle de tous les groupes algébriques commute manifestement aux limites projectives finies, on voit finalement que $\mathcal{G}_p$ est un foncteur exact : par exemple, si $i : \underline{L}_0 \longrightarrow \underline{L}_1$ et $q : \underline{L}_1 \longrightarrow \underline{L}_2$ sont des homomorphismes de k-p-algèbres de Lie et si la suite

$$0 \longrightarrow \underline{L}_0 \xrightarrow{\ i\ } \underline{L}_1 \xrightarrow{\ q\ } \underline{L}_2 \longrightarrow 0 ,$$

formée par les espaces vectoriels sous-jacents, est exacte, alors $\mathcal{G}_p(i)$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}_p(\underline{L}_0)$ sur le noyau de $\mathcal{G}_p(q)$; l'image de $\mathcal{G}_p(i)$ est donc un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}_p(\underline{L}_1)$ et $\mathcal{G}_p(q)$ induit un isomorphisme du quotient de $\mathcal{G}_p(\underline{L}_1)$ par ce sous-groupe distingué sur $\mathcal{G}_p(\underline{L}_2)$.

8.2. Proposition : Considérons une suite exacte de groupes algébriques sur un corps k de caractéristique $p > 0$

$$1 \longrightarrow G' \xrightarrow{\ v\ } G \xrightarrow{\ u\ } G'' \longrightarrow 1$$

et les assertions suivantes :

(i) Le morphisme u est lisse.

(ii) G' est lisse.

(iii) Pour tout entier $n > 0$, la suite

$$1 \longrightarrow {}_{F^n}G' \xrightarrow{{}_{F^n}v} {}_{F^n}G \xrightarrow{{}_{F^n}u} {}_{F^n}G'' \longrightarrow 1$$

<u>est exacte</u>.

(iv) <u>Le morphisme</u> ${}_{F}u : {}_{F}G \longrightarrow {}_{F}G''$ <u>est un épimorphisme</u>

(v) <u>Le morphisme</u> <u>Lie</u> u : <u>Lie</u> G $\longrightarrow$ <u>Lie</u> G" <u>est surjectif</u> (II 4.11).

<u>Alors on a les implications</u> (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (v) <u>et toutes les assertions sont équivalentes lorsque</u> G <u>est lisse sur</u> k .

En effet, (i) équivaut à (ii) d'après l'exposé VI : rappelons en effet que (i) entraîne (ii) d'après SGA II 1.3 ; d'autre part (ii) signifie que u est lisse à l'origine (SGA II 2.1 ; u est plat parce que épimorphique), donc partout.

De même, l'équivalence de (iv) et (v) résulte de l'équivalence définie en 8.1. entre la catégorie des k-groupes algébriques de hauteur ≤ 1 et celle des p-algèbres de Lie de dimension finie sur k.

L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) résulte du diagramme

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "F^n(G'/k)"'] & G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "F^n(G/k)"'] & G'' \arrow[r] \arrow[d, "F^n(G''/k)"'] & 1 \\
1 \arrow[r, dash] & G'^{(p^n)} \arrow[r, "v^{(p^n)}"'] & G^{(p^n)} \arrow[r, "u^{(p^n)}"'] & G''^{(p^n)} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

dont les deux lignes sont exactes : comme $F^n(G'/k)$ est un épimorphisme d'après le corollaire 8.3.1 ci-dessous, u induit un épimorphisme de ${}_{F^n}G$ sur ${}_{F^n}G''$ (généraliser le lemme du serpent aux faisceaux en groupes non nécessairement commutatifs).

Enfin, lorsque G est lisse sur k, F(G/k) est un épimorphisme. Si, de plus, ${}_{F}u$ est un épimorphisme, le même lemme du serpent appliqué au diagramme ci-dessus pour n = 1 montre que F(G'/k) est un épimorphisme, donc que G' est lisse sur k (8.3.1 ci-dessous).

8.3. <u>Proposition</u> : <u>Si</u> G <u>est un groupe algébrique sur un corps</u> k <u>de caractéristique</u> p > 0 , <u>il existe un entier</u> n_0 <u>tel que</u> $G/{}_{F^n}G$ <u>soit lisse sur</u> k <u>pour</u> $n \geq n_0$.

Comme la construction de $G/_{F^n}G$ commute à l'extension du corps de base (4.1.1 et VI_A, 4.7), nous pouvons supposer k parfait (SGA II 5.5). Dans ce cas, G_{red} est un sous-groupe algébrique de G (VI_A 0.2) et l'on a le diagramme commutatif et exact

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & G_{red} \arrow[r] \arrow[d, "F^n(G_{red}/k)"] & G \arrow[r] \arrow[d, "F^n(G/k)"] & H \arrow[d, "F^n(H/k)"] \\ 1 \arrow[r] & G_{red}^{(p^n)} \arrow[r] & G^{(p^n)} \arrow[r] & H^{(p^n)} \end{tikzcd} ,$$

où l'on a posé $H = G_{red} \backslash G$. Or H est le spectre d'une k-algèbre finie, locale, de corps résiduel k (VI_B). Par conséquent, il existe un entier n_o tel que $F^n(H/k)$ se factorise à travers l'unique section de Spec k dans $H^{(p^n)}$, lorsque $n \geqslant n_o$. Il s'ensuit que, pour $n \geqslant n_o$, $F^n(G/k)$ se factorise à travers $G_{red}^{(p^n)}$; l'homomorphisme $h : G/_{F^n}G \longrightarrow G_{red}^{(p^n)}$, qui est défini par cette factorisation, est un monomorphisme (VI_A 5.4) et induit un homéomorphisme des espaces topologiques sousjacents; c'est donc un isomorphisme (VI_B, $G_{red}^{(p^n)}$ est réduit). Comme $G_{red}^{(p^n)}$ est lisse sur k (VI_A, 1.3.1), $G/_{F^n}G$ est lisse sur k , lorsque $n \geqslant n_o$.

8.3.1. <u>COROLLAIRE</u> : <u>Soit</u> n <u>un entier</u> ≥ 1. <u>Alors</u> G <u>est lisse sur</u> k <u>si et seulement si</u> $F^n(G/k)$ <u>est un épimorphisme</u>.

Si G est lisse sur k, G est réduit et $F^n(G/k)$ est surjectif, donc est un épimorphisme. Réciproquement, comme $F^n(G/k)^{(p^n)}$ coïncide avec $F^n(G^{(p^n)}/k)$ (confer 4.1.3) $F^{nm}(G/k)$ est un épimorphisme pour tout m si $F^n(G/k)$ en est un. On a alors $G/_{F^{nm}}G \simeq G^{(p^{nm})}$. Comme $G/_{F^{nm}}G$ est lisse sur k pour m grand, $G^{(p^{nm})}$ et G le sont également.

8.4. Dans les deux énoncés qui terminent cet exposé, nous revenons au cas d'un corps k de caractéristique quelconque.

Lorsque k est de caractéristique 0 (resp. $p > 0$) , soit n un entier $\geqslant 1$ (resp. un entier $\geqslant 1$ et premier à p) : dans les deux cas, nous disons simplement que n est premier à la caractéristique ...

De plus, si G est un préschéma en groupes sur k, nous notons $n_G : G \longrightarrow G$ le morphisme de k-préschémas qui applique un élément x de $G(T)$ sur $x^n \in G(T)$, lorsque T est un k-préschéma.

<u>Proposition</u> : <u>Soient</u> G <u>un groupe algébrique sur un corps</u> k <u>et</u> n <u>un entier premier à la caractéristique de</u> k. <u>Alors</u> $n_G : G \longrightarrow G$ <u>est un morphisme étale à l'origine</u>.

Soient en effet A l'anneau local de G à l'origine et I l'idéal maximal de A. D'après II 3.9, l'application $\mathrm{Lie}\, n_G : \mathrm{Lie}\, G \longrightarrow \mathrm{Lie}\, G$, qui est induite par n_G, est l'homothétie de rapport n. C'est donc un isomorphisme ainsi que l'endomorphisme induit par n_G sur I/I^2. Si k est de caractéristique 0, G est lisse sur k (VI_B; voir aussi VII_B § 3); donc A est régulier et n induit un automorphisme du gradué associé à A, donc aussi un automorphisme du complété $\widehat{A}$ de A.

Si la caractéristique est $p > 0$ et si G est de hauteur $\leqslant 1$ A est isomorphe au quotient de l'algèbre symétrique de $\omega_{G/k} = I/I^2$ par l'idéal engendré par les puissances p-ièmes des éléments de $\omega_{G/k}$ (7.4) ; on peut appliquer alors le "même" raisonnement qu'en caractéristique 0.

Si G est de hauteur $\leqslant r$ et si nous supposons notre assertion démontrée pour les groupes de hauteur $\leqslant r-1$, soient B, A et C les algèbres affines de ${}_FG$, G et $G_F = {}_FG\backslash G$. Appelons n_B, n_A et n_C les morphismes de B, A et C qui sont induits par $n_{{}_FG}$, n_G et n_{G_F}. Comme n_C est un isomorphisme d'après l'hypothèse de récurrence et que A est plat sur C (VI_A 3.2), n_A est une bijection si et seulement si $n_A \otimes_C (C/\underline{r})$ en est une ($\underline{r}$ désigne le radical de C); or $n_A \otimes_C (C/\underline{r})$ n'est autre que n_B !

Enfin, lorsque G est un groupe algébrique quelconque sur un corps de caractéristique $p > 0$, ce qui précède montre que n_G induit des automorphismes des k-schémas ${}_{F^r}G$; ces schémas sont affines sur k et ont pour algèbres les quotients de l'algèbre locale A par l'idéal $I^{\{p^r\}}$ engendré par les puissances p^r-ièmes des éléments de I . Comme n_G définit des automorphismes des algèbres $A/I\{p^r\}$, on voit par passage à la limite projective, que n induit un automorphisme de $\hat{A}$.

r

8.5. <u>Proposition</u> : <u>Soit</u> G <u>un groupe algébrique fini , de rang</u> n <u>sur le corps</u> k . <u>Alors</u> $n_G : G \longrightarrow G$ <u>est le morphisme nul de</u> G (confer 8.4).

Soit F un sous-groupe distingué de G de rang m sur k . Avec les notations de VI_A,3.2 , le carré

$$\begin{tikzcd} F\times G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "pr_2"'] & G \arrow[d, "can."] \\ G \arrow[r, "can."] & F\backslash G \end{tikzcd}$$

est cartésien. Comme $G \longrightarrow F\backslash G$ est fidèlement plat, quasi-compact (VI_A 3.2), et que pr_2 est localement libre de rang m , il résulte de EGA IV 2.5.2 , que $G \longrightarrow F\backslash G$ est localement libre de rang m . On a donc $rg_k(F\backslash G)\times rg_k F = rg_k G$.

D'un autre côté, on a une suite exacte de groupes "abstraits"

$$1 \longrightarrow F(T) \longrightarrow G(T) \longrightarrow (F\backslash G)(T)$$

quel que soit le k-préschéma T ; il est donc clair que n_G est nul si m_F et $(nm^{-1})_{F\backslash G}$ le sont. Si F est la composante connexe de l'origine de G , $F\backslash G$ est étale (VI_B), de sorte qu'on peut supposer G étale sur k ou connexe.

Si G est étale, on se ramène, par extension du corps de base, au cas où k est algébriquement clos. Dans ce cas, G est un groupe constant (I 4.1), et l'énoncé est classique.

Si G est connexe et non nul, la caractéristique p de k est nécessairement > 0 (VI_B; VII_B § 3); les sous-groupes ${}_{F^n}G$ forment alors une suite de composition de G, dont les quotients sont de hauteur $\leqslant 1$.

Ceci nous ramène au cas où G est de hauteur $\leqslant 1$: soient alors A l'algèbre affine de G et L son algèbre de Lie; si $[L:k] = r$, le rang de G sur k est p^r (VII_A 5.3.3) ; nous allons donc étudier le morphisme $p_G : G \longrightarrow G$ défini par l'élévation à la puissance $p^{\text{ième}}$.

Ce morphisme p_G définit des endomorphismes p_A et p_U de A et de l'algèbre enveloppante restreinte $U = U_p(L)$ de L. L'application p_U se décompose comme suit

$$U \xrightarrow{\Delta_U^p} \otimes_k^p U \xrightarrow{m_U^p} U$$

où Δ_U^p désigne l'homomorphisme d'algèbres qui applique $x \in L \subset U$ sur $x \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes x$, tandis que m_U^p est l'application linéaire qui envoie $u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_p$ sur le produit $u_1 u_2 \ldots u_p$. Si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont r éléments de $L \subset U$, on a donc

$$p_U(x_1 x_2 \ldots x_r) = m_U^p\Big(\prod_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{p} 1 \otimes \ldots \otimes \overset{\overset{i}{\downarrow}}{x_j} \otimes \ldots \otimes 1\Big)$$

Il est clair que l'expression $\prod_j \sum_i 1 \otimes \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \otimes 1$ est une somme de p^r termes x_h indexés par les applications h de $\{1,2,\ldots,r\}$ dans $\{1,2,\ldots,p\}$. Une telle application définit un préordre sur $\{1,2,\ldots,r\}$ tel qu'on ait $i \leqslant j$ si et seulement si $h(i) \leqslant h(j)$; de plus, on a $m_U^p(x_h) = m_U^p(x_\ell)$ si h et ℓ définissent le même préordre, de sorte que nous pouvons écrire $m_U^p(x_h) = x_{\underline{o}}$, où $\underline{o}$ est le préordre défini par h. On a par conséquent

$$p_U(x_1 x_2 \ldots x_r) = \sum_{\underline{o}} \binom{p}{s(\underline{o})} \cdot x_{\underline{o}} \quad ,$$

où $\underline{o}$ parcourt les relations de préordre sur $\{1,\ldots,r\}$ telles que l'ensemble ordonné associé ait au plus p élements, et où $s(\underline{o})$ est le cardinal de l'ensemble ordonné associé à $\underline{o}$.

Lorsque $r < p$, tous les termes $\left(\begin{smallmatrix} p \\ s(\underline{o}) \end{smallmatrix}\right)$, sont nuls, de sorte que $p_U(x_1 \dots x_r) = 0$. Autrement dit, p_U s'annule sur le sous-espace vectoriel U^+_{p-1} de U , qui est engendré par les produits $x_1 \dots x_r$, $r < p$, $x_i \in L$. Or, il résulte facilement de 7.3 que l'isomorphisme canonique du dual U^* sur A , qui est décrit en 7.4 , identifie l'orthogonal de U^+_{p-1} à I^p_A (I_A= idéal d'augmentation de A; confer aussi VII_B 1.3.6 et 4.3). L'isomorphisme de U^* sur A , permet aussi d'identifier p_A à l'application transposée de p_U , de sorte que l'application composée

$$I_A \xrightarrow{p_A} I_A \xrightarrow{\text{can.}} I_A/I^p_A$$

est nulle. Donc p_A applique I_A dans I^p_A et $(p_A)^r$ applique I_A dans I^{pr}_A . Comme $I^{r(p-1)+1}_A$ est nul d'après le théorème 7.4 , l'égalité $p^r > r(p-1)$ montre que p^r_A annule I_A , c.q.f.d.

E x p o s é VII $_B$

ETUDE INFINITESIMALE DES SCHEMAS EN GROUPES

par P. Gabriel

B) Groupes formels

L'étude des groupes formels est habituellement d'une simplicité extrême. Si cela n'apparaît pas clairement dans les pages qui suivent, la responsabilité en incombe à un arithméticien, qui prétend connaître des groupes formels sur "autre chose que des corps". Nous avons donc déroulé pour les groupes formels "localement libres sur des limites projectives d'anneaux artiniens" les généralités qu'on énonce d'habitude pour les groupes formels définis sur un corps. Pour une étude plus détaillée de ces derniers, nous renvoyons au séminaire de géométrie algébrique 1964/65 de Heidelberg-Strasbourg.

0. Rappels sur les anneaux et modules pseudocompacts.

Ce paragraphe contient quelques préliminaires techniques; nous y rappelons et complétons quelques résultats de C.A. (Des catégories abéliennes, Bul. Soc. math. de France, 90, 1962).

0.1. Un anneau pseudocompact à gauche est un anneau avec élément unité, topologique, séparé, complet et qui possède une base de voisinages de 0 formée d'idéaux à gauche $\underline{\ell}$ de colongueur finie (i.e. $\mathrm{long}_A(A/\underline{\ell}) < +\infty$). Nous allons supposer ici que A est commutatif, de sorte qu'il n'y a pas à distinguer "entre la gauche et la droite". En particulier, les quotients $A/\underline{\ell}$ sont munis de structures d'anneau artinien et A s'identifie à la limite projective topologique de ces anneaux qu'on munit de la topologie discrète.

Un anneau local noethérien complet est évidemment pseudocompact.

0.1.1. Un idéal fermé de A est l'intersection des idéaux ouverts qui le contiennent. Un idéal fermé maximal est donc ouvert. De plus, si $\underline{\ell}$ est un idéal ouvert de A , les idéaux maximaux de $A/\underline{\ell}$ correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux fermés $\underline{m}$ qui contiennent $\underline{\ell}$. Le localisé $(A/\underline{\ell})_{\underline{m}}$ de $A/\underline{\ell}$ par rapport à un idéal maximal fermé $\underline{m}$ est donc un anneau local si $\underline{m}$ contient $\underline{\ell}$ et est nul sinon. Comme l'anneau $A/\underline{\ell}$ est artinien, il est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux, ce qu'on peut écrire

$$A/\underline{\ell} \simeq \prod_{\underline{m} \in \Omega(A)} (A/\underline{\ell})_{\underline{m}}$$

en désignant par $\Omega(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux fermés de A . On tire de là des isomorphismes "canoniques"

$$A \simeq \varprojlim_{\underline{\ell}} A/\underline{\ell} \simeq \varprojlim_{\underline{\ell}} \prod_{\underline{m}} (A/\underline{\ell})_{\underline{m}} \simeq \prod_{\underline{m}} \varprojlim_{\underline{\ell}} (A/\underline{\ell})_{\underline{m}} \simeq \prod_{\underline{m}} A_{\underline{m}} \quad ,$$

où l'on a posé $A_{\underline{m}} = \varprojlim_{\underline{\ell}} (A/\underline{\ell})_{\underline{m}}$. Cette <u>composante locale</u> $A_{\underline{m}}$ est une limite projective filtrante d'anneaux locaux; c'est donc un anneau local qui est pseudocompact pour la topologie de la limite projective (les anneaux

$(A/\underline{\ell})_{\underline{m}}$ sont artiniens et munis de la topologie discrète).

0.1.2. Soit $\underline{r}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux fermés de A, c'est-à-dire le produit cartésien des idéaux $\underline{m}A_{\underline{m}}$ lorsqu'on identifie A à $\prod_{\underline{m}} A_{\underline{m}}$. Pour tout idéal ouvert $\underline{\ell}$ de A, l'image de $\underline{r}(A)$ dans $A/\underline{\ell}$ est contenue dans le radical de $A/\underline{\ell}$. Une certaine puissance de cette image est donc nulle, de sorte que $\underline{r}(A)^n$ est contenu dans $\underline{\ell}$ lorsque n est assez grand. La suite des $\underline{r}(A)^n$ tend donc vers 0 ; il en va de même de la suite des x^n, lorsque x appartient à $\underline{r}(A)$. Autrement dit, tout élément de $\underline{r}(A)$ est topologiquement nilpotent et la réciproque est claire. Il s'ensuit que la suite de terme général $1 + x + \ldots + x^n$ est convergente et converge vers $1/(1-x)$ lorsque $x \in \underline{r}(A)$. Cela montre que $\underline{r}(A)$ est le radical de Jacobson de A (Bourb., Alg., chap. 8, § 6, théo. 1).

0.1.3. Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un homomorphisme de A dans B est, par définition, une application continue compatible avec l'addition, la multiplication et les éléments unité. Un tel homomorphisme envoie un élément topologiquement nilpotent de A sur un élément topologiquement nilpotent de B ; il applique donc le radical de A dans le radical de B.

0.2. Soit A un anneau pseudocompact (commutatif). Un A-<u>module pseudocompact</u> M est un A-module topologique, séparé, complet, unitaire qui possède une base de voisinages de 0 formée de sous-modules M' tels que M/M' soit de longueur finie sur A. Si M et N sont deux A-modules pseudocompacts, un morphisme de M dans N est par définition une application

A-linéaire continue. Les A-modules pseudocompacts forment une catégorie abélienne qui a pour cogénérateurs les A-modules pseudocompacts de longueur finie (dont la topologie est donc discrète). Si (M_i) est un système projectif de modules pseudocompacts, la limite projective des M_i a pour module sous-jacent la limite projective des modules sous-jacents, pour topologie celle de la limite projective. De plus, le foncteur limite projective est exact lorsque les indices forment un ensemble ordonné filtrant (Axiome AB5*). De même, si f est un morphisme de A-modules pseudocompacts, Coker f a pour module sous-jacent le conoyau des modules sous-jacents et la topologie de Coker f est le quotient de celle du but de f . (confer C.A., IV, § 3).

0.2.1. Chaque composante locale $A_{\underline{m}}$ de A est un facteur direct de A , donc un objet projectif de la catégorie des A-modules pseudocompacts (A est manifestement projectif). Il résulte de C.A. (IV, § 3, cor. 1 au théo. 3) que tout A-module pseudocompact projectif est un produit direct (topologique) de tels $A_{\underline{m}}$.

Un A-module pseudocompact M est dit <u>topologiquement libre</u> s'il est isomorphe au produit d'une famille (A_i) d'exemplaires de A . Une famille (m_i) d'éléments de M est appelée une <u>pseudobase</u> de M si les applications A-linéaires de A_i dans M qui envoient l'élément unité de A sur m_i se prolongent en un isomorphisme de $\prod_i A_i$ sur M .

0.2.2. Si M est un A-module pseudocompact, M^* désigne le A-module $\mathrm{Hom}_c(M,A)$ formé des applications A-linéaires continues de M dans A .

Lorsque l'anneau A est artinien, le foncteur $P \longmapsto P^*$ est une antiéquivalence de la catégorie des A-modules pseudocompacts projectifs sur celle des A-modules projectifs. En particulier, lorsque A est un corps, $P \longmapsto P^*$ est une antiéquivalence de la catégorie de tous les A-modules pseudocompacts (on parle aussi d'espaces vectoriels linéairement compacts sur A) sur celle des A-espaces vectoriels.

0.3. Soient M et N deux A-modules pseudocompacts et $\mathrm{Hom}_c(M,N)$ le groupe des morphismes de M dans N. Notons en outre h_c^M le foncteur qui associe à tout A-module pseudocompact de longueur finie N le groupe abélien $\mathrm{Hom}_c(M,N)$. On sait alors que le foncteur $M \longmapsto h_c^M$ est une antiéquivalence de la catégorie des A-modules pseudocompacts sur celle des foncteurs exacts à gauche (C.A., II, théo.1). Si L et M sont deux A-modules pseudocompacts, on définit donc à isomorphisme près un A-module pseudocompact $L \widehat{\otimes}_A M$ en exigeant que le foncteur $N \longmapsto \mathrm{Hom}_c(L \widehat{\otimes}_A M,N)$ soit isomorphe au foncteur $N \longmapsto \mathrm{Bil}_c(L\times M,N)$, $\mathrm{Bil}_c(L\times M,N)$ désignant l'ensemble des applications A-bilinéaires continues de $L\times M$ dans un module de longueur finie N .

On peut décrire $L \widehat{\otimes}_A M$ comme la limite projective des A-modules (discrets) $(L/L')\otimes_A(M/M')$, L' et M' parcourant respectivement les sous-modules ouverts de L et de M : soit en effet $\varphi : L\times M \longrightarrow N$ une application bilinéaire continue de $L\times M$ dans un A-module (discret) de longueur finie. D'après le lemme 0.3.1 ci-dessous, il existe des sous-modules ouverts L' et M' de L et M tels que $\varphi(L'\times M) = \varphi(L\times M') = \{0\}$. Cela signifie que l'application $\overline{\varphi} : L \otimes_A M \longrightarrow N$, qui est induite par φ , est de la forme $\varphi' \circ p$, où p est la projection canonique de $L \otimes_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$. Si $\widehat{\varphi}$ est obtenu en composant φ' avec la projection canonique de la limite projective $L \widehat{\otimes}_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$, il est clair que l'application $\varphi \longmapsto \widehat{\varphi}$ est une bijection de $\mathrm{Bil}_c(L \times M, N)$ sur $\mathrm{Hom}_c(L \widehat{\otimes}_A M, N)$.

Le module pseudocompact $L \widehat{\otimes}_A M$ est donc le séparé complété de $L \otimes_A M$ pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections canoniques de $L \otimes_A M$ sur $(L/L') \otimes_A (M/M')$. Si x et y appartiennent à L et M , l'image de $x \otimes_A y$ dans le *produit tensoriel complété* $L \widehat{\otimes}_A M$ sera notée $x \widehat{\otimes}_A y$.

0.3.1. *LEMME : Soient* L , M *et* N *des A-modules pseudocompacts,* N *étant de longueur finie. Si* $\varphi : L \times M \longrightarrow N$ *est une application A-bilinéaire continue, il existe des sous-modules ouverts* L' *et* M' *de* L *et* M *tels que* $\varphi(L' \times M) = \varphi(L \times M') = \{0\}$.

En effet, $\varphi^{-1}(0)$ est un voisinage ouvert de $(0,0)$, donc contient un ouvert de la forme $L' \times M'$, où L' et M' sont des sous-modules ouverts de L et M . Comme L/L' est de longueur finie, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_r$ de L tels que $L' + Ax_1 + \ldots + Ax_r = L$. Si M' est "assez petit", on a aussi $\varphi(x_i, M') = 0$ pour tout i , parce que l'application $y \longmapsto (x_i, y)$ est continue; on tire de là $\varphi(L, M') = \{0\}$; de même, $\varphi(L', M) = \{0\}$ si L' est assez petit.

0.3.2. Soit $L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules pseudocompacts. Il est clair que la suite induite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Bil}_c(L''\times M,N) \longrightarrow \mathrm{Bil}_c(L\times M,N) \longrightarrow \mathrm{Bil}_c(L'\times M,N)$$

est exacte pour tout A-module pseudocompact M et tout N de longueur finie. Cela signifie que la suite des foncteurs exacts à gauche représentés par $L\,\widehat{\otimes}_A M''$, $L\,\widehat{\otimes}_A M$ et $L\,\widehat{\otimes}_A M'$ est exacte, autrement dit que la suite

$$(*)\qquad L'\,\widehat{\otimes}_A M \xrightarrow{f\widehat{\otimes} M} L\,\widehat{\otimes}_A M \xrightarrow{g\widehat{\otimes} M} L''\,\widehat{\otimes}_A M \longrightarrow 0$$

est exacte : <u>le foncteur produit tensoriel complété est exact à droite</u>.

Prenons en particulier pour L l'anneau A , pour f l'inclusion d'un idéal fermé $\underline{a}$ dans A , pour g la projection canonique de A sur $A/\underline{a}$. On peut alors identifier $A\,\widehat{\otimes}_A M$ à M au moyen de l'application $x\,\widehat{\otimes}_A y \longmapsto x.y$. Comme l'image de $\underline{a}\,\widehat{\otimes}_A M$ est fermée dans M (C.A., IV, § 3) et que l'image de $\underline{a}\otimes_A M$ est partout dense dans $\underline{a}\,\widehat{\otimes}_A M$, l'image de $f\,\widehat{\otimes}_A M$ n'est autre que l'adhérence $\overline{\underline{a}.M}$ du produit $\underline{a}.M$ dans M . La suite (*) entraîne donc que $A/\underline{a}\,\widehat{\otimes}_A M$ s'identifie à $M/\overline{\underline{a}.M}$.

0.3.3. <u>LEMME de Nakayama</u> : <u>Soient</u> A <u>un anneau pseudocompact</u>, M <u>un A-module pseudocompact et</u> $\underline{a}$ <u>un idéal de</u> A <u>contenu dans le radical</u> $\underline{r}(A)$. <u>L'égalité</u> $\overline{\underline{a}.M} = M$ <u>entraîne alors</u> $M = 0$.

Soient en effet M' un sous-module ouvert de M et M'' le quotient M/M' . Comme M'' est discret, $\underline{a}.M''$ est fermé dans M'', donc égal à $\overline{\underline{a}.M''}$. D'après 0.3.2 , l'application canonique de $M/\overline{\underline{a}.M}$ dans $M''/\overline{\underline{a}.M''}$ est surjective, de sorte qu'on a $\underline{a}.M'' = \overline{\underline{a}.M''} = M''$ si $\overline{\underline{a}.M}=M$; mais ceci entraîne $M'' = 0$, car M'' est un module de type fini sur A (Nakayama) ; par conséquent, tout sous-module ouvert M' de M est égal à M , qui est donc nul.

0.3.4. On tire du lemme de Nakayama les conséquences habituelles : si $\underline{a}$ est un idéal fermé contenu dans le radical de A et $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de A-modules pseudocompacts, f est surjectif si l'application induite f' de $M/\overline{\underline{a}M}$ dans $N/\overline{\underline{a}N}$ l'est (appliquer le lemme 0.3.3 à $\mathrm{Coker}\, f$). De même, si N est projectif, f est inversible si f' l'est (en effet f est surjectif, donc possède une section ; on applique alors 0.3.3 à $\mathrm{Ker}\, f$).

Lorsque A est local d'idéal maximal $\underline{m}$, on peut aussi déduire de 0.3.3 le <u>théorème d'échange</u> qui suit : si M est un A-module topologiquement libre de pseudobase $(m_i)_{i \in I}$ (0.2.1) et N un facteur direct (fermé) de M , il existe une pseudobase de M formée d'éléments de N et de certains m_i : en effet, cela est clair lorsque A est un corps (se servir alors de la dualité de 0.2.2 et appliquer le théorème d'échange habituel); par conséquent, $N/\underline{m}N$ a pour supplémentaire un module topologiquement libre sur $A/\underline{m}$ de pseudobase $(\overline{m}_i)_{i \in J}$, où $\overline{m}_i$ est l'image de m_i dans $M/\underline{m}M$ et J une partie de I . Si P désigne le produit direct $\prod_{i \in J} Am_i$, l'application canonique de $N \oplus P$ dans M est "bijective modulo $\underline{m}$" ; elle est donc bijective d'après ce qui précède (pour une autre preuve voir C.A., IV, § 2, prop. 8).

0.3.5. Considérons maintenant trois A-modules pseudocompacts L, M et N , N étant de longueur finie. Soit ψ un élément de l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(L,\mathrm{Hom}_c(M,N))$ des applications A-linéaires continues de L dans le module $\mathrm{Hom}_c(M,N)$ muni de la topologie discrète. Un tel ψ définit une application bilinéaire continue $\psi' : (\ell,m) \longmapsto \psi(\ell)(m)$ de $L \times M$ dans N .

On obtient donc une autre caractérisation de $\mathrm{Hom}_c(L\hat{\otimes}_A M,N)$, qu'on va utiliser lorsque M est la limite projective d'un système projectif filtrant de A-modules pseudo-compacts M_i . On a alors des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_c(L\hat{\otimes}_A \varprojlim M_i\ ,\ N) \simeq \mathrm{Hom}_c(L\ ,\ \mathrm{Hom}_c(\varprojlim M_i,N)) \simeq \mathrm{Hom}_c(L,\varinjlim \mathrm{Hom}_c(M_i,N))$$

$$\simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_c(L,\mathrm{Hom}_c(M_i,N)) \simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_c(L\hat{\otimes}_A M_i,N) \simeq \mathrm{Hom}_c(\varprojlim L\hat{\otimes}_A M_i,N)$$

qui permettent d'identifier $L\hat{\otimes}_A(\varprojlim M_i)$ à $\varprojlim(L\hat{\otimes}_A M_i)$.

0.3.6. En particulier, le produit tensoriel complété commute aux produits infinis. Par exemple, comme l'anneau A est le produit de ses composantes locales $A_{\underline{m}}$ (§ 0.1.), tout A-module pseudocompact M ($\simeq A\hat{\otimes}_A M$) s'identifie au produit des modules $M_{\underline{m}} = A_{\underline{m}}\hat{\otimes}_A M$ (les composantes locales de M).

De même, soient M et N deux A-modules pseudo-compacts et considérons l'application $\varphi : M^*\otimes_A N^* \longrightarrow (M\hat{\otimes}_A N)^*$ (0.2.2) qui associe à un élément $f\otimes g$ de $M^*\otimes_A N^*$ l'application $m\hat{\otimes} n \longmapsto f(m)g(n)$ de $M\hat{\otimes}_A N$ dans A . Cette application φ est bijective lorsque M est isomorphe à A . Comme les foncteurs $M \longmapsto M^*\otimes_A N^*$ et $M \longmapsto (M\hat{\otimes}_A N)^*$ transforment un produit direct en somme directe lorsque A est artinien, on voit que φ est un isomorphisme chaque fois que A est artinien et M topologiquement libre (ou plus généralement projectif).

0.3.7. Pour tout idéal maximal fermé $\underline{m}$ de A le foncteur $M \longmapsto A_{\underline{m}}\hat{\otimes}_A M$ est évidemment exact. Comme tout A-module pseudocompact projectif P est un produit de modules de la forme $A_{\underline{m}}$, il en résulte que le foncteur $M \longmapsto P \hat{\otimes}_A M$ est exact lorsque P est projectif. La réciproque est vraie :

<u>PROPOSITION</u> : <u>Soient</u> A <u>un anneau pseudocompact</u>, P <u>un</u> A-<u>module pseudocompact</u>. <u>Le foncteur</u> $M \longmapsto P \hat{\otimes}_A M$ <u>est exact si et seulement si</u> P <u>est projectif</u>.

Comme $P \hat{\otimes}_A M$ est le produit de ses composantes locales

$$(P \hat{\otimes}_A M)_{\underline{m}} \simeq P_{\underline{m}} \hat{\otimes}_{A_{\underline{m}}} M_{\underline{m}} \quad ,$$

on est ramené au cas où l'anneau A est local. On va prouver alors que P est <u>topologiquement libre</u> : pour cela soit $\underline{m}$ l'idéal maximal de A ; alors $P/\overline{\underline{m}P}$ est un espace vectoriel linéairement compact sur $A/\underline{m}$, donc un produit d'exemplaires de $A/\underline{m}$. Il y a donc une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'exemplaires de A et un isomorphisme $\varphi : \prod_{i \in I} (A_i/\underline{m}) \xrightarrow{\sim} P/\overline{\underline{m}P}$. Comme $\prod_{i \in I} A_i$ est projectif, il y a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow[\sim]{\psi} & P \\ p \big\downarrow & & \big\downarrow q \\ \prod_{i \in I} (A_i/\underline{m}) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & P/\overline{\underline{m}P} \end{array}$$

où p et q désignent les projections canoniques. Appliquant le lemme de Nakayama à Coker ψ et notant que $A/\underline{m} \hat{\otimes}_A \psi$ n'est autre que φ , on voit que ψ est surjectif.

Posant alors $B = \prod_{i \in I} A_i$ et $N = \operatorname{Ker} \psi$, on a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, bend left=60] & \\
 & \underline{m}\,\widehat{\otimes}_A N \arrow[r] \arrow[d] & \underline{m}\,\widehat{\otimes}_A B \arrow[r] \arrow[d] & \underline{m}\,\widehat{\otimes}_A P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A\,\widehat{\otimes}_A N \arrow[r] \arrow[d] & A\,\widehat{\otimes}_A B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A\,\widehat{\otimes}_A P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & A/\underline{m}\,\widehat{\otimes}_A N \arrow[r] & A/\underline{m}\,\widehat{\otimes}_A B \arrow[r, "\varphi"] & A/\underline{m}\,\widehat{\otimes}_A P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le "lemme du serpent" appliqué aux deux premières lignes montre alors que le morphisme $A/\underline{m}\,\widehat{\otimes}_A N \longrightarrow A/\underline{m}\,\widehat{\otimes}_A B$ est un monomorphisme. Comme φ est un isomorphisme et que la dernière ligne est exacte, $A/\underline{m}\,\widehat{\otimes}_A N$ est nul; d'où $N = 0$ (0.3.3) et ψ est un isomorphisme.

0.3.8. <u>Corollaire</u> : <u>Soient</u> A <u>un anneau local, noethérien, complet et</u> P <u>un</u> A-<u>module pseudocompact</u>. <u>Alors</u> P <u>est topologiquement libre si et seulement si</u> P <u>est plat sur</u> A .

En effet, l'application canonique de $M \otimes_A P$ dans $M \widehat{\otimes}_A P$ est bijective lorsque M est égal à A , donc lorsque M est noethérien (prendre une présentation finie de M et utiliser l'exactitude à droite du produit tensoriel et du produit tensoriel complété). Or P est plat si et seulement si le foncteur $M \longmapsto M \otimes_A P$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. De même, on a vu dans la démonstration de la proposition 0.3.5 que P est topologiquement libre si la suite

$$0 \longrightarrow \underline{m}\,\widehat{\otimes}_A P \longrightarrow A\,\widehat{\otimes}_A P \longrightarrow A/\underline{m}\,\widehat{\otimes}_A P \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc P est topologiquement libre si et seulement si le foncteur

$M \longmapsto M \hat{\otimes}_A P$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. Le corollaire résulte donc de l'égalité $M \otimes_A P = M \hat{\otimes}_A P$ ci-dessus.

0.4. Soit k un anneau pseudocompact. Une k-<u>algèbre</u> topologique A (avec élément unité et commutative) est dite <u>profinie</u> si le k-module topologique sous-jacent est pseudocompact. Si tel est le cas et si $\underline{\ell}$ est un k-sous-module ouvert de A, l'application composée φ

$$A \times A \xrightarrow{\text{mult.}} A \xrightarrow{\text{can.}} A/\ell$$

est continue. D'après le lemme 0.3.1, il existe un k-sous-module ouvert $\underline{n}$ de A tel que $\varphi(A \times \underline{n}) = 0$. Cela signifie que $\underline{\ell}$ contient l'idéal ouvert $A.\underline{n}$ et entraîne que A est <u>un anneau pseudocompact</u>.

Considérons de même un A-module topologique M dont le k-module sous-jacent est pseudocompact. Si M' est un k-sous-module ouvert de M, le lemme 0.3.1 appliqué à l'application

$$A \times M \xrightarrow{\text{mult.}} M \xrightarrow{\text{can.}} M/M'$$

montre que M' contient un A-sous-module ouvert, donc que M est aussi un A-<u>module pseudocompact</u>.

0.4.1. Si A et B sont deux k-algèbres profinies, un morphisme de A dans B est, par définition, un homomorphisme continu de k-algèbres. La catégorie des k-algèbres profinies possède évidemment des limites projectives : l'algèbre sous-jacente à une limite projective est la limite projective des algèbres sous-jacentes; la topologie est celle de la limite projective. De même, il y a des limites inductives finies : par exemple, si $f : A \longrightarrow B$ et $g : A \longrightarrow C$ sont deux morphismes de k-algèbres profinies, la somme amalgamée de B et C sous A a $B \widehat{\otimes}_A C$ pour A-module topologique sous-jacent (d'après 0.4 , f et g munissent B et C de structures de A-module pseudocompact); la multiplication de $B \widehat{\otimes}_A C$ est évidemment telle qu'on ait $(b \widehat{\otimes} c)(b' \widehat{\otimes} c') = (bb') \widehat{\otimes} (cc')$ si $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$.

On notera désormais Al/k la catégorie des k-algèbres profinies.

0.4.2. Une k-algèbre profinie C sera dite de <u>longueur finie</u> si le k-module sous-jacent est de longueur finie (donc discret); nous noterons Alf/k la sous-catégorie pleine de Al/k formée des k-algèbres de longueur finie et, pour toute algèbre profinie A , h^A sera le foncteur $C \longmapsto \mathrm{Hom}_{Al/k}(A,C)$ de Alf/k dans la catégorie (Ens). Il est clair que h^A est un foncteur exact à gauche; de plus, lorsque ℓ parcourt les idéaux ouverts de A , les projections canoniques de A sur A/ℓ induisent un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{Al/k}(A,C) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{\ell} \mathrm{Hom}_{Alf/k}(A/\ell, C)$$

chaque fois que C est de longueur finie. Cela signifie que h^A est la limite inductive des foncteurs représentables $h^{A/\ell}$; si B est une autre k-algèbre profinie, on a donc des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_{Al/k}(B,A) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{Al/k}(B, A/\ell) \simeq \varprojlim h^B(A/\ell) \simeq$$
$$\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(h^{A/\ell}, h^B) \simeq \mathrm{Hom}(h^A, h^B) \quad ,$$

qui montrent que le foncteur contravariant $h^?$: $A \longmapsto h^A$ est pleinement fidèle.

En réalité, $h^?$ est une antiéquivalence de Al/k sur la catégorie des foncteurs exacts à gauche de Alf/k dans (Ens). Il suffit en effet, d'après ce qui précède, de montrer que tout foncteur exact à gauche F est isomorphe à un foncteur du type h^A ; pour cela, on peut construire A comme suit (TDTE II, § 3) : comme F est exact à gauche, il y a, pour toute k-algèbre de longueur finie C et pour tout élément ξ de FC, une plus petite sous-algèbre C' de C, telle que ξ appartienne à l'image de FC' dans FC ; si l'on a $C' = C$, on dit que le couple (C, ξ) est minimal. Les couples minimaux forment une catégorie si l'on prend pour morphismes de (C, ξ) dans (D, η) les homomorphismes φ de C dans D tels que $(F\varphi)(\xi) = \eta$; il est clair qu'un tel φ est une surjection et que la catégorie des couples minimaux est "filtrante à gauche". De plus, comme on peut manifestement se restreindre aux couples (C, ξ) tel que C appartienne à un ensemble contenant des k-algèbres de longueur finie de chaque type, le foncteur $(C, \xi) \longmapsto C$, qui a pour catégorie de départ celle des couples minimaux et pour catégorie d'arrivée celle des k-algèbres profinies, possède une limite projective; on prend pour A cette limite projective.

L'existence d'une antiéquivalence de Al/k sur la catégorie des foncteurs exacts à gauche de Alf/k dans (Ens) , entraîne par exemple que Al/k possède des limites inductives infinies : en effet, la catégorie des foncteurs exacts à gauche possède des limites projectives, qui sont définies par la formule

$$(\varprojlim F_i)(C) = \varprojlim F_i(C) ,$$

lorsque C est une k-algèbre de longueur finie et (F_i) un système projectif de foncteurs.

0.5. Soient k et ℓ des anneaux pseudocompacts et $\varphi : k \longrightarrow \ell$ un homomorphisme (0.1.3). Pour tout k-module pseudocompact M, nous notons $M \widehat{\otimes}_k \ell$ le séparé complété de $M \otimes_k \ell$ pour la topologie linéaire définie par les sommes des images de $M' \otimes_k \ell$ et $M \otimes_k \ell'$ dans $M \otimes_k \ell$ ((M', ℓ') parcourt les couples formés d'un sous-module ouvert de M et d'un idéal ouvert de ℓ) ; de même, si $m \in M$ et $x \in \ell$, nous notons $m \widehat{\otimes}_k x$ l'image canonique de $m \otimes_k x$ dans $M \widehat{\otimes}_k \ell$. Il est clair que $M \widehat{\otimes}_k \ell$ est un ℓ-module pseudocompact.

Associons à tout ℓ-module pseudocompact N et tout morphisme $f : M \otimes_k \ell \longrightarrow N$ l'application $f' : m \longmapsto f(m \widehat{\otimes}_k 1)$ de M dans N. Il est clair qu'on obtient ainsi une bijection de $\mathrm{Hom}_c(M \widehat{\otimes}_k \ell, N)$ sur l'ensemble des applications k-linéaires continues de M dans le k-module déduit de N par restriction des scalaires. On en déduit comme en 0.3.2 et 0.3.4 que le foncteur $M \longmapsto M \widehat{\otimes}_k \ell$ est exact à droite et qu'il commute aux produits infinis et au produit tensoriel complété.

Enfin, si A est une k-algèbre profinie, il y a sur $A \widehat{\otimes}_k \ell$ une et une seule structure de ℓ-algèbre profinie telle que $(m \widehat{\otimes}_k x)(n \widehat{\otimes}_k y) = (mn) \widehat{\otimes}_k (xy)$ si $m, n \in A$ et $x, y \in \ell$. On dit que $A \widehat{\otimes}_k \ell$ est <u>l'algèbre déduite de</u> A <u>par l'extension des scalaires</u> φ. Le foncteur $A \longrightarrow A \widehat{\otimes}_k \ell$ est exact à droite.

1. Variétés formelles sur un anneau pseudocompact.

1.1. On peut associer à tout anneau pseudocompact A un schéma formel (EGA I 10.4.2) en procédant comme suit : l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble $\Omega(A)$ des idéaux maximaux fermés de A , qu'on munit de la topologie discrète; le faisceau structural a le produit cartésien $\prod_{\underline{m}\in E} A_{\underline{m}}$ pour espace des sections sur une partie E de $\Omega(A)$. Le schéma formel ainsi obtenu est noté $\operatorname{Spf} A$ (le spectre formel de A) .

Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un morphisme de $\operatorname{Spf} B$ dans $\operatorname{Spf} A$ consiste en la donnée d'une application f de $\Omega(B)$ dans $\Omega(A)$ et d'une famille d'homomorphismes f_y (0.1.3) de $A_{f(y)}$ dans B_y $(y \in \Omega(B))$. Un tel morphisme induit un homomorphisme de A (le produit des A_x , $x \in \Omega(A))$ dans B (le produit des B_y) et la réciproque est vraie : si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme continu d'algèbres, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\underline{n})$ d'un idéal maximal fermé (donc ouvert) de B est un idéal ouvert premier de A ; il est donc maximal dans A et on peut poser $\underline{m} = \varphi^{-1}(\underline{n}) = (\operatorname{Spf})(\underline{n})$; l'application φ induit alors un homomorphisme de $A_{\underline{m}}$ dans $B_{\underline{n}}$.

On voit donc que le foncteur contravariant $A \longmapsto \operatorname{Spf} A$ est pleinement fidèle. Bien que nous ne parlions ici que de schémas formels de la forme $\operatorname{Spf} A$, nous utiliserons le langage des schémas formels plutôt que celui des anneaux pseudocompacts pour appuyer nos assertions sur une intuition géométrique.

1.2. Soit k un anneau pseudocompact. Nous appellerons variété formelle sur k tout schéma formel X au-dessus de $\mathrm{Spf}\ k$ qui est isomorphe à un k-schéma formel $\mathrm{Spf}\ A$ pour une certaine k-algèbre profinie A. L'algèbre A est alors isomorphe à <u>l'algèbre affine</u> de X, c'est-à-dire à l'algèbre des sections du faisceau structural $\underline{\mathcal{O}}_X$ de X. D'après 1.1 le foncteur $A \longmapsto \mathrm{Spf}\ A$ est une antiéquivalence de Al/k (0.4.1) sur la sous-catégorie pleine Vf/k de la catégorie des schémas formels sur $\mathrm{Spf}\ k$ dont les objets sont les k-variétés formelles.

La catégorie Vf/k possède des limites projectives et inductives : soient par exemple Y, Z des k-variétés formelles au-dessus d'une même k-variété formelle X et soient A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z ; d'après 0.4.1, l'algèbre affine du produit fibré $Y \times_X Z$ s'identifie à $B \widehat{\otimes}_A C$, de sorte que l'inclusion de Vf/k dans la catégorie de tous les k-schémas formels commute aux limites projectives finies (cf. EGA I 10.7). De même, les limites inductives de k-variétés formelles correspondent aux limites projectives de leurs algèbres affines : soient, par exemple, $d, e : X \rightrightarrows Y$ une double-flèche de Vf/k ; l'algèbre affine de $\mathrm{Coker}(d,e)$ est isomorphe au noyau des homomorphismes induits sur les algèbres affines de X et Y ; mais on peut aussi donner de $\mathrm{Coker}(d,e)$ la construction suivante : l'ensemble sous-jacent à $\mathrm{Coker}(d,e)$ est le conoyau des ensembles sous-jacents; si p est la projection canonique de l'ensemble sous-jacent à Y sur le conoyau et si z appartient au conoyau, l'algèbre locale de $\mathrm{Coker}(d,e)$ en z est le noyau de la double-flèche

$$d', e' : \prod_{p(y)=z} \underline{\mathcal{O}}_{Y,y} \rightrightarrows \prod_{q(x)=z} \underline{\mathcal{O}}_{X,x}$$

où l'on a posé $q = pd = pe$ et où d' et e' sont induits par les homomorphismes d_x et e_x (notations de 1.1).

Enfin, si $\varphi : k \longrightarrow \ell$ est un homomorphisme d'anneaux pseudo-
8 compacts et X une k-variété formelle d'algèbre affine A , le préschéma formel $X \times_{\mathrm{Spf}\, k} \mathrm{Spf}\, \ell$, obtenu par changement de base, est une ℓ-variété formelle, que nous noterons aussi $X \widehat{\otimes}_k \ell$ et qui a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $A \widehat{\otimes}_k \ell$ (confer 0.5 et EGA I 10).

Comme toute variété formelle sur k se décompose en variétés formelles sur les composantes locales de k , <u>nous supposerons dans certaines démonstrations que</u> k <u>est un anneau pseudocompact local</u>.

Donnons maintenant quelques exemples, en même temps que nous fixons notre terminologie :

1.2.1. Un k-<u>foncteur</u> sera, par définition, un foncteur covariant de Alf/k dans (Ens). D'après 0.4.2 , on peut identifier Vf/k à une sous-catégorie pleine de <u>Hom</u>(Alf/k, (Ens)), en associant à toute k-variété formelle le foncteur $C \longmapsto X(C)$ (C parcourt les objets de Alf/k et $X(C)$ désigne l'ensemble $\mathrm{Hom}_{Vf/k}(\mathrm{Spf}\, C, X)$).

Nous rencontrerons plus loin des foncteurs $\underline{F}$ qui associent à tout objet C de Alf/k un module $\underline{F}(C)$ sur C et à tout morphisme $\varphi : C \longrightarrow D$ de Alf/k une application linéaire $\underline{F}(\varphi) : \underline{F}(C) \longrightarrow \underline{F}(D)$ telle que $(\underline{F}(\varphi))(\lambda x) = \varphi(\lambda).(\underline{F}(\varphi)(x))$, si $x \in \underline{F}(C)$ et $\lambda \in C$. D'après I 3.1 , $\underline{F}$ est muni d'une structure de $\underline{\underline{k}}$-module, si l'on désigne par $\underline{\underline{k}}$ le k-foncteur en anneaux qui associe à tout objet C de Alf/k l'anneau sous-jacent à C . Un $\underline{\underline{k}}$-module $\underline{F}$ sera dit <u>plat</u>, si $\underline{F}(C)$ est plat sur C pour tout objet C de Alf/k, et si tout morphisme

$\varphi : C \longrightarrow D$ de Alf/k induit une bijection de $D \otimes_C \underline{F}(C)$ sur $\underline{F}(D)$.

Par exemple, si M est un module sur k, nous noterons $\underline{M}$ le $\underline{\underline{k}}$-module $C \longmapsto C \otimes_k M$; alors $\underline{M}$ est plat lorsque M est plat sur k. De plus, le foncteur $M \longmapsto \underline{M}$ a pour adjoint à droite le foncteur qui associe à tout $\underline{\underline{k}}$-module $\underline{F}$ la limite projective $\varprojlim_{\ell} \underline{F}(k/\ell)$, ℓ parcourant les idéaux ouverts de k.

1.2.2. Dans la suite, un $\underline{\underline{k}}$-module sera toujours désigné par une lettre soulignée telle que $\underline{F}$; lorsque k est artinien, nous écrirons alors simplement F au lieu de $\underline{F}(k)$. Dans ce cas, il va de soi que le foncteur $\underline{F} \longmapsto F$ induit une équivalence de la catégorie des $\underline{\underline{k}}$-modules plats sur celle des k-modules plats ! La terminologie, que nous avons adoptée, a donc seulement pour but de nous permettre de raisonner "comme si k était toujours artinien".

Conformément à l'exposé I § 3.1, nous utiliserons des conventions analogues pour d'autres structures algébriques : ainsi, une $\underline{\underline{k}}$-algèbre (resp. une $\underline{\underline{k}}$-coalgèbre, resp. une $\underline{\underline{k}}$-algèbre de Lie, resp. une p-algèbre de Lie sur $\underline{\underline{k}}$) consistera en la donnée d'un $\underline{\underline{k}}$-module $\underline{M}$ et, pour tout objet C de Alf/k, d'une structure de C-algèbre (resp. de C-coalgèbre, resp. de C-algèbre de Lie, resp. de p-algèbre de Lie sur C) sur $\underline{M}(C)$; on suppose de plus que, pour tout morphisme $\varphi : C \longrightarrow D$ de Alf/k, l'application de $D \otimes_C \underline{M}(C)$ dans $\underline{M}(D)$, qui est induite par $\underline{M}(\varphi)$, est un homomorphisme de D-algèbres (resp. de C-coalgèbres, resp...).

Notons enfin que, si $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont deux $\underline{\underline{k}}$-modules, $\underline{F} \otimes_k \underline{G}$ désignera le $\underline{\underline{k}}$-module $C \longmapsto \underline{F}(C) \otimes_C \underline{G}(C)$.

1.2.3. Soit N un k-module pseudocompact. Nous notons $V_k(N)$ ou $\underline{N}^*$ le $\underline{\underline{k}}$-module qui associe à tout $C \in Alf/k$ le C-module $(C\hat{\otimes}_k N)^*$ dual de $C\hat{\otimes}_k N$ (0.2.2); ce $\underline{\underline{k}}$-module $\underline{N}^*$ sera appelé <u>le dual</u> de N. Il est clair que $\underline{N}^*$ est plat (1.2.1), lorsque N est un k-module pseudocompact projectif.

Réciproquement, si $\underline{M}$ est un $\underline{\underline{k}}$-module, nous appelons <u>dual de</u> $\underline{M}$ et nous notons $\underline{M}^*$ la limite projective des modules pseudocompacts $(\underline{M}(k/\ell))^*$ sur k/ℓ (ℓ parcourt les idéaux ouverts de k). Si $\underline{M}$ est un $\underline{\underline{k}}$-module plat, il est clair que $\underline{M}$ n'est autre que le dual de $\underline{M}^*$, donc que <u>les foncteurs</u> $N \longmapsto \underline{N}^*$ et $\underline{M} \longmapsto \underline{M}^*$ <u>définissent une antiéquivalence de la catégorie des</u> k-<u>modules pseudocompacts projectifs sur celle des</u> $\underline{\underline{k}}$-<u>modules plats</u> (confer 0.2.2).

De plus, si M est un k-module pseudocompact topologiquement libre, soient (m_i) une pseudobase de M (0.2.1) et m_i^C l'image canonique de m_i dans $C\hat{\otimes}_k M$ $(C \in Alf/k)$. Si l'on définit l'élément n_i^C de $(C\hat{\otimes}_k M)^*$ par les égalités $n_i^C(m_i^C) = 1$ et $n_i^C(m_j^C) = 0$ pour $i \neq j$, la famille (n_i^C) est une base de $\underline{M}^*(C)$; en outre, pour tout morphisme $\varphi : C \longrightarrow D$ de Alf/k, $\underline{M}^*(\varphi)$ envoie n_i^C sur n_i^D : on peut donc choisir pour les C-modules $\underline{M}^*(C)$ des bases "de manière cohérente".

1.2.4. Pour tout k-module pseudocompact E, le $\underline{\underline{k}}$-module $\underline{E}^*$ est naturellement isomorphe au foncteur $C \longmapsto Hom_{Al/k}(\hat{S}_k(E), C)$, où $\hat{S}_k(E)$ désigne <u>l'algèbre symétrique complétée de</u> E qu'on peut construire de la manière suivante : soit $T_k(E)$ la somme directe des groupes abéliens $\hat{\otimes}_k^n E = E\hat{\otimes}_k \ldots \hat{\otimes}_k E$ $(n \geqslant 0$; si $n=0, \hat{\otimes}_k^0 E = k)$; on fait de $T_k(E)$ une k-algèbre graduée en définissant la multiplication de la façon habituelle; soit alors $S_k(E)$ le quotient de $T_k(E)$ par l'idéal homogène qui a pour n-ième composante le k-sous-module fermé de $\hat{\otimes}\,{}^n_k E$ engendré par les éléments

$$x_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes}\, x_i \,\hat{\otimes}\, x_{i+1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes}\, x_n \quad - \quad x_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes}\, x_{i+1} \hat{\otimes}\, x_i \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes}\, x_n$$

Si $S^n_k(E)$ est le quotient de $\otimes\,{}^n_k E$ par ce sous-module, $S_k(E)$ est évidemment une k-algèbre graduée de n-ième composante $S^n_k(E)$; l'algèbre profinie $\hat{S}_k(E)$ est le séparé complété de $S_k(E)$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux $\underline{\ell}$ tels que $S_k(E)/\underline{\ell}$ soit un k-module de longueur finie et que $S^n_k(E) \cap \underline{\ell}$ soit un sous-module ouvert de $S^n_k(E)$ pour tout n .

Dans toute la suite, nous identifions le spectre formel de $\hat{S}_k(E)$ au k-foncteur $V_k(E)$ (1.2.3).

1.2.5. D'après 1.2.4 , le morphisme nul de E dans k est associé à un morphisme d'algèbres profinies $\pi : \hat{S}_k(E) \longrightarrow k$; ce morphisme π induit l'application nulle sur $S^n_k(E)$ pour $n \geqslant 1$ et définit une section de la projection canonique de $V_k(E)$ sur Spf k . Nous noterons $V^o_k(E)$ la variété formelle qui a pour points les images x des points s de Spf k par la section Spf π et qui a les mêmes algèbres locales que $V_k(E)$ en ces points x . Il est clair que l'algèbre affine de $V^o_k(E)$ est le produit infini

$$k\,[[E]] = k \times E \times S^2_k(E) \times S^3_k(E) \times \dots$$

La multiplication de $k\,[[E]]$ est induite par celle de $S_k(E)$ et l'on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{Al/k}(k\,[[E]]\,,\,C) \simeq \mathrm{Hom}_c(E\,,\,\underline{r}(C))$$

lorsque C parcourt les k-algèbres de longueur finie et que $\underline{r}(C)$ désigne le radical de C .

1.2.6. Une k-variété formelle V est dite de <u>longueur finie</u> si son algèbre affine l'est. De même, si S est un préschéma, un S-préschéma X est dit <u>de longueur finie</u> si X est fini sur S et si l'image directe de $\underline{\mathcal{O}}_X$ sur S est un $\underline{\mathcal{O}}_S$-Module de longueur finie. Les S-préschémas de longueur finie s'identifient aux variétés formelles de longueur finie sur le schéma formel $\hat{S}$ qui suit : l'espace topologique sous-jacent à $\hat{S}$ est l'ensemble des points fermés de S muni de la topologie discrète; si s est un tel point fermé, le faisceau structural $\underline{\mathcal{O}}_{\hat{S}}$ a pour fibre $\underline{\mathcal{O}}_{\hat{S},s}$ en s le séparé complété de $\underline{\mathcal{O}}_{S,s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie.

Soit $V/\hat{S}$ la catégorie des variétés formelles de longueur finie sur $\hat{S}$ (identifiée à celle des S-préschémas de longueur finie). D'après 1.1 et 1.2.1 , la catégorie $Vf/\hat{S}$ des variétés formelles sur $\hat{S}$ est équivalente à celle des foncteurs contravariants exacts à gauche de $V/\hat{S}$ dans (Ens). Par exemple, si X est un S-préschéma, le foncteur $T \longmapsto \mathrm{Hom}_{(Sch/S)}(T,X)$ est un tel foncteur exact à gauche ; il est donc naturellement isomorphe à un foncteur $T \longmapsto \mathrm{Hom}_{Vf/S}(T, \widehat{X/S})$, où $\widehat{X/S}$ est une variété formelle sur $\hat{S}$ qu'on peut décrire de la manière suivante : l'ensemble sous-jacent est formé des points x de X tels que le corps résiduel $k(x)$ de X en x soit une extension finie du corps résiduel $k(s)$ de l'image s de x sur S ; la fibre de $\underline{O}_{\widehat{X/S}}$ en x est le séparé complété de l'anneau local $\underline{O}_{X,x}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie.

1.3. PROPOSITION : Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés formelles sur k, A et B les algèbres affines de X et Y, $g : B \longrightarrow A$ le morphisme induit par f. Alors f est un monomorphisme de Vf/k si et seulement si g est une surjection.

En effet, A est un k-module pseudocompact et g fait de A un B-module pseudocompact (0.4) ; il est donc loisible de supposer B égal à k. De plus, comme B et A sont les produits des composantes locales $B_{\underline{n}}$ et $A_{\underline{n}}$ $(\underline{n} \in \Omega(B))$, on peut supposer B local. Si $\underline{n}$ est alors l'idéal maximal de B, il suffit de montrer que $g \hat{\otimes}_B (B/\underline{n})$ est surjectif (lemme de Nakayama, 0.3.3) ; or $g \hat{\otimes}_B (B/\underline{n})$ est déduit de g par changement de base, donc est un épimorphisme de Al/k. On peut donc supposer que $B = k$ est un corps. Or f est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal $X \longrightarrow X \times_Y X$ est un isomorphisme, c'est-à-dire si l'homomorphisme $x \hat{\otimes}_B x' \longmapsto xx'$ est un isomorphisme de $A \hat{\otimes}_k A$ sur A. Comme k est un corps, cela implique $A = k$.

1.3.1. La proposition précédente entraîne en particulier que tout monomorphisme de Vf/k est effectif (confer IV 1.3). Il n'en va pas de même pour les épimorphismes, comme on le voit facilement en modifiant un peu le contrexemple de V 2c) ; c'est pourquoi nous allons considérer une classe sympathique d'épimorphismes effectifs :

Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de k-variétés formelles est dit surjectif s'il induit une surjection des ensembles sous-jacents; il est dit topologiquement plat si, pour tout point x de X, l'homomorphisme $f_x : \underline{\mathcal{O}}_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{\mathcal{O}}_{X,x}$, qui est induit par f, fait de $\underline{\mathcal{O}}_{X,x}$ un module topologiquement libre sur $\underline{\mathcal{O}}_{Y,f(x)}$.

PROPOSITION : Un morphisme surjectif et topologiquement plat de k-variétés formelles est un épimorphisme effectif (IV 1.3).

Soient en effet A et B les algèbres affines de X,Y et soit $g : B \longrightarrow A$ le morphisme induit par f . D'après ce que nous avons vu en 1.2., on peut supposer B local. Notre hypothèse signifie alors que g fait de A un B-module topologiquement libre et non nul.
Si $\underline{n}$ est l'idéal maximal de B , $A/\overline{\underline{n}A}$ n'est donc pas nul, de sorte que l'application $g' : B/\underline{n} \longrightarrow A/\overline{\underline{n}A}$ déduite de g est une injection. D'après le lemme 1.3.2. ci-dessous, le B-module A s'identifie donc à la somme directe de B et d'un supplémentaire A' de l'image de B dans A. Il en résulte évidemment que g est un isomorphisme de B sur la partie de A formée des a tels que $a\widehat{\otimes}_B 1 = 1\widehat{\otimes}_B a$, c.q.f.d.

1.3.2. LEMME : Soient B un anneau pseudocompact local d'idéal maximal $\underline{n}$, M et N deux B-modules pseudocompacts projectifs et g un morphisme de M dans N . Alors g est un isomorphisme de M sur un facteur direct de N si $(B/\underline{n})\widehat{\otimes}_B g$ est une injection.

Posons en effet $g' = (B/\underline{n})\widehat{\otimes}_B g$. Alors g' possède une rétraction r' . Si p et q sont les projections canoniques de M et N sur $M/\overline{\underline{n}M}$ et $N/\overline{\underline{n}N}$, il y a donc un morphisme r tel que $pr = r'q$; par conséquent, r' est déduit de r par passage au quotient et rg est un isomorphisme parce que $r'g'$ l'est (0.3.4). Si s l'isomorphisme réciproque de rg , g a sr pour rétraction.

1.3.3. PROPOSITION : Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des morphismes de k-variétés formelles :

(i) *Si* f *et* g *sont topologiquement plats*, gf *l'est*.

(ii) *Si* g *et* gf *sont topologiquement plats et si* f *est surjectif*, g *est topologiquement plat*.

(iii) *Si* f *est topologiquement plat*, $f \times_Y Y'$ *l'est pour tout changement de base* $Y' \longrightarrow Y$.

Les assertions (i) et (iii) sont claires. Pour prouver (ii) appelons A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z et $f' : B \longrightarrow A$, $g' : C \longrightarrow B$ les morphismes induits par f, g. Comme gf est topologiquement plat, $f'g'$ fait de A un C-module pseudocompact projectif; de même, f' fait de A un B-module pseudocompact fidèle. Lorsque P parcourt les C-modules pseudocompacts et N les B-modules pseudocompacts, les foncteurs $P \longmapsto P \widehat{\otimes}_C A$ et $N \longmapsto N \widehat{\otimes}_B A$ sont donc exacts; comme le deuxième est en outre fidèle, le foncteur $P \longmapsto P \widehat{\otimes}_C B$ est exact; d'après 0.3.7, B est donc un C-module pseudocompact projectif.

1.3.4. PROPOSITION : *Soient* S *un préschéma*, Y *un* S-*préschéma localement noethérien et* $f : X \longrightarrow Y$ *un* S-*morphisme localement de type fini et fidèlement plat. Alors* $\widehat{f/S} : \widehat{X/S} \longrightarrow \widehat{Y/S}$ *est un morphisme surjectif et topologiquement plat de* $\hat{S}$-*variétés formelles*, (1.2.6). *De plus, la suite*

$$\widehat{(X \times_Y X)/S} \underset{\widehat{pr_2/S}}{\overset{\widehat{pr_1/S}}{\rightrightarrows}} \widehat{X/S} \xrightarrow{\widehat{f/S}} \widehat{Y/S}$$

déduite de la suite exacte

$$X \times_Y X \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

est exacte.

Soit en effet y un point de Y de projection s sur S et tel que $k(y)$ soit une extension finie du corps résiduel $k(s)$ de s. Comme f est localement de type fini, $f^{-1}(y)$ est localement de type fini sur $k(y)$ et les points de $\widehat{X/S}$ se projetant en y sont les points fermés de $f^{-1}(y)$; ceci montre que f est surjectif.

Si x est un point fermé de $f^{-1}(y)$, les anneaux locaux de x et y sur $\widehat{X/S}$ et $\widehat{Y/S}$ sont les complétés de $\underline{\mathcal{O}}_{X,x}$ et $\underline{\mathcal{O}}_{Y,y}$ pour les topologies linéaires définies par les puissances des idéaux maximaux. D'après SGA IV 5.8, $\widehat{\underline{\mathcal{O}}}_{X,x}$ est donc plat sur $\widehat{\underline{\mathcal{O}}}_{Y,y}$. D'après 0.3.8, $\widehat{\underline{\mathcal{O}}}_{X,x}$ est un $\widehat{\underline{\mathcal{O}}}_{Y,y}$-module topologiquement libre.

Nous avons vu enfin en 1.2.4 que le foncteur $T \longmapsto \mathrm{Hom}_{Vf/\hat{S}}(T,\widehat{X/S})$ était naturellement isomorphe au foncteur $T \longmapsto \mathrm{Hom}_{(Sch/S)}(T,X)$ (T étant de longueur finie). Comme une limite projective de foncteurs exacts à gauche se calcule "argument par argument" et que $Vf/\hat{S}$ est une catégorie équivalente à celle des foncteurs contravariants exacts à gauche de $V/\hat{S}$ dans (Ens), on voit que le foncteur $X \longmapsto \widehat{X/S}$ commute aux limites projectives. En particulier $\widehat{(X \times_Y X)/S}$ s'identifie à $\widehat{X/S} \times_{\widehat{Y/S}} \widehat{X/S}$, de sorte que notre dernière assertion dit simplement que $\widehat{f/S}$ est un épimorphisme effectif (1.3.1).

1.3.5. Une variété formelle X sur k est dite <u>topologiquement plate</u> si son algèbre affine A est un k-module pseudocompact projectif, c'est-à-dire si le morphisme structural $X \longrightarrow \mathrm{Spf}\, k$ est topologiquement plat. On peut décrire une telle variété formelle à l'aide de coalgèbres : désignons, en effet, par $\underline{H}(X)$ le $\underline{\underline{k}}$-module $\underline{A}^*$ dual de A (1.2.3).

Comme $(\underline{A}\,\hat{\otimes}\,\underline{A})^*$ s'identifie à $\underline{A}^* \otimes_{\underline{k}} \underline{A}^*$ (1.2.2) d'après 0.3.6 , la multiplication de l'algèbre A induit par transposition un morphisme diagonal, qui fait de $\underline{H}(X)$ une $\underline{k}$-coalgèbre (1.2.2). Nous dirons que $\underline{H}(X)$ est <u>la coalgèbre de</u> X <u>sur</u> $\underline{k}$.

Réciproquement, toute $\underline{k}$-coalgèbre $\underline{H}$ définit un k-foncteur (1.2.1) $\mathrm{Spf}^* \underline{H}$: pour tout objet C de Alf/k , $(\mathrm{Spf}^* \underline{H})(C)$ est l'ensemble des éléments x de $\underline{H}(C)$ tels que $\varepsilon_{\underline{H}(C)}(x) = 1$ et $\Delta_{\underline{H}(C)}(x) = x \otimes x$ (notations de VII_A 3.1) . Lorsque le $\underline{k}$-module sous-jacent à $\underline{H}$ est plat, $\mathrm{Spf}^* \underline{H}$ s'identifie au spectre formel d'une algèbre $\underline{H}^* \in \mathrm{Al}/k$, qui a pour k-module topologique sous-jacent le dual de $\underline{H}$ (1.2.3), la multiplication de $\underline{H}^*$ étant induite par les morphismes diagonaux des coalgèbres $\underline{H}(C)$ (confer VII_A 3.1.2). On voit ainsi que <u>les foncteurs</u> $X \longmapsto \underline{H}(X)$ <u>et</u> $\underline{H} \longmapsto \mathrm{Spf}^* \underline{H}$ <u>définissent une équivalence entre la catégorie des</u> k-<u>variétés formelles topologiquement plates et celle des</u> $\underline{k}$-<u>coalgèbres plates</u>.

1.3.6. Dans la suite de cet exposé, nous définirons plusieurs fois une variété formelle topologiquement plate X en exhibant la coalgèbre $\underline{H}(X)$. Il nous faudra alors interpréter au moyen de $\underline{H}(X)$ certaines propriétés géométriques de X . Nous donnons ici un exemple de cette situation : <u>supposons</u> pour simplifier k <u>artinien</u> et posons $H = (\underline{H}(X))(k)$; supposons donnée en outre une section σ de la projection canonique de X sur Spf k et demandons sous quelle condition σ induit un isomorphisme des espaces topologiques sous-jacents : désignons pour cela par H^+ le noyau de l'augmentation ε_H (VII_A 3.1), par η_H la section de ε_H qui est induite par σ . L'application $(x,y) \longmapsto \eta_H(x) + y$ nous permet alors d'identifier $k \oplus H^+$ à H et de définir par récurrence des sous-modules H_n de H :

$$H_o = \eta_H(k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_{n+1} = \left\{ u \in H \mid \Delta_H u - u \otimes 1 \in H_n \otimes H^+ \right\}$$

Nous dirons que la suite $H_o \subset H_1 \subset \ldots$ est <u>la filtration naturelle de</u> H ; sous les hypothèses ci-dessus, on voit alors facilement que <u>la section</u> σ <u>de la projection canonique de</u> X <u>sur</u> k <u>induit un isomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents si et seulement si</u> H <u>est la réunion des</u> H_n : soient en effet A l'algèbre affine de X, $\varepsilon_A : A \longrightarrow k$ l'homomorphisme induit par σ et I le noyau de ε_A, c'est-à-dire l'orthogonal de H_o dans A. Notons en outre A' (resp. A'') l'anneau des sections du faisceau structural de X sur l'image de σ (resp. sur le complémentaire de cette image dans X). L'algèbre A est alors canoniquement isomorphe à $A' \oplus A''$ et I s'identifie à une partie de $A' \oplus A''$ de la forme $I' \oplus A''$. Comme A'' est un k-module pseudocompact projectif et que les idéaux I'^r tendent vers 0, il est clair que A'' est nul si et seulement si toute application linéaire continue de A dans k s'annule sur un idéal I^{n+1}, donc si et seulement si H est la réunion des k-modules $(A/\overline{I^{n+1}})^*$. <u>Montrons qu'on a</u> $H_n = (A/\overline{I^{n+1}})^*$:

Cela est clair pour $n = 0$. Supposons le donc vérifié pour $n < r$: aux suites exactes

$$0 \longrightarrow \overline{I^r} \longrightarrow A \longrightarrow A/\overline{I^r} \longrightarrow 0$$

et

$$\overline{I^r} \hat{\otimes} I \longrightarrow A \longrightarrow A/\overline{I^{r+1}} \longrightarrow 0$$

correspondent par dualité les suites exactes

$$(\overline{I^r})^* \longleftarrow H \longleftarrow H_{r-1} \longleftarrow 0$$

et

$$(\overline{I^r})^* \otimes H^+ \xleftarrow{\delta} H \longleftarrow (A/\overline{I^{r+1}})^* \longleftarrow 0 \quad ,$$

où δ est obtenu en composant Δ_H avec la projection canonique de $H \otimes H$ dans $(\overline{I^r})^* \otimes H^+$. La première suite montre que H/H_{r-1} s'injecte dans $(\overline{I^r})^*$, donc que $(H/H_{r-1}) \otimes H^+$ s'injecte dans $(\overline{I^r})^* \otimes H^+$ (H^+ est plat). D'autre part, $\Delta_H u - u \otimes 1$ appartient à $H \otimes H^+$ pour tout $u \in H$, donc est la projection de u sur $H \otimes H^+$. La seconde suite exacte montre alors que u appartient à $(A/\overline{I^{r+1}})^*$ si et seulement si $\Delta_H u - u \otimes 1$ appartient au noyau de l'application canonique de $H \otimes H^+$ sur $(H/H_{r-1}) \otimes H^+$, c'est-à-dire à $H_{r-1} \otimes H^+$.

1.4. <u>THEOREME</u> : <u>Soient</u> k <u>un anneau pseudocompact et</u> $d_o, d_1 : X_1 \rightrightarrows X$ <u>un couple d'équivalence de</u> Vf/k (V 2b) <u>tel que</u> d_1 <u>soit topologiquement plat</u>. <u>Alors la projection canonique de</u> X <u>sur</u> X/X_1 ($= \mathrm{Coker}(d_o, d_1)$) <u>est surjective, topologiquement plate et le morphisme</u> $X_1 \longrightarrow X \times_{X/X_1} X$ <u>de composantes</u> d_o <u>et</u> d_1 <u>est un isomorphisme</u>.

La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3 :

1.4.1. Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où X a un seul point : comme nous avons affaire à un couple d'équivalence, on voit comme en V 3e qu'on définit une relation d'équivalence dans l'ensemble sous-jacent à

X en déclarant que deux points x,y sont équivalents s'il existe un point z de X_1 tel que $d_o z = y$ et $d_1 z = x$. On peut évidemment supposer sans inconvénient que X contient une seule classe d'équivalence pour cette relation, autrement dit que X/X_1 a un seul point (voir la construction de X/X_1 donnée en 1.2) : dans ce cas, soient x un point quelconque de X et U la variété formelle qui a x pour seul point et qui a même anneau local que X en x . On voit alors comme en V §6 que la relation d'équivalence induite par (d_o,d_1) sur U vérifie encore les hypothèses du théorème et qu'il suffit de faire la preuve pour cette dernière relation d'équivalence (U est une "quasi-section") :

Rappelons brièvement le principe de la démonstration faite en V,§6 : posons $V = d_o^{-1}(U) = U_{i,d_o}\!\times X_1$, où i est l'inclusion de U dans X ; soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_o et d_1 :

$$X \xleftarrow{\ v\ } V \xrightarrow{\ u\ } U$$

Il est clair que u et v sont topologiquement plats et que u est surjectif; comme X contient une seule classe d'équivalence, v est surjectif. Si (v_o,v_1) est l'image réciproque du couple d'équivalence (d_o,d_1) par v (V 3a), il résulte de V §3c d que X/X_1 et le quotient de U par la relation d'équivalence induite par (d_o,d_1) s'identifient tous deux à $\mathrm{Coker}(v_o,v_1)$. Le reste est facile (V §6).

1.4.2. On se trouve ainsi ramené au cas où X a un seul point : considérons alors le diagramme commutatif suivant (confer V §1 (0,1,2))

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_0"'] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & X \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & X \arrow[r] & X/X_1
\end{tikzcd}$$

où X_2 est le produit fibré $X_1 \underset{d_1, d_0}{\times} X_1$, d'_0 , d'_1 et d'_2 étant respectivement les morphismes "$(x,y,z) \longmapsto (x,y)$" , "$(x,y,z) \longmapsto (x,z)$" et "$x,y,z) \longmapsto (y,z)$" . Si B , A , A_1 et A_2 désignent respectivement les algèbres affines de X/X_1 , X , X_1 et X_2 , le diagramme précédent induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_2 & A_1 \arrow[l, shift right, "j_1"'] \arrow[l, shift left, "j_0"] & A \arrow[l, "i_0"'] \\
A_1 \arrow[u, "j_2"] & A \arrow[l, shift right, "i_1"'] \arrow[l, shift left, "i_0"] \arrow[u, "i_1"'] & B \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes et les carrés déterminés par (i_o, j_o) et (i_1, j_1) cocartésiens. Comme le morphisme $X_1 \longrightarrow X \times X$ de composantes d_o et d_1 est un monomorphisme par hypothèse, le morphisme $A \widehat{\otimes}_k A \longrightarrow A_1$ de composantes i_o et i_1 est surjectif (1.3). Cela signifie que i_1 fait de A_1 un A-module pseudocompact (supposé topologiquement libre) engendré par $i_o(A)$. Comme A est local, le lemme 1.4.3 ci-dessous entraîne l'existence d'un k-module topologiquement libre V et d'un morphisme de k-modules pseudocompacts $j : V \longrightarrow A$ tels que le morphisme $\alpha_1 : a \widehat{\otimes} v \longmapsto i_1(a).i_o(ja)$ de $A \widehat{\otimes}_k V$ dans A_1 soit inversible. Soient $\alpha : B \widehat{\otimes}_k V \longrightarrow A$ et $\alpha_2 : A_1 \widehat{\otimes}_k V \longrightarrow A_2$ les morphismes "$b \widehat{\otimes} v \longmapsto b.j(v)$"

et "$a \otimes v \longmapsto (j_2 a)".j_o(i_o(jv))$.

Dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
A_2 & A_1 \arrow[l, shift right, "j_1"'] \arrow[l, shift left, "j_o"] & A \arrow[l, "i_o"'] \\
A_1 \widehat{\otimes}_k V \arrow[u, "\alpha_2"] & A \widehat{\otimes}_k V \arrow[u, "\alpha_1"'] \arrow[l, shift right, "i_1 \otimes V"'] \arrow[l, shift left, "i_o \otimes V"] & B \widehat{\otimes}_k V \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[l, "i \widehat{\otimes} V"']
\end{tikzcd}$$

les deux lignes sont donc exactes et les deux carrés de gauche sont cocartésiens. Comme α_1 est inversible, il en va de même pour α_2 , donc pour α. Ceci montre d'une part que A est topologiquement libre sur B de "base j" et qu'on obtient une pseudobase de A_1 sur A (considéré comme A-module au moyen de i_1 ; 0.2.1) en prenant l'image par i_o d'une pseudobase de A sur B ; cela entraîne que le morphisme $A \widehat{\otimes}_B A \longrightarrow A_1$ de composantes i_1 et i_o est inversible :

$$A \widehat{\otimes}_B A \simeq A \widehat{\otimes}_B B \widehat{\otimes}_k V \simeq A \widehat{\otimes}_k V \simeq A_1$$

1.4.3. *LEMME* : *Soient* k *un anneau pseudocompact local,* A *une* k-*algèbre profinie locale,* A_1 *un* A-*module topologiquement libre et* $i_o : M \longrightarrow A_1$ *un morphisme de* k-*modules pseudocompacts tels que l'application* $a \widehat{\otimes} m \longmapsto a.i_o(m)$ *de* $A \widehat{\otimes}_k M$ *dans* A_1 *soit surjective. Il existe alors un* k-*module topologiquement libre* V *et un morphisme de* k-*modules pseudocompacts* $j : V \longrightarrow M$ *tels que l'application* $a \widehat{\otimes} v \longmapsto a.i_o(jv)$ *de* $A \widehat{\otimes}_k V$ *dans* A_1 *soit bijective.*

Comme tout k-module pseudocompact est le quotient d'un k-module topologiquement libre, on peut supposer sans inconvénient que M est topologiquement libre sur k ; prenons donc pour M le produit direct d'une famille $(M_i)_{i \in I}$ d'exemplaires de k . Dans ce cas, $A\widehat{\otimes}_k M$ n'est autre que le produit $\prod_{i \in I} A\widehat{\otimes}_k M_i$, dont chaque facteur est isomorphe à A , donc est projectif et indécomposable. Comme l'application $a\widehat{\otimes}m \longmapsto a.i_o(m)$ est surjective et que A_1 est projectif, le noyau de cette application est un facteur direct de $A\widehat{\otimes}_k M$; il résulte donc du théorème d'échange (0.3.4) que ce noyau a pour supplémentaire un produit partiel $\prod_{i \in J} A\widehat{\otimes}_k M_i$, où J désigne une certaine partie de I .

1.5. Soient k un anneau pseudocompact et (f_i) une famille de morphismes $f_i : X_i \longrightarrow X$ de Vf/k . Nous dirons que (f_i) est une famille surjective topologiquement plate si le morphisme de $\coprod_i X_i$ dans X , qui est induit par les f_i , est surjectif et topologiquement plat ; cela signifie que chaque f_i est topologiquement plat et que tout point de X appartient à l'image d'au moins l'un des X_i .

Il résulte de 1.3.3 que les familles surjectives, topologiquement plates définissent une prétopologie sur Vf/k (IV 4.2.5) ; la topologie correspondante sera appelée la topologie plate sur Vf/k .
Il est clair qu'un foncteur contravariant F de Vf/k dans (Ens) est un faisceau pour la topologie plate si et seulement si F transforme une somme directe en produit direct et si la suite

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \underset{F(pr_2)}{\overset{F(pr_1)}{\rightrightarrows}} F(X \times_Y X)$$

est exacte pour tout morphisme surjectif topologiquement plat $f : X \longrightarrow Y$.

La proposition 1.3.1 entraîne que la topologie plate est moins fine que la topologie canonique. On obtient donc un foncteur i de Vf/k dans la catégorie des faisceaux pour la topologie plate en associant à toute variété formelle X le foncteur $iX : T \longmapsto \mathrm{Hom}_{Vf/k}(T,X)$. Le théorème 1.4 implique que, si $d_o, d_1 : X_1 \rightrightarrows X$ est une relation d'équivalence telle que d_1 soit topologiquement plat, la formation du quotient commute avec i :

$$i(X)/i(X_1) \simeq i(X/X_1) \quad .$$

1.6. Pour terminer ces généralités sur les variétés formelles, il nous reste à définir brièvement les variétés formelles étales :

Une variété formelle X sur k est dite <u>étale</u> , si le morphisme diagonal $\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$ est un isomorphisme local, c'est-à-dire si Δ_X induit un isomorphisme de $\underline{O}_{X\times X, \Delta(x)}$ sur $\underline{O}_{X,x}$ pour tout point x de X . On voit facilement à l'aide de SGA I, que cette formulation est équivalente aux deux suivantes : la variété formelle X est topologiquement plate, et, pour tout point $x \in X$, de projection $s \in \mathrm{Spf}\ k$, $\underline{O}_{X,x} \widehat{\otimes}_k k(s)$ est une extension finie séparable du corps résiduel $k(s)$ de s ; ou encore, si A désigne l'algèbre affine de X , les composantes locales (0.1) de $A \widehat{\otimes}_k (k/\underline{n})$ sont des algèbres finies et étales sur $k/\underline{n}$, quel que soit l'idéal ouvert $\underline{n}$ de k .

Notons Ve/k la sous-catégorie pleine de Vf/k formée des variétés étales. <u>L'inclusion de</u> Ve/k <u>dans</u> Vf/k <u>possède alors un foncteur adjoint à gauche</u> $X \longmapsto X_e$ qu'on peut décrire de la façon suivante : la variété X_e a les mêmes points que X ; de plus, si x est un point de X , de corps résiduel $k(x)$ et de projection s sur $\mathrm{Spf}\ k$, l'algèbre locale

$\underline{O}_{X_e,x}$ est un k-module pseudocompact projectif et $k(s)\hat{\otimes}_k \underline{O}_{X_e,x}$ est isomorphe à la plus grande extension séparable de $k(s)$ contenue dans $k(x)$. Pour tout isomorphisme q_x de $k(s)\hat{\otimes}_k \underline{O}_{X_e,x}$ dans $k(x)$, il y a un morphisme d'algèbres profinies $p_x : \underline{O}_{X_e,x} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ et un seul qui soit compatible avec q_x et avec les projections canoniques de $\underline{O}_{X_e,x}$ et $\underline{O}_{X,x}$ sur $k(s)\hat{\otimes}_k \underline{O}_{X_e,x}$ et $k(x)$. Ces morphismes p_x définissent un morphisme canonique p de X dans X_e , qui est fonctoriel en X . Il résulte de SGA,I que tout morphisme de X dans une variété formelle étale se factorise d'une manière et d'une seule à travers p .

1.6.1. Soient Y une k-variété formelle étale et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de Vf/k . Le morphisme graphe $\Gamma_f : X \longrightarrow X\times Y$, de composantes Id_X et f , est alors l'image réciproque du morphisme diagonal $\Delta_Y : Y \rightarrow Y\times Y$ par le changement de base $f \times Id_Y : X\times Y \longrightarrow Y\times Y$. Il s'ensuit que Γ_f est un isomorphisme local, donc que $f = pr_2 \circ \Gamma_f$ est topologiquement plat si pr_2 l'est, par exemple si X est topologiquement plat sur k . Réciproquement, comme Y est topologiquement plat, X est topologiquement plat sur k si X l'est sur Y (1.3.3). Prenant en particulier pour f le morphisme canonique $p : X \longrightarrow X_e$ de 1.6 , on voit que X <u>est topologiquement plat sur</u> X_e <u>si et seulement si</u> X <u>l'est sur</u> k.

2. Généralités sur les groupes formels

2.1. Soient k un anneau pseudocompact et G un k-groupe formel, c'est-à-dire un groupe de la catégorie Vf/k des variétés formelles sur k. Si A est l'algèbre affine de G, la loi de composition de G définit évidemment un morphisme diagonal, c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $\Delta_A : A \longrightarrow A \widehat{\otimes}_k A$; cet homomorphisme vérifie les conditions suivantes :

(i) le diagramme

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \underset{A \widehat{\otimes} \Delta_A}{\overset{\Delta_A \widehat{\otimes} A}{\rightrightarrows}} A \widehat{\otimes}_k A \widehat{\otimes}_k A$$

est commutatif.

(ii) il existe une augmentation (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $\varepsilon_A : A \longrightarrow k$ tel que les applications composées

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{\varepsilon_A \otimes A} k \widehat{\otimes}_k A \simeq A$$

et

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{A \widehat{\otimes} \varepsilon_A} A \widehat{\otimes}_k k \simeq A$$

soient les applications identiques de A.

(iii) il existe un antipodisme (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $c_A : A \longrightarrow A$ tel que l'application composée

$$A \xrightarrow{\Delta_A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{c_A \widehat{\otimes} A} A \widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{m_A} A$$

soit égale à $\eta_A \circ \varepsilon_A$, si l'on note m_A l'application linéaire qui envoie $a \hat{\otimes} b$ sur $a.b$ et η_A l'application $\lambda \longmapsto \lambda.1_A$ de k dans A .

Il est clair que, réciproquement, tout morphisme diagonal Δ_A vérifiant (i), (ii) et (iii) induit un morphisme de $G \times G$ dans G , qui fait de G un groupe formel sur k .

Dans la suite, nous appellerons <u>idéal d'augmentation</u> de A l'idéal $I_A = \varepsilon_A^{-1}(0)$. Nous noterons $\omega_{G/k}$ le k-module pseudocompact $I_A/\overline{I_A^2}$, c'est-à-dire le quotient de I_A par l'idéal fermé engendré par les produits $x.y$, $x,y \in I_A$.

2.2. Soit $\underline{H}$ un groupe de la catégorie des Coalgèbres sur $\underline{\underline{k}}$ (1.2.2). Pour toute k-algèbre $C \in Alf/k$, $\underline{H}(C)$ est donc muni d'une structure de C-coalgèbre en groupes (VII_A 3.2 ; à la suite de Manin, nous dirons <u>bi-algèbre</u> au lieu de coalgèbre en groupes) ; de plus, si $\varphi : C \longrightarrow D$ est un morphisme de Alf/k , l'application $d \otimes x \longmapsto d.(\underline{H}(\varphi)(x))$ de $D \otimes_C \underline{H}(C)$ dans $\underline{H}(D)$ est un homomorphisme de bialgèbres sur D . Nous résumerons ces propriétés en disant que $\underline{H}$ est une <u>bialgèbre</u> sur $\underline{\underline{k}}$.

Il est clair que le foncteur $\underline{H} \longmapsto \mathrm{Spf}^* \underline{H}$ de 1.3.5 commute aux produits finis. Il transforme donc une bialgèbre sur $\underline{\underline{k}}$ en un k-<u>foncteur en groupes</u>, c'est-à-dire en un foncteur de Alf/k dans la catégorie des groupes; et en effet, pour toute k-algèbre de longueur finie C , les éléments x de $\underline{H}(C)$ appartenant à $(\mathrm{Spf}^*\underline{H})(C)$ forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre $\underline{H}(C)$ (confer VII_A 3.2.2) : rappelons que ces éléments x sont tels que $\varepsilon_{\underline{H}(C)}(x) = 1$ et $\Delta_{\underline{H}(C)}(x) = x \otimes x$. La deuxième condition entraîne d'ailleurs l'égalité $\varepsilon_{\underline{H}(C)}(x) = \varepsilon_{\underline{H}(C)}(x)\varepsilon_{\underline{H}(C)}(x)$, donc aussi $\varepsilon_{\underline{H}(C)}(x) = 1$ si k est local.

2.2.1. Une bialgèbre $\underline{H}$ sur $\underline{\underline{k}}$ est dite plate si le module sous-jacent est plat (1.2.1). Si $\underline{H}$ est plate, il est clair que le k-foncteur $\mathrm{Spf}^*\underline{H}$ est exact à gauche. Il est donc isomorphe à $C \longmapsto \mathrm{Hom}_{Vf/k}(\mathrm{Spf}\ C, \mathcal{G}(\underline{H}))$ pour un certain groupe formel $\mathcal{G}(\underline{H})$; il résulte de VII_A 3.2.2 et 1.3.5 qu'on peut décrire $\mathcal{G}(\underline{H})$ de la manière suivante : soit $\underline{H}^*$ le k-module pseudocompact dual de $\underline{H}$ (1.2.3). Les morphismes diagonaux des hyperalgèbres $\underline{H}(C)$ induisent une multiplication sur $\underline{H}^*$ qui fait de $\underline{H}^*$ une k-algèbre profinie. La multiplication dans les hyperalgèbres $\underline{H}(C)$ induit dans $\underline{H}^*$ un morphisme diagonal vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de 2.1 Il reste à poser

$$\mathcal{G}(\underline{H}) = \mathrm{Spf}\ \underline{H}^*$$

Réciproquement, soit G un k-groupe formel topologiquement plat, d'algèbre affine A et posons $\underline{H}(G) = \underline{A}^*$ (1.2.3). Le morphisme diagonal $\Delta_A : A \longrightarrow A\widehat{\otimes}_k A$ induit alors, pour toute k-algèbre de longueur finie C, une application linéaire de $\underline{A}^*(C)\otimes_C \underline{A}^*(C)$ dans $\underline{A}^*(C)$ qui fait de la coalgèbre $\underline{A}^*(C)$ une bialgèbre sur C . On dit que $\underline{H}(G)$ est la bialgèbre du groupe formel G . D'après 1.3.5 , le foncteur $\underline{H} : G \longmapsto \underline{H}(G)$ est une équivalence de la catégorie des k-groupes formels topologiquement plats sur celle des bialgèbres plates sur $\underline{\underline{k}}$. Le foncteur $\mathcal{G}$ est un "inverse à isomorphisme fonctoriel près" de $\underline{H}$.

Lorsque k est un anneau artinien et G un k-groupe formel topologiquement plat , le foncteur $\underline{H}(G)$ est évidemment déterminé par sa valeur $H(G) = \underline{H}(G)(k)$ en k . On dit aussi que H(G) est la bialgèbre de G . Le foncteur $H : G \longmapsto H(G)$ est alors une équivalence de la catégorie des k-groupes formels topologiquement plats sur la catégorie des bialgèbres plates sur k .

2.2.2. Supposons pour simplifier k artinien et soit G un k-groupe formel, commutatif, topologiquement plat. Dans ce cas, la bialgèbre $H(G)$ a une multiplication commutative, de sorte que $H(G)$ est un co-groupe dans la catégorie des k-algèbres commutatives (VII_A 3.3).
Si k *est artinien, on voit donc que le foncteur* $G \longmapsto \operatorname{Spec} H(G)$ *est une antiéquivalence de la catégorie des* k-*groupes formels commutatifs topologiquement plats sur celle des schémas en groupes commutatifs qui sont affines et plats sur* k .

Lorsque k *est un corps, on obtient ainsi une antiéquivalence de la catégorie des* k-*groupes formels commutatifs sur celle des* k-*schémas affines en groupes commutatifs*.

2.3. Considérons maintenant un k-groupe formel arbitraire G d'algèbre affine A . Notons toujours $\underline{H}(G)$ le $\underline{\underline{k}}$-module $\underline{A}^*$ dual de A et désignons par φ_G l'homomorphisme fonctoriel

$$\varphi_G : \underline{H}(G) \otimes_k \underline{H}(G) \longrightarrow \underline{H}(G \times G)$$

qui est induit par les applications canoniques

$$(A \widehat{\otimes}_k C)^* \otimes_C (A \widehat{\otimes}_k C)^* \longrightarrow ((A \widehat{\otimes}_k C) \widehat{\otimes}_C (A \widehat{\otimes}_k C))^* \quad , \qquad C \in \mathrm{Alf}/k$$

(0.3.6). Si $m : G \times G \longrightarrow G$ est le morphisme structural de G , l'application composée

$$\underline{H}(G) \otimes_k \underline{H}(G) \xrightarrow{\ \varphi_G\ } \underline{H}(G \times G) \xrightarrow{\ \underline{H}(m)\ } \underline{H}(G)$$

fait de $\underline{H}(G)$ une algèbre sur $\underline{\underline{k}}$; pour tout $C \in \mathrm{Alf}/k$, l'élément unité de $\underline{H}(G)(C) = (A \widehat{\otimes}_k C)^*$ est l'augmentation de $A \widehat{\otimes}_k C$ (2.1). Nous dirons que $\underline{H}(G)$ est *l'algèbre du groupe* G .

Lorsque G est topologiquement plat sur k , φ_G est un isomorphisme et la structure d'algèbre que nous venons de définir coïncide évidemment avec celle de 2.2.1. Dans le cas général cependant, φ_G n'est pas inversible, de sorte que le morphisme $\delta_G : \underline{H}(G) \longrightarrow \underline{H}(G\times G)$, qui est induit par le morphisme diagonal "$x \longmapsto (x,x)$" de G dans $G\times G$, ne se factorise pas canoniquement à travers $\underline{H}(G)\otimes_k\underline{H}(G)$.

2.3.1. PROPOSITION : *Soient* K *et* G *deux* k-*groupes formels* , K *étant topologiquement plat sur* k . *Il existe alors une bijection canonique de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{k\text{-}Gr}(K,G)$ *des homomorphismes de* k-*groupes formels de* K *dans* G *sur l'ensemble des homomorphismes de* $\underline{k}$-*algèbres unitaires* $h : \underline{H}(K) \longrightarrow \underline{H}(G)$ *tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\underline{H}(K)\otimes_k\underline{H}(K) \arrow[r, "h\otimes h"] & \underline{H}(G)\otimes_k\underline{H}(G) \arrow[dr, "\varphi_G"] & \\
 & & \underline{H}(G\times G) \\
\underline{H}(K) \arrow[uu, "\Delta_{\underline{H}(K)}"] \arrow[r, "h"] & \underline{H}(G) \arrow[ur, "\delta_G"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Comme K est topologiquement plat, $\underline{H}(K)$ est muni d'une structure de bialgèbre (2.2) et $\Delta_{\underline{H}(K)}$ en est le morphisme diagonal; autrement dit, on a $\Delta_{\underline{H}(K)} = \varphi_K^{-1}\circ\delta_K$. Lorsque G est aussi topologiquement plat sur k , notre proposition résulte de l'équivalence de catégories définie en 2.2.1.

Dans le cas général, on peut supposer k artinien et raisonner sur les algèbres $H(K)$ et $H(G) = \underline{H}(G)(k)$. Soient alors B et A les algèbres affines de K et G , $\mathrm{Hom}_c(A,B)$ l'ensemble des applications k-linéaires continues de A dans B et $\mathrm{Hom}_k(B^*,A^*)$ l'ensemble des applications k-linéaires de B^* dans A^* . On sait que l'application canonique $f \longmapsto f^*$ de $\mathrm{Hom}_c(A,B)$ dans $\mathrm{Hom}_k(B^*,A^*)$ est bijective lorsque B est un k-module pseudocompact projectif. Comme cette application est en outre fonctorielle en A et B , on voit facilement que f est compatible avec les morphismes diagonaux de A et B si et seulement si f^* est compatible avec la multiplication de A^* et celle de B^*. De même, f est compatible avec la multiplication de B et celle de A si et seulement si le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B^*\otimes_k B^* \arrow[r, "f^*\otimes f^*"] & A^*\otimes_k A^* \arrow[dr, "\text{can.}"] & \\
& & (A\widehat{\otimes}_k A)^* \\
B^* \arrow[uu, "\Delta_B"] \arrow[r, "f^*"] & A \arrow[ur, "m_A^*"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif (m_A désigne l'application linéaire $a\widehat{\otimes}a' \longmapsto a.a'$ de $A\widehat{\otimes}_k A$ dans A).

Enfin, si f est un homomorphisme d'algèbres unitaires et est compatible avec les morphismes diagonaux, on a $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$, de sorte que f^* envoie l'élément unité de B^* sur celui de A^* . Réciproquement, si f^* est un homomorphisme d'algèbres unitaires qui rend commutatif le diagramme ci-dessus, f est compatible avec les multiplications et les morphismes diagonaux et l'on a $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$. On en déduit les égalités $\varepsilon_B f(1) = 1$, $f(1).f(1) = f(1)$ et $\Delta_B f(1) = f(1)\widehat{\otimes} f(1)$.

si c_B est l'antipodisme de B, il résulte de 2.1 (iii) que $f(1)$ a un inverse $c_B f(1)$ dans B, donc que $f(1)$ est l'élément unité de B.

2.3.2. Supposons maintenant pour simplifier l'anneau k artinien. Lorsque G est topologiquement plat sur k, l'algèbre $H(G) = \underline{H}(G)(k)$ peut être caractérisée par une propriété universelle (CARTIER) : soient U une k-algèbre (associative, avec élément unité) et U_m le k-foncteur en groupes qui associe à toute k-algèbre de longueur finie C le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $U \otimes_k C$; identifions G au k-foncteur en groupes $C \longmapsto \mathrm{Hom}_{Vf/k}(\mathrm{Spf}\ C, G)$ et notons $\mathrm{Hom}_{k\text{-}Gr}(G, U_m)$ l'ensemble des homomorphismes de k-foncteurs en groupes de G dans U_m. On a la

PROPOSITION : Pour tout groupe formel G topologiquement plat sur un anneau artinien k et pour toute k-algèbre U, il y a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}Gr}(G, U_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-}Al}(H(G), U)$$

Soient en effet X une variété formelle sur k, M un k-module et $W(M)$ le k-foncteur $C \longmapsto M \otimes_k C$; de plus, notons $\mathrm{Hom}_k(X, W(M))$ l'ensemble des morphismes de k-foncteurs de X dans $W(M)$; si A est l'algèbre affine de X et si $\underline{\ell}$ parcourt les idéaux ouverts de A, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_k(X, W(M)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spf}\ A/\underline{\ell}, W(M)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim M \otimes_k (A/\underline{\ell})$$

et des applications linéaires

$$M\otimes_k(A/\underline{\ell}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k((A/\underline{\ell})^*,M)$$

qui envoient $u\otimes x$ sur l'application k-linéaire $f \longmapsto f(x).u$. Par passage à la limite projective, on obtient donc des applications

$$\mathrm{Hom}_k(X,W(M)) \xrightarrow{\sim} M\widehat{\otimes}_k A \xrightarrow{\Psi_A} \mathrm{Hom}_k(A^*,M)$$

où $M\widehat{\otimes}_k A$ désigne la limite projective des k-modules $M\widehat{\otimes}_k(A/\underline{\ell})$. L'application Ψ_A ne fait évidemment intervenir que la structure de k-module pseudocompact de A ; de plus, cette application est bijective lorsque A est égal à k, donc plus généralement lorsque A est un k-module pseudo-compact projectif (le foncteur $N \longmapsto M\widehat{\otimes}_k N$ commute aux produits infinis).

Supposons maintenant X égal à G et M à U. Pour toute k-algèbre de longueur finie C, la multiplication fait alors de $U\otimes_k C$ un monoïde à élément unité ; de plus, il est clair que $\mathrm{Hom}_{k\text{-}Gr}(G,U_m)$ est la partie de $\mathrm{Hom}_k(G,W(U))$ qui est formée des homomorphismes de k-foncteurs en monoïdes à élément unité. Lorsque A est un k-module pseudocompact projectif, il résulte du caractère fonctoriel de Ψ_A que ces homomorphismes correspondent aux applications k-linéaires de A dans U qui sont compatibles avec la multiplication et avec les éléments unité de A et U.

2.4. Revenons maintenant à un anneau pseudocompact quelconque k pour appliquer aux groupes formels les résultats du § 1 sur le passage au quotient par une relation d'équivalence topologiquement plate.

Si $u : F \longrightarrow G$ est un monomorphisme de k-groupes formels, $\mu : G\times G \longrightarrow G$ le morphisme "multiplication" de G et λ le morphisme composé

$$\lambda \ : \ F \times G \xrightarrow{u \times \mathrm{Id}_G} G \times G \xrightarrow{\mu} G \qquad ,$$

on sait en effet que le couple

$$F \times G \ \underset{\lambda}{\overset{pr_2}{\rightrightarrows}} \ G$$

est un couple d'équivalence (V 2a et VI 3.1). *Si* F *est topologiquement plat sur* k , pr_2 est topologiquement plat et nous pouvons appliquer le théorème 1.4 : *la projection canonique* p *de* G *sur la variété* $F \backslash G$ *des classes à gauche de* G *modulo* F *est donc topologiquement plate* ; d'autre part, le morphisme $F \times G \longrightarrow G_{F} \times_{\backslash G} G$ de composantes λ et pr_2 est inversible ; lorsque T est une variété formelle de longueur finie sur k et x,y deux éléments de $G(T)$, x et y ont donc même image dans $(F \backslash G)(T)$ si et seulement si il y a un z dans $F(T)$ tel $y = u(z).x$. Prenant pour x le morphisme nul, qui se factorise à travers la section unité de G , on voit que y *a même image dans* $(F \backslash G)(T)$ *que l'élément unité de* $G(T)$ *si et seulement si* y *appartient à l'image de* $F(T)$ *par* $u(T)$.

En particulier, *si* u *est un isomorphisme de* F *sur un sous-groupe distingué de* G , le morphisme structural de $G \times G$ dans G induit manifestement par passage au quotient une structure de groupe formel sur $F \backslash G$; ce qui précède montre alors que u *est un isomorphisme de* F *sur* $\operatorname{Ker} p$.

2.4.1. Soients $f : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de k-groupes formels, F le noyau de f et u l'inclusion de F dans G . *Si* F *est topologiquement*

<u>plat sur</u> k , <u>l'homomorphisme</u> $f' : F\backslash G \longrightarrow H$, <u>qui est induit par</u> f , <u>est un monomorphisme</u> : c'est une conséquence des résultats de l'exposé IV ; nous en donnons cependant une démonstration directe : soient T une variété formelle de longueur finie sur k et t un élément de $(F\backslash G)(T)$ tel que $f\mathfrak{d}t$ soit l'élément unité de $H(T)$. Nous devons montrer que t est l'élément unité de $(F\backslash G)(T)$; comme la projection canonique pr_1 de $T_F\overset{\times}{\backslash}{}_G G$ sur T est surjective et topologiquement plate (2.4), il suffit de montrer (1.3.1) que $t\circ pr_1$ est l'élément unité de $(F\backslash G)(T_F\overset{\times}{\backslash}{}_G G)$. Comme on a $t\circ pr_1 = p\circ pr_2$, si pr_2 est la projection canonique de $T_F\overset{\times}{\backslash}{}_G G$ sur G , l'égalité $1 = f\mathfrak{d}(p\circ pr_2) = f\circ pr_2$ et la suite exacte

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H$$

montrent que pr_2 se factorise à travers F , donc que $p\circ pr_2$ est nul.

Si B , C et D sont les algèbres affines de G , H et $F\backslash G$, $p : G \longrightarrow F\backslash G$ induit donc une injection de D dans B et f' induit une surjection de C dans D (1.3). Par conséquent, D <u>est l'image de</u> C <u>dans</u> B .

2.4.2. <u>Supposons maintenant</u> F <u>et</u> G <u>topologiquement plats sur</u> k : comme G est topologiquement plat sur k et sur $F\backslash G$, $F\backslash G$ est topologiquement plat sur k (1.3.3) ; il est clair d'autre part qu'on a $\mathrm{Coker}\, f = \mathrm{Coker}\, f'$; comme f' est un monomorphisme, la projection canonique de H sur Coker f' est topologiquement plate et f' est un isomorphisme de $F\backslash G$ sur Ker q ; si Ker f et G sont topologiquement plats sur k , on voit donc qu'on a les égalités $\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Im}\, f$; d'où

<u>THEOREME</u> : <u>Les groupes formels commutatifs sur un corps forment une catégorie abélienne</u>.

<u>Corollaire</u> : <u>Les schémas affines en groupes commutatifs sur un corps forment une catégorie abélienne</u>.

Ceci résulte de 2.2.2.

2.5. Un k-groupe formel est dit <u>étale</u> si la variété formelle sous-jacente est étale (1.6) ; ces groupes formels ont une structure très simple : <u>supposons</u> en effet k <u>local</u> ; soient $\bar{k}$ le corps résiduel de k, $\bar{k}_s$ une clôture séparable de k et Γ le groupe de Galois topologique de $\bar{k}_s$ sur $\bar{k}$; appelons Γ-<u>ensemble</u> la donnée d'un ensemble E et d'une opération continue de Γ sur E (le groupe d'isotropie d'un élément $x \in E$ est donc un sous-groupe ouvert de Γ). Associons enfin à toute variété formelle X sur k la limite inductive $X(\bar{k}_s)$ des ensembles $X(\ell)$, ℓ parcourant les extensions finies de $\bar{k}$ contenues dans $\bar{k}_s$. Il est clair que Γ opère continûment dans $X(\bar{k}_s)$ et il résulte de SGA I 8.3, que le foncteur $X \longmapsto X(\bar{k}_s)$ est une équivalence de la catégorie des variétés formelles étales sur k sur celle des Γ-ensembles.

<u>Ce foncteur</u> $X \longmapsto X(\bar{k}_s)$ <u>induit donc une équivalence de la catégorie des groupes formels étales sur</u> k (local) <u>sur celle des</u> Γ-<u>groupes</u>, c'est-à-dire des groupes de la catégorie des Γ-ensembles (un tel Γ-groupe consiste donc en la donnée d'un groupe abstrait G et d'une opération continue de Γ sur G par automorphismes de groupes).

2.5.1. Supposons de nouveau l'anneau pseudocompact k quelconque. Il est clair que le foncteur $G \longmapsto G_e$ de 1.6.1 commute aux produits finis. Il transforme donc un groupe formel en un groupe formel étale. De plus, comme le morphisme $p : G \longrightarrow G_e$ de 1.6 est fonctoriel en G, c'est un homomorphisme de groupes formels lorsque G est muni d'une structure de groupe ; considérons le noyau de cet homomorphisme : comme p induit une bijection sur les ensembles sous-jacents, $\operatorname{Ker} p$ a pour ensemble sous-jacent l'image de $\operatorname{Spf} k$ par la section unité; si nous identifions les ensembles sous-jacents à $\operatorname{Spf} k$ et $\operatorname{Ker} p$ au moyen de cette section unité, G_e a même algèbre locale que $\operatorname{Spf} k$ en un point g de $\operatorname{Ker} p$; par conséquent, $\operatorname{Ker} p$ a pour algèbre locale en g le produit tensoriel $k \hat{\otimes}_k \underline{O}_{G,g}$, c'est-à-dire $\underline{O}_{G,g}$. Pour ces raisons nous dirons que $\operatorname{Ker} p$ est <u>le voisinage infinitésimal de l'origine</u> de G et nous écrirons $\operatorname{Ker} p = G_o$, obtenant ainsi une suite exacte

$$1 \longrightarrow G_o \xrightarrow{\text{incl.}} G \xrightarrow{p} G_e$$

Dans la suite, nous dirons que G est infinitésimal si $G = G_o$.

<u>Lorsque</u> G <u>est un groupe formel topologiquement plat sur</u> k, $p : G \longrightarrow G_e$ est surjectif et topologiquement plat d'après 1.6.1, de sorte que G_e s'identifie au quotient G/G_o et que <u>l'on a une suite exacte</u>

$$1 \longrightarrow G_o \xrightarrow{\text{incl.}} G \xrightarrow{p} G_e \longrightarrow 1$$

2.5.2. Dans le cas où k est un corps parfait, le foncteur $X \mapsto X_e$ de 1.6 est aussi adjoint à droite à l'inclusion de Ve/k dans Vf/k : de façon précise, si k est un corps parfait, X_e a les mêmes points que X et a pour algèbre locale en un point x le corps résiduel de $\underline{O}_{X,x}$. Les projections canoniques des algèbres $\underline{O}_{X,x}$ sur leurs corps résiduels définissent donc une section $s : X_e \longrightarrow X$ de p . Cette section dépend fonctoriellement de X ; c'est donc un homomorphisme de groupes formels lorsque X est un groupe formel.

Lorsque k *est un corps parfait, on voit donc qu'un groupe formel* G *sur* k *est canoniquement isomorphe au produit semi-direct d'un groupe infinitésimal* G_o *et d'un groupe étale* G_e *opérant sur* G_o .

Si, de plus, nous supposons G commutatif, G est le produit de G_o et de G_e . Cette décomposition des groupes formels commutatifs sur k correspond à une décomposition analogue des k-schémas affines en groupes commutatifs (2.2.2) : disons qu'un schéma en groupes commutatifs sur un corps k est *de type multiplicatif* (resp. *unipotent*) s'il est isomorphe à $\operatorname{Spec} H(G)$, où G est un k-groupe formel commutatif étale (resp. infinitésimal). D'après 2.5.1 , tout schéma affine en groupes commutatifs G sur un corps k contient un sous-groupe de type multiplicatif G_m tel que G/G_m soit unipotent. Lorsque k est parfait, 2.5.1 entraîne en outre l'existence d'une rétraction canonique de G sur G_m , de sorte que G est le produit d'un groupe unipotent et d'un groupe de type multiplicatif.

2.6. Nous allons maintenant étudier les groupes formels infinitésimaux, auxquels sont consacrés les paragraphes suivants. Dans cette étude, les *algèbres de Lie* jouent un rôle primordial.

Supposons d'abord *l'anneau de base* k *artinien* et soit G un groupe formel sur k . On peut donner de l'algèbre de Lie de G trois interprétations différentes que nous utiliserons toutes :

a) Soient D l'algèbre $k[d]/(d^2)$ des nombres duaux sur k et δ l'homomorphisme de D dans k qui annule d. Pour tout groupe formel G sur k, $\mathrm{Lie}\, G$ est le noyau de $G(\delta)$, de sorte qu'on a par définition une <u>suite exacte de groupes</u>

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}\, G \longrightarrow G(D) \longrightarrow G(k) \longrightarrow 1$$

b) Si G a A pour algèbre affine, le groupe $G(D)$ a pour éléments les homomorphismes d'algèbres profinies $f : A \longrightarrow D$. La condition $G(\delta)(f) = 1$ équivaut à $\delta \circ f = \varepsilon_A$. Pour tout $x \in A$, on a donc la relation

$$f(x) = \varepsilon_A(x).1_D + f'(y).d \quad ,$$

où f' est une application linéaire continue de $I_A/\overline{I_A^2}$ dans k et où y est la classe de $x - \varepsilon_A(x).1_A$ modulo $\overline{I_A^2}$. Il est clair que <u>l'application</u> $f \longmapsto f'$ <u>est une bijection de</u> $\mathrm{Lie}\, G$ <u>sur le dual topologique de</u> $\omega_{G/k}$ (0.2.2 et 2.1). Cette bijection respecte évidemment les structures de groupe : soient en effet f et g deux éléments de $\mathrm{Lie}\, G$. Leur produit est l'application composée $h \circ \Delta_A$, où $h : A \widehat{\otimes} A \longrightarrow D$ est tel que $h(a \widehat{\otimes} b) = f(a).g(b)$. Mais il résulte de 2.1 (ii) qu'on a $\Delta_A a - a \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} a \in I_A \widehat{\otimes} I_A$ lorsque $a \in I_A$; si $a \in I_A$, on a par conséquent $(f.g)(a) = f(a) + g(a)$ (confer aussi II 3/10).

Dans la suite, nous identifions $\mathrm{Lie}\, G$ à $\omega^*_{G/k}$ au moyen de la bijection $f \longmapsto f'$ décrite ci-dessus. <u>Le groupe</u> $\mathrm{Lie}\, G$ <u>est donc muni d'une structure de</u> k-<u>module</u>.

c) Soient A^* et D^* les k-modules duaux de A et D, $\{1_D^*, d^*\}$ la base duale de la base $\{1_D, d\}$ de D sur k ($1_D^* = \delta$) . Comme D est libre de rang fini sur k, l'application canonique $f \longmapsto f^*$ de l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(A,D)$ des morphismes de k-modules pseudocompacts de A dans D dans $\mathrm{Hom}_k(D^*,A^*)$ est bijective. D'un autre côté, f^* est déterminé par les valeurs $f^*(1_D^*)$ et $f^*(d^*) = x$. La condition $G(\delta)(f) = 1$ équivaut à l'égalité $f^*(1_D^*) = \varepsilon_A$. On voit aisément d'autre part que f est compatible avec la multiplication si et seulement si l'on a

$$(*) \qquad \delta_G x = \varphi_G(x\otimes 1 + 1\otimes x) \qquad (\text{cf. } 2.3).$$

Enfin, il est clair qu'une application linéaire continue $f : A \longrightarrow D$, qui est compatible avec la multiplication et telle que $\delta \circ f = \varepsilon_A$, envoie élément unité sur élément unité. L'application $f \longmapsto x$ nous permet donc d'identifier Lie G à la partie de $H(G)$ formée des éléments vérifiant la relation (*). Si x et y sont deux éléments de $H(G)$ vérifiant (*) , on a

$$\delta_G(xy) = (\delta_G x)(\delta_G y) = \varphi_G((x\otimes 1 + 1\otimes x)(y\otimes 1 + 1\otimes y)) =$$

$$= \varphi_G(xy\otimes 1 + x\otimes y + y\otimes x + 1\otimes xy) \quad ,$$

d'où $$\delta_G(xy - yx) = \varphi_G((xy - yx)\otimes 1 + 1\otimes(xy - yx))$$

Ceci montre que le k-module Lie G est identifié à une sous-algèbre de Lie de $H(G)$: nous dirons que Lie G <u>est l'algèbre de Lie de</u> G .

2.6.1. Lorsque k est un anneau pseudocompact arbitraire et G un groupe formel sur k, nous appelons $\underline{\underline{k}}$-algèbre de Lie de G le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}\, G$ qui associe à toute k-algèbre profinie de longueur finie C l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(G \otimes_k C)$ de $G \widehat{\otimes}_k C$ sur C (1.2.3) ; cette algèbre de Lie est plate sur $\underline{\underline{k}}$ lorsque $\omega_{G/k}$ est un k-module pseudocompact projectif.

2.6.2. Réciproquement, toute algèbre de Lie $\underline{L}$ sur $\underline{\underline{k}}$ définit un k-foncteur en groupes : désignons en effet par $\underline{U}(\underline{L})$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre de longueur finie C l'algèbre enveloppante $U(\underline{L}(C))$ de l'algèbre de Lie $\underline{L}(C)$ sur C. D'après VII_A 3.2.2, $\underline{U}(\underline{L})$ est une bialgèbre sur $\underline{\underline{k}}$ et détermine un k-foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^*\underline{U}(\underline{L})$ (2.2) que nous noterons désormais $\mathcal{G}(\underline{L})$: $\mathcal{G}(\underline{L})(C)$ est donc le groupe des éléments $z \in U(\underline{L}(C))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{U(\underline{L}(C))}(z) = z \otimes z$.

Lorsque $\underline{L}$ est une algèbre de Lie plate sur $\underline{\underline{k}}$, la bialgèbre $\underline{U}(\underline{L})$ est plate sur $\underline{\underline{k}}$ d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (Bourbaki, Alg. de Lie, I 2.7); par conséquent, $\mathcal{G}(\underline{L})$ est un groupe formel topologiquement plat sur k qui a $\underline{U}(\underline{L})$ pour $\underline{k}$-bialgèbre. Ce groupe est radiciel : en effet, on se ramène directement au cas où k est artinien (2.6). Posons alors $U = U(L)$ et soit U^+ l'idéal bilatère de U engendré par l'image de L. Posons en outre

$$U_o = k.1_U$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_n = \left\{ u \in U \mid \Delta_U u - u \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+ \right\}$$

et $\quad U_n^+ = U_n \cap U^+$.

D'après 1.3.6 , il suffit de montrer que U est la réunion des U_n . Or, si l'on identifie L à son image canonique dans U , L est évidemment contenu dans U_1 . Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de L , on a donc $\Delta_U(x_1 \dots x_n) = (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1) \dots (x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n)$, ce qui montre, par récurrence sur n , que le produit $x_1 \dots x_n$ appartient à U_n , donc que $U = \bigcup_n U_n$.

2.6.3. Si $\underline{L}$ est une algèbre de Lie plate sur $\underline{\underline{k}}$, le groupe formel $\mathcal{G}(\underline{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle : considérons en effet un homomorphisme h de $\mathcal{G}(\underline{L})$ dans un groupe formel G ; un tel homomorphisme induit un homomorphisme $\underline{\mathrm{Lie}}\, h$ de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}(\underline{L})$ dans celle de G . Composant $\underline{\mathrm{Lie}}\, h$ avec le monomorphisme canonique de $\underline{L}$ dans $\underline{U}(\underline{L})$, on obtient un homomorphisme $h' : \underline{L} \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}\, G$.

PROPOSITION : Si G est un k-groupe formel et L une algèbre de Lie plate sur $\underline{\underline{k}}$, l'application $h \longmapsto h'$ définie ci-dessus est une bijection

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}Gr}(\mathcal{G}(\underline{L}), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\underline{L}, \underline{\mathrm{Lie}}\, G)$$

de l'ensemble des homomorphismes de k-groupes formels de $\mathcal{G}(\underline{L})$ dans G sur celui des morphismes de $\underline{\underline{k}}$-algèbres de Lie de $\underline{L}$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}\, G$.

On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Dans ce cas, $\mathrm{Hom}_{k\text{-}Gr}(\mathcal{G}(\underline{L}), G)$ est en correspondance biunivoque canonique (2.3.1) avec l'ensemble des homomorphismes d'algèbres unitaires $g : U(L) \longrightarrow H(G)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
U(L) \arrow[r, "g"] \arrow[dd, "\Delta_{U(L)}"'] & H(G) \arrow[dr, "\delta_G"] & \\
& & H(G\times G) \\
U(L)\otimes U(L) \arrow[r, "g\otimes g"] & H(G)\otimes H(G) \arrow[ur, "\varphi_G"'] &
\end{tikzcd}$$

Or g est défini par sa restriction à L qui est un homomorphisme d'algèbres de Lie de L dans l'algèbre de Lie sous-jacente à $H(G)$.
La commutativité du diagramme signifie donc simplement que g applique L sur la partie $\mathrm{Lie}\, G$ de $H(G)$ formée des x tels que $\delta_G x = \varphi_G(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$.

2.7. Nous terminons ces généralités sur un énoncé qui remonte à Lie et qui nous servira au paragraphe 5. Un monoïde formel à élément unité sur k est par définition un couple (M,m) formé d'une variété formelle M et d'un morphisme $m : M\times M \longrightarrow M$ tel que $m(C)$ fasse de $M(C)$ un monoïde à élément unité pour tout objet C de Alf/k (0.4.2). En particulier, l'élément unité de $M(k)$ définit une section ε_M de la projection canonique de M sur $\mathrm{Spf}\, k$. Nous dirons que le monoïde formel M est infinitésimal si ε_M induit une bijection des ensembles sous-jacents.

PROPOSITION : Tout k-monoïde formel M topologiquement plat et infinitésimal est un groupe formel.

Nous devons montrer que $M(C)$ est un groupe pour tout objet C de Alf/k. On se ramène donc de suite au cas où k est artinien. Soit alors $U = H(M)$ la coalgèbre de M (1.3.5) ; le morphisme structural m induit un homomorphisme de coalgèbres m_U de $U\otimes U$ dans U, qui fait de U une algèbre associative sur k ; cette algèbre a pour élément unité l'image de l'élément unité de k par l'application de k dans U qui est induite par la section unité ε_M de M. De même, la projection canonique de M sur $\mathrm{Spf}\, k$ induit un homomorphisme ε_U de U dans k ; nous noterons U^+ le noyau de ε_U.

Nous devons montrer qu'il existe un antipodisme, c'est-à-dire un homomorphisme de coalgèbres $c_U : U \longrightarrow U$ tel que l'application composée

$$U \xrightarrow{\Delta_U} U \otimes_k U \xrightarrow{c_U \otimes U} U \otimes_k U \xrightarrow{m_U} U$$

applique $u \in U$ sur $\varepsilon_U(u).1_U$. Comme M est infinitésimal, U^+ est la réunion des sous-modules U_n^+ définis comme en 2.6.2 ; on montre alors facilement, par récurrence sur n, qu'il existe une et une seule application linéaire $c_n : U_n^+ \longrightarrow U_n^+$ telle que l'application composée

$$U_n^+ \xrightarrow{\text{incl.}} U \xrightarrow{\Delta_U} U \otimes U \xrightarrow{c_U \otimes U} U \otimes U \xrightarrow{m_U} U$$

soit nulle. En particulier, c_{n+1} prolonge c_n et l'on pourra poser

$$c_U(x) = \varepsilon_U(x).1_U + c_n(x - \varepsilon_U(x).1_U) \quad ,$$

où n est assez grand pour que U_n^+ contienne $x - \varepsilon_U(x).1_U$.

3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0 .

Dans tout ce paragraphe 3 , nous supposons que l'anneau pseudocompact k contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

3.1. LEMME : Soient C une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative avec élément 1 , L une algèbre de Lie sur C dont le C-module sous-jacent est libre. L'application canonique de L dans l'algèbre enveloppante $U(L)$ est un isomorphisme de L sur l'ensemble des éléments primitifs de $U(L)$.

En effet, identifions L à son image canonique dans $U(L)$; soient I un ensemble totalement ordonné et $(x_i)_{i \in I}$ une base de L indexée par I ; désignons par $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in I}$ d'entiers naturels telles que n_i soit nul sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ (ces indices dépendent de n) ; posons enfin $x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} . x_{i_2}^{n_{i_2}} \dots x_{i_s}^{n_{i_s}}$ et $n! = (n_{i_1}\,!)(n_{i_2}\,!)\dots(n_{i_s}\,!)$. On sait alors que les x^n forment une base de $U(L)$ (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt) et on voit facilement qu'on a

$$(*) \qquad \Delta_{U(L)} \frac{x^n}{n!} = \sum \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

la somme étant étendue à tous les éléments m de $\mathbb{N}^{(I)}$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$ (i.e. tels que $0 \leqslant m_i \leqslant n_i \quad \forall i$). Il s'ensuit évidemment qu'on a $\Delta_{U(L)} u = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des x_i .

3.2. Supposons maintenant C artinien de radical $\underline{r}$. Pour toute C-algèbre U (associative, unitaire), le produit $\underline{r}.U$ est donc formé d'éléments nilpotents ; si x appartient à $\underline{r}.U$, nous poserons

$$\exp_U x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

On obtient ainsi une bijection de $\underline{r}.U$ sur $1 + \underline{r}.U$; la bijection réciproque applique un élément $1 + y$ de $1 + \underline{r}.U$ sur

$$\log_U(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots$$

De plus, il est clair que l'application $\exp_U$ est fonctorielle en U.

L'anneau C étant toujours artinien, supposons U muni d'une structure de bialgèbre sur C (2.2). Pour tout élément primitif x de $\underline{r}.U$ (VII_A 3.2.3), on a alors

$$\Delta_U(\exp_U x) = \exp_{U\otimes U}(\Delta_U x) = \exp_{U\otimes U}(x\otimes 1 + 1\otimes x) =$$

$$\exp_{U\otimes U}(x\otimes 1) \,.\, \exp_{U\otimes U}(1\otimes x) = ((\exp_U x)\otimes 1).(1\otimes(\exp_U x)) = \exp_U x\otimes \exp_U x \;.$$

On voit donc que la bijection $\exp_U$ transforme un élément primitif de $\underline{r}.U$ en un élément z de $1 + \underline{r}.U$ tel que $\Delta_U z = z\otimes z$ et la réciproque est claire.

Considérons en particulier une algèbre de Lie L plate sur C, prenons pour U l'algèbre enveloppante $U(L)$ de L sur C et identifions L à son image canonique dans U. D'après le lemme 3.1, L est donc l'ensemble des éléments primitifs de U (en effet L est un produit de modules libres sur les composantes locales de C). Considérons d'autre part le quotient $\bar{C} = C/\underline{m}$ de C par un idéal maximal $\underline{m}$. Comme le $\bar{C}$-groupe formel $\mathcal{G}(L\otimes_C\bar{C})$, qui a $U(L\otimes_C\bar{C})$ pour bialgèbre, est infinitésimal (2.6.2), l'élément unité de $U(L\otimes_C\bar{C})$ est le seul élément $\bar{z}$ tel que $\Delta_{U(L\otimes_C\bar{C})}\bar{z} = \bar{z}\otimes\bar{z}$. Il s'ensuit que les éléments z de $U(L)$ tels que $\Delta_U z = z\otimes z$ appartiennent nécessairement à $1 + \underline{r}.U$.

Enfin, comme $L \cap \underline{r}.U$ s'identifie à $L\otimes_C\underline{r}$, _on voit_ finalement _que_ $\exp_U$ _définit une bijection de_ $L\otimes\underline{r}$ _sur le groupe_ $\mathcal{G}(L)(C)$. Nous résumons :

PROPOSITION : _Soient_ k _un anneau pseudocompact contenant_ $\mathbb{Q}$, $\underline{L}$ _une algèbre de Lie plate sur_ $\underline{\underline{k}}$, C _une_ k-_algèbre profinie de longueur finie et_ $\underline{r}(C)$ _le radical de_ C. _L'application_

$$\exp_{U(\underline{L}(C))} : \underline{L}(C)\otimes_C\underline{r}(C) \longrightarrow \mathcal{G}(\underline{L})(C)$$

est bijective et fonctorielle en C _et_ $\underline{L}$.

3.2.1. La bijection $\exp_{U(\underline{L}(C))}$ permet de définir par transport de structure une loi de groupe sur l'ensemble $\underline{L}(C)\otimes_C\underline{r}(C)$ (qu'on identifie à une partie de $U(\underline{L}(C))$ comme en 3.2). Si x et y sont deux éléments de $\underline{L}(C)\otimes_C\underline{r}(C)$, cette loi est telle que

$$x.y = \log\left[(\exp x)(\exp y)\right] = \log\Big(1 + \sum_{p+q>0} \frac{x^p}{p!}\,\frac{y^q}{q!}\Big) =$$

$$= \sum_{m\geqslant 1}\ \sum_{p_i+q_i>0} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\,\frac{x^{p_1}}{p_1!}\,\frac{y^{q_1}}{q_1!}\cdots\cdots\frac{x^{p_m}}{p_m!}\,\frac{y^{q_m}}{q_m!} = \sum_{\ell\geqslant 1} P_\ell(x,y)$$

où $P_{\ell}(x,y)$ désigne la somme des monômes de degré total ℓ en x et y .
On a par exemple

$$P_1(x,y) = x + y$$

$$P_2(x,y) = \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+xy+yx+y^2)}_{m=2} = \frac{1}{2}(xy-yx) = \frac{1}{2}[x,y]$$

$$P_3(x,y) = \underbrace{\frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}(x^3 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{2}yx^2 + xyx + yxy + \frac{1}{2}y^2x + \frac{3}{2}xy^2 + y^3)}_{m=2}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{3}(x^3+x^2y+yx^2+xyx+yxy+y^2x+xy^2+y^3)}_{m=3}$$

$$= \frac{1}{12}(x^2y+yx^2-2xyx-2yxy+y^2x+xy^2) = \frac{1}{12}\left[[y,x],x\right] + \frac{1}{12}\left[y,[y,x]\right]$$

On peut montrer plus généralement qu'on a

$$P_{\ell}(x,y) = \sum \frac{(-1)^{m+\ell}}{m.\ell} (ad\ y)^{q_m}(ad\ x)^{p_m} \ldots (ad\ y)^{q_2}(adx)^{p_2}(ady)^{q_1}(adx)^{p_1-1}x$$

où $p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m$ parcourent les suites d'entiers naturels telles que $p_i+q_i > 0$ et $\sum (p_i+q_i) = \ell$ (pour une démonstration de cette formule de Campbell-Hausdorff, voir Jacobson, Lie Algebras, V §5 Inter-science Publishers).

3.3. Si G est un k-groupe formel d'algèbre affine A , rappelons qu'on note I_A l'idéal d'augmentation de A et $\omega_{G/k}$ le k-module pseudo-compact $I_A/\overline{I_A^2} \simeq I_A \widehat{\otimes}_A (A/I_A)$.

<u>THEOREME</u> (CARTIER) : <u>Soient</u> k <u>un anneau pseudocompact local contenant le corps</u> $\mathbb{Q}$ <u>et</u> G <u>un groupe formel sur</u> k . <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>Il existe une</u> $\underline{k}$-<u>algèbre de Lie plate</u> $\underline{L}$ <u>telle que</u> G <u>soit isomorphe à</u> $\mathcal{G}(\underline{L})$.

(ii) <u>Il existe un</u> k-<u>module pseudocompact projectif</u> ω <u>tel que la variété formelle sous-jacente à</u> G <u>soit isomorphe à la variété</u> $V_k^o(\omega)$ <u>d'algèbre affine</u> $k[[\omega]]$ (1.2.5).

(iii) G <u>est infinitésimal et</u> $\omega_{G/k}$ <u>est un</u> k-<u>module pseudocompact projectif</u>.

(iv) G <u>est infinitésimal et topologiquement plat sur</u> k .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Soit ω le k-module pseudocompact dual de $\underline{L}$ (1.2.3). Pour toute k-algèbre profinie de longueur finie C , nous devons exhiber un isomorphisme de $V_k^o(\omega)(C)$ sur $\mathcal{G}(\underline{L})(C)$ qui soit fonctoriel en C . D'après 1.2.5 , $V_k^o(\omega)(C)$ s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega,\underline{r}(C))$ des applications k-linéaires continues de ω dans le radical de C . Cet ensemble est naturellement isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega\widehat{\otimes}_k C,\underline{r}(C))$ des applications C-linéaires continues de $\omega\widehat{\otimes}_k C$ dans $\underline{r}(C)$; enfin, comme $\omega\widehat{\otimes}_k C$ est un C-module pseudocompact projectif, l'application canonique

$$(\omega\widehat{\otimes}_k C)^* \otimes_C \underline{r}(C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(\omega\widehat{\otimes}_k C,\underline{r}(C))$$

est bijective. Comme $(\omega\widehat{\otimes}_k C)^*$ s'identifie à $\underline{L}(C)$, on voit finalement que $V_k^o(\omega)(C)$ est canoniquement isomorphe à $\underline{L}(C)\otimes_C\underline{r}(C)$. L'implication

(i) $\Longrightarrow$(ii) résulte donc de la proposition 3.2.

(ii) $\Longrightarrow$(iii) : Soit h un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur l'algèbre affine A de G . Composant h avec l'augmentation ε_A (2.1), on obtient un homomorphisme $\varepsilon_A h : k[[\omega]] \to k$, qui est déterminé par la restriction λ de $\varepsilon_A h$ à ω; cette restriction envoie ω dans le radical $\underline{r}$ de k et l'application $x \longmapsto x - \lambda(x)$ de ω dans le radical de $k[[\omega]]$ se prolonge en un endomorphisme ℓ_λ de $k[[\omega]]$. Les égalités $\ell_\lambda \circ \ell_{-\lambda} = \ell_{-\lambda} \circ \ell_\lambda = \mathrm{Id}_{k[[\omega]]}$ montrent que ℓ_λ est un automorphisme de $k[[\omega]]$. Par conséquent, $h \circ \ell_\lambda$ est un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur A et $\varepsilon_A h \ell_\lambda$ applique ω sur O . Quitte à remplacer h par $h\ell_\lambda$, on peut donc supposer que $\varepsilon_A h$ s'annule sur l'idéal fermé I de $k[[\omega]]$ qui est engendré par ω : dans ce cas, h induit une bijection de $I/\overline{I^2}$ sur $I_A/\overline{I_A^2}$; comme $I/\overline{I^2}$ s'identifie à ω , on voit que $\omega_{G/k}$ est projectif. Il est clair d'autre part que Spf $V_k^\circ(\omega)$ est infinitésimal de même que G .

(iii) $\Longrightarrow$(i) : Soit en effet $\underline{L}$ la $\underline{\underline{k}}$-algèbre de Lie de G ; cette algèbre a pour $\underline{\underline{k}}$-module sous-jacent le dual de $\omega_{G/k}$ (2.1) ; par conséquent, $\underline{L}$ est plat sur $\underline{\underline{k}}$. Si nous identifions $k[[\omega_{G/k}]]$ à l'algèbre affine du groupe formel $\mathcal{G}(\underline{L})$ (cela est possible d'après (i) $\Longrightarrow$(ii)) , le morphisme identique de $\underline{L}$ est associé canoniquement à un homomorphisme de $\mathcal{G}(\underline{L})$ dans G (2.6.3), donc à un homomorphisme continu d'algèbres

$$a : A \longrightarrow k[[\omega_{G/k}]]$$

Il s'agit de montrer que a , qui induit par définition un isomorphisme de $\omega_{G/k}$ sur $\omega_{\mathcal{G}(\underline{L})/k}$, est un isomorphisme :

Pour cela, on considère une section τ de la projection canonique de I_A sur $\omega_{G/k}$. Une telle section définit d'après 1.2.5 un homomorphisme continu d'algèbres

$$b : k[[\omega_{G/k}]] \longrightarrow A$$

Soit I l'idéal fermé de $k[[\omega_{G/k}]]$ engendré par $\omega_{G/k}$ et filtrons $k[[\omega_{G/k}]]$ (resp.A) par les adhérences des idéaux I^n (resp. I_A^n). Le composé $a\tau$ est évidemment une section de la projection canonique de I sur $\omega = I/\overline{I^2}$. Par conséquent, ab induit l'application identique sur $I/\overline{I^2}$, donc aussi sur le gradué associé à $k[[\omega_{G/k}]]$. Il s'ensuit que ab est un isomorphisme (C.A.V, § 7 lemme 1). De plus, b induit un isomorphisme de $I/\overline{I^2}$ sur $I_A/\overline{I_A^2}$, donc une surjection des gradués associés à $k[[\omega_{G/k}]]$ et A (comme G est radiciel, I_A est contenu dans le radical de A, de sorte que l'intersection des $\overline{I_A^n}$ est nulle). Comme ab est un isomorphisme et b une surjection, b et a sont des isomorphismes.

Notons enfin qu'il est clair que (i) ou (ii) entraînent (iv), de sorte qu'il reste à prouver l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (ii) : pour cela, on peut supposer k local, de corps résiduel k_o. Posons alors $G_o = G\hat{\otimes}_k k_o$, $\omega = \omega_{G/k}$, $\omega_o = \omega\hat{\otimes}_k k_o$ ... Comme ω_o est topologiquement libre sur k, il existe un k-module topologiquement libre ω' et une application k-linéaire continue $f : \omega' \longrightarrow \omega$ telle que $f_o = f\hat{\otimes}_k k_o$ soit inversible (f est l'enveloppe projective de ω). Comme ω' est un k-module pseudocompact projectif, f est composée d'une application k-linéaire continue $g : \omega' \longrightarrow I_A$ et de la projection canonique de I_A sur ω. A son tour, g induit un homomorphisme d'algèbres topologiques

$g : k[[\omega]] \longrightarrow A$ (1.2.5) . Comme ω_o s'identifie à ω_{G_o/k_o} et $k_o[[\omega_o]]$ à $k[[\omega]]\hat{\otimes}_k k_o$, $g_o = g\hat{\otimes}_k k_o$ est inversible parce-que (iii) entraîne (ii) et que les hypothèses (iii) sont vérifiées pour k_o et G_o . Comme, d'autre part, $k[[\omega]]$ et A sont des k-modules pseudocompacts projectifs, g est inversible d'après 0.3.4.

3.3.1. <u>COROLLAIRE</u> : <u>Soient</u> S <u>un préschéma localement noethérien sur</u> Ω <u>et</u> G <u>un</u> S-<u>préschéma en groupes localement de type fini. Si</u> $\omega_{G/S}$ <u>est un</u> $\underline{O}_S$-<u>Module localement libre,</u> G <u>est lisse sur</u> S <u>le long de la section unité</u>.

En effet, soient x un point de la section unité, s son image dans S , $\underline{O}_x$ et $\underline{O}_s$ les algèbres locales de x et s . Il suffit de montrer que $\hat{\underline{O}}_x$ est formellement lisse sur $\hat{\underline{O}}_s$ (EGA IV 6.8.6 et 0_{IV} 19.3.6). Or $\hat{\underline{O}}_x$ et $\hat{\underline{O}}_s$ sont les anneaux locaux de x et s dans $\widehat{G/S}$ et $\hat{S}$. Posant $k = \hat{\underline{O}}_s$ et $H = \mathrm{Spf}\,\hat{\underline{O}}_x$, il est clair que H est un groupe formel infinitésimal sur k et que l'on a $\omega_{H/k} = (\omega_{G/S})_s \otimes_{\underline{O}_s} \hat{\underline{O}}_s$. Donc $\omega_{H/k}$ est le produit d'un nombre fini d'exemplaires de k . Le corollaire résulte donc de 3.3 et de EGA 0_{IV} 19.3.4.

Nous retrouvons donc un résultat obtenu par ailleurs pour les préschémas en groupes localement de présentation finie sur un préschéma S .

3.3.2. <u>COROLLAIRE</u> : <u>Si</u> k <u>est un corps de caractéristique</u> 0 , <u>le foncteur</u> $L \longmapsto \mathcal{G}(L)$ <u>est une équivalence de la catégorie des</u> k-<u>algèbres de Lie sur celle des</u> k-<u>groupes formels infinitésimaux</u>.

En effet, quand G parcourt les k-groupes formels infinitésimaux, le foncteur $G \longmapsto \mathcal{G}(\text{Lie } G)$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des groupes infinitésimaux (théorème 3.3). De même, le foncteur $L \longmapsto \text{Lie}(\mathcal{G}(L))$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des algèbres de Lie (3.1).

3.3.3. Supposons toujours que k est un corps de caractéristique 0. Soient $\bar{k}$ la clôture algébrique de k et Γ le groupe de Galois topologique de $\bar{k}$ sur k .

Pour tout k-groupe formel H , nous notons $\underline{\text{Aut}}_k H$ le k-foncteur en groupes qui associe à toute k-algèbre commutative de dimension finie C le groupe des automorphismes du C-groupe formel $H \widehat{\otimes}_k C$. Ce k-foncteur est manifestement exact à gauche (H est topologiquement plat sur k!), de sorte que nous pouvons le traiter comme un groupe formel sur k . Si L est une algèbre de Lie sur k et H le groupe formel $\mathcal{G}(L)$, le théorème 3.3 montre que $\underline{\text{Aut}}_k H$ est isomorphe au k-foncteur en groupes $\underline{\text{Aut}}_k L$ qui associe à une k-algèbre de dimension finie C le groupe des automorphismes de la C-algèbre de Lie $C \otimes_k L$.

Si G est un k-groupe formel arbitraire, nous avons vu en 2.5.2 que G se décompose canoniquement en un produit semidirect d'un groupe formel étale G_e et d'un groupe formel infinitésimal G_o . Ce produit semidirect est déterminé par la donnée de Lie G , du Γ-groupe $G_e(\bar{k})$ et d'un homomorphisme $h : G_e \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_k G_o \simeq \underline{\text{Aut}}_k(\text{Lie } G)$. Un tel homomorphisme envoie G_e dans la "partie étale" $(\underline{\text{Aut}}_k \text{Lie } G)_e$ de $\underline{\text{Aut}}_k \text{Lie } G$ (2.5.1). Il est donc déterminé par la donnée d'un homomorphisme de Γ-groupes

$$h(\bar{k}) \ : \ G(\bar{k}) \longrightarrow (\underline{\text{Aut}}_k L)(\bar{k}) \ .$$

Si l'on fait opérer Γ dans $(\mathrm{Lie}\ G)\otimes_k \bar{k}$ au moyen de la formule $\gamma(\ell \otimes x) = \ell \otimes \gamma(x)$ l'homomorphisme $h(\bar{k})$ fait opérer $G(\bar{k})$ par automorphismes dans la k-algèbre de Lie $(\mathrm{Lie}\ G)\otimes_k \bar{k}$ de telle façon qu'on ait $g^{\gamma}(\ell) = \gamma(g\gamma^{-1}\ell))$ si $g \in G(\bar{k})$, $\gamma \in \Gamma$ et $\ell \in (\mathrm{Lie}\ G)\otimes_k \bar{k}$. Nous exprimons cette dernière condition en disant que $G(\bar{k})$ <u>opère dans</u> $(\mathrm{Lie}\ G)\otimes_k \bar{k}$ <u>de manière compatible avec</u> Γ .

On peut résumer la situation à l'aide d'un énoncé "savant" : appelons Γ-<u>algèbre de Lie</u> sur k la donnée d'un triplet (L,K,h) formé d'une algèbre de Lie L sur k , d'un Γ-groupe K et d'une opération h de K dans $L\otimes_k \bar{k}$ qui soit "compatible avec l'action de Γ dans K et $L\otimes_k \bar{k}$ ". Si (L,K,h) et (L',K',h') sont deux telles Γ-algèbres de Lie, un homomorphisme de la première dans la seconde est un couple (f,g) formé d'un morphisme $f : L \longrightarrow L'$ d'algèbres de Lie et d'un morphisme $g : K \longrightarrow K'$ de Γ-groupes tels que $(f\otimes_k \bar{k})(\gamma.x) = g(\gamma).(f\otimes_k \bar{k})(x)$ si $x \in L\otimes_k \bar{k}$ et $\gamma \in K$: alors <u>le foncteur</u> $G \longmapsto (\mathrm{Lie}\ G\ , G(\bar{k}), h(\bar{k}))$ <u>est une équivalence de la catégorie des groupes formels sur</u> k (= corps de caractéristique 0) <u>sur la catégorie des</u> Γ-<u>algèbres de Lie</u>.

4. <u>Phénomènes particuliers à la caractéristique</u> $p > 0$.

<u>Dans tout ce paragraphe</u> 4 , <u>nous désignons par</u> p <u>un nombre premier</u>, <u>par</u> k <u>un anneau pseudocompact de caractéristique</u> p , <u>par</u> π <u>l'endomorphisme continu</u> $x \mapsto x^p$ <u>de</u> k .

4.1. Soient X une variété formelle sur k d'algèbre affine A et $X^{(p/k)}$ ou $X^{(p)}$ la variété formelle $X \widehat{\otimes}_{\pi} k$ (1.2). Cette variété a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $A \widehat{\otimes}_{\pi} k$; de plus, l'homomorphisme continu de $A \widehat{\otimes}_{\pi} k$ dans A qui applique $a \widehat{\otimes}_{\pi} \lambda$ sur $a^p \lambda$ induit un morphisme de k-variétés formelles

$$F(X/k) : X \longrightarrow X^{(p/k)}$$

Dans la suite, nous dirons que $F(X/k)$ est <u>le morphisme de Frobenius de</u> X <u>relativement à</u> k et nous écrirons souvent F au lieu de $F(X/k)$.

4.1.1. Considérons maintenant un préschéma S sur le corps premier $\mathbb{F}_p$, un S-préschéma X et un S-préschéma $q : T \longrightarrow S$ de longueur finie (1.2.6). Soit $\underline{f}(S)$ le morphisme de Frobenius de S relativement à $\mathbb{F}_p$ (ce morphisme induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et applique une section s du faisceau structural sur s^p ; VII_A 4.1). Si nous posons $X^{(p)} = X \times_{\underline{f}(S)} S$ (VII_A, loc.cit.), les morphismes de S-variétés formelles $f : T \longrightarrow \widehat{X^{(p)}/S}$ correspondent biunivoquement aux S-morphismes de T dans $X^{(p)}$ (1.2.6), c'est-à-dire aux carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d] \\ S \arrow[r, "f(S)"] & S \end{tikzcd}$$

A un tel carré est associé un S-morphisme de T dans $(\widehat{X/S})^{(p)}$ si et seulement si f' se factorise à travers un sous-préschéma X_o de X qui est de longueur finie sur S. On voit ainsi que $\mathrm{Hom}_{Vf/\hat{S}}(T,(\widehat{X/S})^{(p)})$ peut être identifié à une partie de $\mathrm{Hom}_{Vf/\hat{S}}(T,\widehat{X^{(p)}/S})$, ce qui définit $(\widehat{X/S})^{(p)}$ comme <u>une sous-variété formelle de</u> $\widehat{X^{(p)}/S}$. On a l'égalité $(\widehat{X/S})^{(p)} = \widehat{X^{(p)}/S}$ si $\underline{f}(S)\circ q$ est un S-préschéma de longueur finie lorsque q en est un. Ceci a lieu par exemple lorsque S est localement de type fini sur un corps k tel que $[k:k^p] < +\infty$.

4.1.2. Soit G un groupe formel sur k d'algèbre affine A. Comme le foncteur $X \longmapsto X\widehat{\otimes}_{\pi}k$ commute aux produits finis, il transforme un k-groupe formel en un k-groupe formel. En outre, comme $F(X/k)$ est fonctoriel en X, le morphisme

$$F : G \longrightarrow G^{(p)}$$

est un homomorphisme de k-groupes formels. Si l'on pose $G^{(p^{n+1})} = (G^{(p^n)})^{(p)}$ il en va de même pour le morphisme composé

$$F^n = F^n(G/k) : G \xrightarrow{F} G^{(p)} \xrightarrow{F} G^{(p^2)} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} G^{(p^n)}$$

Le noyau de cet homomorphisme F^n sera noté ${}_{F^n}G$. Il résulte directement des définitions que ${}_{F^n}G$ est radiciel et a pour algèbre affine le quotient $A/I_A^{\{p^n\}}$, où $I_A^{\{p^n\}}$ désigne l'idéal fermé de A qui est engendré par les puissances p^n-ièmes des éléments de I_A. Lorsque $I_A^{\{p^n\}}$ est nul, c'est-à-dire lorsqu'on a ${}_{F^n}G = G$, on dit que G est de <u>hauteur</u> $\leq n$.

4.2. Il est clair que l'algèbre de Lie Lie G d'un k-groupe formel G est une p-sous-algèbre de Lie de l'Algèbre $\underline{H}(G)$ (2.3) : en effet, on se ramène tout de suite au cas où k est artinien; dans ce cas, Lie G est la partie de $H(G)$ formée des éléments x tels que $\varphi_G(x\otimes 1 + 1\otimes x) = \Delta_G x$ avec les notations de 2.3 et 2.6 . On a alors

$$\varphi_G(x^p\otimes 1 + 1\otimes x^p) = \varphi_G((x\otimes 1 + 1\otimes x)^p) = (\varphi_G(x\otimes 1 + 1\otimes x))^p = (\Delta_G x)^p = \Delta_G(x^p).$$

4.2.1. Réciproquement, toute p-algèbre de Lie $\underline{L}$ sur $\underline{\underline{k}}$ définit un k-foncteur en groupes : désignons en effet par $\underline{U}_p(\underline{L})$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre de longueur finie C l'algèbre enveloppante restreinte $U_p(\underline{L}(C))$ de la p-algèbre de Lie $\underline{L}(C)$ sur C (VII_A 5.3). D'après VII_A 5.4 , $\underline{U}_p(\underline{L})$ est une $\underline{\underline{k}}$-bialgèbre et détermine un k-foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^*\underline{U}_p(\underline{L})$ (2.2) que nous noterons désormais $\mathcal{G}_p(\underline{L})$: $\mathcal{G}_p(\underline{L})(C)$ est donc le groupe des éléments $z \in U_p(\underline{L}(C))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{U_p(\underline{L}(C))}(z) = z \otimes z$.

4.2.2. Lorsque $\underline{L}$ est une p-algèbre de Lie plate sur $\underline{\underline{k}}$, $\underline{U}_p(\underline{L})$ est plate sur $\underline{\underline{k}}$ d'après VII_A 5.3.3 ; par conséquent, $\mathcal{G}_p(\underline{L})$ est un groupe formel topologiquement plat sur k qui a $\underline{U}_p(\underline{L})$ pour $\underline{\underline{k}}$-bialgèbre. Ce groupe formel peut être caractérisé par une propriété universelle : considérons en effet un homomorphisme h de $\mathcal{G}_p(\underline{L})$ dans un groupe formel G ; un tel h induit un homomorphisme Lie h de l'Algèbre de Lie de $\mathcal{G}_p(\underline{L})$ dans celle de G . On voit d'autre part comme en VII_A 7.3 que le morphisme canonique de $\underline{L}$ dans l'Algèbre enveloppante restreinte $\underline{U}_p(\underline{L})$ définit un isomorphisme de $\underline{L}$ sur la p-algèbre de Lie de $\mathcal{G}_p(\underline{L})$; composant cet isomorphisme avec Lie h , on obtient un homomorphisme $h' : \underline{L} \longrightarrow$ Lie G :

PROPOSITION : *Si* k *est un anneau pseudocompact de caractéristique* $p > 0$, G *un* k-*groupe formel et* L *une* p-*algèbre de Lie plate sur* $\underline{\underline{k}}$, *l'application* $h \longmapsto h'$ *définie ci-dessus est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}Gr}(\mathscr{G}_p(\underline{L}),G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\underline{L},\underline{\mathrm{Lie}}\ G)$$

de l'ensemble des homomorphismes de k-*groupes formels de* $\mathscr{G}_p(\underline{L})$ *dans* G *sur celui des morphismes de* p-*algèbres de Lie de* $\underline{L}$ *dans* $\underline{\mathrm{Lie}}$ G .

On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Dans ce cas, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{k\text{-}Gr}(\mathscr{G}_p(\underline{L}),G)$ est en correspondance biunivoque canonique (2.3.1) avec les homomorphismes d'algèbres unitaires $g : U_p(\underline{L}) \longrightarrow H(G)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
U_p(L) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta"'] & H(G) \arrow[dr, "\delta_G"] & \\
 & & H(G\times G) \\
U_p(L)\otimes U_p(L) \arrow[r, "g\otimes g"] & H(G)\otimes H(G) \arrow[ur, "\varphi_G"'] &
\end{tikzcd}$$

Or g est défini par sa restriction à L qui est un homomorphisme de p-algèbres de Lie de L dans la p-algèbre de Lie sous-jacente à H(G) . La commutativité du diagramme signifie donc simplement que g applique L sur la partie Lie G de H(G) formée des x tels que $\varphi_G(x\otimes 1+1\otimes x)=\delta_G x$.

4.3. Nous nous proposons maintenant d'étudier de façon plus détaillée le k-groupe formel $\mathscr{G}_p(\underline{L})$ lorsque $\underline{L}$ est une p-algèbre de Lie plate sur $\underline{\underline{k}}$.

Pour cela, nous considérons d'abord un anneau C de caractéristique p et une p-algèbre de Lie L sur C dont le module sous-jacent est libre de base $(x_i)_{i\in I}$. Désignons en outre par P l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i\in I}$ formées d'entiers naturels tels que $0 \leq n_i < p$ et que les n_i soient nuls hormis peut-être un nombre fini d'entre eux. Si nous munissons I d'un ordre total et si nous appelons $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_r)$ les indices i tels que $n_i \neq 0$, nous pouvons donc poser

$$x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} . x_{i_2}^{n_{i_2}} \ldots x_{i_r}^{n_{i_r}} , \quad n! = n_{i_1}! \ldots n_{i_r}! \quad \text{et} \quad |n| = n_{i_1} + \ldots + n_{i_r} .$$

On sait que les monômes $\frac{x^n}{n!}$ forment une base de $U_p(L)$ (VII$_A$ 5.3.3) et il est clair qu'on a

$$(*) \qquad \Delta \frac{x^n}{n!} = \sum_{m \leqslant n} \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \qquad ,$$

la somme étant étendue à tous les $m \in P$ tels qu'on ait $m \leqslant n$ (i.e. $m_i \leqslant n_i$ pour tout $i \in I$).

La formule (*) permet une détermination aisée de la filtration naturelle de $U_p(L)$ (1.3.6). Soit U^+ l'idéal bilatère de $U_p(L)$ qui est engendré par L et posons $U = U_p(L)$. Rappelons qu'on a par définition

$$U_o = C.\, 1_U$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_n = \left\{ u \in U \mid \Delta_U u - u \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+ \right\}$$

La formule (*) entraîne alors que U_n <u>est le</u> C-<u>module libre qui a pour base les monômes</u> x^m <u>tels que</u> $|m| \leqslant n$.

4.3.1. Avec les notations de 4.3, déterminons les éléments ξ de U d'augmentation 1 et tels que $\Delta_U \xi = \xi \otimes \xi$: tout élément ξ de U se met sous la forme $\xi = \sum_{n \in P} \xi_n \frac{x^n}{n!}$, où $\xi_n \in C$. La condition $\varepsilon_U(\xi) = 1$ entraîne l'égalité $\xi_o = 1$, si o désigne l'élément de P dont toutes les composantes sont nulles. La condition $\Delta_{U_p(L)}(\xi) = \xi \otimes \xi$ entraîne

$$\sum_{m \leq n} \xi_n \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{q,r} \xi_q \xi_r \frac{x^q}{q!} \otimes \frac{x^r}{r!}$$

c'est-à-dire

$$\xi_{q+r} = \xi_q \xi_r \quad \text{si} \quad q_i + r_i < p \qquad \text{et} \qquad \xi_q \xi_r = 0 \quad \text{sinon} .$$

Si l'on note ξ_i la valeur de ξ_n lorsque $n_i = 1$ et $n_j = 0$ pour $j \neq i$, ces conditions signifient que l'on a

$$\xi_n = \prod_i \xi_i^{n_i} \quad \text{si} \quad n \in P \qquad \text{et} \qquad \xi_i^p = 0 \quad \forall\, i \in I .$$

On tire de là :

PROPOSITION : Soient p un nombre premier, k un anneau pseudocompact de caractéristique p, $\underline{L}$ une p-algèbre de Lie plate sur $\underline{k}$, C une k-algèbre profinie de longueur finie et $\sqrt[p]{o_C}$ l'idéal de C formé des éléments x tels que $x^p = 0$. Il existe une bijection

$$\underline{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{o_C} \longrightarrow \mathcal{G}_p(\underline{L})(C)$$

"qui est fonctorielle en C".

D'après 1.2.3, on peut en effet choisir une base $({}^{C}x_i)_{i\in I}$ de $\underline{L}(C)$ sur C de telle façon que, pour tout morphisme $\varphi : C \longrightarrow D$ de Alf/k (0.4.2), $\underline{L}(\varphi)$ applique ${}^{C}x_i$ sur ${}^{D}x_i$. D'après ce qui précède, l'application $\sum_i {}^{C}x_i \otimes \xi_i \longmapsto \sum_{n\in P} (\prod_i \xi_i^{n_i}) \frac{{}^{C}x^n}{n!}$ est une bijection fonctorielle de $\underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ sur $\mathcal{G}_p(\underline{L})(C)$.

4.3.2. "Il n'y a pas de formule de Campbell-Hausdorff en caractéristique $p > 0$; expliquons-nous : l'isomorphisme fonctoriel de 4.3.1 dépend du choix des bases $({}^{C}x_i)_{i\in I}$. A la différence de ce qui se passe en 3.2 (cas de la caractéristique 0), il n'y a pas, en général, de bijection de $\underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ sur $\mathcal{G}_p(\underline{L})(C)$ qui soit "fonctorielle à la fois en C et en $\underline{L}$". L'argument qui suit montre par exemple qu'un tel isomorphisme n'existe pas lorsque k est un corps contenant les racines (p^2-1)-ièmes de l'unité :

Choisissons en effet $\underline{L}$ de telle façon que, pour tout $C \in \mathrm{Alf}/k$, $\underline{L}(C)$ soit la p-algèbre de Lie abélienne sur C qui est engendrée par un élément x soumis à la relation $x^{(p^2)} = 0$. On a donc

$$\underline{L}(C) = Cx \oplus Cx^{(p)}$$

Nous allons montrer que le seul morphisme fonctoriel

$$\chi_C : \underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{0_C} \longrightarrow U_p(\underline{L}(C)) ,$$

qui soit compatible avec les endomorphismes de $\underline{L}$ et qui applique $\underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ dans $\mathcal{G}_p(\underline{L})(C)$, est le morphisme constant de valeur 1.

Soit en effet ψ_C l'application de $\underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{O_C}$ dans $U_p(\underline{L}(C))$ qui envoie $x\otimes a + x^{(p)}\otimes b$ sur $\sum_{0\leqslant i,j<p} a^i b^j x^{i+pj}$. En composant χ_C avec ψ_C^{-1} , on obtient un morphisme fonctoriel (en C) :

$$\underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{O_C}' \longrightarrow \underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{O_C}'$$

qui applique $x\otimes a + x^{(p)}\otimes b$ sur $x\otimes P(a,b) + x^{(p)}\otimes Q(a,b)$. La fonctorialité en C implique que $P(a,b)$ et $Q(a,b)$ sont les valeurs en (a,b) de deux polynômes $P,Q\in k[X,Y]$ qu'on peut supposer de degré $< p$ en X ainsi qu'en Y . Si α est un élément de k et si $\underline{\ell}$ est l'endomorphisme de $\underline{L}$ qui applique x sur αx , on voit de suite que le carré

$$\begin{array}{ccc}
\underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{O_C} & \xrightarrow{\quad \psi_C \quad} & U_p(\underline{L}(C)) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \underline{\ell}(C)\otimes_C \sqrt[p]{O_C}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle U_p(\underline{\ell}(C))} \\
\underline{L}(C)\otimes_C \sqrt[p]{O_C} & \xrightarrow{\quad \psi_C \quad} & U_p(\underline{L}(C))
\end{array}$$

est commutatif. Tenant compte de la compatibilité de χ_C avec $\underline{\ell}$, on en déduit les égalités $P(\alpha a,\alpha^p b) = \alpha P(a,b)$ et $Q(\alpha a,\alpha^p b) = \alpha^p Q(a,b)$. Prenant pour α une racine (p^2-1)-ième primitive de l'unité et prenant pour C l'algèbre $k[X,Y]/(X^p,Y^p)$, on en déduit que P et Q sont de la forme $P = \lambda X$ et $Q = \mu Y$, $\lambda,\mu\in k$.

Par conséquent χ_C envoie $x\otimes a + x^{(p)}\otimes b$ sur $\sum_{0\leqslant i,j<p} (\lambda a)^i(\mu b)^j x^{i+pj}$.

Cette dernière application ne "commute" avec l'endomorphisme de $\underline{L}$ qui envoie x sur $x^{(p)}$ que si $\lambda = \mu = 0$.

4.4. THEOREME : *Soient* p *un nombre premier*, k *un anneau pseudocompact de caractéristique* p *et* G *un groupe formel sur* k . *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Il existe une* p-*algèbre de Lie* $\underline{L}$ *plate sur* $\underline{k}$ *telle que* G *soit isomorphe à* $\mathcal{G}_p(\underline{L})$.

(ii) *Il existe un* k-*module pseudocompact projectif* ω *tel que l'algèbre affine de* G *soit isomorphe au quotient de* $k[[\omega]]$ *par l'idéal fermé engendré par les* x^p , $x \in \omega$.

(iii) G *est de hauteur* $\leqslant 1$ *et* $\omega_{G/k}$ *est un* k-*module pseudocompact projectif*.

(iv) G *est de hauteur* $\leqslant 1$ *et est topologiquement plat sur* k .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Soient ω le k-module pseudocompact dual de $\underline{L}$ (1.2.3) et A le quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p , $x \in \omega$. Pour toute k-algèbre profinie de longueur finie C , un homomorphisme continu $h : A \longrightarrow C$ est déterminé par sa restriction h' à ω; cette restriction h' envoie ω dans $\sqrt[p]{0_C}$; on obtient ainsi une bijection canonique de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Al}/k}(A,C)$ sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega, \sqrt[p]{0_C})$ des applications k-linéaires continues de ω dans $\sqrt[p]{0_C}$. Ce dernier ensemble est canoniquement isomorphe à $\underline{L}(C) \otimes_C \sqrt[p]{0_C}$ (voir la démonstration de 3.3). L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte donc de 4.3.1.

Pour les autres implications, consulter les démonstrations des théorèmes 3.3 et VII_A 7.4.1 , qui sont analogues.

4.4.1. COROLLAIRE : *Si* k *est un corps de caractéristique* $p > 0$, *le foncteur* $L \longmapsto \mathcal{G}_p(L)$ *est une équivalence de la catégorie des* p-<u>algèbres de Lie sur</u> k <u>sur celle des</u> k-<u>groupes formels de hauteur</u> $\leqslant 1$.

En effet, quand G parcourt les groupes formels de hauteur $\leqslant 1$, le foncteur $G \longmapsto \mathcal{G}_p(\mathrm{Lie}\ G)$ est isomorphe au foncteur identique d'après le théorème 4.4 ; de même, nous avons vu que le foncteur $L \longmapsto \mathrm{Lie}\ \mathcal{G}_p(L)$ est isomorphe au foncteur identique (confer VII_A 7.5).

4.4.2. Prenons toujours pour k un corps de caractéristique p . pour tout k-groupe formel infinitésimal G , l'algèbre affine A de G est la limite projective des algèbres affines $A/I_A^{\{p^n\}}$ des groupes $_{F^n}G$ (4.1.2). <u>Un</u> k-<u>groupe formel infinitésimal est donc une limite inductive de</u> k-<u>groupes formels de hauteur finie</u>.

Supposons maintenant G de hauteur $\leqslant n$. Comme $_FG$ est le noyau de $F : G \longrightarrow G^{(p)}$, F induit un monomorphisme i de $H = G/_FG$ dans $G^{(p)}$. Comme $F^n(G/k) = F^{n-1}(G^{(p)}/k)\circ F(G/k)$ est nul, $F^{n-1}(G^{(p)}/k)\circ i$ est nul ainsi que $i^{(p^{n-1})}\circ F^{n-1}(H/k)$. Comme i est un monomorphisme (2.4.1), on voit que H est de hauteur $\leqslant n-1$. On voit donc qu'<u>un groupe de hauteur finie possède une suite de composition dont les quotients sont de hauteur</u> $\leqslant 1$, donc peuvent être décrits par des p-algèbres de Lie sur k .

Enfin, lorsque G est un k-groupe formel infinitésimal tel que $\omega_{G/k}$ soit de dimension finie sur k , l'algèbre affine A de G est un quotient de $k[[\omega]]$, de sorte que toutes les algèbres $A/I_A^{\{p^n\}}$ sont de dimension finie sur k en tant qu'espaces vectoriels. On voit par conséquent, qu'<u>un groupe formel infinitésimal</u> G <u>sur un corps de caractéristique</u> $p > 0$ <u>est une limite inductive de groupes formels finis</u> (i.e. de longueur finie, 1.2.6) <u>dès que</u> $\omega_{G/k}$ <u>est de dimension finie sur</u> k .

5. Espaces homogènes de groupes formels infinitésimaux sur un corps.

Dans tout ce qui suit, la lettre k désigne un corps.

5.1. Soient G un k-groupe formel infinitésimal d'algèbre affine A, B une sous-algèbre fermée de A, I_B l'intersection $B \cap I_A$ de B avec l'idéal d'augmentation de A, $\overline{AI_B}$ l'idéal fermé de A engendré par I_B, X le spectre formel de B et $r : G \longrightarrow X$ l'épimorphisme induit par l'inclusion de B dans A. On se propose de voir sous quelle condition r fait de X le quotient à gauche de G par un sous-groupe F (2.4) :

PROPOSITION : *Avec les notations ci-dessus, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall x \in B$, $\Delta_A x - 1 \hat{\otimes} x \in \overline{AI_B} \hat{\otimes}_k A$.

(ii) *Le morphisme diagonal de* A *induit par passage au quotient un morphisme diagonal sur l'algèbre* A/AI_B *qui fait du spectre formel de cette algèbre un sous-groupe formel de* G. *De plus, si* q *désigne la projection canonique de* A *sur* $A/\overline{AI_B}$, *la suite*

$$(*) \qquad B \xrightarrow{\text{incl.}} A \overset{\text{in}_2}{\underset{(q\hat{\otimes}A)\Delta_A}{\rightrightarrows}} (A/\overline{AI_B})\hat{\otimes}_k A$$

est exacte; autrement dit, r *induit un isomorphisme de* $F\backslash G$ *sur* X.

L'assertion (i) signifie simplement que B est contenu dans le noyau du couple $(\text{in}_2, (q\hat{\otimes}A)\Delta_A)$. Par conséquent (ii) entraîne (i). La démonstration de la réciproque occupe les paragraphes 5.1.1 à 5.1.5.

5.1.1. Considérons d'abord la catégorie (Cou) qui suit : un objet de (Cou) est un couple (C,J) formé d'une k-algèbre profinie C et d'un idéal fermé J de C ; un morphisme $\varphi : (C,I) \longrightarrow (D,J)$ de (Cou) est un homomorphisme continu de l'algèbre C dans l'algèbre D qui applique I dans J. Si l'on associe à (C,I) le couple $(\mathrm{Spf}(C/I), \mathrm{Spf}\, C)$, on obtient évidemment une antiéquivalence de (Cou) sur la catégorie des couples (Z,Y) formés d'une k-variété formelle Y et d'une sous-variété formelle Z.

Une structure de co-groupe sur un objet (C,J) de (Cou) consiste en la donnée d'une structure de groupe formel sur $\mathrm{Spf}\, C$ telle que les conditions suivantes soient réalisées (notations de 2.1) :
1) $\Delta_C J \subset J \widehat{\otimes}_k C + C \widehat{\otimes}_k J$: 2) $\varepsilon_C(J) = 0$; 3) $c_C(J) \subset J$. Ces conditions signifient aussi que $\mathrm{Spf}(C/J)$ est un sous-groupe formel de $\mathrm{Spf}\, C$.

Il résulte de 2.7 que les conditions 2) et 3) sont une conséquence de 1) lorsque C est local, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{Spf}\, C$ est un groupe infinitésimal. En particulier, si l'on pose $I = \overline{AI_B}$, la condition (i) de la proposition 5.1 entraîne la relation

$$\Delta_A \; I_B \subset I \widehat{\otimes}_k A + A \widehat{\otimes}_k I$$

d'où

$$\Delta_A \; I \subset I \widehat{\otimes}_k A + A \widehat{\otimes}_k I ,$$

de sorte que Δ_A induit un morphisme diagonal dans A/I qui fait de A/I l'algèbre affine d'un sous-groupe formel F de G.

5.1.2. Désignons par $GrAl/k$ la catégorie des k-<u>algèbres profinies graduées</u> : un objet de cette catégorie consiste en la donnée d'une suite

A_o , A_1 , ..., A_n , ... d'espaces vectoriels linéairement compacts sur k et d'une structure d'algèbre profinie sur le produit $\prod_{n \geqslant 0} A_n$ telle qu'on ait $A_n . A_m \subset A_{m+n}$ (A_n est identifié à une partie de $\prod_{n \geqslant 0} A_n$ au moyen de l'injection canonique) ; un morphisme $\psi : (A_n) \longrightarrow (B_n)$ est une suite d'applications linéaires continues $\psi_n : A_n \longrightarrow B_n$ telles qu'on ait $\psi_{m+n}(a.a') = \psi_m(a).\psi_n(a')$ si $a \in A_m$ et $a' \in A_n$. Il est clair que deux k-algèbres profinies (A_n) et (B_n) ont une <u>somme directe dans</u> GrAl/k et que cette somme directe a pour n-ième composante le produit $\prod_{i=0} A_i \otimes_k B_{n-i}$ des k-espaces vectoriels linéairement compacts $A_i \widehat{\otimes}_k B_{n-i}$. Cette somme directe sera notée $(A_n) \widehat{\otimes}_k (B_n)$.

On peut associer à tout objet (C,J) de (Cou) l'algèbre profinie graduée $Gr_J(C)$ de C pour la filtration définie par les adhérences $\overline{J^n}$ des puissances de J ; on a donc $Gr_J(C)_n = \overline{J^n}/\overline{J^{n+1}}$ et la multiplication de $Gr_J(C)$ est induite par celle de C . De plus, il résulte du lemme ci-dessous que le foncteur $(C,J) \longmapsto Gr_J(C)$ commute aux sommes directes finies ; il transforme donc un co-groupe de (Cou) en un co-groupe de GrAl/k . On voit en particulier qu'avec les notations de 5.1.1 , l'algèbre profinie graduée $Gr_I(A)$ est munie d'une structure de co-groupe dans GrAl/k :

<u>LEMME</u> : <u>Soient</u> $U_o \supset U_1 \supset \dots$ <u>et</u> $V_o \supset V_1 \supset \dots$ <u>deux</u> k-<u>espaces vectoriels linéairement compacts filtrés séparés</u>. <u>Filtrons le produit tensoriel complété</u> $W = U \widehat{\otimes}_k V$ <u>à l'aide des sous-espaces fermés</u>

$$W_n = U_n \widehat{\otimes}_k V_o + U_{n-1} \widehat{\otimes}_k V_1 + \dots + U_o \widehat{\otimes}_k V_n$$

Pour tout n, les applications canoniques de $(U_i/U_{i+1})\widehat{\otimes}_k(V_j/V_{j+1})$ dans W_n/W_{n+1} $(i+j = n)$ définissent un isomorphisme

$$\bigoplus_{i+j=n} (U_i/U_{i+1})\widehat{\otimes}_k(U_j/U_{j+1}) \xrightarrow{\ \sim\ } W_n/W_{n+1} \quad .$$

5.1.3. Identifions toute k-algèbre profinie Γ à la k-algèbre profinie graduée $(\Gamma_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $\Gamma_0 = \Gamma$ et $\Gamma_n = 0$ si $n > 0$. En particulier, si $(A_n)_{n > 0}$ est une k-algèbre profinie graduée, nous considérerons indifféremment A_0 comme une k-algèbre profinie ou bien comme une k-algèbre profinie graduée. Nous désignerons alors par $\rho : (A_n) \longrightarrow A_0$ le morphisme de $GrAl/k$ tel que $\rho_0 = Id_{A_0}$ et $\rho_n = 0$ si $n > 0$. De même, $\tau : A_0 \longrightarrow (A_n)$ désignera la section de ρ telle que $\tau_0 = Id_{A_0}$ et $\tau_n = 0$ si $n > 0$.

Toute structure de co-groupe sur $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induit une structure de co-groupe sur A_0 telle que ρ et τ soient des homomorphismes de cogroupes. Comme τ est une section de ρ, le cogroupe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une "somme semidirecte" de A_0 et d'un cogroupe $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $GrAl/k$ tel que $A'_0 = k$. Autrement dit, si (A'_n) est la sousalgèbre graduée de (A_n) telle que la suite

$$(A'_n) \xrightarrow{\ j=\text{incl.}\ } (A_n) \underset{(\rho\,\widehat{\otimes}\,Id)\Delta}{\overset{in_2}{\rightrightarrows}} A_0\widehat{\otimes}_k(A_n)$$

soit exacte, le morphisme $(A_0\widehat{\otimes}_k A'_n) \longrightarrow (A_n)$ de composantes τ et j est inversible. (On désigne par $\Delta : (A_n) \longrightarrow (A_n)\widehat{\otimes}_k(A_n)$ le morphisme qui définit la structure de cogroupe de (A_n)).

5.1.4. Dans le cas qui nous intéresse, on a $(A_n) = Gr_I(A)$ et $A_o = A/I$. De plus, il est clair que l'algèbre (A_n) est engendrée par A_o et A_1, c'est-à-dire que, pour $n \geqslant 1$, l'application

$$A_1 \widehat{\otimes}_{A_o} A_1 \widehat{\otimes}_{A_o} \dots \widehat{\otimes}_{A_o} A_1 \longrightarrow A_n$$

définie par la multiplication est surjective. Comme on a $A_1 \simeq A_o \widehat{\otimes} A_1^!$ et $A_n \simeq A_o \widehat{\otimes} A_n^!$, donc aussi $A_1 \widehat{\otimes}_{A_o} A \widehat{\otimes}_{A_o} \dots \widehat{\otimes}_{A_o} A \simeq A_o \widehat{\otimes}_k (A_1^! \widehat{\otimes}_k \dots \widehat{\otimes}_k A_1^!)$, on voit que l'application $A_1^! \widehat{\otimes}_k \dots \widehat{\otimes}_k A_1^! \longrightarrow A_n^!$, qui est induite par la multiplication de $(A_n^!)$, est surjective ; autrement dit, $(A_n^!)$ est engendrée par ses termes de degré 1.

Désignons maintenant par $Gr(B)$ et $Gr'(B)$ les gradués associés à B pour la filtration induite par celle de A et pour la filtration définie par les adhérences $\overline{I_B^n}$ des puissances de I_B. Comme le diagramme

$$B \xrightarrow{\text{incl.}} A \overset{in_2}{\underset{(q\widehat{\otimes}_k A)\Delta_A}{\rightrightarrows}} (A/\overline{AI_B})\widehat{\otimes}_k A$$

est commutatif d'après la condition (i), on voit qu'on a $Gr(B)_n \subset A_n^!$ pour tout n. Or $I/\overline{I^2} \simeq (A/I)\widehat{\otimes}_k A_1^!$ est engendré en tant que (A/I)-module pseudocompact par l'image de $Gr'(B)_1$ de sorte qu'on a $Gr(B)_1 \simeq A_1^!$, d'où $Gr(B) = (A_n^!)$; de plus, l'application canonique de $Gr'(B)$ dans $Gr(B)$ est surjective puisque l'algèbre graduée $Gr(B) = (A_n^!)$ est engendrée par ses termes de degré 1. Le lemme 5.1.5 montre donc qu'on a $Gr'(B) = Gr(B)$.

Considérons enfin le noyau N du couple $(In_2, (q\hat{\otimes}A)\Delta_A)$ ci-dessus et munissons N de la filtration induite par celle de A. On a alors $(A'_n) \subset Gr(B) \subset Gr(N) \subset (A'_n)$. Comme toutes les filtrations considérées sont séparées, on en déduit $N = B$ (C.A., V, § 7, lemme 1).

5.1.5. LEMME. Soient B un groupe abélien, $B = B'_0 \supset B'_1 \supset B'_2 \supset \ldots$ et $B = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ deux filtrations séparées de B par des sous-groupes tels que $B'_m \subset B_m$ pour tout m. Si l'application canonique de B'_m/B'_{m+2} dans B_m/B_{m+1} est surjective pour tout m et si B est complet pour la topologie définie par la filtration (B'_m), alors on a $B'_m = B_m$ pour tout m.

Appliquer le lemme 1 de C.A.V, § 7 à l'inclusion de B_m dans B_m.

5.2. Dans toute la suite de ce paragraphe 5, k désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

Nous posons $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si B est une k-algèbre profinie et si $r \in \mathbb{N}$, nous notons $((x^{p^r}))_{x \in \underline{r}(B)}$ l'idéal fermé de B qui est engendré par les éléments x^{p^r}, où x parcourt le radical $\underline{r}(B)$ de B. Si $r = \infty$, nous utilisons la même notation en convenant que $((x^{p^\infty}))_{x \in \underline{r}(B)}$ est l'idéal nul. Dans les deux cas, B_r désigne le quotient $B/((x^{p^r}))_{x \in \underline{r}(B)}$.

Nous disons que B est de hauteur $\leqslant r$ si $((x^{p^r}))_{x \in \underline{r}(B)}$ est l'idéal nul; si cela a lieu et si r est fini, nous disons que B est de hauteur finie.

Considérons en particulier le cas où B est de la forme $k[[\omega]]$, ω étant un espace vectoriel linéairement compact (0.2.2). Nous disons alors que B est une *algèbre de séries formelles* et que B_r est une *algèbre de séries formelles tronquées* ($r \in \overline{\mathbb{N}}$; nous convenons donc de dire que $B = B_\infty$ est également "tronquée"). Si $B = k[[\omega]]$, nous écrivons aussi $((x^{p^r}))_{x \in \omega}$ au lieu de $((x^{p^r}))_{x \in \underline{r}(B)}$.

Lorsque ω est un k-espace vectoriel linéairement compact filtré par une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés

$$0 = \omega_0 \subset \omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3 \ldots.$$

nous noterons $((x^{p^r}))_{r \in \omega_r}$ l'idéal fermé de $k\,[[\omega]]$ qui est engendré par les éléments x^{p^r}, où r parcourt $\mathbb{N}$ et x parcourt ω_r. Nous désignons par ${}_r\omega$ l'espace vectoriel linéairement compact filtré tel que

$${}_r\omega_i = \omega_i \quad \text{si} \quad i < r \qquad \text{et} \qquad {}_r\omega_i = \omega \quad \text{si} \quad i \geqslant r$$

THEOREME (DIEUDONNE-CARTIER) : *Soient* $H \longrightarrow G$ *un monomorphisme de groupes formels infinitésimaux sur un corps parfait* k *de caractéristique* $p > 0$. *Soit* B *l'algèbre affine de l'espace homogène* $H \backslash G$ *et supposons vérifiée l'une des deux conditions suivantes* :

(i) B *est de hauteur finie (ceci a lieu en particulier si* G *est de hauteur finie*).

(ii) B *est un anneau local noethérien complet*.

Alors B *est isomorphe au produit tensoriel complété d'une famille finie d'algèbres de séries formelles tronquées*.

La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 5.2.1 à 5.2.5.

5.2.1. Soient I l'idéal maximal de B et posons $\omega = I/\overline{I^2}$. On désigne par I_r le sous-espace vectoriel fermé de I formé des x tels $x^{p^r} = 0$, par ω_r l'image canonique de I_r dans ω. Nous allons voir que B est isomorphe à $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$ chaque fois qu'il existe une section $\sigma : \omega \longrightarrow I$ de la projection canonique de I sur $I/\overline{I^2}$, telle que $\sigma(\omega_r) \subset I_r$ pour tout r : une telle section se prolonge en effet en un homomorphisme continu $t : k[[\omega]] \longrightarrow B$, qui se factorise à travers $B' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$. Nous prouvons de 5.2.2 à 5.2.5 que l'homomorphisme $s : B' \longrightarrow B$, qui est induit par t, est bijectif.

Ce qui précède s'applique en particulier quand la filtration de ω est stationnaire, c'est-à-dire quand il existe un entier n_o tel que $\omega_n = \omega_{n_o}$ pour $n_o \leqslant n < +\infty$. Dans ce cas là en effet, on peut construire σ d'abord sur ω_1, puis sur un supplémentaire ω'_2 de ω_1 dans ω_2, puis sur un supplémentaire ω'_3 de ω_2 dans ω_3..., enfin sur un supplémentaire ω'_∞ de ω_{n_o} dans ω. Il est clair qu'on obtient ainsi un isomorphisme de $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$ sur le produit tensoriel complété des algèbres $k[[\omega_1]]/((x^p))_{x \in \omega_1}$, $k[[\omega'_2]]/((x^{p^2}))_{x \in \omega'_2}$ ..., $k[[\omega'_{n_o}]]/((x^{p^{n_o}}))_{x \in \omega'_{n_o}}$, $k\ \omega'_\infty$.

La filtration de ω est évidemment stationnaire si $\omega_r = \omega$ pour r assez grand (cas (i)), ou bien si ω est de dimension finie (cas (ii)). L'énoncé ci-dessus implique donc notre théorème.

5.2.2. Supposons d'abord B de hauteur $\leqslant 1$, c'est-à-dire que $x^p=0$ si $x \in I$. Il résulte alors de 5.1.4 que le gradué $Gr_I(B)$ associé à B par la filtration $I \supset \overline{I^2} \supset \overline{I^3} \ldots$ est muni d'une structure de co-groupe de la catégorie $GrAl/k$. Si l'on pose $C = \prod_{n \geqslant 0} Gr_I(B)_n$, le morphisme structural de $Gr_I(B)$ dans $Gr_I(B) \widehat{\otimes}_k Gr_I(B)$ induit un morphisme diagonal $\Delta_C : C \longrightarrow C \widehat{\otimes}_k C$ qui fait de C l'algèbre affine d'un groupe formel K sur k . Il est clair qu'on a $\omega_{K/k} = I/\overline{I^2}$ et que K est radiciel de hauteur $\leqslant 1$. D'après 4.4 , l'application identique de $\omega_{K/k}$ induit donc un isomorphisme de $k[[\omega_{K/k}]]/((x^p))_{x \in \omega_{K/k}}$ sur C . Ceci implique en particulier que l'application s de 5.2.1 induit un isomorphisme sur les gradués associés à B' et B lorsqu'on filtre B' et B par les puissances des idéaux maximaux. Donc s est un isomorphisme (C.A. V, 7, lemme 1).

5.2.3. Supposons maintenant B de hauteur finie $\leqslant r$: soit π l'isomorphisme $x \longmapsto x^p$ de k sur k . L'application linéaire de $B \widehat{\otimes}_\pi k$ dans B qui envoie $b \widehat{\otimes}_\pi x$ sur $b^p x = (bx^{\frac{1}{p}})^p$ a une image fermée qui n'est autre que la sous-algèbre fermée $B^p = \{b^p \mid b \in B\}$ de B . D'après la proposition 5.1 , si l'on pose $J = B^p \cap I = A \cap I_A$, B^p est l'algèbre affine du quotient à gauche de G par un sous-groupe H d'algèbre affine $A/\overline{AJ}$. Comme A est topologiquement libre sur B (1.4), B est un facteur direct du B-module pseudocompact A (1.3.2), de sorte qu'on peut identifier $B = B/\overline{BJ}$ à une sous-algèbre fermée de $A/\overline{AJ}$.

D'après la proposition 5.1 , B_1 est l'algèbre affine d'un espace homogène de H et est de hauteur $\leqslant 1$. D'après 5.2.2 , l'homomorphisme s de 5.2.1 induit donc un isomorphisme de B_1' sur B_1 . Si nous notons I' l'idéal maximal de B' , B'^p la sous-algèbre $\{x^p \mid x \in B'\}$ de B' et J' l'idéal maximal de B'^p, cela signifie que l'homomorphisme $s : B' \longrightarrow B$ de 5.2.1 induit un isomorphisme de $B'/\overline{B'J'}$ sur $B/\overline{BJ}$. Or, comme A est topologiquement libre sur B et sur B^p (5.1 et 1.4), B est topologiquement libre sur B^p (1.3.3) ; d'après 0.3.4 , s est donc un isomorphisme si l'homomorphisme $s^p : B'^p \longrightarrow B^p$, qui est induit par s , est un isomorphisme. Ceci est prouvé en 5.2.4 ci-dessous.

5.2.4. Pour tout espace vectoriel linéairement compact V sur k , nous notons ${}_{\pi}V$ l'espace $V \widehat{\otimes}_{\pi} k$ déduit de V par l'extension $x \longmapsto x^p$ du corps des scalaires. On a alors un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & {}_{\pi}\overline{I^2} & \xrightarrow{\alpha} & {}_{\pi}I & \xrightarrow{\beta} & {}_{\pi}\omega & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow u & & \Big\downarrow v & & \Big\downarrow w & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{J^2} & \xrightarrow{\gamma} & J & \xrightarrow{\delta} & \overline{\omega} & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

où l'on a posé $\overline{\omega} = J/\overline{J^2}$ et où les applications u, v, w sont induites par l'application linéaire $x \widehat{\otimes} a \longmapsto x^p a$ de ${}_{\pi}B$ dans B^p. Si l'on pose $J_n = \{x \in J \mid x^{p^n} = 0\}$ et $\overline{\omega}_n = \delta(I_n)$, il est clair qu'on a $J_n = v({}_{\pi}I_{n+1})$ et $\overline{\omega}_n = w(\omega_{n+1})$. De plus, comme u et v sont des surjections, w est une surjection et a pour noyau l'image ω_o du noyau de v . La section ${}_{\pi}\sigma : {}_{\pi}\omega \longrightarrow {}_{\pi}I$, qui est induite par la section σ de 5.2.1 , définit donc par passage au quotient une section $\tau : \overline{\omega} \longrightarrow J$ qui est compatible avec les filtrations de J et $\overline{\omega}$. Par hypothèse de récurrence, cette section induit un isomorphisme s' de $B'' = k[[\overline{\omega}]]/((X^{p^r}))_{x \in_r \overline{\omega}}$ sur B^p .

Comme B'' s'identifie manifestement à B'^p et s' à s^p, <u>notre théorème est donc démontré quand</u> B <u>est de hauteur finie</u>.

5.2.5. <u>Il reste à considérer le cas où</u> B <u>est de hauteur infinie</u>, et où la projection canonique de I sur ω possède une section compatible avec les filtrations de ω et I. Il suffit de montrer que pour tout r, l'application $s_r : B'_r \longrightarrow B_r$ induite par s est inversible. Or B est un facteur direct du B-module pseudocompact A (1.3.2). Si l'on pose $L = ((x^{p^r}))_{x \in \underline{r}(B)}$, on peut donc identifier $B/\overline{BL}$ à une sous-algèbre fermée de $A/\overline{AL}$; la proposition 5.1 montre que $A/\overline{AL}$ est l'algèbre affine d'un sous-groupe formel G_r de G et que $B/\overline{BL}$ est l'algèbre affine d'un espace homogène de G_r.

Posons $M = I/\overline{BL}$; la projection canonique de B sur B_r induit évidemment un isomorphisme de $\omega = I/\overline{I^2}$ sur $M/\overline{M^2}$, qui nous permet d'identifier ces deux espaces. Soit alors ω_n^r l'image dans ω de l'ensemble $M_n = \{ x \in M \mid x^{p^n} = 0 \}$; soit I_n^r l'image réciproque de M_n dans I. La suite exacte

$$0 \longrightarrow I_n^r \cap \overline{I^2} \longrightarrow I_n^r \longrightarrow \omega_n^r \longrightarrow 0$$

et l'égalité $I_n = \bigcap_r I_n^r$ montrent, par passage à la limite projective, que ω_n est l'intersection des ω_n^r (AB5*, 0.2). Or, comme le théorème 5.2 est déjà prouvé pour les algèbres de hauteur finie, donc pour les B_r, on a $\omega_n^r = \omega_n^{r+1}$ si $n < r$ et $\omega_n^r = \omega$ si $n \geqslant r$. Il s'ensuit qu'on a $\omega_n^r = \omega_n$ si $n < r$ et $\omega^r = \omega$ si $n \geqslant r$.

Autrement dit, l'espace vectoriel ω filtré par les sous-espaces ω_n^r n'est autre que ${}_r\omega$ (5.2). A fortiori, l'application σ^r composée de $\sigma : \omega \longrightarrow I$ et de la projection canonique de I sur M est compatible avec les filtrations (ω_n^r) et (M_n) de ω et M . Comme $k[[{}_r\omega]]/((x^{p^n}))_{x \in {}_r\omega_n}$ n'est autre que B_r' et que $s_r : B_r' \longrightarrow B_r$ est l'homomorphisme induit par σ^r , 5.2.4 montre que s_r est un isomorphisme, c.q.f.d.

5.3. <u>Remarques</u> : Appelons <u>stationnaire</u> toute algèbre profinie sur k qui est le produit tensoriel complété d'une famille d'algèbres de séries formelles tronquées. Si G est un groupe formel infinitésimal sur k et B l'algèbre affine d'un espace homogène de G , il résulte du théorème 5.2 que l'algèbre $B/((x^{p^r}))_{x \in \underline{r}(B)}$ est stationnaire pour tout entier $r \in \mathbb{N}$. Cela implique en particulier que B est une limite projective d'algèbres stationnaires.

Je ne sais pas si, avec les notations de 5.2.1 , on peut choisir G et B de telle façon qu'il n'existe pas de section $\sigma : \omega \longrightarrow I$ compatible avec les filtrations. On remarquera cependant qu'on peut avoir pour ω n'importe quel espace vectoriel linéairement compact filtré par une suite croissante de sous-espaces fermés. Si $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega$ est un tel espace filtré, on peut en effet définir dans l'algèbre $A = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x \in \omega_r}$ un morphisme diagonal $\Delta_A : A \longrightarrow A \hat{\otimes}_k A$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 2.1 ; il suffit de poser $\Delta_A y = y \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} y$ lorsque y est l'image dans A d'un élément de ω .

5.4. Corollaire : Soient G un groupe algébrique sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, H un sous-groupe algébrique de G, e l'image de l'élément neutre de G dans $H\backslash G$ et A l'algèbre locale de $H\backslash G$ en e. Alors $\widehat{A}$ est isomorphe à une algèbre de la forme

$$k[[X_1,\ldots, X_r,\ldots X_s]] / (X_1^{p^{n_1}},\ldots, X_r^{p^{n_r}}) .$$

Ceci résulte de 5.2 (ii) et 1.3.4.

INDEX DES NOTATIONS DU TOME I