A. Grothendieck · J. A. Dieudonné

Eléments de Géométrie Algébrique I

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971

A. Grothendieck
Professor at Institut des Hautes Etudes Scientifiques

J. A. Dieudonné
Professor at the University of Nice

Geschäftsführende Herausgeber:

Prof. Dr. B. Eckmann
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Prof. Dr. B. L. van der Waerden
Mathematisches Institut der Universität Zürich

AMS Subject Classifications (1970): 14–02, 14A15, 14F05

ISBN 3-540-05113-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-05113-9 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1971. Library of Congress Catalog Card Number 73-110151.
Printed in Germany.

Printing: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer. Binding: Konrad Triltsch, Graphischer Betrieb, Würzburg

Table des matières

Avant-propos 1

Introduction 4

CHAPITRE 0

Préliminaires

§ 1. Foncteurs représentables 19

1.1. Foncteurs représentables 19
1.2. Produits fibrés dans une catégorie 25
1.3. Changement de base 31
1.4. Noyaux; morphisme diagonal 34
1.5. Foncteurs adjoints 38
1.6. Structures algébriques dans les catégories 41
1.7. Morphismes fonctoriels représentables 44

§ 2. Compléments de topologie 48

2.1. Espaces irréductibles 48
2.2. Espaces localement noethériens 55
2.3. Ensembles quasi-constructibles et ensembles constructibles 55
2.4. Ensembles globalement constructibles dans les espaces noethériens . 58
2.5. Fonctions constructibles 61
2.6. Parties très denses d'un espace topologique 62
2.7. Quasi-homéomorphismes 64
2.8. Espaces de Jacobson 67
2.9. Espace sobre associé à un espace topologique 67
2.10. Applications ouvertes en un point 70

§ 3. Compléments sur les faisceaux 72

3.1. Faisceaux à valeurs dans une catégorie 72
3.2. Préfaisceaux sur une base d'ouverts 74
3.3. Recollement de faisceaux 77
3.4. Images directes de préfaisceaux 78

3.5. Images réciproques de préfaisceaux 80
3.6. Faisceaux simples et faisceaux localement simples 83
3.7. Images réciproques de préfaisceaux de groupes ou d'anneaux 84
3.8. Quasi-homéomorphismes et images réciproques de faisceaux 85
3.9. Faisceaux d'espaces pseudo-discrets 86

§ 4. Espaces annelés 87

4.1. Espaces annelés, $\mathscr{A}$-Modules, $\mathscr{A}$-Algèbres 87
4.2. Image directe d'un $\mathscr{A}$-Module 94
4.3. Image réciproque d'un $\mathscr{B}$-Module 96
4.4. Relations entre images directes et images réciproques 99
4.5. Immersions ouvertes et morphismes représentables par des immersions ouvertes 102

§ 5. Faisceaux quasi-cohérents et faisceaux cohérents 107

5.1. Faisceaux quasi-cohérents 107
5.2. Faisceaux de type fini 108
5.3. Faisceaux cohérents 111
5.4. Faisceaux localement libres 115
5.5. Modules localement libres sur un espace localement annelé 119
5.6. Groupe de Picard 124
5.7. Morphismes plats d'espaces annelés 126

§ 6. Compléments d'algèbre commutative 128

6.1. Limites inductives d'anneaux 128
6.2. Identification du module M_f à une limite inductive 131
6.3. Propriétés de finitude 131
6.4. Critères pour qu'un anneau soit noethérien 140
6.5. Anneaux normaux et fermeture intégrale 145
6.6. Compléments sur la platitude 152
6.7. Compléments sur les modules projectifs 165
6.8. Existence d'extensions plates d'anneaux locaux 168

§ 7. Compléments d'algèbre topologique 170

7.1. Anneaux admissibles 170
7.2. Anneaux adiques et limites projectives 174
7.3. Anneaux préadiques noethériens 178
7.4. Modules quasi-finis sur les anneaux locaux 179
7.5. Anneaux de séries formelles restreintes 180
7.6. Anneaux complets de fractions 182
7.7. Produits tensoriels complétés 187
7.8. Topologies sur les modules d'homomorphismes 191

CHAPITRE I

Le langage des schémas

Sommaire 193

§ 1. Schémas affines 194

1.1. Le spectre d'un anneau 194
1.2. Propriétés fonctorielles des spectres premiers d'anneaux 196
1.3. Faisceau associé à un module 197
1.4. Faisceaux quasi-cohérents sur un spectre premier 205
1.5. Faisceaux cohérents sur un spectre premier 209
1.6. Schémas affines et morphismes d'espaces localement annelés dans des schémas affines 209
1.7. Images directes et images réciproques de faisceaux quasi-cohérents par des morphismes de schémas affines 212

§ 2. Schémas et morphismes de schémas 215

2.1. Définition des schémas 215
2.2. Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma 217
2.3. Morphismes de schémas 219
2.4. Recollement de schémas 222
2.5. Schémas locaux 223
2.6. Schémas au-dessus d'un schéma 226
2.7. Schémas noethériens et schémas localement noethériens 228
2.8. Schémas artiniens 230

§ 3. Produit et somme de schémas. Changement de base 230

3.1. Somme de schémas 230
3.2. Produit de schémas 231
3.3. Produit tensoriel de Modules quasi-cohérents sur un produit de schémas 237
3.4. Changement de base; fibres 239
3.5. Point d'un schéma à valeurs dans un schéma; points géométriques . 242
3.6. Morphismes surjectifs 244
3.7. Morphismes radiciels 246
3.8. Morphismes universellement ouverts, universellement fermés, universellement bicontinus 249
3.9. Morphismes générisants 252
3.10. Morphismes submersifs et universellement submersifs 256

§ 4. Sous-schémas et morphismes d'immersion. Schémas réduits 257

4.1. Sous-schémas 257
4.2. Morphismes d'immersion 260
4.3. Image réciproque d'un sous-schéma 263

4.4. Immersions locales et isomorphismes locaux 266
4.5. Nilradical. Schémas réduits 268
4.6. Existence d'un sous-schéma d'espace sous-jacent donné 273

§ 5. Morphismes séparés. Critères valuatifs 274

5.1. Diagonale d'un S-schéma 274
5.2. Morphismes et schémas séparés 277
5.3. Critères de séparation 279
5.4. Morphismes schématiquement dominants et sous-schémas schématiquement denses 283
5.5. Critères valuatifs 285

§ 6. Conditions de finitude relatives 290

6.1. Morphismes quasi-compacts et morphismes quasi-séparés 290
6.2. Morphismes localement de type fini et morphismes localement de présentation finie 297
6.3. Morphismes de type fini et morphismes de présentation finie 304
6.4. Schémas de Jacobson et anneaux de Jacobson 307
6.5. Schémas algébriques et localement algébriques 308
6.6. Détermination locale d'un morphisme 311
6.7. Image directe d'un faisceau quasi-cohérent 313
6.8. Prolongement de sections de faisceaux quasi-cohérents 315
6.9. Prolongement des faisceaux quasi-cohérents 316
6.10. Image schématique d'un schéma. Adhérence schématique d'un sous-schéma 324
6.11. Morphismes quasi-finis 325

§ 7. Ensembles constructibles dans les schémas 327

7.1. Morphismes de présentation finie et ensembles constructibles 327
7.2. Ensembles pro-constructibles et ind-constructibles 331
7.3. Applications aux morphismes générisants 339

§ 8. Applications rationnelles 342

8.1. Applications rationnelles et fonctions rationnelles 342
8.2. Domaine de définition d'une application rationnelle 346
8.3. Faisceau des fonctions rationnelles 349
8.4. Faisceaux de torsion et faisceaux sans torsion 350
8.5. Critères de séparation d'un schéma intègre 351

§ 9. Foncteurs représentables élémentaires dans la théorie des schémas: Schémas relativement affines, fibrés vectoriels, fibrés projectifs et grassmanniennes 354

9.1. Morphismes affines et spectres d'Algèbres quasi-cohérentes 354
9.2. Faisceaux quasi-cohérents sur un S-schéma affine sur S 361

9.3. Application aux changements de base pour les images directes de Modules quasi-cohérents 363
9.4. Fibré vectoriel associé à un faisceau de modules 369
9.5. Schémas en ensembles algébriques 376
9.6. Schémas en groupes linéaires 377
9.7. Grassmanniennes d'un Module 380
9.8. Morphismes de Plücker et de Segre 388
9.9. Fibrés en drapeaux 396
9.10. Fibrés en variétés de Stiefel 399

§ 10. Schémas formels 401

10.1. Schémas formels affines 401
10.2. Morphismes de schémas formels affines 403
10.3. Idéaux de définition d'un schéma formel affine 405
10.4. Schémas formels et morphismes de schémas formels 407
10.5. Idéaux de définition des schémas formels 409
10.6. Schémas formels comme limites inductives de schémas 411
10.7. Produit de schémas formels 417
10.8. Complété formel d'un schéma le long d'un sous-schéma 418
10.9. Prolongement d'un morphisme aux complétés 423
10.10. Modules de présentation finie sur les schémas formels affines adiques 427
10.11. Modules de présentation finie sur les schémas formels adiques . . 433
10.12. Morphismes adiques de schémas formels 436
10.13. Morphismes de type fini 439
10.14. Sous-schémas fermés des schémas formels 441
10.15. Schémas formels séparés 444
10.16. Morphismes affines de schémas formels 446

APPENDICE

Ultraschémas et espaces algébriques de Serre

1. Spectres maximaux et ultraschémas 449
2. Espaces algébriques de Serre 451

Bibliographie 454

Index des notations 455

Index terminologique 460

Avant-propos

Cet ouvrage se propose de donner un exposé systématique des fondements de la Géométrie algébrique. Il est maintenant admis que pour obtenir une théorie susceptible d'applications aussi larges que possible, il convient de donner à la Géométrie algébrique toute la souplesse et la généralité désirables, en la faisant reposer sur la notion de *schéma*: nous avons essayé, dans l'Introduction, de décrire rapidement l'évolution qui a abouti à cette notion.

A titre informatif, nous donnons ci-dessous le plan général prévu pour le Traité:

Chapitre I. Le langage des schémas.
Chapitre II. Etude globale élémentaire de quelques classes de morphismes.
Chapitre III. Cohomologie des faisceaux algébriques cohérents. Applications.
Chapitre IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas.
Chapitre V. Compléments sur les morphismes projectifs.
Chapitre VI. Techniques de construction de schémas.
Chapitre VII. Schémas en groupes, espaces fibrés principaux.
Chapitre VIII. Le schéma de Picard.
Chapitre IX. Le groupe fondamental.
Chapitre X. Résidus et dualité.
Chapitre XI. Théorie d'intersection, classes de Chern, théorème de Riemann-Roch.
Chapitre XII. Cohomologie étale des schémas.

Les chapitres I, II et III jouent un rôle central dans tout le Traité et sont indispensables pour la lecture de tous les travaux de Géométrie algébrique fondés sur la théorie des schémas; les chapitres suivants (surtout à partir du chap. VII) traitent de questions plus spéciales. Mais il convient de souligner que ce Traité n'a pas de prétentions encyclopédiques et passe sous silence de nombreuses questions de Géométrie algébrique, sans tenir compte de leur importance historique ou du nombre de travaux qu'elles suscitent aujourd'hui. Le lecteur déjà au

courant de la Géométrie algébrique classique pourra pallier cet inconvénient en consultant un des ouvrages [3], [7], [11], [12], [13], [16], [17] de la Bibliographie, où il pourra se familiariser avec l'aspect que prennent certains problèmes classiques lorsqu'on les envisage dans l'optique de la théorie des schémas.

Il n'est guère possible d'aborder la lecture de ce Traité sans avoir une bonne connaissance des sujets suivants:

a) L'*Algèbre commutative*, telle qu'elle est exposée par exemple dans les *Eléments* de N. Bourbaki [1].

b) L'*Algèbre homologique*, pour laquelle nous renvoyons à Cartan-Eilenberg [2], (cité (M)), Godement [5] (cité (G)), MacLane [9], ainsi qu'à l'article [6] de A. Grothendieck (cité (T)).

c) La *Théorie des faisceaux*, où nos principales références seront (G) et (T).

d) Enfin, il sera utile au lecteur d'avoir une certaine familiarité avec le *langage fonctoriel*, qui sera constamment employé dans ce Traité et pour lequel le lecteur pourra consulter (T) et [10], ainsi que [SGA 4], I et [SGA 3], I et IV.

Pour la commodité du lecteur, nous donnons dans un «Chapitre 0» (publié en plusieurs parties jointes aux autres chapitres) des compléments divers d'Algèbre commutative, d'Algèbre homologique, de Théorie des faisceaux, utilisés au cours du Traité, qui sont plus ou moins bien connus, mais pour lesquels il n'a pas été possible de donner des références commodes. Il est recommandé au lecteur de ne se reporter au chapitre 0 qu'en cours de lecture du Traité proprement dit, et dans la mesure où les résultats auxquels nous nous référons ne lui sont pas suffisamment familiers.

Les références seront données suivant le système décimal; par exemple, dans **III**, 4.9.3, le chiffre **III** indique le chapitre, le chiffre 4 le paragraphe, le chiffre 9 la section du paragraphe. A l'intérieur *du même chapitre*, on supprimera la mention du chapitre. Le chiffre $\mathbf{O}_{\mathbf{N}}$ réfère à la partie du chapitre 0 jointe au chapitre **N**.

Il est parfois utile de grouper des résultats dans un même paragraphe alors que certains ne peuvent être démontrés qu'en faisant appel à des propositions prouvées ultérieurement dans le texte; ces résultats seront toujours placés entre astérisques: $*\ldots_*$ et le lecteur pourra dans chaque cas vérifier qu'il n'y a pas de cercle vicieux, ces résultats n'étant jamais utilisés pour prouver les propositions sur lesquelles ils reposent. Quant aux exemples, nous ne nous astreignons pas à n'y utiliser que les propositions prouvées antérieurement dans le texte.

Les passages imprimés en petits caractères peuvent être omis en première lecture; de même que pour le Chapitre 0, il est conseillé de ne se reporter à ces passages qu'en cas de besoin.

Les deux premiers chapitres du Traité constituent une réédition des deux chapitres parus séparément dans *Publ. Math. Inst. Hautes Ét. Scient.*, n° 4 (1960) et n° 8 (1961). Les principaux changements par rapport à cette première édition consistent surtout en remaniements de l'ordre des matières, notamment par incorporation à ces deux chapitres de questions traitées d'abord (ou prévues) dans des chapitres ultérieurs; signalons particulièrement l'introduction au chap. I, §9 des schémas représentant certains foncteurs particulièrement importants dans les applications, dont l'existence est établie par une méthode uniforme.

Signalons enfin, par rapport à la première édition, un changement important de terminologie: le mot «schéma» désigne maintenant ce qui était appelé «préschéma» dans la première édition, et les mots «schéma séparé» ce qui était appelé «schéma». Le sens du mot «constructible» a également changé: on désigne maintenant ainsi ce qui était appelé «localement constructible» dans la première édition, et «globalement constructible» a le sens qu'avait «constructible» dans la première édition.

Les références aux chapitres III et IV de la première édition sont données comme ci-dessus, mais en ajoutant une astérisque au chiffre du chapitre.

Introduction

1. Nous nous proposons, dans cette Introduction, d'essayer de montrer (sans entrer dans les détails) comment le point de vue moderne, en Géométrie algébrique, s'est dégagé de façon assez naturelle de l'évolution des problèmes fondamentaux posés par cette branche des mathématiques. Pour la commodité de l'exposé, nous utiliserons le langage de la Mathématique moderne, même pour décrire des situations historiques où il est évident que le langage et la technique des auteurs contemporains étaient fort différents des conceptions actuelles.

2. On peut dire que l'origine historique et un des buts essentiels de l'Algèbre, depuis les Babyloniens, les Hindous et Diophante jusqu'à nos jours, est l'étude des *solutions de systèmes d'équations polynomiales.* Pour préciser le problème, nous considérons un anneau commutatif k ayant un élément unité, et l'anneau

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P} = k[(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}] \tag{1}$$

des polynômes par rapport à une famille arbitraire $(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'indéterminées, à coefficients dans k. Rappelons que pour toute famille $\boldsymbol{t}=(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'éléments de k, il y a un k-homomorphisme et un seul de P dans k, transformant l'élément unité en élément unité et chacun des T_i en t_i $(i\in\mathrm{I})$: l'image d'un polynôme $\mathrm{F}\in\mathrm{P}$ par cet homomorphisme est notée $\mathrm{F}(\boldsymbol{t})$. On définit ainsi, pour tout polynôme $\mathrm{F}\in\mathrm{P}$, une «application polynôme» $\boldsymbol{t}\mapsto\mathrm{F}(\boldsymbol{t})$ de k^{I} dans k.

Cela étant, le problème considéré consiste à se donner une famille $(\mathrm{F}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ de polynômes de P, et à chercher tous les systèmes $\boldsymbol{t}=(t_i)\in k^{\mathrm{I}}$ pour lesquels on a

$$\mathrm{F}_j(\boldsymbol{t})=0 \quad \text{pour tout } j\in\mathrm{J}. \tag{2}$$

On dit qu'un tel système $\boldsymbol{t}=(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une *solution du système d'équations polynomiales*

$$\mathrm{F}_j((\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}})=0 \quad \text{pour } j\in\mathrm{J}.. \tag{3}$$

Il y a lieu, pour ne pas s'embarrasser de restrictions gênantes dans certaines applications (et en particulier pour les développements qui vont suivre) de ne faire aucune hypothèse spéciale sur les ensembles d'indices I et J; mais historiquement, ce sont les problèmes où I et J sont *finis* qui ont été étudiés presque exclusivement pendant très longtemps.

3. A l'aspect purement «algébrique» du problème précédent s'est ajouté, dès l'invention de ce qu'on a longtemps appelé la «Géométrie analytique», un aspect géométrique d'un grand intérêt, tout d'abord pour $k=\mathbf{R}$ et I réduit à 2 ou 3 éléments, où les ensembles de solutions de certains systèmes (3) se trouvaient être des «courbes» ou «surfaces» étudiées depuis l'Antiquité, comme par exemple les coniques ou les quadriques. Depuis environ le milieu du XIXe siècle, on s'est peu à peu habitué à employer un langage géométrique inspiré de celui de la géométrie élémentaire, lorsque k est un anneau quelconque et I un ensemble d'indices quelconque; c'est ainsi que k^{I} est souvent appelé un «espace affine» sur k et ses éléments $\boldsymbol{t}=(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ des «points».

4. Les premières questions naturelles que l'on se pose dans l'étude du système d'équations (3) concernent l'ensemble de ses solutions dans k^{I}: cet ensemble est-il vide ou non? Est-il fini ou non? S'il est fini, peut-on donner une estimation du nombre des solutions? S'il est infini, peut-on donner des estimations asymptotiques du nombre de solutions satisfaisant à des inégalités supplémentaires où figurent des paramètres, lorsque ces paramètres tendent vers certaines limites? Etc. On peut qualifier ce point de vue «naïf» de point de vue *arithmétique* (en un sens très large), parce que la nature «arithmétique» de l'anneau k y joue un rôle essentiel: les méthodes et les résultats seront très différents suivant que k est un corps, ou un anneau tel que $\mathbf{Z}$ (par exemple), ou l'anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques. De même, si k est un corps, les résultats diffèreront beaucoup suivant que k est un corps de nombres algébriques, ou un corps fini, ou un corps algébriquement clos (par exemple le corps $\mathbf{C}$), ou le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels («géométrie algébrique réelle»).

5. C'est précisément l'étude des courbes et surfaces algébriques dans le domaine réel qui allait conduire à un point de vue différent: dès le début du XVIIIe siècle, et systématiquement à partir de Monge et de Poncelet, on associe à un système (3) à coefficients réels le *même* système dont on ne cherche plus seulement les solutions dans $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$, mais bien dans l'espace *complexe* correspondant $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$, utilisant le fait que $\mathbf{R}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$. Cette idée se montra très féconde, du fait que les propriétés des êtres algébriques étudiés se simplifiaient considérablement par cette «extension» du corps de base; en fait on peut même

dire que cette «extension» réussit en un certain sens trop bien, car l'avantage additionnel de disposer, sur le corps **C**, de la puissante théorie des fonctions analytiques, fut cause que pendant tout le XIXe siècle, on cessa pratiquement de considérer d'autres systèmes (3) que ceux à coefficients complexes (ou dans des sous-corps de **C** tels que les corps de nombres algébriques); ce qui conduisit à perdre de vue pendant longtemps l'idée fondamentale du «changement du corps de base» sous sa forme générale (la seule exception concerne la théorie des congruences, où l'idée de chercher des «solutions imaginaires» conduisit à la théorie des corps finis (Gauss, Galois) et à leur utilisation dans la théorie des groupes linéaires (Jordan, Dickson)).

6. C'est seulement à partir de 1940, avec la Géométrie algébrique «abstraite» (c'est-à-dire sur un corps de base k quelconque, pouvant être de caractéristique $\neq 0$) développée surtout par Weil, Chevalley et Zariski, que l'idée du changement de base prend de l'importance dans un contexte plus général: il est en effet fréquemment nécessaire de passer par exemple à une clôture algébrique de k, ou (lorsque k est un corps valué) à la complétion de k. Toutefois, il n'y a pas d'étude systématique de cette opération chez Chevalley ni Zariski; tandis que chez Weil, qui l'utilise dans bien d'autres occasions, sa généralité est quelque peu masquée par le parti pris de se restreindre une fois pour toutes à n'envisager que des sous-corps d'un corps algébriquement clos «assez grand» (le «corps universel»), restant donc en apparence assez proche du point de vue classique où le corps **C** tenait ce rôle. Ce n'est que plus récemment, d'abord chez E. Kähler [8], puis dans la première édition du présent Traité, que l'utilité d'admettre des «extensions» k' de k qui soient des *k-algèbres* (commutatives) *arbitraires* (même lorsque k est un corps) a été reconnue et que de tels changements de base arbitraires sont devenus un des procédés les plus importants sans doute de la Géométrie algébrique moderne; si bien qu'on peut opposer au point de vue «arithmétique» décrit plus haut le point de vue qu'on peut qualifier de proprement «*géométrique*»: on y fait abstraction des propriétés spéciales aux solutions du système (3) dans l'espace particulier k^1 d'où l'on est parti, pour considérer, pour *chaque* k-algèbre k', l'ensemble des solutions de (3) *dans* k'^1, et la façon dont cet ensemble *varie avec* k'; on recherchera en particulier les propriétés du système d'équations (3) qui restent *invariantes* lorsque k' varie (ou, comme nous dirons encore, qui sont «stables par changement de base»).

7. L'idée de «variation» de l'anneau de base que nous venons d'introduire s'exprime mathématiquement sans peine grâce au langage fonc-

toriel (dont l'absence explique sans doute la timidité des tentatives antérieures). On peut dire en effet que l'on a un *foncteur* covariant

$$\mathrm{E}^1 : k' \mapsto k'^1 \tag{4}$$

de la catégorie des k-algèbres dans celle des ensembles, ce foncteur faisant correspondre à tout k-homomorphisme $\varphi : k' \to k''$ l'application $\varphi^1 : k'^1 \to k''^1$; on dit encore que (4) est le foncteur «espace affine-type de dimension I sur k». Si S désigne la famille $(\mathrm{F}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ de polynômes considérée au n° 2, notons $\mathrm{V_S}(k')$ la partie de k'^1 formée des solutions du système (3); on dit encore que ces solutions sont les «points à valeurs dans k'» de la «variété sur k» définie par le système (3). Il est immédiat que

$$\mathrm{V_S} : k' \mapsto \mathrm{V_S}(k') \tag{5}$$

est un *sous-foncteur* du foncteur E^1 (l'image de $\mathrm{V_S}(k')$ par φ^1 étant contenue dans $\mathrm{V_S}(k'')$). On pose donc en principe que *l'étude du système d'équations* (3) *du point de vue de la Géométrie algébrique est l'étude du foncteur* $\mathrm{V_S}$ (de la catégorie des k-algèbres dans celle des ensembles).

Cette étude comporte deux aspects: tout d'abord l'étude du foncteur $k' \mapsto \mathrm{V_S}(k')$, *indépendamment* de la façon dont il est réalisé comme sous-foncteur d'un foncteur «espace affine-type» convenable; ensuite, le cas échéant, l'étude des propriétés d'un plongement $\mathrm{V_S}(k') \to k'^1$. Dans la plupart des problèmes qu'on se pose d'ordinaire en Géométrie algébrique, ce deuxième aspect est entièrement accessoire: *seules importent les propriétés intrinsèques du foncteur* $\mathrm{V_S}$, *indépendamment de l'immersion affine particulière*

$$\mathrm{V_S}(k') \to k'^1. \tag{6}$$

Par suite, on est justifié de regarder deux familles $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ de polynômes (par rapport à deux familles d'indéterminées éventuellement distinctes, il importe peu) comme essentiellement *équivalentes*, si les foncteurs correspondants $\mathrm{V_{S_1}}$ et $\mathrm{V_{S_2}}$ sont *isomorphes*.

8. Nous allons préciser la structure du foncteur (5); partons de l'observation que ce foncteur ne change pas quand on ajoute aux équations données (3) toutes les équations de la forme $\mathrm{F} = 0$, où F est de la forme

$$\mathrm{F} = \sum_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{A}_j \mathrm{F}_j, \tag{7}$$

les A_j étant des polynômes de l'algèbre $k[(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}]$, nuls sauf pour un nombre fini d'indices; l'ensemble de ces polynômes F n'est autre que *l'idéal* $\mathfrak{J}$ de l'algèbre $\mathrm{P_I}$ engendré par la famille $(\mathrm{F}_j)_{j\in\mathrm{J}}$. On peut donc

toujours, pour l'étude des foncteurs V_S, se ramener au cas des foncteurs de la forme $V_\mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de P_1.(1)

Introduisons maintenant la k-algèbre quotient

$$A_\mathfrak{J} = P_1/\mathfrak{J} \tag{8}$$

et notons que l'on a une bijection fonctorielle en k'

$$k'^1 \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(P_1, k') \tag{9}$$

associant à tout point $t=(t_i)$ de k'^1 l'homomorphisme $F \mapsto F(t)$. Par cette bijection, $V_\mathfrak{J}(k')$ correspond à l'ensemble des homomorphismes de k-algèbres $P_1 \to k'$ qui sont *nuls dans* $\mathfrak{J}$, ou encore à l'ensemble des homomorphismes de k-algèbres de $A_\mathfrak{J}$ dans k'. Autrement dit, on obtient par restriction de (9) un isomorphisme de foncteurs en k'

$$V_\mathfrak{J}(k') \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A_\mathfrak{J}, k'). \tag{10}$$

En outre, par les bijections (9) et (10), le plongement canonique (6) n'est autre que l'injection $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A_\mathfrak{J}, k') \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(P_1, k')$, correspondant à l'homomorphisme canonique surjectif

$$P_1 \to A_\mathfrak{J} = P_1/\mathfrak{J}. \tag{11}$$

Si on tient compte du fait que *toute* k-algèbre commutative A peut s'écrire sous la forme $P_I/\mathfrak{J}$ pour I et $\mathfrak{J}$ convenables, *on voit donc qu'à isomorphisme près, les foncteurs* V_S *sont exactement les foncteurs représentables*

$$V_A : k' \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A, k'). \tag{12}$$

Un plongement $V_A \to E^1$ d'un tel foncteur (pour un ensemble d'indices I convenable) est une application injective *fonctorielle en* k'

$$V_A(k') \to k'^1.$$

Or, si l'on a une application fonctorielle en k'

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A, k') \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(P_1, k'), \tag{13}$$

---

(1) Cela montre que, même lorsque l'ensemble I des indéterminées est fini et que k est un corps, il n'y a pas lieu de se borner à des systèmes d'équations finis, puisque les systèmes «les plus naturels» sont ceux dont l'ensemble d'indices est un idéal de P (ensemble qui est rarement fini!). Bien que, lorsque k est un corps et que I est fini, tout idéal $\mathfrak{J}$ de $P = k[(T_i)_{i\in I}]$ puisse être engendré par un nombre fini d'éléments («théorème de la base» de Hilbert), donc que les deux définitions possibles du foncteur (5) (par un système S fini, ou par un idéal de P) coïncident, il n'en reste pas moins que la restriction de finitude est *a priori* artificielle, et techniquement gênante.

en y faisant $k'=A$, il correspond par (13) à l'identité 1_A de A un k-homomorphisme

$$\pi : P_I \to A \tag{14}$$

et, par fonctorialité, l'application (13) n'est autre que $u \mapsto u \circ \pi$. Lorsque l'homomorphisme π est *surjectif*, l'application (13) est donc injective (la réciproque étant inexacte); on se borne d'ordinaire aux plongements $V_A \to E^I$ obtenus comme (6) à l'aide d'un homomorphisme π surjectif. Se donner un tel homomorphisme équivaut d'ailleurs à se donner les images des T_i par cet homomorphisme, c'est-à-dire un *système générateur* $(t_i)_{i\in I}$ de la k-algèbre A, ayant I pour ensemble d'indices.

9. Ces considérations montrent (compte tenu des propriétés élémentaires des foncteurs représentables (voir (**0**,1))) que la catégorie des foncteurs

$$\boldsymbol{k\text{-}alg} \to \boldsymbol{Ens}$$

associés à des systèmes d'équations (3) (autrement dit de la forme V_S) est *équivalente à la catégorie opposée de la catégorie des k-algèbres* ***k-alg***, en associant à toute k-algèbre A le foncteur V_A défini dans (12) (qui dépend de A de façon contravariante). On peut donc dire que l'étude des foncteurs V_S indépendamment des immersions (6), étude que nous avons présentée comme étant le but initial de la Géométrie algébrique sur k, équivaut très exactement à l'étude des *k-algèbres quelconques* A. Dans cette correspondance $A \leftrightarrow V_A$, aux k-algèbres A de type fini correspondent les sous-foncteurs de foncteurs «espaces affines-types E^I de *rang fini*», c'est-à-dire pour lesquels I est fini. Si l'on s'était donc (à tort) borné à des familles finies d'indéterminées dans (3), cela aurait eu pour conséquence de nous restreindre à l'étude des k-algèbres de type fini exclusivement.

D'autre part, l'étude des foncteurs de la forme V_S *munis* de leur immersion (6), revient à l'étude des k-algèbres A *munis* d'un système de générateurs $(t_i)_{i\in I}$, ou, de façon équivalente, à l'étude des *idéaux* dans des anneaux de polynômes P_I. On voit en particulier, pour I fixé, que la correspondance

$$\mathfrak{J} \mapsto V_{\mathfrak{J}}$$

d'idéaux de P_I à sous-foncteurs de E^I de la forme V_S, est *injective*: *un idéal* $\mathfrak{J}$ *est connu quand on connaît le sous-foncteur* $V_{\mathfrak{J}}$ *de* E^I *ensemble des solutions du système d'équations* (3) *défini par* $\mathfrak{J}$, *dans n'importe quelle k-algèbre* k'; en effet $\mathfrak{J}$ est l'idéal des polynômes F tels que la fonction polynôme correspondante $t \mapsto F(t)$ soit *nulle* dans $V_{\mathfrak{J}}(k')$ pour *toute* k-algèbre k'. Ceci montre plus généralement que pour deux idéaux $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$ de P_I, on a l'équivalence

$$(\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}') \Leftrightarrow (V_{\mathfrak{J}} \supset V_{\mathfrak{J}'}). \tag{15}$$

10. Il y a lieu de bien noter la différence, fort importante pour la question des fondements, entre ces résultats, liés à la considération de k-algèbres k' *quelconques*, et ce qui se passe lorsqu'on se borne à la considération de k-algèbres k' qui sont des corps, ou plus généralement qui sont *réduites* (c'est-à-dire sans élément nilpotent $\neq 0$). De façon générale, soit $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie de ***k-alg*** formée d'algèbres réduites (par exemple la catégorie de toutes les algèbres réduites, ou de toutes les k-algèbres qui sont des corps, ou la catégorie ayant un seul objet qui est une algèbre réduite, ou un corps); notons $V_{\mathfrak{Z},\boldsymbol{C}}$ la *restriction* de $V_{\mathfrak{Z}}$ à $\boldsymbol{C}$. Il est immédiat que $V_{\mathfrak{Z},\boldsymbol{C}}$ n'est pas modifié lorsqu'on remplace le système d'équations $F=0$, où F parcourt $\mathfrak{Z}$, par le système d'équations $F=0$, où F parcourt l'ensemble des polynômes tels qu'il existe une *puissance* F^n convenable de F contenue dans $\mathfrak{Z}$. L'ensemble de ces polynômes, image réciproque dans P_1 du nilradical de $A_{\mathfrak{Z}}=P_1/\mathfrak{Z}$, est la *racine* $\mathfrak{r}(\mathfrak{Z})$ de $\mathfrak{Z}$, et on a donc

$$V_{\mathfrak{Z},\boldsymbol{C}} = V_{\mathfrak{r}(\mathfrak{Z}),\boldsymbol{C}}. \tag{16}$$

Comme il est possible que $\mathfrak{r}(\mathfrak{Z})\neq\mathfrak{Z}$,[1] la correspondance $\mathfrak{Z}\mapsto V_{\mathfrak{Z},\boldsymbol{C}}$ n'est plus injective en général. Toutefois, si $\mathfrak{Z}=\mathfrak{r}(\mathfrak{Z})$, et si $\boldsymbol{C}$ contient les corps des fractions des k-algèbres intègres quotients de P_1, alors la connaissance de $V_{\mathfrak{Z},\boldsymbol{C}}$ détermine complètement $\mathfrak{Z}$. En effet, $\mathfrak{Z}=\mathfrak{r}(\mathfrak{Z})$ est l'intersection des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de P_1 contenant $\mathfrak{Z}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 6, prop. 13); pour tout polynôme $F\in P_1$ non dans $\mathfrak{Z}$, il y a donc un idéal premier $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{Z}$ tel que $F\notin\mathfrak{p}$, et si k' est le corps des fractions de $P_1/\mathfrak{p}$, la fonction polynôme $t\mapsto F(t)$ dans k'^1 n'est pas identiquement nulle dans $V_{\mathfrak{Z}}(k')$, puisque l'image de F dans $P_1/\mathfrak{p}$ (et *a fortiori* dans $P_1/\mathfrak{Z}$) n'est pas nulle. On peut donc dire que, moyennant l'hypothèse précédente sur $\boldsymbol{C}$, *l'application* $\mathfrak{Z}\mapsto V_{\mathfrak{Z},\boldsymbol{C}}$, *restreinte à l'ensemble des idéaux égaux à leur racine, est injective.* Plus généralement, le même raisonnement montre que, sous la même condition pour $\boldsymbol{C}$, on a l'équivalence

$$(\mathfrak{r}(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{r}(\mathfrak{Z}'))\Leftrightarrow(V_{\mathfrak{Z},\boldsymbol{C}}\supset V_{\mathfrak{Z}',\boldsymbol{C}}). \tag{17}$$ [2]

---

[1] Il suffit de prendre $P=k[X]$ et $\mathfrak{Z}$ engendré par X^2; on a $\mathfrak{r}(\mathfrak{Z})=(X)$.

[2] Le célèbre «Nullstellensatz» de Hilbert (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 3, prop. 2) montre que l'équivalence (17), et par suite l'injectivité de $\mathfrak{Z}\mapsto V_{\mathfrak{Z},\boldsymbol{C}}$ sur l'ensemble des idéaux $\mathfrak{Z}$ égaux à leur racine, est encore vraie lorsque k est un corps, que I est fini, et qu'on suppose seulement que $\boldsymbol{C}$ contient les extensions *finies* de k (lorsque k est algébriquement clos, $\boldsymbol{C}$ peut donc être réduite à k): en effet, $\mathfrak{r}(\mathfrak{Z})$ est alors l'intersection des idéaux *maximaux* $\mathfrak{m}$ de P_1 contenant $\mathfrak{Z}$, et ceux-ci sont tels que $P_1/\mathfrak{m}$ soit une extension finie de k).

11. *On peut donc dire que la considération exclusive de k-algèbres k'* réduites, *comme anneaux de valeurs pour les coordonnées des solutions d'un système d'équations polynomiales* (3), *revient à développer une Géométrie algébrique dans laquelle on ne distingue pas entre un idéal* $\mathfrak{J}$ (d'une algèbre de polynômes P_1) *et sa racine* $\mathfrak{r}(\mathfrak{J})$; *ou, en termes de l'anneau quotient* $A = P_1/\mathfrak{J}$, *où l'on ne distingue pas entre une k-algèbre* A *et le quotient de* A *par son nilradical.*

Un tel point de vue, non seulement serait *a priori* artificiel, mais il apparaît aujourd'hui comme un fait bien établi par l'expérience qu'il serait inadéquat pour exprimer un grand nombre de phénomènes importants en Géométrie algébrique (plus particulièrement les phénomènes de nature «infinitésimale»), et pour développer certaines techniques essentielles (telles la technique de descente, ou celle du passage de la Géométrie formelle à la Géométrie algébrique [7]). On verra notamment apparaître, au cours de notre Traité, le rôle technique très important des *anneaux locaux artiniens*, qui intuitivement représentent des «voisinages infinitésimaux» de points sur des variétés algébriques.

12. Dans le point de vue classique de la Géométrie algébrique du XIXe siècle, où $k = \mathbf{C}$ et où l'on ne fait pas «bouger» le corps de base, l'ensemble $V(k) = V_S(k) \subset k^1$ est appelé la *variété algébrique* définie par le système (3) et l'intérêt se concentre sur ses propriétés géométriques (sous-variétés, intersections avec d'autres variétés plongées dans le même espace affine k^1, etc.). Nous allons voir que dans la Géométrie algébrique conçue comme nous l'avons exposé au n° 7, il est encore possible d'associer au foncteur V_S (ou V_A (équation (12))) que l'on étudie un objet «géométrique» bien déterminé, qui tient lieu de la notion classique de «variété algébrique» et la généralise. Comme nous voulons étudier ce foncteur indépendamment de ses plongements possibles (6), il s'agit de définir cet objet (qui sera appelé le *spectre de* A) *en partant uniquement de la donnée de la k-algèbre* A.

En Géométrie algébrique classique, l'anneau A apparaît comme l'anneau des *fonctions polynomiales sur la variété* $V(k)$, restrictions à cette variété des fonctions polynômes sur k^1, et la correspondance biunivoque (10) entre la variété et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A, k)$ consiste à associer à tout point $t \in V(k)$ l'homomorphisme $f \mapsto f(t)$ associant à la fonction f sa *valeur* au point t (idée due d'abord à Dedekind et Weber) ([1]).

La même interprétation de la correspondance (10) est bien entendu possible dans le cas général: si $f \in A_{\mathfrak{J}}$, pour tout polynôme $F \in P_1$ dont

([1]) En vertu du Nullstellensatz et du fait que $k = \mathbf{C}$ est algébriquement clos, il y a aussi correspondance biunivoque entre $V(k)$ et l'*ensemble* des idéaux maximaux (ou «spectre maximal») de A (cf. chap. I, Appendice I).

l'image canonique dans A est f, la restriction à $V_3(k')$ de la fonction polynôme $t \mapsto F(t)$ sur k'^1 ne dépend pas du polynôme F choisi dans l'image réciproque de f; c'est donc une fonction $f_{k'}$ sur $V_3(k')$, bien déterminée par f, et (pour k' fixé) l'application

$$f \mapsto f_{k'}$$

de A dans la k-algèbre $k'^{V(k')}$ des applications de $V(k')$ dans k', est un *homomorphisme* (en général non injectif) de k-algèbres. A tout point $t \in V(k')$ correspond alors le k-homomorphisme

$$f \mapsto f_{k'}(t) \tag{18}$$

de A dans k'. On est donc conduit à noter simplement t cet homomorphisme, à écrire $f(t)$ ou $t(f)$ au lieu de $f_{k'}(t)$, et à appeler les éléments de $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(A, k')$ les «points de V_A à valeurs dans k'» (ou «à coordonnées dans k'»).

13. On a bien ainsi réintroduit un langage «géométrique»; toutefois, on n'a plus affaire à un «objet» bien déterminé comme dans la Géométrie algébrique classique, mais à une «famille d'objets» variables avec k'. Pour obtenir le spectre de A, nous allons tout d'abord restreindre notre attention aux «points de V_A» à valeurs dans des k-algèbres k' qui sont des *corps;* nous dirons que ce sont les «points géométriques» de V_A, et nous allons établir entre ces points (correspondant aux différents corps k' possibles) une *relation d'équivalence.* Nous dirons que deux points géométriques

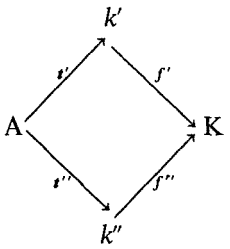
$$t' : A \to k', \quad t'' : A \to k''$$

sont *équivalents* s'il existe un troisième point géométrique $s : A \to K$ et des homomorphismes de k-algèbres (nécessairement injectifs)

$$f' : k' \to K, \quad f'' : k'' \to K$$

tels que l'on ait $s = f' \circ t' = f'' \circ t''$, autrement dit que le diagramme

(19)



soit commutatif.

Montrons que cette relation équivaut à la suivante: $t'^{-1}(0) = t''^{-1}(0)$ (ce qui prouvera bien que c'est une relation d'équivalence). En effet,

puisque f' et f'' sont injectifs, la commutativité du diagramme (19) entraîne l'égalité des noyaux de t' et t''. Inversement, remarquons que puisque tout sous-anneau d'un corps est un anneau intègre, le noyau d'un homomorphisme $A \to k'$ est un *idéal premier* de A. Si les noyaux de t' et t'' sont égaux à un même idéal premier $\mathfrak{p}$, k' et k'' peuvent être considérés comme deux extensions du même corps $\kappa(\mathfrak{p})$, corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$, et on sait (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 4, n° 2, prop. 2) qu'il existe un corps K et deux $\kappa(\mathfrak{p})$-monomorphismes $f' : k' \to K$, $f'' : k'' \to K$, qui rendent évidemment (19) commutatif.

Les classes d'équivalence pour cette relation (qu'on peut encore appeler les *lieux* de A)([1]) sont donc en correspondance biunivoque avec des idéaux premiers de A; en fait, on obtient ainsi *tous* les idéaux premiers, car si $\mathfrak{p}$ est un tel idéal et $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps des fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$, l'idéal $\mathfrak{p}$ correspond à la classe d'équivalence du point géométrique $A \to A/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$, où les deux flèches sont les homomorphismes canoniques.

On a donc obtenu ainsi une correspondance biunivoque canonique entre l'ensemble des «lieux» de la k-algèbre A *et l'ensemble des idéaux premiers de* A. C'est donc l'ensemble Spec(A) des idéaux premiers de A que nous prenons comme *ensemble sous-jacent* de l'«objet géométrique» que doit être le spectre de A. Dans le cas classique où $k = \mathbf{C}$ et où A est une $\mathbf{C}$-algèbre de type fini, cet ensemble *contient* la «variété algébrique» correspondant à A, ensemble des points géométriques de V_A à valeurs dans k.

14. L'ensemble Spec(A) est muni naturellement d'une *topologie* liée à la généralisation de la notion de «sous-variété» d'une variété algébrique. Classiquement, une sous-variété d'une variété algébrique définie par un système d'équations (3) est définie par un système d'équations *contenant* le système (3); autrement dit, si l'on considère l'anneau A comme anneau des «fonctions polynomiales» sur la variété, une sous-variété est définie comme l'ensemble où *s'annulent* certaines de ces fonctions. Dans le cas général, on est donc amené à considérer une partie S de la k-algèbre A, et, pour toute k-algèbre k', l'ensemble (partie de $V_A(k')$) où s'annulent toutes les fonctions $f_{k'}$ correspondant (n° 12) aux éléments $f \in S$. Si l'on se restreint comme au n° 13 aux points géométriques à valeurs dans des *corps*, on est donc amené à considérer l'ensemble V(S) des «lieux» de ceux de ces points où s'annulent les $f_{k'}$ pour $f \in S$. Il résulte du n° 13 que cet ensemble correspond biunivoquement à l'*ensemble des idéaux premiers de* A *contenant* S; on dit encore que cette partie

([1]) Le lecteur bien informé reconnaîtra dans ce langage une reformulation des points «généraux» ou «génériques» des variétés algébriques, tels qu'ils interviennent par exemple chez Zariski ou A. Weil.

de Spec (A) est l'«ensemble algébrique défini par S». On remarquera qu'il ne change pas quand on remplace S par la racine de l'idéal engendré par S; et comme cette racine est précisément l'intersection des idéaux premiers de A contenant S, on voit qu'on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux de A égaux à leur racine, et l'ensemble des parties V(S) de Spec (A). On montre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4) que cet ensemble de parties est l'ensemble des parties *fermées* pour une topologie sur Spec (A), dite *topologie spectrale* ou *topologie de Zariski*. En outre *(loc. cit.)* l'espace X obtenu en munissant Spec (A) de cette topologie est quasi-compact et satisfait à l'axiome de Kolmogoroff, mais possède en général des points non fermés (et *a fortiori* n'est pas un espace séparé); pour tout élément $f \in A$, l'ensemble $D(f) = X - V(f)$ est ouvert dans X, et les $D(f)$ (pour $f \in A$) forment une *base* de la topologie spectrale.

15. Si nous voulons que l'objet «spectre de A» que nous désirons associer à un anneau A permette inversement de reconstruire l'anneau A, il ne suffit pas de prendre pour un tel objet l'espace topologique Spec (A) que nous venons de définir: par exemple, pour *tous* les *corps* K, on obtient l'espace réduit à un seul point. Dans ce dernier cas, il est bien clair que la considération de cet espace n'apporte rien de nouveau pour l'étude du corps K.

Il est donc vain d'espérer décrire le spectre de A en termes exclusivement topologiques; il faut munir l'espace topologique $X = \mathrm{Spec}(A)$ d'une structure où l'algèbre A intervienne. Le modèle sur lequel on se guide ici est fourni par les *variétés holomorphes* (dont les variétés algébriques sans singularités du cas classique ($k = \mathbf{C}$) fournissent des cas particuliers); suivant la conception introduite par H. Cartan, puisque sur une telle variété X il est possible de définir sur tout ouvert $U \subset X$ les fonctions (complexes) *holomorphes dans* U, en associant à tout ouvert U l'ensemble $\mathcal{O}(U)$ de ces fonctions, on définit de façon évidente un *préfaisceau d'anneaux* sur X et en fait ce préfaisceau est un *faisceau* $\mathcal{O}_X$; autrement dit, la variété holomorphe apparaît comme un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux, ou, comme on dit encore, un *espace annelé*. Dans son travail fondamental [FAC], J. P. Serre a montré en substance comment on peut transporter cette définition en Géométrie algébrique. Bornons-nous d'abord au cas classique ($k = \mathbf{C}$) et supposons que la «variété algébrique» X corresponde à un anneau de «fonctions polynomiales» A qui soit *intègre* (cas où l'on dit que la variété est «irréductible», et auquel l'on se borne souvent en Géométrie algébrique classique). Le corps des fractions K de A est alors appelé le «corps des fonctions rationnelles» sur X; un élément g/f de K, quotient de deux fonctions polynomiales (avec $f \neq 0$), est une fonction *définie* aux points $x \in X$ où $f(x) \neq 0$,

mais ne peut en général être prolongée par continuité aux points où $f(x)=0$ («pôles» ou «points d'indétermination»). Depuis Riemann, ces fonctions jouent traditionnellement, pour une variété algébrique, le rôle des «fonctions méromorphes» sur une variété analytique. On est donc conduit à considérer le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ sur X, où, pour tout ouvert $U \subset X$, $\mathcal{O}(U)$ est l'anneau des fonctions rationnelles définies dans U.

Or, on peut encore donner une définition analogue lorsque A est un anneau intègre *quelconque*, X l'espace topologique Spec (A), et où d'une part on restreint les ouverts U à ceux de la *base* des $D(f)$ (pour $f \neq 0$ dans A), et où on prend pour $\mathcal{O}(U)$ l'anneau A_f des éléments de K de la forme g/f^n (n entier quelconque $\geqslant 0$, $g \in A$). Mais en fait, il est même inutile de faire *aucune* hypothèse sur l'anneau A, et il est possible pour *tout* $f \in A$ (diviseur de zéro ou non) de définir l'anneau A_f (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 1); on montre alors que l'application $D(f) \mapsto A_f$ définit un *faisceau* de k-algèbres sur X, noté $\tilde{A}$ ou $\mathcal{O}_X$, et l'objet «spectre de A» associé à A est finalement l'*espace annelé* $(X, \mathcal{O}_X)$. Les démonstrations détaillées seront données au chap. I, § 1; on y verra entre autres que les fibres du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ sont les anneaux *locaux* $A_\mathfrak{p}$, localisés de A aux idéaux premiers de A, si bien que $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace *localement k-annelé;* l'anneau A se *déduit* alors (à isomorphisme près) de son spectre par la relation $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \simeq A$.

On verra aussi au chap. I, § 1 comment, à tout homomorphisme

$$\varphi : A \to A' \tag{20}$$

de k-algèbres est associé de façon fonctorielle un morphisme d'espaces localement k-annelés

$$\mathrm{Spec}(\varphi)\colon\ X' = \mathrm{Spec}\,(A') \to X = \mathrm{Spec}\,(A) \tag{21}$$

tel que l'homomorphisme de k-algèbres correspondant

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$$

s'identifie (compte tenu des isomorphismes canoniques $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \simeq A$, $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \simeq A'$) à l'homomorphisme donné (20). Cela implique en particulier que l'application

$$\varphi \mapsto \mathrm{Spec}(\varphi)\colon\ \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, A') \to \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(A'), \mathrm{Spec}(A)) \tag{22}$$

(où le second membre est l'ensemble des morphismes d'espaces localement k-annelés (**0**, 4.1.12)) est injective. En fait, on prouvera même que cette application est *bijective* (**I**, 1.6.3); en d'autres termes, *le foncteur contravariant* $A \mapsto \mathrm{Spec}(A)$ *de la catégorie des k-algèbres dans la catégorie des espaces localement k-annelés, est pleinement fidèle.* Cela permet donc (compte tenu du «renversement des flèches» usuel quand on passe d'une

catégorie à son opposée) d'identifier en pratique la catégorie des k-algèbres à une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement k-annelés, savoir celle formée de ceux de ces espaces isomorphes à un Spec(A) pour une k-algèbre A convenable; ces espaces localement k-annelés sont appelés *schémas affines sur k*. Le problème initial de la Géométrie algébrique sur k, que nous avons identifié à l'étude des k-algèbres, est donc aussi équivalent à l'étude des objets algébrico-topologiques que sont les schémas affines sur k. Quant au foncteur V_A défini par (12), il s'exprime simplement en termes de Spec(A), compte tenu de la bijectivité de (22), par la formule

$$V_A(k') \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k'), \mathrm{Spec}(A)), \tag{23}$$

où le second membre a la même signification que dans (22).

16. Il peut sembler au premier abord que l'équivalence de catégories précédente ne puisse aboutir qu'à remplacer l'étude d'un objet de définition assez simple comme une k-algèbre par celle de l'objet beaucoup plus compliqué qu'est son spectre. En fait, même dans des études d'algèbre *locale*, la traduction des propriétés en termes de la théorie des schémas affines, en leur donnant une tournure «géométrique», les rend souvent moins abstraites et plus accessibles à une sorte d'«intuition» qui en facilite le maniement (cf. chap. IV), bien qu'en définitive les démonstrations doivent toujours se ramener à des propriétés purement algébriques. Mais l'avantage décisif qu'apporte le langage géométrique, basé sur l'introduction du spectre d'un anneau, provient de ce que ce langage permet sans effort de *sortir* du cadre de l'Algèbre commutative, ce qui est indispensable si l'on veut développer la Géométrie algébrique moderne sur le modèle de la théorie classique. En effet, depuis le début du XIXe siècle, on s'est aperçu que l'étude des systèmes d'équations polynomiales du type (3) (qui est ce que l'on peut appeler la Géométrie algébrique *affine*) ne donne des énoncés simples et frappants que lorsqu'on la place dans un cadre plus vaste, celui de la Géométrie algébrique *projective*(1). On sait que, classiquement, l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ s'obtient par «recollement» de $n+1$ espaces affines, savoir les hyperplans $x_j=1$, dans l'espace $\mathbf{C}^{n+1}$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$, deux points étant identifiés si dans l'espace $\mathbf{C}^{n+1}$ la droite qui les joint passe par l'origine. Or, dans d'autres domaines des mathématiques, de tels processus de «recollement» interviennent dans des contextes bien plus généraux, puisque c'est ainsi maintenant que l'on définit les diverses notions de «variété»: topologique, différentielle, analytique, etc. Dans tous ces domaines, le

(1) Il n'est d'ailleurs sans doute pas fortuit que ce soient les mêmes hommes, Monge et Poncelet, qui sont à la fois à l'origine de cet élargissement et du passage du corps des réels au corps des complexes.

point crucial dans l'opération de «recollement» est le recollement des *topologies*, celui des structures additionnelles s'en déduisant sans peine; c'est sans doute H. Cartan qui a le premier vu la raison de ce fait en observant que les diverses structures dont nous venons de parler peuvent toutes être définies comme des structures d'*espaces annelés*, et que l'opération de «recollement» se ramène donc dans chaque cas à l'opération générale de *recollement de faisceaux*.

Or, une fois qu'on a ramené l'algèbre commutative à une étude d'espaces annelés particuliers, il suffit d'appliquer *mutatis mutandis* cette opération générale pour arriver enfin à la notion fondamentale de la Géométrie algébrique moderne, celle de *schéma* sur k: ce sera simplement un espace X *localement k-annelé*, qui admet un recouvrement (X_α) par des ouverts qui sont (pour la structure d'espace annelé induite) des schémas *affines* sur k.

Un tel objet X définit encore un foncteur

$$k' \mapsto X(k') \colon \boldsymbol{k\text{-}alg} \to \boldsymbol{Ens} \tag{24}$$

par la formule (généralisant (23))

$$X(k') = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k'), X) \tag{25}$$

(«points de X à valeurs dans k'»). On peut d'ailleurs montrer (**I**, 2.3.6), que la connaissance du foncteur (24) redonne le schéma X à isomorphisme unique près, et plus précisément que le foncteur $X \mapsto X(.)$ de la catégorie des schémas sur k, dans la catégorie des foncteurs $\boldsymbol{k\text{-}alg} \to \boldsymbol{Ens}$, défini par la formule (25), est *pleinement fidèle;* en d'autres termes, il permet d'identifier la catégorie des schémas à une sous-catégorie pleine de la catégorie des foncteurs

$$\boldsymbol{k\text{-}alg} \to \boldsymbol{Ens}\ (^1).$$

17. Il reste à signaler que l'«anneau de base» k n'a joué dans tout ce qui précède qu'un rôle accessoire. L'espace annelé Spec(A), pour une k-algèbre donnée, ne dépend en fait que de la structure d'*anneau* de A, et la donnée de l'homomorphisme $k \to A$ définissant la structure de k-algèbre équivaut simplement à la donnée d'une structure de k-algèbre sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$, ou encore (d'après ce qu'on a vu au n° 15, en y faisant $k = \mathbf{Z}$) à la donnée d'un morphisme d'espaces localement annelés

$$\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k).$$

(^{1}) En ce sens, on peut considérer que l'introduction des structures d'espace localement annelé est surtout un artifice technique, permettant de formuler de façon particulièrement commode et intuitive un procédé de recollement de foncteurs «affines». Pour plus de détails sur les relations entre espaces annelés et foncteurs $\boldsymbol{k\text{-}alg} \to \boldsymbol{Ens}$, voir [3], chap. I, § 1, qui contient également un exposé, excellent du point de vue technique, de la définition des schémas.

Il y a donc intérêt à définir d'abord la notion de schéma au sens «absolu» (i.e. un schéma sur **Z**), et de définir ensuite un «schéma sur k» (ou k-schéma) comme un schéma X dont le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ est muni d'une structure de k-Algèbre, i.e. définie par la donnée d'un homomorphisme d'anneaux $k \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, ou encore (et de préférence) par la donnée d'un morphisme d'espaces localement annelés

$$X \to \mathrm{Spec}(k).$$

Ce dernier point de vue a l'avantage considérable de se prêter à la substitution à l'anneau k (ou mieux au schéma affine $\mathrm{Spec}(k)$) d'un *schéma arbitraire* Y, et de conduire ainsi à la notion de *schéma* X *au-dessus d'un schéma* Y (ou Y-*schéma*) (cf. **I**, 2.6.1), qui sera étudiée de façon détaillée dans notre Traité, et qui, intuitivement, est toute analogue à la notion d'*espace fibré* (ou plus généralement d'un espace topologique X au-dessus d'un espace topologique Y, c'est-à-dire muni d'une application continue $f: X \to Y$), couramment utilisée par les topologues.

L'objet de la Géométrie algébrique, au sens ou nous l'entendons dans ce Traité, est donc l'étude des schémas, *espaces localement annelés d'un type particulier; ou, de façon équivalente, l'étude des foncteurs* (24) *auxquels ils donnent naissance.*

CHAPITRE 0

Préliminaires

§ 1. Foncteurs représentables

1.1. Foncteurs représentables

(1.1.1) Nous désignerons par ***Ens*** la catégorie des ensembles. Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie(1); pour deux objets X, Y de $\boldsymbol{C}$, nous poserons $\mathbf{h}_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y,X)$; pour tout morphisme $u: Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, nous désignerons par $\mathbf{h}_X(u)$ l'application $v \mapsto vu$ de $\mathrm{Hom}(Y',X)$ dans $\mathrm{Hom}(Y,X)$. Il est immédiat qu'avec ces définitions, $\mathbf{h}_X: \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ est un *foncteur contravariant*, c'est-à-dire un objet de la catégorie, notée $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^\circ, \boldsymbol{Ens})$ des foncteurs covariants de la catégorie $\boldsymbol{C}^\circ$, opposée de la catégorie $\boldsymbol{C}$, dans la catégorie $\boldsymbol{Ens}$ ((T, 1.7, *d*) et SGA, 3, I).

(1.1.2) Soit maintenant $w: X \to X'$ un morphisme dans $\boldsymbol{C}$; pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$ et tout $v \in \mathrm{Hom}(Y,X) = \mathbf{h}_X(Y)$, on a $wv \in \mathrm{Hom}(Y,X') = \mathbf{h}_{X'}(Y)$; désignons par $\mathbf{h}_w(Y)$ l'application $v \mapsto wv$ de $\mathbf{h}_X(Y)$ dans $\mathbf{h}_{X'}(Y)$. Il est immédiat que pour tout morphisme $u: Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}_X(Y') & \xrightarrow{\mathbf{h}_X(u)} & \mathbf{h}_X(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{h}_w(Y')} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{h}_w(Y)} \\ \mathbf{h}_{X'}(Y') & \xrightarrow[\mathbf{h}_{X'}(u)]{} & \mathbf{h}_{X'}(Y) \end{array}$$

est commutatif; autrement dit, $\mathbf{h}_w$ est un *morphisme fonctoriel* $\mathbf{h}_X \to \mathbf{h}_{X'}$ (T, 1.2), ou encore un morphisme dans la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^\circ, \boldsymbol{Ens})$ (T, 1.7, *d*)) Les définitions de $\mathbf{h}_X$ et de $\mathbf{h}_w$ constituent donc la définition d'un *foncteur covariant canonique*

(1.1.2.1) $$\mathbf{h}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^\circ, \boldsymbol{Ens}).$$

---

(1) Nous considérons les catégories d'un point de vue «naïf», comme s'il s'agissait d'ensembles et renvoyons à SAG, 4, I pour les questions de logique liées à la théorie des catégories, et la justification du langage que nous utilisons.

(1.1.3) Soient X un objet de $\boldsymbol{C}$, F un foncteur contravariant de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens*** (objet de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^\circ, \boldsymbol{Ens})$). Soit $g : \mathbf{h}_X \to F$ un *morphisme fonctoriel*: pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $g(Y)$ est donc une application $\mathbf{h}_X(Y) \to F(Y)$ telle que pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}_X(Y') & \xrightarrow{\mathbf{h}_X(u)} & \mathbf{h}_X(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g(Y')} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g(Y)} \\ F(Y') & \xrightarrow[F(u)]{} & F(Y) \end{array} \tag{1.1.3.1}$$

soit commutatif. En particulier, on a une application

$$g(X) : \mathbf{h}_X(X) = \mathrm{Hom}(X,X) \to F(X),$$

d'où un élément

$$\alpha(g) = (g(X))(1_X) \in F(X) \tag{1.1.3.2}$$

et par suite une application canonique

$$\alpha : \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_X, F) \to F(X). \tag{1.1.3.3}$$

Inversement, considérons un élément $\xi \in F(X)$; pour tout morphisme $v : Y \to X$ dans $\boldsymbol{C}$, $F(v)$ est une application $F(X) \to F(Y)$; considérons l'application

$$v \mapsto (F(v))(\xi) \tag{1.1.3.4}$$

de $\mathbf{h}_X(Y)$ dans $F(Y)$; si on désigne par $(\beta(\xi))(Y)$ cette application,

$$\beta(\xi) : \mathbf{h}_X \to F \tag{1.1.3.5}$$

est un *morphisme fonctoriel*, car on a pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, $(F(vu))(\xi) = (F(v) \circ F(u))(\xi)$, ce qui vérifie la commutativité de (1.1.3.1) pour $g = \beta(\xi)$. On a ainsi défini une application canonique

$$\beta : F(X) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_X, F). \tag{1.1.3.6}$$

Proposition (1.1.4) *Les applications α et β sont des bijections réciproques l'une de l'autre.*

Calculons $\alpha(\beta(\xi))$ pour $\xi \in F(X)$; pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $(\beta(\xi))(Y)$ est l'application $g_1(Y) : v \mapsto (F(v))(\xi)$ de $\mathbf{h}_X(Y)$ dans $F(Y)$. On a donc

$$\alpha(\beta(\xi)) = (g_1(X))(1_X) = (F(1_X))(\xi) = 1_{F(X)}(\xi) = \xi.$$

Calculons maintenant $\beta(\alpha(g))$ pour $g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_X, F)$; pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $(\beta(\alpha(g)))(Y)$ est l'application $v \mapsto (F(v))((g(X))(1_X))$; en vertu de la commutativité de (1.1.3.1), cette application n'est autre que $v \mapsto (g(Y))((\mathbf{h}_X(v))(1_X)) = (g(Y))(v)$ par définition de $\mathbf{h}_X(v)$, autrement dit, elle est égale à $g(Y)$, ce qui démontre la proposition.

(1.1.5) Rappelons qu'une *sous-catégorie* $\boldsymbol{C}'$ d'une catégorie $\boldsymbol{C}$ est définie par la condition que ses objets soient des objets de $\boldsymbol{C}$, et que si

X', Y' sont deux objets de $\boldsymbol{C}'$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X', Y')$ des morphismes $X' \to Y'$ *dans* $\boldsymbol{C}'$ est une partie de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X', Y')$ des morphismes $X' \to Y'$ *dans* $\boldsymbol{C}$, l'application canonique de «composition des morphismes»

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X', Y') \times \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(Y', Z') \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X', Z')$$

étant la restriction de l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X', Y') \times \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(Y', Z') \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X', Z').$$

On dit que $\boldsymbol{C}'$ est une sous-catégorie *pleine* de $\boldsymbol{C}$ si $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X', Y') = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X', Y')$ pour tout couple d'objets de $\boldsymbol{C}'$. La sous-catégorie $\boldsymbol{C}''$ de $\boldsymbol{C}$ formée des objets de $\boldsymbol{C}$ isomorphes aux objets de $\boldsymbol{C}'$ est encore alors une sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{C}$, *équivalente* (T, 1.2) à $\boldsymbol{C}'$ comme on le vérifie sans peine.

Un foncteur covariant $F : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2$ est dit *pleinement fidèle* si, pour tout couple d'objets X_1, Y_1 de $\boldsymbol{C}_1$, l'application $u \mapsto F(u)$ de $\mathrm{Hom}(X_1, Y_1)$ dans $\mathrm{Hom}(F(X_1), F(Y_1))$ est *bijective;* cela entraîne que la sous-catégorie $F(\boldsymbol{C}_1)$ de $\boldsymbol{C}_2$ est *pleine.* En outre, si deux objets X_1, X_1' ont même image X_2, il existe un isomorphisme unique $u : X_1 \to X_1'$ tel que $F(u) = 1_{X_2}$. Pour tout objet X_2 de $F(\boldsymbol{C}_1)$, soit alors $G(X_2)$ un des objets X_1 de $\boldsymbol{C}_1$ tel que $F(X_1) = X_2$ (G étant défini au moyen de l'axiome de choix); pour tout morphisme $v : X_2 \to Y_2$ dans $F(\boldsymbol{C}_1)$, $G(v)$ sera l'unique morphisme $u : G(X_2) \to G(Y_2)$ tel que $F(u) = v$; G est alors un *foncteur* de $F(\boldsymbol{C}_1)$ dans $\boldsymbol{C}_1$; FG est le foncteur identique dans $F(\boldsymbol{C}_1)$, et ce qui précède montre qu'il existe un isomorphisme de foncteurs $\varphi : \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{C}_1} \simeq GF$ tel que F, G, φ et l'identité $\boldsymbol{1}_{F(\boldsymbol{C}_1)} \simeq FG$ définissent une *équivalence* de la catégorie $\boldsymbol{C}_1$ et de la sous-catégorie pleine $F(\boldsymbol{C}_1)$ de $\boldsymbol{C}_2$ (T, 1.2).

(1.1.6) Appliquons la prop. (1.1.4) au cas où le foncteur F est $\mathbf{h}_{X'}$, X' étant un objet quelconque de $\boldsymbol{C}$; l'application

$$\beta : \mathrm{Hom}(X, X') \to \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_X, \mathbf{h}_{X'})$$

n'est autre ici que l'application $w \mapsto \mathbf{h}_w$ définie dans (1.1.2); cette application étant *bijective,* on voit, avec la terminologie de (1.1.5), que:

Proposition (1.1.7.) *Le foncteur canonique* $\mathbf{h} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^\circ, \boldsymbol{Ens})$ *est pleinement fidèle.*

On utilisera très souvent ce fait pour prouver des résultats sur les morphismes d'une catégorie $\boldsymbol{C}$: pour montrer par exemple qu'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ C & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

de morphismes de $\boldsymbol{C}$ est *commutatif*, il suffit de prouver que pour *tout objet* $Y \in \boldsymbol{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}_A(Y) & \xrightarrow{\mathbf{h}_f(Y)} & \mathbf{h}_B(Y) \\ {\scriptstyle \mathbf{h}_u(Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{h}_v(Y)} \\ \mathbf{h}_C(Y) & \xrightarrow[\mathbf{h}_g(Y)]{} & \mathbf{h}_D(Y) \end{array}$$

est *commutatif*, car la relation $\mathbf{h}_v \circ \mathbf{h}_f = \mathbf{h}_g \circ \mathbf{h}_u$ équivaut en vertu de (1.1.7) à $v \circ f = g \circ u$. On est ainsi ramené à vérifier des commutativités de diagrammes *ensemblistes*, ce qui est en général beaucoup plus aisé.

(1.1.8) Soit F un foncteur contravariant de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens***; on dit que F est *représentable* s'il existe un objet $X \in \boldsymbol{C}$ tel que F soit *isomorphe* à $\mathbf{h}_X$; il résulte de (1.1.7) que la donnée d'un $X \in \boldsymbol{C}$ et d'un isomorphisme de foncteurs $g : \mathbf{h}_X \to F$ détermine X à un isomorphisme unique près. La prop. (1.1.7) signifie encore que $\mathbf{h}$ définit une *équivalence* de $\boldsymbol{C}$ et de la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^\circ, \boldsymbol{Ens})$ formée des *foncteurs contravariants représentables*. Il résulte d'ailleurs de (1.1.4) que la donnée d'un morphisme fonctoriel $g : \mathbf{h}_X \to F$ équivaut à celle d'un élément $\xi \in F(X)$; dire que g est un *isomorphisme* équivaut pour ξ à la condition suivante: *pour tout objet* Y *de* $\boldsymbol{C}$ *l'application* $v \mapsto (F(v))(\xi)$ *de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *dans* $F(Y)$ *est bijective*. Lorsque ξ vérifie cette condition, on dira que le couple (X, ξ) *représente* le foncteur représentable F. Par abus de langage, on dira aussi que l'objet $X \in \boldsymbol{C}$ représente F s'il existe $\xi \in F(X)$ tel que (X, ξ) représente F, autrement dit si $\mathbf{h}_X$ est isomorphe à F.

Soient F, F′ deux foncteurs contravariants représentables de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens***, $\mathbf{h}_X \to F$ et $\mathbf{h}_{X'} \to F'$ deux isomorphismes de foncteurs. Alors il résulte de (1.1.6) qu'il y a une correspondance biunivoque canonique entre $\mathrm{Hom}(X, X')$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}(F, F')$ des morphismes fonctoriels $F \to F'$.

(1.1.9) *Exemples. I: limites projectives.* La notion de foncteur contravariant représentable couvre en particulier la notion «duale» de la notion usuelle de «solution d'un problème universel». Plus généralement, nous allons voir que la notion de *limite projective* est un cas particulier de celle de foncteur représentable. Rappelons[1] que dans une catégorie $\boldsymbol{C}$, on définit un *système projectif* par la donnée d'un ensemble préordonné I, d'une famille $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'objets de $\boldsymbol{C}$, et, pour tout couple d'indices (α, β) tel que $\alpha \leqslant \beta$, d'un morphisme $u_{\alpha\beta} : A_\beta \to A_\alpha$ avec $u_{\alpha\gamma} = u_{\alpha\beta} \circ u_{\beta\gamma}$ pour $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Une *limite projective* de ce système dans $\boldsymbol{C}$

---

[1] Nous nous bornons ici aux limites projectives (ou inductives) suivant un ensemble préordonné, qui seront seules utilisées jusqu'au chap. VI. Pour l'extension de ces notions au cas où l'ensemble préordonné est remplacé par une catégorie, voir [10] et SGA, 4, I, 2.

est constituée par un objet B de $\boldsymbol{C}$ (noté $\varprojlim A_\alpha$), et pour chaque $\alpha \in I$, un morphisme $u_\alpha : B \to A_\alpha$, tels que: 1° $u_\alpha = u_{\alpha\beta} u_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$; 2° pour tout objet X de $\boldsymbol{C}$ et toute famille $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ de morphismes $v_\alpha : X \to A_\alpha$, telle que $v_\alpha = u_{\alpha\beta} v_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$, il existe un morphisme unique $v : X \to B$ (noté $\varprojlim v_\alpha$) tel que $v_\alpha = u_\alpha v$ pour tout $\alpha \in I$ (T, 1.8). Ceci s'interprète de la façon suivante: les $u_{\alpha\beta}$ définissent canoniquement des applications

$$\mathrm{Hom}(1_X, u_{\alpha\beta}) = \overline{u}_{\alpha\beta} : \mathrm{Hom}(X, A_\beta) \to \mathrm{Hom}(X, A_\alpha)$$

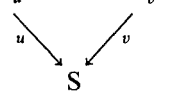
qui définissent un *système projectif* d'ensembles $(\mathrm{Hom}(X, A_\alpha), \overline{u}_{\alpha\beta})$, et (v_α) est par définition un élément de l'ensemble $\varprojlim_\alpha \mathrm{Hom}(X, A_\alpha)$; il est clair que $X \mapsto \varprojlim \mathrm{Hom}(X, A_\alpha)$ est un *foncteur contravariant* de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens***, et l'existence de la limite projective B équivaut à dire que $(v_\alpha) \mapsto \varprojlim v_\alpha$ est un *isomorphisme* de foncteurs en X

$$\varprojlim \mathrm{Hom}(X, A_\alpha) \simeq \mathrm{Hom}(X, B) \tag{1.1.9.1}$$

autrement dit que le foncteur $X \mapsto \varprojlim \mathrm{Hom}(X, A_\alpha)$ est *représentable*. Si tout système projectif d'objets de $\boldsymbol{C}$ a une limite projective, nous dirons pour abréger que $\boldsymbol{C}$ admet des limites projectives.

(1.1.10) *Exemples. II: Objet final.* Soient $\boldsymbol{C}$ une catégorie, $\{a\}$ un ensemble réduit à un seul élément. Considérons le foncteur contravariant $F : \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ qui, à tout objet X de $\boldsymbol{C}$ fait correspondre l'ensemble $\{a\}$ et à tout morphisme $X \to X'$ dans $\boldsymbol{C}$ l'unique application $\{a\} \to \{a\}$. Dire que ce foncteur est *représentable* signifie qu'il existe un objet $e \in \boldsymbol{C}$ tel que pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $\mathrm{Hom}(Y, e) = \mathbf{h}_e(Y)$ soit *réduit à un élément*; on dit que e est un *objet final* de $\boldsymbol{C}$, et il est clair que deux objets finaux de $\boldsymbol{C}$ sont isomorphes (ce qui permet de définir, en général à l'aide de l'axiome de choix, *un* objet final de $\boldsymbol{C}$ qu'on note alors $e_{\boldsymbol{C}}$). Par exemple, dans la catégorie ***Ens***, les objets finaux sont les ensembles réduits à un élément; dans la catégorie des *algèbres augmentées* sur un corps K (où les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres compatibles avec les augmentations), K est un objet final.

(1.1.11) Pour toute catégorie $\boldsymbol{C}$ et tout objet $S \in \boldsymbol{C}$, on introduit une nouvelle catégorie $\boldsymbol{C}_{/S}$ dite «*des* S-*objets de* $\boldsymbol{C}$» de la façon suivante; les objets de $\boldsymbol{C}_{/S}$ sont les morphismes (de $\boldsymbol{C}$) $u : X_u \to S$ de but S; on appelle S-*morphisme* de X_u dans X_v (pour u, v dans $\boldsymbol{C}_{/S}$) un morphisme $f : X_u \to X_v$ de $\boldsymbol{C}$ tel que le diagramme



soit commutatif, la composition des S-morphismes étant la même que dans $\boldsymbol{C}$. On prend alors comme ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}/S}(u,v)$ des morphismes de u dans v l'ensemble des triplets (X_u, X_v, f), où $f: X_u \to X_v$ est un S-morphisme; le composé du morphisme (X_v, X_w, g) de v dans w et du morphisme (X_u, X_v, f) de u dans v est donc (X_u, X_w, gof). Dans cette catégorie 1_S est *objet final*, car pour tout morphisme $u: X_u \to S$, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}/S}(u, 1_S)$ se réduit par définition au seul morphisme (X_u, S, u).

On a un foncteur $\boldsymbol{C}_{/S} \to \boldsymbol{C}$ qui, à tout morphisme $u: X_u \to S$, fait correspondre sa source X_u, et à tout morphisme $f: u \to v$, le morphisme $f: X_u \to X_v$ correspondant. Bien que $u \mapsto X_u$ ne soit pas en général injectif, on parle souvent (par abus de langage) de X_u (au lieu de u) comme d'un «S-objet», et on dit que u est son «*morphisme structural*». Les S-morphismes $s: S \to X_u$, c'est-à-dire les morphismes de $\boldsymbol{C}$ tels que $uos = 1_S$ sont appelés les S-*sections de* u (ou de X_u); ce sont des *monomorphismes* dans $\boldsymbol{C}_{/S}$, comme on le vérifie aussitôt; leur ensemble est noté $\Gamma(X/S)$.

Lorsque la catégorie $\boldsymbol{C}$ admet un objet final e, $\boldsymbol{C}_{/e}$ s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{C}$.

(1.1.12) Pour deux objets X, Y d'une catégorie $\boldsymbol{C}$, posons $\mathbf{h}'_X(Y) = \mathrm{Hom}(X,Y)$ et pour tout morphisme $u: Y \to Y'$, soit $\mathbf{h}'_X(u)$ l'application $v \mapsto uv$ de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ dans $\mathrm{Hom}(X,Y')$; $\mathbf{h}'_X$ est alors un *foncteur covariant* $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Ens}$, d'où l'on déduit comme dans (1.1.2) la définition d'un foncteur covariant canonique $\mathbf{h}': \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ens})$; un foncteur *covariant* F de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$, autrement dit un objet de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ens})$ est alors dit *représentable* s'il existe un objet $X \in \boldsymbol{C}$ (nécessairement unique à isomorphisme unique près) tel que F soit *isomorphe* à $\mathbf{h}'_X$; nous laissons au lecteur le soin de développer les considérations «duales» des précédentes pour cette notion, qui couvre cette fois celle de *limite inductive*, et en particulier la notion usuelle de «solution de problème universel».

On a de même une notion «duale» de celle d'objet final, celle *d'objet initial* d'une catégorie $\boldsymbol{C}$: c'est un objet $e' \in \boldsymbol{C}$ tel que $\mathrm{Hom}(e', Y)$ soit réduit à un élément pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$.

(1.1.13) Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie quelconque, et considérons la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ens})$ des foncteurs (covariants) de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$; cette dernière catégorie *admet des limites projectives et injectives*. En effet, soit (F_α) un système projectif de foncteurs de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$; pour $\alpha \leqslant \beta$, on a donc un morphisme fonctoriel $u_{\alpha\beta}: F_\beta \to F_\alpha$ avec $u_{\alpha\gamma} = u_{\alpha\beta} \circ u_{\beta\gamma}$ pour $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Pour tout objet $X \in \boldsymbol{C}$, les ensembles $F_\alpha(X)$ forment donc un système projectif d'ensembles pour les applications $u_{\alpha\beta}(X): F_\beta(X) \to F_\alpha(X)$, et ont donc une limite projective F(X). De plus, si Y est un second objet de $\boldsymbol{C}$ et $v: X \to Y$ un morphisme de $\boldsymbol{C}$, les applica-

tions $F_\alpha(v) : F_\alpha(X) \to F_\alpha(Y)$ forment un système projectif d'applications, qui a donc une limite $F(v) : F(X) \to F(Y)$. On vérifie aussitôt que l'on a ainsi défini un foncteur F de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens***, et que F est limite projective du système projectif (F_α). On voit de même qu'un système inductif (F_α) de foncteurs de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens*** a une limite inductive définie par $F(X) = \varinjlim F_\alpha(X)$ et $F(v) = \varinjlim F_\alpha(v)$ (on dit encore que les limites inductives et projectives dans la catégorie ***Hom***$(\boldsymbol{C}, ***Ens***)$ «se calculent argument par argument»).

(1.1.14) Dans la catégorie ***Hom***$(\boldsymbol{C}, ***Ens***)$ il y a aussi un *objet final*, a savoir un foncteur P qui à tout objet $X \in \boldsymbol{C}$ fait correspondre un ensemble P(X) à un élément et à tout morphisme $u : X \to Y$ l'unique application $P(u) : P(X) \to P(Y)$.

1.2. Produits fibrés dans une catégorie

(1.2.1) Soient $\boldsymbol{C}$ une catégorie, X, Y deux objets de $\boldsymbol{C}$; on dit que X et Y *admettent un produit* dans $\boldsymbol{C}$ si le foncteur contravariant

$$F : T \mapsto \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$$

de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens*** est représentable (pour tout morphisme $v : T \to T'$, $F(v)$ est l'application $(f', g') \mapsto (f' \circ v, g' \circ v)$ de $\mathrm{Hom}(T', X) \times \mathrm{Hom}(T', Y)$ dans $\mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$). Un objet représentant ce foncteur est donc formé d'un objet $Z \in \boldsymbol{C}$ et d'un couple de morphismes $p_1 : Z \to X$, $p_2 : Z \to Y$, et ces objets sont déterminés à isomorphisme unique près (1.1.8). On dit que Z est le *produit* de X et Y dans $\boldsymbol{C}$, p_1 et p_2 la *première* et la *seconde projection* de Z; on écrit le plus souvent $X \times Y$ pour désigner le produit Z. L'application

$$g \mapsto (p_1 \circ g, p_2 \circ g) \tag{1.2.1.1}$$

est un isomorphisme de foncteurs en T:

$$\mathrm{Hom}(T, X \times Y) \simeq \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y). \tag{1.2.1.2}$$

Par cette application, au morphisme $1_{X \times Y}$ correspond le couple (p_1, p_2).

Il est clair que l'on peut encore dire que $X \times Y$ est la *limite projective* du système projectif où l'ensemble préordonné I est formé de deux éléments distincts α, β, la relation d'ordre dans I étant la relation d'égalité, la famille $(X_\lambda)_{\lambda \in I}$ est telle que $X_\alpha = X$ et $X_\beta = Y$, les seuls morphismes $u_{\lambda\mu}$ étant donc les identités 1_X et 1_Y (1.1.9).

(1.2.2) Considérons maintenant un objet S de $\boldsymbol{C}$, et deux morphismes $\varphi : X \to S$, $\psi : Y \to S$, que l'on peut considérer comme des objets de

$\boldsymbol{C}_{/S}$ (1.1.10). Si le *produit* de ces deux objets existe dans $\boldsymbol{C}_{/S}$, on le note θ: $X \times_S Y \to S$, et on dit (1.1.10) que l'objet $X \times_S Y$ de $\boldsymbol{C}$, muni du morphisme structural θ, est le *produit fibré des objets* X *et* Y (pour les morphismes φ et ψ). Si, pour abréger, on note $\mathrm{Hom}_S(U,V)$ l'ensemble des S-*morphismes* $U \to V$ pour deux S-objets U, V, on voit que l'on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(T, X \times_S Y) \simeq \mathrm{Hom}_S(T,X) \times \mathrm{Hom}_S(T,Y). \tag{1.2.2.1}$$

En particulier, à l'identité de $X \times_S Y$ correspond un couple de S-morphismes

$$p_1 : X \times_S Y \to X, \quad p_2 : X \times_S Y \to Y$$

dits encore *première* et *seconde projection* du produit $X \times_S Y$, et on voit comme dans (1.2.1) que l'isomorphisme (1.2.2.1) s'explicite en

$$g \mapsto (p_1 \circ g, p_2 \circ g). \tag{1.2.2.2}$$

En outre, on a $\varphi \circ p_1 = \psi \circ p_2 = \theta$, morphisme structural de $X \times_S Y$.

Lorsque $\boldsymbol{C}$ admet un objet final $\boldsymbol{e}$, on a $X \times_e Y = X \times Y$ à isomorphisme unique près.

(1.2.3) Dans le cas particulier où $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Ens}$, le produit $X \times Y$ existe et n'est autre que le «produit cartésien» usuel. Pour tout ensemble S et tout couple d'applications $\varphi: X \to S$, $\psi: Y \to S$, le *produit fibré* $X \times_S Y$ existe et est le *sous-ensemble* du produit $X \times Y$ formé des couples (x,y) tels que $\varphi(x) = \psi(y)$: en effet, si $f: T \to X$ et $g: T \to Y$ sont deux applications telles que $\varphi \circ f = \psi \circ g$, $(f(t), g(t))$ appartient à ce sous-ensemble pour tout $t \in T$, donc f et g se factorisent en $f = p_1 \circ h$ et $g = p_2 \circ h$, où p_1 et p_2 sont les restrictions à $X \times_S Y$ des projections pr_1 et pr_2.

Si l'on revient à une catégorie quelconque $\boldsymbol{C}$, notons que l'on peut écrire, pour deux morphismes $\varphi: X \to S$, $\psi: Y \to S$ et tout objet $T \in \boldsymbol{C}$

$$\mathrm{Hom}(T,X) \times_{\mathrm{Hom}(T,S)} \mathrm{Hom}(T,Y) = \mathrm{Hom}(T, X \times_S Y). \tag{1.2.3.1}$$

En effet, si $f: T \to X$, $g: T \to Y$ sont deux morphismes de $\boldsymbol{C}$ tels que $\varphi \circ f = \psi \circ g$, la valeur commune θ de ces deux composés définit T comme S-objet et f et g comme des S-morphismes, d'où l'existence d'un unique morphisme $h: T \to X \times_S Y$ tel que $f = p_1 \circ h$, $g = p_2 \circ h$, ce qui prouve (1.2.3.1). On peut donc dire encore que $X \times_S Y$ est l'objet de $\boldsymbol{C}$ représentant le foncteur contravariant $\boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$:

$$T \mapsto \mathrm{Hom}(T,X) \times_{\mathrm{Hom}(T,S)} \mathrm{Hom}(T,Y)$$

où le produit fibré ensembliste du second membre est relatif aux applications

$$\mathrm{Hom}(1_T, \varphi) : \mathrm{Hom}(T,X) \to \mathrm{Hom}(T,S)$$

et

$$\mathrm{Hom}(1_T, \psi) : \mathrm{Hom}(T,Y) \to \mathrm{Hom}(T,S).$$

Avec les mêmes notations, on posera $h=(f,g)_S$ ou simplement $h=(f,g)$ si cela n'entraîne pas confusion.

(1.2.4) On dira qu'un diagramme de morphismes de $\boldsymbol{C}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u} & Z \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ S & \xleftarrow[\psi]{} & Y \end{array}$$

est *cartésien* s'il est *commutatif* et si, pour tout S-objet T, l'application

$$g \mapsto (u\circ g, v\circ g)$$

est une application *bijective* de $\mathrm{Hom}_S(T,Z)$ sur $\mathrm{Hom}_S(T,X)\times \mathrm{Hom}_S(T,Y)$ (X, Y et Z étant considérés comme S-objets au moyen de φ, ψ et $\theta=\varphi\circ u=\psi\circ v$ respectivement); le S-préschéma Z est donc égal à $X\times_S Y$ à isomorphisme près.

(1.2.5) Soient X, Y, X', Y' quatre S-objets; supposons que les produits $X\times_S Y$ et $X'\times_S Y'$ existent et notons p_1, p_2, p'_1, p'_2 les projections canoniques. Alors, pour tout couple de S-morphismes $u: X'\to X$, $v: Y'\to Y$, on pose

$$u\times_S v=(u\circ p'_1, v\circ p'_2)_S : X'\times_S Y'\to X\times_S Y. \tag{1.2.5.1}$$

On écrit aussi $u\times v$ s'il n'y a pas de confusion.

Proposition (1.2.6) *Supposons que les produits existent dans* $\boldsymbol{C}_{/S}$. *Si l'on pose* $F(X,Y)=X\times_S Y$, $F(u,v)=u\times_S v$, F *est un bifoncteur covariant de* $\boldsymbol{C}_{/S}\times\boldsymbol{C}_{/S}$ *dans* $\boldsymbol{C}_{/S}$.

Il suffit de remarquer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X\times_S Y & \xrightarrow{f\times_S 1_Y} & X'\times_S Y & \xrightarrow{f'\times_S 1_Y} & X''\times_S Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p'}\downarrow & & {\scriptstyle p''}\downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & X' & \xrightarrow[f']{} & X'' \end{array}$$

est commutatif (les flèches verticales étant les premières projections) comme il résulte aussitôt de la définition (1.2.5.1).

Proposition (1.2.7) *Pour tout* S-*objet* X, *le produit* $X\times_S S$ (resp. $S\times_S X$) *existe*; *la première* (resp. *seconde*) *projection de* $X\times_S S$ (resp. $S\times_S X$) *est un isomorphisme fonctoriel de* $X\times_S S$ (resp. $S\times_S X$) *sur* X, *dont l'isomorphisme réciproque est* $(1_X,\varphi)_S$ (resp. $(\varphi,1_X)_S$), *en désignant par* $\varphi: X\to S$ *le morphisme structural.*

En effet, pour tout S-objet T, $\mathrm{Hom}_S(T,S)$ est un ensemble à un élément, donc l'objet X représente le foncteur

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_S(T,X) \times \mathrm{Hom}_S(T,S).$$

On peut donc écrire à isomorphisme canonique près

$$X \times_S S = S \times_S X = X. \tag{1.2.7.1}$$

Corollaire (1.2.8) *Soient* X,Y *deux* S*-objets,* $\varphi: X \to S$, $\psi: Y \to S$ *les morphismes structuraux. Si l'on identifie canoniquement* X *à* $X \times_S S$ *et* Y *à* $S \times_S Y$, *la première projection* $p_1: X \times_S Y \to X$ *s'identifie à* $1_X \times_S \psi$ *et la seconde projection* $p_2: X \times_S Y \to Y$ *à* $\varphi \times_S 1_Y$.

La vérification résulte aussitôt des définitions.

Proposition (1.2.9) *Etant donné un diagramme commutatif de morphismes de* **C**

(1.2.9.1)
$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{g} & X' & \xleftarrow{g'} & X'' \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi''} \\ S & \xleftarrow[f]{} & S' & \xleftarrow[f']{} & S'' \end{array}$$

supposons que le carré de gauche soit cartésien (1.2.4). *Alors, pour que le carré de droite de* (1.2.9.1) *soit cartésien, il faut et il suffit que le carré composé*

(1.2.9.2)
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g \circ g'} & X'' \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi''} \\ S & \xleftarrow[f \circ f']{} & S'' \end{array}$$

soit cartésien.

Supposons le carré de droite dans (1.2.9.1) cartésien et considérons deux morphismes $u: T \to X$, $v'': T \to S''$ tels que $\varphi \circ u = f \circ f' \circ v''$. Puisque le carré de gauche de (1.2.9.1) est cartésien, il existe un unique morphisme $u': T \to X'$ tel que $u = g \circ u'$ et $f' \circ v'' = \varphi' \circ u'$, et puisque le carré de droite est cartésien, il existe un unique morphisme $u'': T \to X''$ tel que $u' = g' \circ u''$ et $v'' = \varphi'' \circ u''$; on en conclut que $(g \circ g') \circ u'' = u$, donc le carré (1.2.9.2) est cartésien.

Inversement, supposons (1.2.9.2) cartésien, et soient $u': T \to X'$ et $v'': T \to S''$ deux morphismes tels que $\varphi' \circ u' = f' \circ v''$. Posons $u = g \circ u'$; en vertu de la commutativité du carré de gauche dans (1.2.9.1), on a $\varphi \circ u = (f \circ f') \circ v''$, donc il existe un unique morphisme $u'': T \to X''$ tel que $(g \circ g') \circ u'' = u = g \circ u'$ et $\varphi'' \circ u'' = v''$. Mais on a aussi $\varphi' \circ (g' \circ u'')$

$=(f'\circ\varphi'')\circ u''=f'\circ v''=\varphi'\circ u'$; de cette relation et de $g\circ(g'\circ u'')=g\circ u'$, on déduit $u'=g'\circ u''$; cela prouve que le carré de droite dans (1.2.9.1) est cartésien.

Proposition (1.2.10) *Soient* $f: X\to S$, $g: Y\to S$ *deux morphismes de* $\mathbf{C}$ *tel que le produit* $X\times_S Y$ *existe; soient* $p_1: X\times_S Y\to X$, $p_2: X\times_S Y\to Y$ *les projections canoniques. Si* $s: S\to Y$ *est une* S*-section de* g (1.1.11), *alors* $s'=(1_X, s\circ f)_S$ *est une* X*-section de* p_1, *et le carré*

$$\begin{array}{ccc} X\times_S Y & \xleftarrow{s'} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xleftarrow[s]{} & S \end{array}$$

est cartésien.

On a $p_1\circ s'=1_X$ par définition, donc s' est bien une section de p_1. La seconde assertion résulte de l'application de (1.2.9) au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{p_1} & X\times_S Y & \xleftarrow{s'} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S & \xleftarrow[g]{} & Y & \xleftarrow[s]{} & S \end{array}$$

Proposition (1.2.11) *Soient* X, Y *deux* S*-objets tels que* $X\times_S Y$ *existe; alors l'application* $f\mapsto \Gamma_f=(1_X, f)_S$ *est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_S(X,Y)\simeq \mathrm{Hom}_X(X, X\times_S Y)=\Gamma(X\times_S Y/X)$$

de l'ensemble des S*-morphismes de* X *dans* Y *sur l'ensemble des* X*-sections de* $X\times_S Y$ (*pour la première projection* $p_1: X\times_S Y\to X$).

C'est un cas particulier de la définition du produit fibré (1.2.2).

La X-section Γ_f de $X\times_S Y$ est appelée le *morphisme graphe* du morphisme f; c'est donc un monomorphisme.

Proposition (1.2.12) *Soient* $f: X\to X'$, $g: Y\to Y'$ *deux* S*-morphismes qui soient des monomorphismes de* $\mathbf{C}_{/S}$ (T, I; 1.1); *alors, si les produits* $X\times_S Y$ *et* $X'\times_S Y'$ *sont définis,* $f\times_S g: X\times_S Y\to X'\times_S Y'$ *est un monomorphisme de* $\mathbf{C}_{/S}$.

En effet, soient p_1, p_2 les deux projections de $X\times_S Y$, p'_1, p'_2 les deux projections de $X'\times_S Y'$; si u, v sont deux S-morphismes de T dans $X\times_S Y$ tels que $(f\times_S g)\circ u=(f\times_S g)\circ v$, on en tire $p'_1\circ(f\times_S g)\circ u=p'_1\circ(f\times_S g)\circ v$, autrement dit $f\circ p_1\circ u=f\circ p_1\circ v$, et comme f est un monomorphisme, on en tire $p_1\circ u=p_1\circ v$; utilisant de même le fait que g est un monomorphisme, on obtient $p_2\circ u=p_2\circ v$, d'où $u=v$.

(1.2.13) Supposons la catégorie $\boldsymbol{C}$ telle que tous les produits fibrés $X \times_S Y$ existent. Alors, pour n S-objets quelconques $X_1, X_2, \ldots, X_n$, on peut définir par récurrence le produit fibré

$$X_1 \times_S X_2 \times_S \cdots \times_S X_n = (X_1 \times_S X_2 \times_S \cdots \times_S X_{n-1}) \times_S X_n,$$

qu'on note aussi $\prod_{S\ 1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ et il est immédiat que cet objet représente le foncteur

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_S(T, X_1) \times \mathrm{Hom}_S(T, X_2) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_S(T, X_n).$$

Les propriétés d'associativité et de commutativité du produit cartésien d'ensembles donnent donc des propriétés correspondantes pour les produits fibrés (1.1.7), que nous laissons au lecteur le soin d'énoncer. Par exemple, si p_1, p_2, p_3 sont les trois projections canoniques de $X_1 \times_S X_2 \times_S X_3$ dans X_1, X_2, X_3 respectivement, et si on identifie canoniquement ce produit à $(X_1 \times_S X_2) \times_S X_3$, la première projection de ce produit fibré est identifiée à $(p_1, p_2)_S$. Si $f_i : X_i \to Y_i$ est un S-morphisme, le morphisme $f_1 \times_S f_2 \times \cdots \times_S f_n$ de $\prod_{S\ 1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ dans $\prod_{S\ 1 \leqslant i \leqslant n} Y_i$ se note aussi $\prod_{S\ 1 \leqslant i \leqslant n} f_i$.

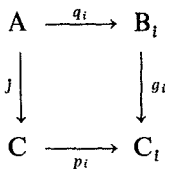
Proposition (1.2.14) *Soient $f : S \to S'$ un morphisme de $\boldsymbol{C}$ qui est un* monomorphisme (T, I, 1.1), *X, Y deux* S*-objets, $\varphi : X \to S$, $\psi : Y \to S$ les morphismes structuraux; les morphismes $f \circ \varphi : X \to S'$, $f \circ \psi : Y \to S'$ définissent* X *et* Y *comme des* S'*-objets. Alors tout produit des* S*-objets* X, Y *est un produit des* S'*-objets* X, Y *et réciproquement.*

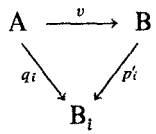
En effet, si T est un S'-objet, $u : T \to X$, $v : T \to Y$ deux S'-morphismes, on a par définition $f \circ \varphi \circ u = f \circ \psi \circ v = \theta'$, morphisme structural de T; l'hypothèse sur f entraîne que l'on a $\varphi \circ u = \psi \circ v$, et l'on peut donc considérer T comme S-objet de morphisme structural $\theta = \varphi \circ u = \psi \circ v$. La conclusion résulte aussitôt de là et de la définition d'un produit.

Proposition (1.2.15) *Supposons que dans $\boldsymbol{C}$ les produits existent. Considérons une famille de morphismes $g_i : B_i \to C_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, et posons*

$$B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_r, \quad C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_r, \quad g = g_1 \times g_2 \times \cdots \times g_r : B \to C.$$

Pour chaque i, soit $q_i : A \to B_i$ un morphisme, et soient $j : A \to C$ et $v : A \to B$ les morphismes (uniques) rendant commutatifs les diagrammes





pour $1 \leqslant i \leqslant r$, *où* p_i *et* p'_i *sont les projections canoniques* (1.2.1). *Alors* j *se factorise en*

$$j\colon A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{g} C.$$

En effet, on a pour tout i, $p_i \circ g \circ v = g_i \circ p'_i \circ v$ par définition de g (1.2.5), puis $g_i \circ p'_i \circ v = g_i \circ q_i = p_i \circ j$, et la relation $p_i \circ (g \circ v) = p_i \circ j$ pour tout i entraîne $g \circ v = j$ (1.2.1).

Remarque **(1.2.16)** Les objets de la catégorie opposée $\boldsymbol{C}^\circ$ étant les mêmes que ceux de $\boldsymbol{C}$, on est amené à développer une terminologie «duale» de la précédente dans $\boldsymbol{C}$ correspondant aux notions précédentes appliquées à la catégorie $\boldsymbol{C}^\circ$: ce qui correspond au produit fibré dans $\boldsymbol{C}^\circ$, relatif à deux morphismes *de* $\boldsymbol{C}$, $\varphi : S \to X$, $\psi : S \to Y$, est appelé souvent *somme amalgamée* de X et Y, et noté $X \amalg_S Y$; c'est l'objet de $\boldsymbol{C}$ représentant (1.1.11) le foncteur covariant

$$T \mapsto \mathrm{Hom}(X,T) \times_{\mathrm{Hom}(S,T)} \mathrm{Hom}(Y,T)$$

où le produit fibré ensembliste est relatif aux applications

$$\mathrm{Hom}(\varphi, 1_T)\colon \mathrm{Hom}(X,T) \to \mathrm{Hom}(S,T)$$

et

$$\mathrm{Hom}(\psi, 1_T)\colon \mathrm{Hom}(Y,T) \to \mathrm{Hom}(S,T).$$

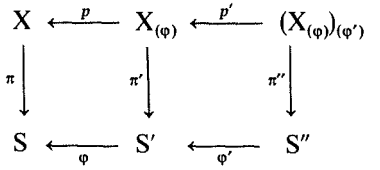
Par exemple, si $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des K-algèbres commutatives avec élément unité (où K est un anneau commutatif avec élément unité), la somme amalgamée $B \amalg_A C$ n'est autre que le *produit tensoriel* $B \otimes_A C$.

1.3. Changement de base

(1.3.1) Supposons que $\boldsymbol{C}$ soit une catégorie dans laquelle *tous les produits fibrés existent*. Soit $\varphi : S' \to S$ un morphisme de $\boldsymbol{C}$; pour tout S-objet X, de morphisme structural π, $X \times_S S'$, muni du morphisme projection $\pi' : X \times_S S' \to S'$, est un S'-objet, qu'on note encore $X_{(S')}$ ou $X_{(\varphi)}$, et qu'on dit *déduit de* X *par le morphisme changement de base* φ, ou encore *l'image réciproque* de X par φ. Pour tout S-morphisme $f : X \to Y$ on note $f_{(S')}$ le S'-morphisme $f \times_S 1_{S'} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ et on dit que $f_{(S')}$ est *l'image réciproque* de f par φ; on a alors défini (compte tenu de (1.2.6)) un *foncteur covariant* $X \mapsto X_{(S')}$ de $\boldsymbol{C}_{/S}$ dans $\boldsymbol{C}_{/S'}$. Si f est un isomorphisme, il en est de même de $f_{(S')}$.

Proposition (1.3.2.) («transitivité du changement de base») *Soient* $\varphi : S' \to S$, $\varphi' : S'' \to S'$ *deux morphismes de* $\boldsymbol{C}$. *Alors, pour tout* S-*objet* X, *il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du* S''-*objet* $(X_{(\varphi)})_{(\varphi')}$ *sur le* S''-*objet* $X_{(\varphi \circ \varphi')}$.

Il s'agit de prouver que dans le diagramme commutatif



le carré composé est cartésien, sachant que le carré de gauche et le carré de droite le sont, ce qui résulte de (1.2.9).

Ce résultat s'exprime en écrivant l'égalité (à isomorphisme canonique près) $(X_{(S')})_{(S'')} = X_{(S'')}$, ou encore

$$(X \times_S S') \times_{S'} S'' = X \times_S S'' ; \tag{1.3.2.1}$$

le caractère fonctoriel de l'isomorphisme défini dans (1.3.2) s'exprime de même par une formule de *transitivité* des images réciproques de morphismes

$$(f_{(S')})_{(S'')} = f_{(S'')} \tag{1.3.2.2}$$

pour tout S-morphisme $f : X \to Y$.

Corollaire (1.3.3) *Si* X *et* Y *sont deux* S*-objets, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du* S'*-objet* $X_{(S')} \times_{S'} Y_{(S')}$ *sur le* S'*-objet* $(X \times_S Y)_{(S')}$.

En effet, à des isomorphismes canoniques fonctoriels près, on a

$$(X \times_S S') \times_{S'} (Y \times_S S') = X \times_S (Y \times_S S') = (X \times_S Y) \times_S S',$$

compte tenu de (1.3.2.1) et de l'associativité des produits fibrés (1.2.13).

Le caractère fonctoriel de l'isomorphisme défini dans (1.3.3) s'exprime par la formule

$$(u_{(S')}, v_{(S')})_{S'} = ((u, v)_S)_{(S')} \tag{1.3.3.1}$$

pour tout couple de S-morphismes $u : T \to X$, $v : T \to Y$.

En d'autres termes, le foncteur image réciproque $X \mapsto X_{(S')}$ *commute à la formation des produits* dans les catégories $\boldsymbol{C}_{/S}$ et $\boldsymbol{C}_{/S'}$ respectivement.

Corollaire (1.3.4) *Soient* Y *un* S*-objet,* $f : X \to Y$ *un morphisme, par lequel* X *devient un* Y*-objet, et par suite aussi un* S*-objet au moyen du morphisme composé* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\psi} S$, *où* ψ *est le morphisme structural. Alors* $X_{(S')}$ *s'identifie au produit* $X \times_Y Y_{(S')}$, *la projection*

$$X \times_Y Y_{(S')} \to Y_{(S')}$$

s'identifiant à $f_{(S')}$.

C'est encore une application de (1.2.9), où on remplace S, S', S'', X, X', X'' respectivement par S, Y, X, S', $Y_{(S')}$ et $X_{(S')}$.

Corollaire (1.3.5) *Si* X,Y,Z *sont trois* S*-objets,* $f: X \to Z$, $g: Y \to Z$ *deux* S*-morphismes,* $X \times_Z Y$ *le produit fibré relatif à* f *et* g, *on a, à un isomorphisme canonique près*

$$(X \times_Z Y)_{(S')} = X_{(S')} \times_{Z_{(S')}} Y_{(S')}.$$

En effet, en vertu de (1.3.4), $(X \times_Z Y)_{(S')}$ s'identifie à $(X \times_Z Y)_{(Z_{(S')})}$ et il suffit d'appliquer (1.3.3).

Proposition (1.3.6.) *Si le* S*-morphisme* $f: X \to Y$ *est un monomorphisme,* $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *est un monomorphisme.*

C'est un cas particulier de (1.2.12).

Proposition (1.3.7) *L'application* $f \mapsto (f, 1_{S'})_S$ *est une bijection canonique*

$$\text{(1.3.7.1)} \qquad \mathrm{Hom}_S(S', X) \simeq \mathrm{Hom}_{S'}(S', X_{(S')}) = \Gamma(X_{(S')}/S')$$

de l'ensemble des S*-morphismes de* S' *dans* X, *dans l'ensemble des* S'*-sections* (1.1.10) *de* $X_{(S')}$, *fonctorielle en* X *et* S'.

Cela n'est autre qu'une manière d'énoncer (1.2.11). Si $p: X_{(S')} \to X$ est la projection canonique, la bijection réciproque de (1.3.7.1) est $f' \to p \circ f'$.

Rappelons que la section $f' = (f, 1_{S'})_S$ est le *morphisme graphe de* f et se note Γ_f (1.2.11).

Proposition (1.3.8) *Soient* X,Y *deux* S*-objets,* $f: X \to Y$ *un* S*-morphisme,* $\Gamma_f = (1_X, f)_S$ *le morphisme graphe de* f; *pour tout morphisme* $g: S' \to S$, *on a* $\Gamma_{f_{(S')}} = (\Gamma_f)_{(S')}$.

C'est un cas particulier de (1.3.3.1).

Remarque **(1.3.9)** Considérons une propriété ***P*** des morphismes de la catégorie ***C***, et les deux propositions suivantes:

(i) *Si* $f: X \to X'$, $g: Y \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes possédant la propriété* ***P***, $f \times_S g$ *possède la propriété* ***P***.

(ii) *Si* $f: X \to Y$ *est un* S*-morphisme possédant la propriété* ***P***, *tout* S'*-morphisme* $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$, *déduit de* f *par un changement de base* $S' \to S$, *possède la propriété* ***P***.

Comme $f_{(S')} = f \times_S 1_{S'}$, on voit que si pour tout objet X de ***C*** *l'identité* 1_X possède la propriété ***P***, (i) implique (ii); comme d'autre part $f \times_S g$ est le morphisme composé

$$X \times_S Y \xrightarrow{f \times 1_Y} X' \times_S Y \xrightarrow{1_{X'} \times g} X' \times_S Y'$$

on voit que si le *composé* de deux morphismes possédant la propriété ***P***, possède aussi cette propriété, alors (ii) implique (i).

Proposition (1.3.10) *Soit* $F: T \mapsto F(T)$ *un foncteur contravariant de la catégorie* $\boldsymbol{C}_{/S}$ *dans la catégorie des ensembles. Si ce foncteur est représentable par un couple* (X, ξ), *où* $X \in \boldsymbol{C}_{/S}$ *et* $\xi \in F(X)$, *alors, pour tout morphisme changement de base* $g: S' \to S$, *le foncteur* $T' \mapsto F(T')$, *restriction à* $\boldsymbol{C}_{/S'}$ *de* F, *est représentable par le couple* (X', ξ'), *où* $X' = X \times_S S'$ *et* $\xi' = F(p_1)(\xi)$, *où* $p_1: X' \to X$ *est la première projection.*

En effet, on a deux bijections fonctorielles en T'

$$\mathrm{Hom}_{S'}(T', X') \simeq \mathrm{Hom}_S(T', X) \simeq F(T')$$

où la première s'écrit $f' \mapsto p_1 \circ f'$ et la seconde $f \mapsto F(f)(\xi)$; il suffit de les composer.

1.4. Noyaux; morphisme diagonal

(1.4.1) Soient E, F deux ensembles, et considérons deux applications $u_1: E \to F$, $u_2: E \to F$; on appelle *noyau* de u_1 et u_2 (ou *ensemble des coïncidences* de u_1 et u_2) l'ensemble des $x \in E$ tels que $u_1(x) = u_2(x)$, et on le note $\mathrm{Ker}(u_1, u_2)$. On dit qu'un *diagramme d'applications*

$$N \xrightarrow[j]{} E \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightrightarrows}} F$$

est *exact* si j est injectif et si $j(N) = \mathrm{Ker}(u_1, u_2)$; ce diagramme est évidemment alors commutatif.

(1.4.2) Soient maintenant $\boldsymbol{C}$ une catégorie quelconque, X, Y deux objets de $\boldsymbol{C}$, u_1, u_2 deux morphismes de X dans Y; on définit un foncteur contravariant $F: \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ en posant, pour tout objet $T \in \boldsymbol{C}$,

$$F(T) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(1_T, u_1), \mathrm{Hom}(1_T, u_2)) \subset \mathrm{Hom}(T, X)$$

et, pour tout morphisme $w: T \to T'$, en prenant pour $F(w)$ la restriction à $F(T')$ de $\mathrm{Hom}(w, 1_X)$ (on vérifie aussitôt que l'image de $F(T')$ par $\mathrm{Hom}(w, 1_X)$ est contenue dans $F(T)$, en raison de la définition du noyau de deux applications). Si le foncteur F est *représentable*, un objet qui le représente (déterminé à isomorphisme unique près) est appelé un *noyau* de u_1 et u_2 ou *objet des coïncidences* de u_1 et u_2, et noté $\mathrm{Ker}(u_1, u_2)$. Nous verrons plus loin (1.4.10) que lorsque les produits fibrés existent dans $\boldsymbol{C}$, il en est de meme des noyaux.

Si $N = \mathrm{Ker}(u_1, u_2)$, l'injection canonique $\mathrm{Hom}(T, N) \to \mathrm{Hom}(T, X)$ est donc de la forme $\mathrm{Hom}(1_T, j)$, où $j: N \to X$ est un *monomorphisme* de T; on dit encore alors que le *diagramme de morphismes*

(1.4.2.1)
$$N \xrightarrow[j]{} X \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightrightarrows}} Y$$

est *exact*, ce qui équivaut donc à dire que, pour *tout* objet T de $\boldsymbol{C}$, on a le diagramme exact d'applications

$$\mathrm{Hom}(T,N) \xrightarrow[\mathrm{Hom}(1_T,f)]{} \mathrm{Hom}(T,X) \underset{\mathrm{Hom}(1_T,u_2)}{\overset{\mathrm{Hom}(1_T,u_1)}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(T,Y)$$

donc (1.4.2.1) est en particulier commutatif.

Lorsque $N=\mathrm{Ker}(u_1,u_2)$ existe, pour qu'un morphisme $f:T\to X$ soit tel que $u_1\circ f=u_2\circ f$, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que f se factorise en $f=j\circ g$, où $g:T\to N$ est un morphisme déterminé de façon unique.

(1.4.3) Considérons maintenant une catégorie $\boldsymbol{C}$ où *tous les produits fibrés existent*. Soient S un objet de $\boldsymbol{C}$, X un S-objet, p_1,p_2 les projections canoniques de $X\times_S X$; on appelle *morphisme diagonal* de X dans $X\times_S X$ et on note $\Delta_{X/S}$ (ou Δ_φ, si $\varphi:X\to S$ est le morphisme structural, ou Δ_X, ou même Δ), le S-morphisme $(1_X,1_X)_S$, autrement dit l'unique S-morphisme tel que

$$p_1\circ\Delta_{X/S}=p_2\circ\Delta_{X/S}=1_X. \tag{1.4.3.1}$$

Il résulte aussitôt de cette définition que pour tout couple de S-morphismes f,g de T dans X, on a

$$(f,g)_S=(f\times_S g)\circ\Delta_{T/S}. \tag{1.4.3.2}$$

Proposition (1.4.4) *Le diagramme*

$$X \xrightarrow{\Delta_{X/S}} X\times_S X \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$$

est exact (1.4.2).

En effet, en vertu de (1.4.2) et (1.2.3), on est ramené à prouver la proposition lorsque $\boldsymbol{C}$ est la catégorie ***Ens***; mais dans ce cas, on voit aussitôt que le morphisme diagonal n'est autre que l'application diagonale usuelle $x\mapsto(x,x)$, et l'assertion est triviale.

$\Delta_{X/S}$ est donc un *monomorphisme* (1.4.2).

Proposition (1.4.5) *Si* $f:X\to Y$ *est un* S*-morphisme, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta_{X/S}} & X\times_S X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\times_S f} \\ Y & \xrightarrow[\Delta_{Y/S}]{} & Y\times_S Y \end{array} \tag{1.4.5.1}$$

est commutatif.

On est encore ramené à la vérification pour la catégorie ***Ens***, qui est triviale.

Proposition (1.4.6) *Soient* X, Y *deux* S-*objets; si on identifie canoniquement les produits* $(X \times_S X) \times_S (Y \times_S Y)$ *et* $(X \times_S Y) \times_S (X \times_S Y)$ (1.2.13) *le morphisme* $\Delta_{(X \times_S Y)/S}$ *s'identifie à* $\Delta_{X/S} \times_S \Delta_{Y/S}$.

Ici encore, il suffit de le vérifier pour les ensembles, où c'est évident.

Corollaire (1.4.7) *Pour tout changement de base* $S' \to S$, $\Delta_{X_{(S')}/S'}$ *s'identifie à* $(\Delta_{X/S})_{(S')}$.

Il suffit de remarquer que $(X \times_S X)_{(S')}$ s'identifie canoniquement à $X_{(S')} \times_{S'} X_{(S')}$ (1.3.3).

Proposition (1.4.8) *Soient* X, Y *deux* S-*objets,* $\varphi: S \to T$ *un morphisme de* $\boldsymbol{C}$, *faisant de tout* S-*objet un* T-*objet. Soient* $f: X \to S$, $g: Y \to S$ *les morphismes structuraux,* p_1, p_2 *les projections canoniques de* $X \times_S Y$, $\pi = f \circ p_1 = g \circ p_2$ *le morphisme structural* $X \times_S Y \to S$. *Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{(p_1, p_2)_T} & X \times_T Y \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle f \times_T g} \\ S & \xrightarrow[\Delta_{S/T}]{} & S \times_T S \end{array} \tag{1.4.8.1}$$

est un carré cartésien, et le morphisme $(p_1, p_2)_T$ *s'identifie à*

$$1_{X \times_T Y} \times_{S \times_T S} \Delta_{S/T}.$$

On se ramène encore au cas où $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Ens}$, et la vérification est alors immédiate.

Corollaire (1.4.9) *Si* $f: X \to Y$ *est un* S-*morphisme, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(1_X, f)_S} & X \times_S Y \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f \times_S 1_Y} \\ Y & \xrightarrow[\Delta_{Y/S}]{} & Y \times_S Y \end{array} \tag{1.4.9.1}$$

est un carré cartésien.

Il suffit d'appliquer (1.4.8) en remplaçant S par Y et T par S, et remarquant que $X \times_Y Y = X$ (1.2.7).

On notera que $(1_X, f)_S$ n'est autre que le *morphisme graphe* Γ_f (1.3.7).

Considérons en particulier une S-*section* $s: S \to X$ d'un morphisme $g: X \to S$ faisant de X un S-objet; identifiant canoniquement $S \times_S X$ à X (1.2.7), on voit, en remplaçant dans (1.4.9) Y par X, X par S et f par s, que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{s} & X \\ \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle (s \circ g, 1_X)_S} \\ X & \xrightarrow[\Delta_g]{} & X \times_S X \end{array} \tag{1.4.9.2}$$

est un *carré cartésien.* On peut donc dire que s s'obtient à partir de la X-section $\Delta_g : X \to X \times_S X$ (de p_1 ou de p_2) par le *changement de base* $(s \circ g, 1_X)_S : X \to X \times_S X$; cela permet de dire aussi que le morphisme diagonal Δ_g est une «S-*section universelle*» de g.

Proposition (1.4.10) *Soient* u_1, u_2 *deux* S-*morphismes* $X \to Y$. *Considérons* X *et* Y *comme des* $(Y \times_S Y)$-*objets au moyen des morphismes* $(u_1, u_2)_S : X \to Y \times_S Y$ *et* $\Delta_Y : Y \to Y \times_S Y$. *Alors le produit fibré* $X \times_{Y \times_S Y} Y$ *de ces deux* $(Y \times_S Y)$-*objets est un noyau de* u_1 *et* u_2 *dans* $\boldsymbol{C}_{/S}$ (cf. (**I**, 5.1.5)).

On est encore ramené au cas $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Ens}$, où la vérification est triviale.

Proposition (1.4.11) *Pour qu'un morphisme* $f : X \to Y$ *de* $\boldsymbol{C}$ *soit un monomorphisme, il suffit que* $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ *soit un isomorphisme, ou que l'un des morphismes* $p_1 : X \times_Y X \to X$, $p_2 : X \times_Y X \to X$ *soit un monomorphisme* (auquel cas c'est un *isomorphisme*).

On est toujours ramené au cas $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Ens}$, où c'est immédiat.

Remarques **(1.4.12)** Lorsque dans une catégorie $\boldsymbol{C}$ tous les produits fibrés existent, il en est de même de toutes les *limites projectives finies*, c'est-à-dire celles correspondant aux systèmes projectifs $(X_i)_{i \in I}$ où l'ensemble préordonné I est *fini* (1.1.9). En effet, dans le cas particulier où $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des ensembles, $\varprojlim X_i$ est le sous-ensemble de $\prod_{i \in I} X_i$ formé des (x_i) tels que $u_{ij}(x_j) = x_i$ pour $i \leqslant j$. Cet ensemble peut être considéré comme un *noyau* de la façon suivante: pour tout couple (j,k) tel que $j \leqslant k$, on pose $Y_{jk} = X_k$, et on considère les deux ensembles $\prod_{i \in I} X_i$ et $\prod_{j \leqslant k} Y_{jk}$; on définit ensuite deux applications $v = (v_{jk})$ et $w = (w_{jk})$ de $\prod_{i \in I} X_i$ dans $\prod_{j \leqslant k} Y_{jk}$ en prenant $v_{jk} = \mathrm{pr}_k$ et $w_{jk} = u_{kj} \circ \mathrm{pr}_j$; il est clair que $\varprojlim X_i$ est le noyau de v et w. On peut alors répéter cette définition dans la catégorie $\boldsymbol{C}$; il résulte de l'existence des noyaux dans $\boldsymbol{C}$ (1.4.10) et de la définition d'une limite projective (1.1.9) que l'on a encore $\varprojlim X_i = \mathrm{Ker}(v, w)$.

(1.4.13) On peut définir de même l'*ensemble des coïncidences* $\mathrm{Ker}(u_1, u_2, u_3)$ de trois applications $u_i : E \to F$ $(i = 1,2,3)$, comme l'ensemble des $x \in E$ tels que $u_1(x) = u_2(x) = u_3(x)$; puis, pour une catégorie $\boldsymbol{C}$, le foncteur

$$F(T) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(1_T, u_1)\, \mathrm{Hom}(1_T, u_2), \mathrm{Hom}(1_T, u_3)) \subset \mathrm{Hom}(T, X)$$

pour deux objets X, Y et trois morphismes u_i $(i = 1,2,3)$ de X dans Y. Dans une catégorie $\boldsymbol{C}$ où les produits fibrés existent, ce foncteur est représentable par l'objet (dit encore *objet des coïncidences* des u_i)

$$\mathrm{Ker}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Ker}(u_1, u_2) \times_X \mathrm{Ker}(u_2, u_3)$$

comme on le voit aussitôt en se ramenant au cas $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Ens}$.

On généralise aussitôt à un nombre fini quelconque de morphismes.

(1.4.14) En formulant les définitions et propositions précédentes pour la catégorie opposée $\boldsymbol{C}^\circ$, on obtient de nouvelles notions pour $\boldsymbol{C}$, les *conoyaux* dans $\boldsymbol{C}$ étant les noyaux dans $\boldsymbol{C}^\circ$, les morphismes *codiagonaux* dans $\boldsymbol{C}$ les morphismes diagonaux de $\boldsymbol{C}^\circ$; on laisse les traductions au lecteur.

1.5. Foncteurs adjoints

(1.5.1) Soient $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ deux catégories, $F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}'$ un foncteur covariant. Alors, pour un objet donné $X' \in \boldsymbol{C}'$, $T \mapsto \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(F(T), X')$ est un foncteur contravariant de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens***. S'il est *représentable*, on dit qu'un objet $Y \in \boldsymbol{C}$ qui le représente (déterminé à isomorphisme unique près) est *associé* (pour F) à X'; par définition, pour tout objet $T \in \boldsymbol{C}$, on a donc un isomorphisme fonctoriel en T:

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(F(T), X') \tag{1.5.1.1}$$

que nous noterons $u \mapsto u^\sharp$, l'isomorphisme réciproque étant noté $u' \to u'^\flat$. Pour tout morphisme $w: T \to S$ de $\boldsymbol{C}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(S, Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(F(S), X') \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(w, 1_Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(F(w), 1_{X'})} \\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(F(T), X') \end{array} \tag{1.5.1.2}$$

Autrement dit, pour tout morphisme $u: S \to Y$, on a

$$(u \circ w)^\sharp = u^\sharp \circ F(w). \tag{1.5.1.3}$$

En particulier, si l'on prend $T = Y$, on a un morphisme canonique

$$\sigma_{X'} = (1_Y)^\sharp : F(Y) \to X' \tag{1.5.1.4}$$

et il résulte de (1.5.1.3) appliqué en remplaçant w par $u: T \to Y$, et u par 1_Y, que l'on a la factorisation canonique unique

$$u^\sharp : F(T) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{\sigma_{X'}} X'. \tag{1.5.1.5}$$

(1.5.2) Supposons maintenant qu'à *tout* objet X' de $\boldsymbol{C}'$ soit associé (pour F) un objet de $\boldsymbol{C}$, que nous noterons $F^{\mathrm{ad}}(X')$. Nous allons voir qu'on peut définir F^{ad} comme *foncteur covariant* $\boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{C}$, que nous appellerons *adjoint à droite* du foncteur F.

Il faut en effet, pour tout morphisme $u': X'_1 \to X'_2$ de $\boldsymbol{C}'$, définir le morphisme $F^{\mathrm{ad}}(u'): F^{\mathrm{ad}}(X'_1) \to F^{\mathrm{ad}}(X'_2)$. Or, considérons le morphisme composé

$$F(F^{\mathrm{ad}}(X'_1)) \xrightarrow{\sigma_{X'_1}} X'_1 \xrightarrow{u'} X'_2.$$

Nous poserons

(1.5.2.1) $$F^{ad}(u') = (u' \circ \sigma_{X'_1})^\flat : F^{ad}(X'_1) \to F^{ad}(X'_2).$$

Utilisant la factorisation canonique (1.5.1.5), on a par suite le diagramme commutatif

(1.5.2.2)
$$\begin{array}{ccc} F(F^{ad}(X'_1)) & \xrightarrow{F(F^{ad}(u'))} & F(F^{ad}(X'_2)) \\ {\scriptstyle \sigma_{X'_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{X'_2}} \\ X'_1 & \xrightarrow[u']{} & X'_2 \end{array}$$

qui caractérise $F^{ad}(u')$: si en effet un autre morphisme

$$u : F^{ad}(X'_1) \to F^{ad}(X'_2)$$

est tel que $F(u)$ rende commutatif le diagramme précédent, on a $(F^{ad}(u'))^\flat = u'^\flat$, donc $u = F^{ad}(u')$. Ceci prouve aussitôt que si $v' : X'_2 \to X'_3$ est un second morphisme de $\boldsymbol{C}'$, on a

$$F^{ad}(v' \circ u') = F^{ad}(v') \circ F^{ad}(u'),$$

et établit notre assertion.

Compte tenu de la factorisation canonique (1.5.1.5), on voit que l'isomorphisme $u \mapsto u^\sharp$:

(1.5.2.3) $$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(T, F^{ad}(X')) \simeq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(F(T), X')$$

est un *isomorphisme de bifoncteurs* en T et X'.

(1.5.3) Formulant la définition d'un foncteur adjoint à droite pour les catégories opposées $\boldsymbol{C}^\circ$, $\boldsymbol{C}'^\circ$ et notant que F définit encore un foncteur covariant $F^\circ : \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{C}'^\circ$, on déduit la notion de foncteur *adjoint à gauche* ${}^{ad}F : \boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{C}$ de F. On a donc un *isomorphisme de bifoncteurs* en T et X'

(1.5.3.1) $$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}({}^{ad}F(X'), T) \simeq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X', F(T)),$$

que nous noterons cette fois $v \mapsto v^\flat$, l'isomorphisme réciproque étant noté $v' \mapsto v'^\sharp$. Pour tout morphisme $v : {}^{ad}F(X') \to T$ et tout morphisme $w : T \to S$ de $\boldsymbol{C}$, on a

(1.5.3.2) $$(w \circ v)^\flat = F(w) \circ v^\flat.$$

et en particulier on a un morphisme canonique

(1.5.3.3) $$\rho_{X'} : X' \to F({}^{ad}F(X'))$$

tel que l'on ait une unique factorisation canonique

(1.5.3.4) $$v^\flat : X' \xrightarrow{\rho_{X'}} F({}^{ad}F(X')) \xrightarrow{F(v)} F(T).$$

Enfin, pour tout morphisme $u' : X'_1 \to X'_2$ de $\boldsymbol{C}'$, on a

(1.5.3.5) $$ {}^{ad}F(u') = (\rho_{X'_2} \circ u')^\sharp : {}^{ad}F(X'_1) \to {}^{ad}F(X'_2).$$

(1.5.4) Le fait que (1.5.2.3) soit un isomorphisme de bifoncteurs prouve aussitôt que lorsqu'un foncteur $F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}'$ possède un adjoint à droite F^{ad}, $F^{ad}: \boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{C}$ possède un *adjoint à gauche* qui n'est autre que F à isomorphisme unique près, autrement dit on a ${}^{ad}(F^{ad}) = F$ et de même $({}^{ad}F)^{ad} = F$ lorsque ${}^{ad}F$ existe.

Exemples **(1.5.5)** Soient A, B deux anneaux admettant chacun un élément unité, $\rho: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $\rho(1) = 1$, $\boldsymbol{C}$ la catégorie des A-modules à gauche, $\boldsymbol{C}'$ celle des B-modules à gauche; on définit alors deux foncteurs $\rho^*: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}'$, $\rho_*: \boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{C}$ tels que $\rho^*(E) = B \otimes_A E$ pour tout A-module à gauche E et que $\rho_*(F)$, pour tout B-module à gauche F, soit le A-module obtenu en restreignant à A l'anneau des scalaires de F au moyen de ρ; on sait (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 1) que l'on a un isomorphisme canonique de bifoncteurs

$$\mathrm{Hom}_B(\rho^*(E), F) \simeq \mathrm{Hom}_A(E, \rho_*(F))$$

en E et F; autrement dit, ρ^* est *adjoint à gauche* de ρ_* et ρ_* *adjoint à droite* de ρ^*.

Soit maintenant E un (B, A)-bimodule. On définit alors deux foncteurs $F \mapsto E \otimes_A F$ de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{C}'$, $G \mapsto \mathrm{Hom}_B(E, G)$ de $\boldsymbol{C}'$ dans $\boldsymbol{C}$, et on a un isomorphisme canonique de bifoncteurs (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 4, n° 1)

$$\mathrm{Hom}_B(E \otimes_A F, G) \simeq \mathrm{Hom}_A(F, \mathrm{Hom}_B(E, G))$$

en F et G; le foncteur $F \mapsto E \otimes_A F$ est *adjoint à gauche* de $G \mapsto \mathrm{Hom}_B(E, G)$.

(1.5.6) Si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie où les produits existent, alors, pour tout objet $S \in \boldsymbol{C}$, le foncteur canonique $i_{/S}: \boldsymbol{C}_{/S} \to \boldsymbol{C}$, qui à tout objet $u: X \to S$ de $\boldsymbol{C}_{/S}$ fait correspondre sa source X, admet pour *adjoint à droite* le foncteur produit $X \mapsto X \times S$, car, pour tout objet $T \in \boldsymbol{C}_{/S}$, $\mathrm{Hom}_S(T, X \times S)$ est la partie de $\mathrm{Hom}(T, X \times S)$ formée des morphismes u tels que $p_2 \circ u = \varphi$, où φ est le morphisme structural $T \to S$. En vertu de (1.2.1.2), $\mathrm{Hom}_S(T, X \times S)$ est donc en correspondance biunivoque fonctorielle avec $\mathrm{Hom}(T, X)$ par l'application $u \mapsto p_1 \circ u$, d'où notre assertion.

Plus généralement, si $\pi: S' \to S$ est un morphisme de $\boldsymbol{C}$, le foncteur canonique $i_{/S'/S}: \boldsymbol{C}_{/S'} \to \boldsymbol{C}_{/S}$, qui, à tout objet $u: X \to S'$ de $\boldsymbol{C}_{/S'}$, fait correspondre l'objet $\pi \circ u: X \to S$ de $\boldsymbol{C}_{/S}$, a pour *adjoint à droite* le foncteur produit fibré $X \mapsto X \times_S S'$; la démonstration est tout à fait analogue, utilisant (1.2.2.1).

(1.5.7) Si un foncteur $F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}'$ admet un adjoint à droite (resp. à gauche), cet adjoint *commute aux limites projectives* (resp. *aux limites inductives*), autrement dit, on a

(1.5.7.1) $$F^{ad}(\varinjlim X'_\alpha) = \varprojlim F^{ad}(X'_\alpha)$$

(resp.

(1.5.7.2) $$^{ad}F(\varinjlim X'_\alpha) = \varprojlim {}^{ad}F(X'_\alpha))$$

à des isomorphismes canoniques près. Prouvons par exemple (1.5.7.2): à isomorphisme canonique près, on a, pour tout objet $T \in \boldsymbol{C}$, par (1.5.3.1) et (1.1.12),

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}({}^{ad}F(\varinjlim X'_\alpha), T) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(\varinjlim X'_\alpha, F(T)) &= \varprojlim \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X'_\alpha, F(T)) \\ &= \varprojlim \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}({}^{ad}F(X'_\alpha), T) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(\varinjlim {}^{ad}F(X'_\alpha), T),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

1.6. Structures algébriques dans les catégories

(1.6.1) Étant donnés deux foncteurs contravariants F, F' de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens***, rappelons que pour tout objet $Y \in \boldsymbol{C}$, on pose $(F \times F')(Y) = F(Y) \times F'(Y)$, et pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, on pose $(F \times F')(u) = F(u) \times F'(u)$, qui est l'application $(t, t') \mapsto (F(u)(t), F'(u)(t'))$ de $F(Y') \times F'(Y')$ dans $F(Y) \times F'(Y)$; $F \times F' : \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ est donc un *foncteur contravariant* (qui n'est autre d'ailleurs que le *produit* des objets F, F' dans la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^\circ, \boldsymbol{Ens})$). Étant donné un objet $X \in \boldsymbol{C}$, nous appellerons *loi de composition interne* sur X un *morphisme fonctoriel*

(1.6.1.1) $$\gamma_X : \mathbf{h}_X \times \mathbf{h}_X \to \mathbf{h}_X.$$

Autrement dit (T, 1.2), pour tout objet $Y \in \boldsymbol{C}$, $\gamma_X(Y)$ est une application $\mathbf{h}_X(Y) \times \mathbf{h}_X(Y) \to \mathbf{h}_X(Y)$ (donc par définition une *loi de composition interne* sur l'ensemble $\mathbf{h}_X(Y)$) soumise à la condition que, pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}_X(Y') \times \mathbf{h}_X(Y') & \xrightarrow{\mathbf{h}_X(u) \times \mathbf{h}_X(u)} & \mathbf{h}_X(Y) \times \mathbf{h}_X(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_X(Y')} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_X(Y)} \\ \mathbf{h}_X(Y') & \xrightarrow[\mathbf{h}_X(u)]{} & \mathbf{h}_X(Y) \end{array}$$

soit commutatif; cela signifie que pour les lois de composition $\gamma_X(Y)$ et $\gamma_X(Y')$, $\mathbf{h}_X(u)$ est un *homomorphisme* de $\mathbf{h}_X(Y')$ dans $\mathbf{h}_X(Y)$.

De la même façon, étant donnés deux objets Z, X de $\boldsymbol{C}$, on appelle *loi de composition externe sur* X, *ayant* Z *comme domaine d'opérateurs*, un morphisme fonctoriel

(1.6.1.2) $$\omega_{X,Z} : \mathbf{h}_Z \times \mathbf{h}_X \to \mathbf{h}_X.$$

On voit comme ci-dessus que pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $\omega_{X,Z}(Y)$ est une loi de composition externe sur $\mathbf{h}_X(Y)$, ayant $\mathbf{h}_Z(Y)$ comme domaine d'opérateurs, et telle que pour tout morphisme $u : Y \to Y'$, $\mathbf{h}_X(u)$ et $\mathbf{h}_Z(u)$ forment un *dihomomorphisme* de $(\mathbf{h}_Z(Y'), \mathbf{h}_X(Y'))$ dans $(\mathbf{h}_Z(Y), \mathbf{h}_X(Y))$.

(1.6.2) Soit X' un second objet de $\boldsymbol{C}$, et supposons donnée sur X' une loi de composition interne $\gamma_{X'}$; nous dirons qu'un morphisme $w : X \to X'$ dans $\boldsymbol{C}$ est un *homomorphisme* pour ces lois de composition, si pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $\mathbf{h}_w(Y) : \mathbf{h}_X(Y) \to \mathbf{h}_{X'}(Y)$ est un *homomorphisme* pour les lois de composition $\gamma_X(Y)$ et $\gamma_{X'}(Y)$. Si X'' est un troisième objet de $\boldsymbol{C}$ muni d'une loi de composition interne $\gamma_{X''}$ et $w' : X' \to X''$ un morphisme dans $\boldsymbol{C}$ qui est un homomorphisme pour $\gamma_{X'}$ et $\gamma_{X''}$, il est clair que le morphisme $w'w : X \to X''$ est un homomorphisme pour les lois de composition γ_X et $\gamma_{X''}$. Un isomorphisme $w : X \xrightarrow{\sim} X'$ dans $\boldsymbol{C}$ est appelé *isomorphisme pour les lois de composition* γ_X et $\gamma_{X'}$ si w est un homomorphisme pour ces lois de composition, et si son morphisme réciproque w^{-1} est un homomorphisme pour les lois de composition $\gamma_{X'}$ et γ_X.

On définit de la même manière les *dihomomorphismes* pour les couples d'objets de $\boldsymbol{C}$ munis de lois de composition externes.

(1.6.3) Lorsqu'une loi de composition interne γ_X sur un objet $X \in \boldsymbol{C}$ est telle que $\gamma_X(Y)$ soit une loi de *groupe* sur $\mathbf{h}_X(Y)$ pour *tout* $Y \in \boldsymbol{C}$, on dit que X, muni de cette loi, est un $\boldsymbol{C}$-*groupe* ou un $\boldsymbol{C}$-*objet en groupes*. On définit de même les $\boldsymbol{C}$-*anneaux*, $\boldsymbol{C}$-*modules*, etc.

(1.6.4) Supposons que le *produit* $X \times X$ d'un objet $X \in \boldsymbol{C}$ par lui-même existe dans $\boldsymbol{C}$; par définition, on a alors $\mathbf{h}_{X \times X} = \mathbf{h}_X \times \mathbf{h}_X$ à un isomorphisme canonique près, puisqu'il s'agit d'un cas particulier de limite projective (1.1.9); une loi de composition interne sur X peut donc être considérée comme un morphisme fonctoriel $\gamma_X : \mathbf{h}_{X \times X} \to \mathbf{h}_X$, et détermine donc canoniquement (1.1.6) un élément $c_X \in \mathrm{Hom}(X \times X, X)$ tel que $\mathbf{h}_{c_X} = \gamma_X$; dans ce cas, la donnée d'une loi de composition interne sur X est donc équivalente à celle d'un morphisme $X \times X \to X$; lorsque $\boldsymbol{C}$ est la catégorie ***Ens***, on retrouve la notion classique de loi de composition interne sur un ensemble. On a un résultat analogue pour une loi de composition externe lorsque le produit $Z \times X$ existe dans $\boldsymbol{C}$.

(1.6.5) Avec les notations précédentes, supposons en outre que $X \times X \times X$ existe dans $\boldsymbol{C}$; la caractérisation du produit comme objet représentant un foncteur (1.1.9) entraîne l'existence d'isomorphismes canoniques

$$(X \times X) \times X \xrightarrow{\sim} X \times X \times X \xrightarrow{\sim} X \times (X \times X);$$

si on identifie canoniquement $X \times X \times X$ à $(X \times X) \times X$, l'application $\gamma_X(Y) \times 1_{\mathbf{h}_X(Y)}$ s'identifie à $\mathbf{h}_{c_X \times 1_X}(Y)$ pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$. Il est par suite équivalent de dire que pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, la loi interne $\gamma_X(Y)$ est associative, on que le diagramme d'applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}_X(Y) \times \mathbf{h}_X(Y) \times \mathbf{h}_X(Y) & \xrightarrow{\gamma_X(Y) \times 1} & \mathbf{h}_X(Y) \times \mathbf{h}_X(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \times \gamma_X(Y)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_X(Y)} \\ \mathbf{h}_X(Y) \times \mathbf{h}_X(Y) & \xrightarrow[\gamma_X(Y)]{} & \mathbf{h}_X(Y) \end{array}$$

est commutatif, ou que le diagramme de morphismes

$$\begin{array}{ccc} X \times X \times X & \xrightarrow{c_X \times 1_X} & X \times X \\ \downarrow{\scriptstyle 1_X \times c_X} & & \downarrow{\scriptstyle c_X} \\ X \times X & \xrightarrow[c_X]{} & X \end{array}$$

est commutatif.

(1.6.6) Sous les hypothèses de (1.6.5), si on veut exprimer que pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, la loi interne $\gamma_X(Y)$ est une loi de *groupe*, il faut d'une part exprimer qu'elle est associative, et de l'autre qu'il existe une application $\alpha_X(Y) : \mathbf{h}_X(Y) \to \mathbf{h}_X(Y)$ ayant les propriétés de l'*inverse* dans un groupe; comme pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, on a vu que $\mathbf{h}_X(u)$ doit être un homomorphisme de groupes $\mathbf{h}_X(Y') \to \mathbf{h}_X(Y)$, on voit d'abord que $\alpha_X : \mathbf{h}_X \to \mathbf{h}_X$ doit être un *morphisme fonctoriel*. On peut d'autre part exprimer les propriétés caractéristiques de l'inverse $s \mapsto s^{-1}$ dans un groupe G sans faire intervenir l'élément neutre: il suffit d'écrire que les deux applications composées

$$(s,t) \mapsto (s, s^{-1}, t) \mapsto (s, s^{-1}t) \mapsto s(s^{-1}t)$$
$$(s,t) \mapsto (s, s^{-1}, t) \mapsto (s, ts^{-1}) \mapsto (ts^{-1})s$$

sont égales à la seconde projection $(s,t) \mapsto t$ de $G \times G$ dans G. En vertu de (1.1.3), on a $\alpha_X = \mathbf{h}_{a_X}$, où $a_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$; la première condition précédente exprime alors que le morphisme composé

$$X \times X \xrightarrow{(1_X, a_X) \times 1_X} X \times X \times X \xrightarrow{1_X \times c_X} X \times X \xrightarrow{c_X} X$$

est la seconde projection $X \times X \to X$ dans $\boldsymbol{C}$, et la seconde condition se traduit de même.

(1.6.7) Supposons maintenant qu'il existe dans $\boldsymbol{C}$ un *objet final* e (1.1.10). Supposons toujours que $\gamma_X(Y)$ soit une loi de groupe sur $\mathbf{h}_X(Y)$ pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, et désignons par $\eta_X(Y)$ l'élément neutre de $\gamma_X(Y)$.

Comme, pour tout morphisme $u: Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, $\mathbf{h}_X(u)$ est un homomorphisme de groupes, on a $\eta_X(Y) = (\mathbf{h}_X(u))(\eta_X(Y'))$; prenant en particulier $Y' = e$, auquel cas u est l'unique élément ε de $\mathrm{Hom}(Y, e)$, on voit que l'élément $\eta_X(e)$ détermine complètement $\eta_X(Y)$ pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$. Posons $e_X = \eta_X(X)$, élément neutre du groupe $\mathbf{h}_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X)$; la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}_X(e) & \xrightarrow{\mathbf{h}_X(\varepsilon)} & \mathbf{h}_X(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{h}_{e_X}(e)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{h}_{e_X}(Y)} \\ \mathbf{h}_X(e) & \xrightarrow[\mathbf{h}_X(\varepsilon)]{} & \mathbf{h}_X(Y) \end{array}$$

(cf. 1.1.2) montre que, dans l'ensemble $\mathbf{h}_X(Y)$, l'application $\mathbf{h}_{e_X}(Y)$ n'est autre que $s \mapsto \eta_X(Y)$ transformant tout élément en l'élément neutre. On vérifie alors que le fait que $\eta_X(Y)$ soit élément neutre de $\gamma_X(Y)$ pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$ équivaut à dire que le morphisme composé

$$X \xrightarrow{(1_X, 1_X)} X \times X \xrightarrow{1_X \times e_X} X \times X \xrightarrow{c_X} X,$$

et l'analogue où on permute 1_X et e_X, sont tous deux *égaux* à 1_X.

(1.6.8) On pourrait bien entendu multiplier sans peine les exemples de structures algébriques dans les catégories. L'exemple des groupes a été traité avec assez de détails, mais par la suite nous laisserons généralement au lecteur le soin de développer des considérations analogues dans les exemples de structures algébriques que nous rencontrerons.

1.7. Morphismes fonctoriels représentables

(1.7.1) Etant donnée une catégorie $\boldsymbol{C}$ et un foncteur contravariant

$$F: \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$$

on appelle *sous-foncteur* de F un foncteur contravariant

$$G: \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$$

tel que pour tout objet $X \in \boldsymbol{C}$, on ait $G(X) \subset F(X)$ et que pour tout morphisme $u: X \to X'$, $G(u): G(X') \to G(X)$ coïncide avec $F(u)$ dans $G(X')$. Par exemple, si $w: X \to X'$ est un *monomorphisme* de $\boldsymbol{C}$, l'application

$$\mathbf{h}_w(Y): \mathrm{Hom}(Y, X) \to \mathrm{Hom}(Y, X')$$

est injective; si l'on identifie $\mathrm{Hom}(Y, X)$ à son image dans $\mathrm{Hom}(Y, X')$ par $\mathbf{h}_w$, $\mathbf{h}_X$ s'identifie à un sous-foncteur de $\mathbf{h}_{X'}$.

Si, pour tout objet $X \in \boldsymbol{C}$, $j(X)$ désigne l'injection canonique $G(X) \to F(X)$, il est clair que $j: G \to F$ est un morphisme fonctoriel.

(1.7.2) Considérons maintenant trois foncteurs contravariants F, G, H de $\boldsymbol{C}$ dans ***Ens***, et deux morphismes fonctoriels

$$g : G \to F, \quad h : H \to F.$$

Dans la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^\circ, \boldsymbol{Ens})$, le *produit fibré* $G \times_F H$ (pour les morphismes g et h) existe et se calcule «argument par argument»; autrement dit, pour tout $X \in \boldsymbol{C}$, $(G \times_F H)(X)$ est le produit fibré d'ensembles $G(X) \times_{F(X)} H(X)$ pour les applications $g(X) : G(X) \to F(X)$ et $h(X) : H(X) \to F(X)$; et pour tout morphisme $u : X \to Y$ de $\boldsymbol{C}$, $(G \times_F H)(u)$ est la restriction à $G(Y) \times_{F(Y)} H(Y)$ de l'application $G(u) \times H(u)$ de $G(Y) \times H(Y)$ dans $G(X) \times H(X)$. La vérification du fait que l'on obtient bien ainsi un produit fibré au sens de (1.2.2) est immédiate.

Si G est un sous-foncteur de F, $j : G \to F$ le morphisme fonctoriel d'injection, alors $G \times_F H$ s'identifie à un sous-foncteur de H et $j_{(H)} : G \times_F H \to H$ (notation de (1.3.1)) au morphisme fonctoriel d'injection.

(1.7.3) Supposons que dans (1.7.2) F, G, H soient trois foncteurs *représentables*: $F = \mathbf{h}_S$, $G = \mathbf{h}_X$, $H = \mathbf{h}_Y$; alors (1.1.7), on a nécessairement $g = \mathbf{h}_u$ et $h = \mathbf{h}_v$, où $u : X \to S$ et $v : Y \to S$ sont deux morphismes de $\boldsymbol{C}$. Pour que le produit fibré $G \times_F H$ soit *représentable*, il faut et il suffit que le *produit fibré* $X \times_S Y$ (pour u et v) existe dans $\boldsymbol{C}$, et alors $G \times_F H$ est *isomorphe* à $\mathbf{h}_{X \times_S Y}$, comme il résulte de (1.7.2) et de (1.7.1).

(1.7.4) Les notations étant les mêmes que ci-dessus, on appelle *morphisme représentable* un morphisme fonctoriel

$$f : F \to G$$

ayant la propriété suivante: pour tout objet $X \in \boldsymbol{C}$ et tout morphisme fonctoriel $u : \mathbf{h}_X \to G$, le foncteur $F \times_G \mathbf{h}_X$ est *représentable*.

Proposition (1.7.5) (i) *Tout isomorphisme de foncteurs est représentable.*

(ii) *Si* $f : F \to G$ et $g : G \to H$ *sont deux morphismes fonctoriels représentables, il en est de même de* $g \circ f : F \to H$.

(iii) *Si* $f : F \to G$ *est représentable, il en est de même de tout morphisme fonctoriel* $f_{(H)} : F \times_G H \to H$ *déduit de* f *par changement de base* $H \to G$.

L'assertion (i) résulte de ce qu'un isomorphisme se transforme en isomorphisme par changement de base (1.3.1), et l'assertion (ii) de ce que $F \times_H \mathbf{h}_X \cong F \times_G (G \times_H \mathbf{h}_X)$; comme $G \times_H \mathbf{h}_X$ est isomorphe à un foncteur $\mathbf{h}_Y$, $F \times_G (G \times_H \mathbf{h}_X)$, isomorphe à $F \times_G \mathbf{h}_Y$, est représentable. De même, pour prouver (iii), il suffit de noter que $(F \times_G H) \times_H \mathbf{h}_X$ est isomorphe à $F \times_G \mathbf{h}_X$, donc est représentable.

Si $f: F \to G$ est un morphisme fonctoriel représentable, et si pour un morphisme fonctoriel $\mathbf{h}_X \to G$, le foncteur $F \times_G \mathbf{h}_X$ est représenté par l'objet $Y \in \boldsymbol{C}$ (donc est isomorphe à $\mathbf{h}_Y$), alors, pour tout morphisme $Z \to X$ de $\boldsymbol{C}$, le produit $Y \times_X Z$ existe, puisque le foncteur $\mathbf{h}_Y \times_{\mathbf{h}_X} \mathbf{h}_Z$ est représentable en vertu de (1.7.5, (iii)).

Proposition (1.7.6) *Soit* $G: \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ *un foncteur contravariant représentable. Pour qu'un morphisme fonctoriel* $F \to G$ *soit représentable, il faut que le foncteur* F *soit représentable; cette condition est suffisante si dans* $\boldsymbol{C}$ *les produits fibrés existent.*

La suffisance de la condition résulte de (1.7.3). D'autre part, si $G = \mathbf{h}_S$, à isomorphisme près, et si le morphisme $F \to G$ est représentable, le foncteur $F \times_G G = F \times_G \mathbf{h}_S$ (où $G \to G$ est l'identité) est représentable par définition; comme il s'identifie à F, cela achève la démonstration.

(1.7.7) Soit $\mathscr{P}$ un ensemble de morphismes de la catégorie $\boldsymbol{C}$; nous supposerons, d'une part que le composé d'un morphisme de $\mathscr{P}$ et d'un isomorphisme (à droite ou à gauche) appartient encore à $\mathscr{P}$, et d'autre part que $\mathscr{P}$ vérifie la condition suivante:

Si $f: A \to B$ appartient à $\mathscr{P}$, alors, pour tout morphisme $g: C \to B$, le produit fibré $A \times_B C$ existe et la projection $f_{(C)} = p_2 : A \times_B C \to C$ appartient à $\mathscr{P}$ (i. e., $\mathscr{P}$ est «stable par changement de base»).

Cela étant, nous dirons qu'un morphisme fonctoriel représentable $u: F \to G$, où F et G sont des foncteurs contravariants de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$, est *représentable par un morphisme de* $\mathscr{P}$ si, pour tout objet $X \in \boldsymbol{C}$ et tout morphisme fonctoriel $v: \mathbf{h}_X \to G$, le morphisme fonctoriel correspondant $F \times_G \mathbf{h}_X \to \mathbf{h}_X$, qui est de la forme $\mathbf{h}_w$, où $w: Y \to X$ est un morphisme de $\boldsymbol{C}$ (Y étant un objet représentant le foncteur $F \times_G \mathbf{h}_X$), est tel que *w appartienne à* $\mathscr{P}$ (condition qui ne dépend pas de l'objet Y choisi, puisque le composé d'un morphisme de $\mathscr{P}$ et d'un isomorphisme appartient encore à $\mathscr{P}$). Il est immédiat que tout morphisme fonctoriel déduit de *u* par changement de base (1.3.1) est encore représentable par des morphismes de $\mathscr{P}$.

(1.7.8) Soient $G: \boldsymbol{C}^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ un foncteur contravariant, F un sous-foncteur de G, $\mathscr{P}$ un ensemble de morphismes de $\boldsymbol{C}$ vérifiant les conditions de (1.7.7). Supposons que G soit *représentable* par un objet $X \in \boldsymbol{C}$. Alors, pour que le morphisme fonctoriel d'injection $j: F \to G$ soit représentable par un morphisme de $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que pour tout objet $S \in \boldsymbol{C}$ et tout morphisme fonctoriel $\mathbf{h}_S \to G$, le morphisme fonctoriel correspondant $j_S: F \times_G \mathbf{h}_S \to \mathbf{h}_S$ soit représentable par un morphisme de $\mathscr{P}$. La condition est en effet nécessaire par définition (1.7.7), et elle est suffisante puisqu'il suffit d'y faire $S = X$, d'où $\mathbf{h}_S = \mathbf{h}_X = G$.

On observera qu'un morphisme fonctoriel $\mathbf{h}_S \to \mathbf{h}_X$ est de la forme $\mathbf{h}_w$, pour un morphisme $w: S \to X$ bien déterminé, autrement dit un élément de G(S). Ceci permet de mettre le critère précédent sous une autre forme. Considérons en effet, pour un $S \in \boldsymbol{C}$ et un $w \in G(S)$ fixés, le foncteur suivant:

$$F_w : (\boldsymbol{C}_{/S})^\circ \to \boldsymbol{Ens}$$

où, pour tout morphisme $u: Z \to S$ (objet de $\boldsymbol{C}_{/S}$), on pose

$$F_w(u) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } wou = G(u)(w) \notin F(Z), \\ \{wou\} = \{G(u)(w)\} & \text{si } G(u)(w) \in F(Z) \end{cases}$$

de sorte que $F_w(u)$ est vide ou réduit à un seul élément; on a bien ainsi défini un foncteur contravariant dans $\boldsymbol{C}_{/S}$, car si $u': Z' \to S$ est un second objet de $\boldsymbol{C}_{/S}$ et $f: Z \to Z'$ un morphisme de $\boldsymbol{C}_{/S}$ (de sorte que $u'of = u$), on a $G(u) = G(f) \circ G(u')$; puisque F est un sous-foncteur de G, on a $G(f)(F(Z')) \subset F(Z)$; on prend donc $F_w(f)$ égal à l'application vide si $wou' \notin F(Z')$, et égal à la restriction de $G(f)$ à $\{wou'\}$ dans le cas contraire.

Cela étant, dire que l'objet $T \in \boldsymbol{C}$ représente le foncteur $F \times_G \mathbf{h}_S$ et que le morphisme $i: T \to S$ représente le morphisme fonctoriel $j_S : F \times_G \mathbf{h}_S \to \mathbf{h}_S$ *équivaut* à dire que l'objet $i \in \boldsymbol{C}_{/S}$ *représente le foncteur* F_w. En effet, pour tout $Z \in \boldsymbol{C}$, $(F \times_G \mathbf{h}_S)(Z)$ est l'ensemble des éléments de $F(Z) \subset G(Z) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(Z, X)$ qui sont de la forme wou, où $u \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(Z, S)$; dire que T représente $F \times_G \mathbf{h}_S$ et que i représente j_S signifie que pour tout $u \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(Z, S)$ tel que $wou \in F(Z)$, il existe un morphisme $g: Z \to T$ et un seul tel que $u = ig$, et réciproquement l'existence d'un tel g entraîne que wou appartient à F(Z). De même, dire que i représente F_w signifie que pour tout morphisme $u: Z \to S$, il n'existe aucun morphisme $g: Z \to T$ tel que $ig = u$ si $wou \notin F(Z)$, et il en existe un seul si $wou \in F(Z)$. Cela établit l'équivalence annoncée.

Remarque **(1.7.9)** Soit $\rho: S' \to S$ un *monomorphisme* dans la catégorie $\boldsymbol{C}$; la catégorie $\boldsymbol{C}_{/S'}$ peut alors être considérée comme une sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{C}_{/S}$, car l'application $g \mapsto \rho g$, où g parcourt l'ensemble des morphismes $T \to S'$ de $\boldsymbol{C}$, est injective par hypothèse.

Soit $F: (\boldsymbol{C}_{/S})^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ un foncteur contravariant; comme $\mathbf{h}_S(T) = \mathrm{Hom}_S(T, S)$ est un ensemble réduit à un élément pour $T \in \boldsymbol{C}_{/S}$, on a un *unique* morphisme fonctoriel $F \to \mathbf{h}_S$; le produit fibré $F_1 \times_{\mathbf{h}_S} F_2$ de deux tels foncteurs est donc identique au produit ordinaire $F_1 \times F_2$. Considérons en particulier le produit fibré

$$F' = F \times_{\mathbf{h}_S} \mathbf{h}_{S'} \tag{1.7.9.1}$$

et remarquons que, puisque $\rho: S' \to S$ est un monomorphisme, $\mathbf{h}_{S'}(T) = \mathrm{Hom}_S(T, S')$ est vide si T n'appartient pas à la sous-catégorie $\boldsymbol{C}_{/S'}$ de $\boldsymbol{C}_{/S}$, et réduit à un seul élément dans le cas contraire; on a donc $F'(T) = \emptyset$ dans le premier cas, $F'(T) = F(T)$ dans le second. Il revient donc au même de dire que F' est représentable, qu'on le considère comme foncteur de $(\boldsymbol{C}_{/S})^\circ$ dans ***Ens***, ou de $(\boldsymbol{C}_{/S'})^\circ$ dans ***Ens***; une autre proposition équivalente est de dire que F, restreint à la sous-catégorie $\boldsymbol{C}_{/S'}$ de $\boldsymbol{C}_{/S}$, est représentable.

§ 2. Compléments de topologie

2.1. Espaces irréductibles

Rappelons qu'un espace irréductible est un espace topologique non vide E tel que E ne soit pas réunion de deux ensembles fermés distincts de E; il revient au même de dire que tout ensemble ouvert non vide dans E est partout dense. Un espace irréductible est connexe. Dans un espace topologique quelconque E, un ensemble irréductible est une partie F de E qui est un espace irréductible pour la topologie induite; l'ensemble des parties irréductibles de E contenant un même point x admet un plus grand élément, dit *composante irréductible* de x, qui est une partie fermée de E. Pour les principales propriétés de ces notions, nous renvoyons à Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1.

(2.1.1) Tout sous-espace d'un espace topologique X qui est l'adhérence $\overline{\{x\}}$ d'un sous-espace réduit à un point est *irréductible*; nous exprimerons la relation $y \in \overline{\{x\}}$ (équivalente à $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$) en disant que *$y$ est une spécialisation de x*, ou que *x est une générisation de y*; c'est une *relation d'ordre* dans X. Les éléments maximaux pour cette relation d'ordre sont dits *points maximaux* de X. Lorsqu'il existe, dans un espace irréductible X, un point x tel que $X = \overline{\{x\}}$, on dit que x est un *point générique* de X; tout ouvert non vide de X contient alors x, et tout sous-espace contenant x admet x pour point générique. Un espace topologique peut être irréductible sans posséder de point générique, comme le montre l'exemple d'un ensemble infini Z, muni de la topologie pour laquelle les ensembles fermés sont les parties finies de Z et Z lui-même. Un espace topologique peut admettre plusieurs points génériques, comme le montre l'exemple d'un espace non vide X où $\emptyset$ et X sont les seuls ensembles ouverts, et où *tout* point de X est générique.

Il résulte de ces définitions que dans un espace topologique X, les *points maximaux* sont les *points génériques des composantes irréductibles* de X.

On dit qu'un espace topologique X est *sobre* si toute partie fermée irréductible de X admet *un point générique et un seul* (cf. (2.9)).

(2.1.2) Un *espace de Kolmogoroff* est un espace topologique X vérifiant l'axiome de séparation:

(T_0) Si $x \neq y$ sont deux points distincts quelconques de X, il existe un ensemble ouvert contenant l'un des points x, y et non l'autre.

Tout sous-espace d'un espace de Kolmogoroff est un espace de Kolmogoroff. Si un espace de Kolmogoroff irréductible X admet un point générique, il n'en admet qu'*un seul*, puisqu'un ouvert non vide contient tout point générique. Tout espace *sobre* (2.1.1) est un espace de Kolmogoroff.

Notons aussi que dans un espace de Kolmogoroff *quasi-compact* et *non vide* X, il existe des points x tels que $\{x\}$ soit fermé dans X, ou, comme on dit par abus de langage, des *points fermés*. Il suffit en effet de remarquer que dans un espace quasi-compact non vide, l'ensemble des parties fermées non vides est *inductif* pour la relation $\supset$, donc il existe des ensembles fermés non vides *minimaux*; mais dans un espace de Kolmogoroff X, un ensemble fermé non vide minimal M est nécessairement réduit à un seul point.

(2.1.3) Dans un espace irréductible X, un ensemble *localement fermé* A *d'intérieur non vide* est nécessairement *ouvert*. En effet, l'intérieur U de A, étant non vide, est dense dans X, donc *a fortiori* A est dense dans X, et on sait qu'un ensemble localement fermé est ouvert par rapport à son adhérence.

Proposition (2.1.4) *Soient* X *un espace topologique, x un point de* X, U *un voisinage ouvert de x n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors le complémentaire dans* X *de la réunion des composantes irréductibles de* X *ne contenant pas x est un voisinage ouvert* V *de x tel que tout voisinage ouvert de x contenu dans* V *soit connexe.*

Soient U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les composantes irréductibles de U ne contenant pas x; il résulte de Bourbaki, *loc. cit.*, prop. 7, que V est aussi le complémentaire dans U de la réunion des U_i, donc est ouvert. Soit alors W un voisinage ouvert de x contenu dans V. Les composantes irréductibles de W sont les intersections de W et des composantes irréductibles de U qui rencontrent W (Bourbaki, *loc. cit.*, prop. 7), donc ces composantes contiennent x; comme elles sont connexes, il en est de même de W.

Corollaire (2.1.5) *Soit* X *un espace topoloqique dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini.*

(i) *L'espace* X *est localement connexe.*

(ii) *Supposons en outre que toute partie fermée irréductible de* X *admette un point générique. Alors toute partie fermée* F *de* X, *stable par générisation* (2.1.1), *est ouverte dans* X.

L'assertion (i) est conséquence évidente de (2.1.4). Pour prouver (ii), soit $x \in F$ et soient z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des points génériques des composantes irréductibles Z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de X contenant x. Par hypothèse les z_i appartiennent à F, donc $Z_i \subset F$ puisque F est fermé. Comme par hypothèse il y a un voisinage U de x tel que U soit réunion des $U \cap Z_i$ (Bourbaki, *loc. cit.*, prop. 7), on a $U \subset F$; donc F est ouvert.

Proposition (2.1.6) *Soit* X *un espace topologique dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Les composantes irréductibles de* X *sont ouvertes.*

b) *Les composantes irréductibles de* X *sont identiques à ses composantes connexes.*

c) *Les composantes connexes de* X *sont irréductibles.*

d) *Deux composantes irréductibles distinctes de* X *ne se rencontrent pas.*

L'espace X *est alors l'espace* somme *de ses composantes irréductibles.*

La condition a) entraîne b), car il en résulte que les composantes irréductibles de X sont des ensembles à la fois ouverts et fermés, et par ailleurs un espace irréductible est connexe. Il est trivial que b) entraîne c); inversement, un ensemble fermé F contenant une composante connexe C de X et distinct de C ne peut être irréductible, car F n'étant pas connexe, est réunion de deux ensembles non vides disjoints à la fois ouverts et fermés dans F, donc fermés dans X; par suite c) entraîne b). On en conclut que c) entraîne d), deux composantes connexes distinctes étant sans point commun. Enfin, pour voir que d) entraîne a), on peut se borner, compte tenu de Bourbaki, *loc. cit.*, prop. 7, au cas où X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles; mais comme celles-ci sont fermées et sont deux à deux disjointes, elles sont ouvertes.

Lorsque les conditions de (2.1.6) sont remplies, on dit que X est *localement irréductible.*

Corollaire (2.1.7) *Soit* X *un espace topoloqigue dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Pour que* X *soit irréductible, il faut et il suffit que* X *soit connexe et non vide, et que deux composantes irréductibles distinctes de* X *ne se rencontrent pas.*

(2.1.8) On appelle *antifiltre* de parties fermées d'un espace topologique X un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties fermées de X tel que la réunion de deux ensembles de $\mathfrak{F}$ appartienne à $\mathfrak{F}$ et que toute partie fermée de X contenue dans un ensemble de $\mathfrak{F}$ appartienne à $\mathfrak{F}$.

Proposition (2.1.9) *Soient* X *un espace topologique dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini,* $\mathfrak{F}$ *un antifiltre de parties fermées de* X. *On suppose que si* Y *est une partie fermée de* X *telle que, pour tout* $y \in Y$, *il y ait un voisinage ouvert* V *de* y *dans* X *et un* $Y_y \in \mathfrak{F}$ *tels que* $V \cap Y = V \cap Y_y$, *alors on a* $Y \in \mathfrak{F}$. *Les conditions suivantes sont alors équivalentes*:

a) *Pour tout* $Y \in \mathfrak{F}$, $X - Y$ *est connexe.*

b) *Si* X′ *et* X″ *sont deux composantes irréductibles distinctes de* X, *il existe une suite* $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *de composantes irréductibles de* X *telles que* $X_0 = X'$, $X_n = X''$ *et que, pour* $1 \leqslant i \leqslant n$, *on ait* $X_{i-1} \cap X_i \notin \mathfrak{F}$.

Supposons b) vérifiée et prouvons que $U = X - Y$ est connexe pour tout $Y \in \mathfrak{F}$. Si U′ et U″ sont deux composantes irréductibles distinctes de U, il existe deux composantes irréductibles X′, X″ de X telles que $X' \cap U = U'$ et $X'' \cap U = U''$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 7); formons pour ces deux composantes X′, X″ une suite (X_i) ayant la propriété énoncée dans b), et posons $U_i = X_i \cap U$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$; alors $U_i \cap U_{i-1} \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, sinon on aurait $X_i \cap X_{i-1} \subset Y$, donc $X_i \cap X_{i-1} \in \mathfrak{F}$ contrairement à la définition des X_i; *a fortiori* $U_i \neq \emptyset$ pour tout i, donc *(loc. cit.)* U_i est une composante irréductible de U. Comme tout point de U appartient à une composante irréductible de U, et que ces composantes irréductibles sont connexes, on en conclut que U est connexe.

Montrons maintenant que a) entraîne b). Désignons par Y la réunion de la famille $(X_\alpha \cap X_\beta)$, où (X_α, X_β) parcourt l'ensemble des couples de composantes irréductibles *distinctes* de X telles que $X_\alpha \cap X_\beta \in \mathfrak{F}$. Pour tout point $y \in Y$, il y a un voisinage ouvert V de y dans X ne rencontrant qu'un nombre fini de composantes irréductibles de X; cela montre d'une part que Y est fermé et d'autre part que $V \cap Y$ est intersection de V et d'un ensemble de $\mathfrak{F}$; en vertu de l'hypothèse sur $\mathfrak{F}$, on a $Y \in \mathfrak{F}$, donc $U = X - Y$ est connexe; en outre (Bourbaki, *loc. cit.*, n° 1, *Remarque*) Y est *rare* dans X, donc X, adhérence de U, est *connexe*. Soient alors X′, X″ deux composantes irréductibles distinctes de X, U′, U″ leurs traces sur U, qui ne sont pas vides puisque U est dense dans X; ce sont donc des composantes irréductibles distinctes de U (*loc. cit.*, n° 1, prop. 7). Or, la réunion T de l'ensemble $\mathfrak{G}$ des composantes irréductibles W de U telles qu'il existe une suite $(U_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de composantes irréductibles de U pour laquelle $U_0 = U'$, $U_n = W$, $U_{i-1} \neq U_i$ et $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, est un ensemble *à la fois ouvert et fermé* dans U: en effet, les

composantes irréductibles de U forment une famille localement finie de parties fermées de U *(loc. cit.)*, donc T est évidemment fermé; d'autre part, si $x \in T$, il y a dans U un voisinage ouvert S de x qui ne rencontre qu'un nombre fini de composantes irréductibles V_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ de U, dont chacune contient x (2.1.4); on peut supposer que $V_1 \in \mathfrak{G}$, et comme $V_k \cap V_{k-1} \neq \emptyset$ pour $2 \leqslant k \leqslant r$, toutes les composantes irréductibles V_k appartiennent à $\mathfrak{G}$, donc $S \subset T$. On voit donc qu'il y a une suite $(U_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ ayant les propriétés précédentes et telles que $U_n = U''$; soit X_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ la composante irréductible $\overline{U}_i$ de X *(loc. cit.)*; on a $X_i \cap U = U_i$, et comme $U_{i-1} \neq U_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $X_{i-1} \neq X_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; si l'on avait $X_{i-1} \cap X_i \in \mathfrak{F}$ pour un i, on en déduirait $X_{i-1} \cap X_i \subset Y$ par définition de Y, d'où $U_{i-1} \cap U_i = \emptyset$, contrairement à l'hypothèse. Ceci achève la démontration de (2.1.9).

Corollaire (2.1.10) *Soit* X *un espace topologique dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Pour que* X *soit connexe, il faut et il suffit que si* X', X'' *sont deux composantes irréductibles distinctes de* X, *il existe une suite* $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *de composantes irréductibles de* X *telles que* $X_0 = X'$, $X_n = X''$ *et que, pour* $1 \leqslant i \leqslant n$, *on ait* $X_{i-1} \cap X_i \neq \emptyset$.

Il suffit d'appliquer (2.1.9) avec $\mathfrak{F} = \{\emptyset\}$.

Proposition (2.1.11) *Soit* X *un espace topologique, dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini, et dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique. Soit* Z *une partie fermée rare de* X *ayant la propriété suivante: pour tout* $x \in Z$, *si* T_x *désigne l'ensemble des générisations de* x *dans* X, *alors* $T_x - \{x\}$ *est connexe. Dans ces conditions, si* X *est connexe,* $X - Z$ *est connexe.*

On peut se limiter au cas où dans X toute partie fermée irréductible n'admet qu'*un seul* point générique. En effet, dans le cas contraire on considère l'espace $Y = X/R$, quotient de X par la relation d'équivalence $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Il résulte aussitôt de cette définition que tout ouvert de X est *saturé* pour R, donc la topologie de X est l'*image réciproque* de celle de Y par l'application canonique $\pi : X \to X/R$. Un ouvert dense dans X est de la forme $\pi^{-1}(U)$, où U est un ouvert dense dans Y, donc un fermé rare Z dans X est de la forme $\pi^{-1}(S)$, où $S = \pi(Z)$ est fermé rare dans Y, et il revient au même de dire que $X - Z$ est connexe ou que $Y - S$ est connexe. De même, $\pi(T_x)$ est l'ensemble des générisations de $\pi(x)$, et il est équivalent de dire que $T_x - \{x\}$ est connexe, ou que $\pi(T_x) - \{\pi(x)\}$ l'est. Enfin, par construction Y est un espace de Kolmogoroff, dont toute partie fermée irréductible admet *un point générique et un seul*; puisque pour tout $x \in X$ il y a un voisinage ouvert $\pi^{-1}(U)$ de x qui ne rencontre qu'un nombre fini de composantes irréductibles de X, U est un voisinage de $\pi(x)$ qui ne rencontre qu'un nombre fini de composantes irréductibles de Y, les composantes irréductibles de X étant les images

réciproques des composantes irréductibles de Y. Il revient donc au même de prouver la proposition pour X ou pour Y.

Supposons donc désormais que toute partie fermée irréductible de X admet un point générique et un seul. Avec les notations de l'énoncé, supposons que l'ouvert $U = X - Z$, partout dense dans X, soit réunion de deux ouverts non vides sans point commun U', U'', et soient X', X'' les adhérences respectives de U' et U'' dans X. Comme $X = \overline{U} = X' \cup X''$ et que X est connexe, on a $X' \cap X'' \neq \emptyset$, et il est clair que $X' \cap X'' \subset Z$. Soit x le point générique d'une composante irréductible de $X' \cap X''$. Par hypothèse, il y a un voisinage ouvert V de x dans X tel que $V \cap U'$ et $V \cap U''$ n'aient qu'un nombre fini de composantes irréductibles (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 7); comme x est adhérent à U' et à U'', il est nécessairement dans l'adhérence (dans X) d'une composante irréductible Z' de $V \cap U'$ et dans l'adhérence (dans X) d'une composante irréductible Z'' de $V \cap U''$. Mais comme $\overline{Z'}$ (resp. $\overline{Z''}$) est fermé et irréductible dans X, il possède un point générique z' (resp. z''), et on a nécessairement $z' \in U'$ et $z'' \in U''$. Ceci prouve que les intersections de $T_x - \{x\}$ avec U' et U'' sont non vides. Mais par définition, on a $(X' \cap X'') \cap (T_x - \{x\}) = \emptyset$, puisque x ne peut avoir dans $X' \cap X''$ aucune générisation autre que lui-même. Donc les intersections de X' et X'' avec $T_x - \{x\}$ sont des fermés non vides disjoints dans $T_x - \{x\}$, dont la réunion est $T_x - \{x\}$; or cela contredit l'hypothèse que $T_x - \{x\}$ est connexe.

(2.1.12) Soient X, Y deux espaces topologiques, f une application continue de X dans Y; il est clair que si X admet un point générique x, $f(x)$ est point générique de $f(X)$, donc aussi de $\overline{f(X)}$; si $f(X)$ est dense dans Y et si Y n'admet qu'un seul point générique y, on a donc nécessairement $f(x) = y$. On dit que X *domine* Y (pour f), ou que l'application f est *dominante* lorsque $f(X)$ est dense dans Y.

Proposition (2.1.13) *Soient* X, Y *deux espaces topologiques,* $f : X \to Y$ *une application continue. On suppose que* Y *est irréductible et possède un seul point générique y, et que toute composante irréductible de* X *possède au moins un point générique. Alors l'application* $Z \mapsto Z \cap f^{-1}(y)$ *est une bijection de l'ensemble des composantes irréductibles de* X *rencontrant* $f^{-1}(y)$ (ou, ce qui revient au même, *dominant* Y) *sur l'ensemble des composantes irréductibles de* $f^{-1}(y)$, *les points génériques de* Z *étant identiques à ceux de* $Z \cap f^{-1}(y)$.

En effet, si une composante irréductible Z de Y rencontre $f^{-1}(y)$, tout point générique z de Z appartient à $f^{-1}(y)$ (2.1.12), et $Z \cap f^{-1}(y)$, étant l'adhérence de $\{z\}$ dans $f^{-1}(y)$, est irréductible et admet z pour point générique; en outre, toute partie fermée irréductible de $f^{-1}(y)$

est nécessairement contenue dans une composante irréductible Z de X, donc dans $Z \cap f^{-1}(y)$. Cela prouve la proposition.

Proposition (2.1.14) *Soient* X, X' *deux espaces topologiques,* $f: X' \to X$ *une application continue. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées*:

(i) *f est surjective et ouverte* (resp. *telle que l'espace topologique* X *s'identifie canoniquement au quotient de* X′ *par la relation d'équivalence définie par f*).

(ii) *Pour tout* $x \in X$, $f^{-1}(x)$ *est irréductible* (resp. *connexe*).

Alors, pour que X′ *soit irréductible* (resp. *connexe*), *il faut et il suffit que* X *le soit.*

L'assertion relative à la connexité n'est autre que Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I, 4e éd., § 11, n° 3, prop. 7. Prouvons l'assertion relative à l'irréductibilité; la condition étant trivialement nécessaire puisque f est surjective, prouvons qu'elle est suffisante. Soient donc X'_1, X'_2 deux parties fermées de X′ telles que $X' = X'_1 \cup X'_2$ et désignons par X_i $(i = 1,2)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $f^{-1}(x) \subset X'_i$; on a donc $X_i = X - f(X' - X'_i)$, et comme f est ouverte, on en conclut que X_i est une partie *fermée* de X $(i = 1,2)$. D'autre part, pour tout $x \in X$, $f^{-1}(x)$ est irréductible par hypothèse et est réunion des deux parties fermées $X'_1 \cap f^{-1}(x)$ et $X'_2 \cap f^{-1}(x)$; l'une de ces deux parties doit donc être égale à $f^{-1}(x)$, ce qui signifie que l'on doit avoir $x \in X_1$ ou $x \in X_2$; on a donc $X = X_1 \cup X_2$, et comme par hypothèse X est irréductible, on en déduit $X = X_1$ ou $X = X_2$, donc $X' = X'_1$ ou $X' = X'_2$.

Remarque **(2.1.15)** Si l'on remplace l'hypothèse «f ouverte» par «f fermée» (ce qui entraîne pourtant que la topologie de X est quotient de celle de X′ par la relation d'équivalence définie par f) il peut se faire que X et toutes les fibres $f^{-1}(x)$ soient irréductibles sans que X′ le soit. *Par exemple (cf. chap. I et II), soient k un corps algébriquement clos, X la droite affine sur k, P la droite projective sur k, $S = X \times_k P$, $p: S \to X$, $q: S \to P$ les projections: soient x_0 un point fermé de X, t_0 un point fermé de P, et désignons par X′ le sous-schéma réduit de S ayant pour espace sous-jacent l'ensemble fermé $p^{-1}(x_0) \cup q^{-1}(t_0)$; si l'on prend pour f la restriction de p à X′, f est un morphisme propre, donc fermé, mais X′ n'est pas irréductible, bien que les $f^{-1}(x)$ soient réduits à un point ou isomorphes à P, donc irréductibles.

De même, si l'on suppose seulement f surjectif, mais non que la topologie de X soit égale au quotient de celle de X′ par la relation d'équivalence définie par f, il peut se faire que X et toutes les fibres $f^{-1}(x)$ soient irréductibles (donc connexes), sans que X′ soit connexe: il suffit de prendre X et x_0 comme ci-dessus, et pour X′ l'espace somme de $\{x_0\}$ et du sous-espace ouvert $X - \{x_0\}$, f étant la bijection canonique. *

2.2. Espaces localement noethériens

Nous ne reviendrons pas sur la définition et les principales propriétés des espaces *noethériens* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 2).

(2.2.1) On dit qu'un espace topologique X est *localement noethérien* si tout $x \in X$ admet un voisinage dans X qui est un sous-espace *noethérien* et *a fortiori* quasi-compact. Tout sous-espace d'un espace localement noethérien est localement noethérien. Inversement, si (X_α) est un recouvrement *localement fini* d'un espace topologique X tel que les sous-espaces X_α soient localement noethériens, X est localement noethérien.

(2.2.2) Puisqu'un espace noethérien n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, il résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 7, que l'ensemble des composantes irréductibles d'un espace localement noethérien est *localement fini*; les résultats (2.1.5) à (2.1.11) sont donc en particulier applicables aux espaces localement noethériens.

(2.2.3) On notera qu'un espace de Kolmogoroff localement noethérien non vide X ne contient pas nécessairement de *point fermé*: un exemple en est fourni par l'ensemble **N** des entiers $\geqslant 0$, où on prend comme ensembles fermés l'ensemble vide et tous les intervalles $[n, +\infty[$ pour $n \geqslant 0$.

2.3. Ensembles quasi-constructibles et ensembles constructibles

Définition (2.3.1) *On dit qu'une partie* Z *d'un espace topologique* X *est rétrocompacte dans* X *si, pour tout ouvert quasi-compact* U *de* X, $Z \cap U$ *est quasi-compact.*

Une partie *fermée* de X est rétrocompacte dans X, mais une partie quasi-compacte non fermée de X n'est pas nécessairement rétrocompacte. Si X est quasi-compact, toute partie ouverte rétrocompacte dans X est quasi-compacte. Il est clair que toute réunion *finie* d'ensembles rétrocompacts dans X est rétrocompacte dans X, toute réunion finie d'ensembles quasi-compacts étant quasi-compacte. Toute intersection finie d'*ouverts* rétrocompacts dans X est un ouvert rétrocompact dans X. Dans un espace *localement noethérien* X, tout ensemble quasi-compact est un sous-espace noethérien, et par suite *toute partie de* X est rétrocompacte dans X.

Définition (2.3.2) *Etant donné un espace topologique* X, *on dit qu'une partie de* X *est globalement quasi-constructible* (resp. *globalement constructible*) *si elle appartient au plus petit ensemble* $\mathfrak{F}$ *de parties de* X

contenant toutes les parties ouvertes (resp. *toutes les parties ouvertes rétrocompactes*) *de* X *et stable par intersection finie et passage aux complémentaires* (ce qui implique que $\mathfrak{F}$ est aussi stable par *réunion finie*).

Il est clair que toute partie globalement constructible de X est globalement quasi-constructible; la réciproque est vraie si X est *localement noethérien*.

Proposition (2.3.3) *Pour qu'une partie de* X *soit globalement quasi-constructible* (resp. *globalement constructible*), *il faut et il suffit qu'elle soit réunion finie d'ensembles de la forme* $U \cap \complement V$, *où* U *et* V *sont des ouverts* (resp. *des ouverts rétrocompacts*) *de* X.

Il est clair que la condition est suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, considérons l'ensemble $\mathfrak{G}$ des réunions finies d'ensembles de la forme $U \cap \complement V$, où U et V sont ouverts (resp. ouverts rétrocompacts). Il suffit, puisque $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$, de montrer que tout complémentaire d'un ensemble de $\mathfrak{G}$ appartient à $\mathfrak{G}$, car cela prouvera que $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ par définition de $\mathfrak{F}$. Soit donc $Z = \bigcup_{i \in 1} (U_i \cap \complement V_i)$, où I est fini, U_i et V_i ouverts (resp. ouverts rétrocompacts) dans X; on a $\complement Z = \bigcap_{i \in 1} (V_i \cup \complement U_i)$, donc $\complement Z$ est réunion finie d'ensembles dont chacun est intersection d'un certain nombre des V_i et d'un certain nombre des $\complement U_i$, donc de la forme $V \cap \complement U$, où U est réunion d'un certain nombre des U_i et V intersection d'un certain nombre des V_i; la conclusion résulte de ce que l'ensemble des ouverts (resp. des ouverts rétrocompacts) de X est stable par réunion et intersection finies.

On peut dire encore que les parties globalement quasi-constructibles de X sont les *réunions finies de parties localement fermées de* X.

Corollaire (2.3.4) *Toute partie globalement constructible de* X *est rétrocompacte dans* X.

Il suffit de montrer que si U et V sont ouverts rétrocompacts dans X, $U \cap \complement V$ est rétrocompact dans X; or, si W est ouvert quasi-compact dans X, $W \cap U \cap \complement V$ est fermé dans l'espace quasi-compact $W \cap U$, donc est quasi-compact.

En particulier:

Corollaire (2.3.5) *Pour qu'une partie ouverte* U *de* X *soit globalement constructible, il faut et il suffit qu'elle soit rétrocompacte dans* X. *Pour qu'une partie fermée* F *de* X *soit globalement constructible, il faut et il suffit que l'ouvert* $\complement F$ *soit rétrocompact.*

(2.3.6) Un cas important est celui où toute partie ouverte quasi-compacte de X est rétrocompacte, autrement dit, où l'intersection de deux parties ouvertes quasicompactes de X est quasi-compacte (cf. **I**,

5.5.6). Lorsque X lui-même est quasi-compact, cela signifie que les parties ouvertes rétrocompactes dans X sont identiques aux parties ouvertes quasi-compactes de X, et les parties globalement constructibles de X aux réunions finies d'ensembles de la forme $U \cap \complement V$, où U et V sont ouverts quasi-compacts.

Proposition (2.3.7) *Soit* $f: X \to Y$ *une application continue. Pour toute partie globalement quasi-constructible* Z *de* Y, $f^{-1}(Z)$ *est une partie globalement quasi-constructible de* X.

Proposition (2.3.8) *Soient* X *un espace topologique,* U *une partie ouverte de* X.

(i) *Si* T *est une partie globalement constructible de* X, $T \cap U$ *est une partie globalement constructible de* U.

(ii) *Supposons en outre* U *rétrocompact dans* X. *Pour qu'une partie* Z *de* U *soit globalement constructible dans* X, *il faut et il suffit qu'elle soit globalement constructible dans* U.

(i) Utilisant (2.3.3), on est ramené à montrer que si T est ouvert rétrocompact dans X, $T \cap U$ est ouvert rétrocompact dans U, autrement dit, pour tout ouvert quasi-compact $W \subset U$, $T \cap U \cap W = T \cap W$ est quasi-compact, ce qui résulte aussitôt de l'hypothèse.

(ii) La condition étant nécessaire en vertu de (i), il reste à démontrer qu'elle est suffisante. Compte tenu de (2.3.3), il suffit de considérer le cas où Z est ouvert rétrocompact *dans* U, car il s'ensuivra alors que $U - Z$ est globalement constructible dans X, et si Z, Z' sont deux ouverts rétrocompacts *dans* U, $Z \cap (U - Z')$ sera bien globalement constructible dans X. Or, si W est ouvert quasi-compact dans X et Z ouvert rétrocompact dans U, on a $Z \cap W = Z \cap (W \cap U)$ et par hypothèse $W \cap U$ est ouvert quasi-compact dans U; donc $W \cap Z$ est bien quasi-compact, et par suite Z est ouvert rétrocompact dans X, et *a fortiori* globalement constructible dans X.

Corollaire (2.3.9) *Soient* X *un espace topologique,* $(U_i)_{i \in I}$ *un recouvrement fini de* X *formé d'ensembles ouverts rétrocompacts dans* X. *Pour qu'une partie* Z *de* X *soit globalement constructible dans* X, *il faut et il suffit que pour tout* $i \in I$, $Z \cap U_i$ *soit globalement constructible dans* U_i.

Définition (2.3.10) *Soit* X *un espace topologique. On dit qu'une partie* T *de* X *est quasi-constructible* (resp. *constructible*) *si, pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert* V *de* x *dans* X *tel que* $T \cap V$ *soit globalement quasi-constructible* (resp. *globalement constructible*) *dans* V.

Il résulte aussitôt de (2.3.7) que si $f: X \to Y$ est une application continue et Z une partie quasi-constructible de Y, $f^{-1}(Z)$ est une partie quasi-constructible de X. Il résulte de (2.3.7) et (2.3.8, (i)) que si V est un ouvert de X tel que $V \cap T$ soit globalement quasi-constructible

(resp. globalement constructible) dans V, alors, pour tout ouvert $W \subset V$, $W \cap T$ est globalement quasi-constructible (resp. globalement constructible) dans W; par suite, si T est constructible dans X, alors, pour tout ouvert U de X, $U \cap T$ est constructible dans U. On en conclut aisément que l'ensemble des parties quasi-constructibles (resp. constructibles) de X est stable par réunion finie, intersection finie et passage aux complémentaires.

Une partie constructible de X est quasi-constructible; la réciproque est vraie lorsque X est *localement noethérien.*

Proposition (2.3.11) *Soit* X *un espace topologique. Tout ensemble globalement quasi-constructible* (resp. *globalement constructible*) *dans* X *est quasi-constructible* (resp. *constructible*). *La réciproque est vraie si* X *est quasi-compact* (resp. *si* X *est quasi-compact et si sa topologie admet une base d'ouverts formée d'ensembles rétrocompacts dans* X).

Cela résulte aussitôt des définitions et de (2.3.9).

Corollaire (2.3.12) *Soit* X *un espace topologique dont la topologie admet une base formée d'ensembles rétrocompacts dans* X. *Alors toute partie* T *constructible dans* X *est rétrocompacte dans* X.

En effet, soit U un ensemble ouvert quasi-compact dans X; $T \cap U$ est constructible dans U, donc globalement constructible dans U en vertu de (2.3.11), et par suite quasi-compact en vertu de (2.3.4).

2.4. Ensembles globalement constructibles dans les espaces noethériens

(2.4.1) On a vu (2.3.3) que dans un espace noethérien X, les parties globalement constructibles dans X sont les *réunions finies de parties localement fermées* de X.

L'image réciproque d'un ensemble globalement constructible dans X par une application continue d'un espace noethérien X′ dans X est globalement constructible dans X′. Si Y est une partie globalement constructible d'un espace noethérien X, les parties de Y qui sont globalement constructibles en tant que sous-espaces de Y sont identiques à celles qui sont globalement constructibles en tant que sous-espaces de X.

Proposition (2.4.2) *Soient* X *un espace irréductible noethérien,* E *une partie globalement constructible de* X. *Pour que* E *soit partout dense dans* X, *il faut et il suffit que* E *contienne une partie ouverte non vide de* X.

La condition est évidemment suffisante, tout ensemble ouvert non vide étant dense dans X. Inversement, soit $E = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap F_i)$ une partie globalement constructible de X, les U_i étant ouverts non vides et les F_i

fermés dans X; on a donc $\overline{E} \subset \bigcup_i F_i$. Par suite, si $\overline{E} = X$, X est égal à l'un des F_i, donc $E \supset U_i$, ce qui achève la démonstration.

Lorsque X admet un point générique x (2.1.1), la condition de (2.4.2) équivaut à la relation $x \in E$.

Proposition (2.4.3) *Soit* X *un espace noethérien. Pour qu'une partie* E *de* X *soit globalement constructible, il faut et il suffit que, pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X, $E \cap Y$ *soit rare dans* Y *ou contienne une partie ouverte non vide de* Y.

La nécessité de la condition provient de ce que $E \cap Y$ doit être une partie globalement constructible de Y et de (2.4.2), car une partie non dense de Y est nécessairement rare dans l'espace irréductible Y (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 1). Pour prouver que la condition est suffisante, appliquons le principe de récurrence noethérienne (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 2, lemme 1) à l'ensemble $\mathfrak{F}$ des parties fermées Y de X telles que $Y \cap E$ soit globalement constructible (par rapport à Y ou par rapport à X, ce qui revient au même): on peut donc supposer que pour toute partie fermée $Y \neq X$ de X, $E \cap Y$ est globalement constructible. Supposons d'abord que X ne soit pas irréductible, et soient X_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ ses composantes irréductibles, nécessairement en nombre fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 2, prop. 10); par hypothèse, les $E \cap X_i$ sont globalement constructibles, donc aussi leur réunion E. Supposons ensuite que X soit irréductible; alors, par hypothèse, ou bien E est rare, donc $\overline{E} \neq X$ et $E = E \cap \overline{E}$ est globalement constructible; ou bien E contient un ouvert non vide U de X, donc est réunion de U et de $E \cap (X - U)$; mais $X - U$ est un ensemble fermé distinct de X, donc $E \cap (X - U)$ est globalement constructible; E lui-même est par suite globalement constructible, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (2.4.4) *Soient* X *un espace noethérien,* (E_α) *une famille filtrante croissante de parties globalement constructibles de* X, *telle que:*

1° X *est réunion de la famille* (E_α).

2° *Toute partie fermée irréductible de* X *est contenue dans l'adhérence d'un des* E_α.

Alors il existe un indice α *tel que* $X = E_\alpha$.

Lorsque toute partie fermée irréductible de X *admet un point générique, l'hypothèse* 2° *peut être supprimée.*

Appliquons le principe de récurrence noethérienne (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 2, lemme 1) à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées de X contenues dans l'un des E_α au moins; on peut donc supposer que toute partie fermée $Y \neq X$ de X est contenue dans un des E_α. La pro-

position est évidente si X n'est pas irréductible, car chacune des composantes irréductibles X_i de X ($1 \leqslant i \leqslant m$) est contenue dans un E_{α_i}, et il existe un E_α contenant tous les E_{α_i}. Supposons donc X irréductible. Par hypothèse, il existe β tel que $X = \overline{E}_\beta$, donc (2.4.2) E_β contient un ouvert non vide U de X. Mais alors l'ensemble fermé $X - U$ est contenu dans un E_γ, et il suffit de prendre E_α contenant E_β et E_γ. Lorsque toute partie fermée irréductible Y de X admet un point générique y, il existe α tel que $y \in E_\alpha$, donc $Y = \overline{\{y\}} \subset \overline{E}_\alpha$, et la condition 2° est conséquence de 1°.

Proposition (2.4.5) *Soient* X *un espace noethérien,* x *un point de* X, E *une partie globalement constructible de* X. *Pour que* E *soit un voisinage de* x, *il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X *contenant* x, $E \cap Y$ *soit dense dans* Y (*s'il existe un point générique* y *de* Y, *cela signifie aussi* (2.4.2) *que* $y \in E$).

La condition est évidemment nécessaire; prouvons qu'elle est suffisante. Appliquant le principe de récurrence noethérienne à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées Y de X contenant x et telles que $E \cap Y$ soit un voisinage de x dans Y, on peut supposer que toute partie fermée $Y \neq X$ de X contenant x appartient à $\mathfrak{M}$. Si X n'est pas irréductible, chacune des composantes irréductibles X_i de X contenant x est distincte de X, donc $E \cap X_i$ est un voisinage de x par rapport à X_i; par suite, E est un voisinage de x dans la réunion des composantes irréductibles de X contenant x, et comme cette réunion est un voisinage de x dans X, il en est de même de E. Si X est irréductible, E est dense dans X par hypothèse, donc contient une partie ouverte non vide U de X (2.4.2); la proposition est alors évidente si $x \in U$; sinon, x est par hypothèse intérieur à $E \cap (X - U)$ par rapport à $X - U$, donc l'adhérence dans X de $X - E$ ne contient pas x, et le complémentaire de cette adhérence est un voisinage de x contenu dans E, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (2.4.6) *Soient* X *un espace noethérien,* E *une partie de* X. *Pour que* E *soit un ensemble ouvert dans* X, *il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X *rencontrant* E, $E \cap Y$ *contienne une partie ouverte non vide de* Y.

La condition est évidemment nécessaire; inversement, si elle est vérifiée, elle implique que E est globalement constructible en vertu de (2.4.3). En outre, (2.4.5) montre que E est alors voisinage de chacun de ses points, d'où la conclusion.

Lorsque X est sobre (2.1.1) *(ce qui est le cas pour les schémas)$_*$, le critère (2.4.6) est entraîné par le critère plus général suivant:

Proposition (2.4.7) *Soient* X *un espace noethérien sobre,* E *une partie de* X. *Pour que* E *soit ouverte dans* X, *il faut et il suffit que* E *soit stable par générisation, et que, pour toute partie ouverte* V *de* X *et toute partie irréductible* Y *fermée dans* V, *telles que* $V-Y \subset E$ *et que le point générique de* Y *appartienne à* E, $E \cap Y$ *contienne une partie ouverte non vide de* Y.

(On notera que le point générique de $\overline{Y}$ appartient nécessairement à V, donc est l'unique point générique de Y). La condition est évidemment nécessaire; prouvons qu'elle est suffisante. Soit U l'intérieur de E; l'ensemble fermé $X-U$ est réunion de ses composantes irréductibles, qui sont en nombre fini et fermées dans X. Si on avait $U \neq E$, l'hypothèse que E est stable par générisation entraînerait que le point générique z d'une des composantes irréductibles de $X-U$ appartiendrait à E. Or, z n'appartient qu'à une seule des composantes irréductibles de $X-U$; si T est la réunion des autres composantes irréductibles de $X-U$, $V=X-T$ est ouvert dans X, réunion de U et de l'ensemble $Y=\overline{\{z\}} \cap V$, qui est fermé dans V et irréductible. Par hypothèse, $E \cap Y$ contient une partie non vide W ouverte *dans* Y; on en conclut que $U \cup W$ est ouvert *dans* V, donc dans X, ce qui est absurde puisque U est l'intérieur de E.

2.5. Fonctions constructibles

Définition (2.5.1) *Soit* h *une application d'un espace topologique* X *dans un ensemble* T. *On dit que* h *est globalement constructible si* $h^{-1}(t)$ *est globalement constructible pour tout* $t \in T$, *et vide sauf pour un nombre fini de valeurs de* t; *pour toute partie* S *de* T, $h^{-1}(S)$ *est alors globalement constructible. On dit que* h *est constructible si tout* $x \in X$ *possède un voisinage ouvert* V *tel que* $h|V$ *soit globalement constructible.*

Toute fonction globalement constructible est constructible; la réciproque est vraie quand X est quasi-compact et admet une base formée d'ensembles ouverts rétrocompacts dans X (en particulier quand X est noethérien). Si $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont des applications globalement constructibles (resp. constructibles) de X dans $T_1, T_2, \ldots, T_n$ respectivement, et φ une application de $T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n$ dans T, $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ est globalement constructible (resp. constructible).

Proposition (2.5.2) *Soit* h *une application d'un espace noethérien* X *dans un ensemble* T. *Pour que* h *soit globalement constructible, il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X, *il existe une partie non vide* U *de* Y, *ouverte par rapport à* Y, *et dans laquelle* h *soit constante.*

La condition est nécessaire: en effet, par hypothèse, h ne prend dans Y qu'un nombre fini de valeurs t_i, et chacun des ensembles

$h^{-1}(t_i) \cap Y$ est globalement constructible dans Y (2.4.1); comme ils ne peuvent être tous des parties rares de l'espace Y, un d'eux au moins contient un ensemble ouvert non vide (2.4.3).

Pour voir que la condition est suffisante, appliquons le principe de récurrence noethérienne à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées Y de X telles que la restriction $h|Y$ soit globalement constructible; on peut donc supposer que pour toute partie fermée $Y \neq X$ de X, $h|Y$ est globalement constructible. Si X n'est pas irréductible, la restriction de h à chacune des composantes irréductibles X_i de X (en nombre fini) est donc globalement constructible, et il résulte alors aussitôt de la définition (2.5.1) que h est globalement constructible. Si X est irréductible, il existe par hypothèse une partie ouverte non vide U de X dans laquelle h est constante; d'autre part, la restriction de h à $X-U$ est globalement constructible par hypothèse, et il en résulte aussitôt que h est globalement constructible.

Corollaire (2.5.3) *Soit* X *un espace noethérien dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique. Si h est une application de* X *dans un ensemble* T *telle que, pour tout* $t \in T$, $h^{-1}(t)$ *soit globalement constructible, alors h est globalement constructible.*

En effet, si Y est une partie fermée irréductible de X et y son point générique, $Y \cap h^{-1}(h(y))$ est globalement constructible et contient y, donc (2.4.2) cet ensemble contient une partie ouverte non vide de Y, et il suffit d'appliquer (2.5.2).

Proposition (2.5.4) *Soient* X *un espace noethérien dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique, h une application globalement constructible de* X *dans un ensemble ordonné. Pour que h soit semi-continue supérieurement dans* X, *il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$ *et toute générisation* (2.1.1) x' *de* x, *on ait* $h(x') \leqslant h(x)$.

La fonction h ne prend qu'un nombre fini de valeurs; dire qu'elle est semi-continue supérieurement signifie donc que pour tout $x \in X$, l'ensemble E des $y \in X$ tels que $h(y) \leqslant h(x)$ est un voisinage de x. Par hypothèse, E est une partie globalement constructible de X; d'autre part, dire qu'une partie fermée irréductible Y de X contient x signifie que son point générique y est une générisation de x; la conclusion résulte alors de (2.4.5).

2.6. Parties très denses d'un espace topologique

(2.6.1) Dans ce qui suit, nous désignerons respectivement par $\mathfrak{O}(X)$, $\mathfrak{F}(X)$, $\mathfrak{Lf}(X)$, $\mathfrak{C}(X)$, $\mathfrak{Gc}(X)$, $\mathfrak{Oc}(X)$, $\mathfrak{Gqc}(X)$ l'ensemble des parties de X qui sont respectivement ouvertes, fermées, localement fermées,

constructibles, globalement constructibles, quasi-constructibles, globalement quasi-constructibles.

Proposition (2.6.2) *Soient* X *un espace topologique,* X_0 *une partie de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Pout toute partie localement fermée* $Z \neq \emptyset$ *de* X, *on a* $Z \cap X_0 \neq \emptyset$.

a') *Pour toute partie fermée* Z *de* X, *on a* $\overline{Z} = \overline{Z \cap X_0}$.

b) *Pour toute partie* $Z \neq \emptyset$ *de* X *quasi-constructible, on a* $Z \cap X_0 \neq \emptyset$.

b') *Pour toute partie quasi-constructible* Z *de* X, *on a* $\overline{Z} \subset \overline{Z \cap X_0}$ (autrement dit $Z \cap X_0$ est *dense* dans Z).

c) *L'application* $U \mapsto U \cap X_0$ *de* $\mathfrak{O}(X)$ *dans* $\mathfrak{O}(X_0)$ *est injective* (donc *bijective*).

c') *L'application* $F \mapsto F \cap X_0$ *de* $\mathfrak{F}(X)$ *dans* $\mathfrak{F}(X_0)$ *est injective* (donc *bijective*).

c'') *L'application* $Z \mapsto Z \cap X_0$ *de* $\mathfrak{Gqc}(X)$ *dans* $\mathfrak{Gqc}(X_0)$ *est injective* (donc *bijective*).

c''') *L'application* $Z \mapsto Z \cap X_0$ *de* $\mathfrak{Qc}(X)$ *dans* $\mathfrak{Qc}(X_0)$ *est injective.*

En outre, lorsque ces conditions sont vérifiées, l'application $Z \mapsto Z \cap X_0$ *de* $\mathfrak{Qc}(X)$ *dans* $\mathfrak{Qc}(X_0)$ *est bijective.*

Notons que les assertions de surjectivité dans c) et c') sont triviales; elles entraînent que toute partie localement fermée dans X_0 est trace sur X_0 d'une partie localement fermée dans X, donc l'application $\mathfrak{Gqc}(X) \to \mathfrak{Gqc}(X_0)$ définie dans c'') est aussi surjective.

Nous prouverons les implications

$$c''') \Rightarrow c'') \Rightarrow c') \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow b') \Rightarrow a') \Rightarrow a) \Rightarrow c''').$$

Les trois premières sont triviales. Pour voir que c) implique b), notons d'abord que c) entraîne que X_0 est *dense* dans X. Remplaçant X et X_0 par un ouvert convenable U de X et par $U \cap X_0$ respectivement, on peut donc se borner au cas où Z est localement fermée dans X, donc $Z = V \cap \complement W$, où V et W sont ouverts dans X; l'hypothèse $Z \neq \emptyset$ signifie que $V \not\subset W$, ou encore $V \cup W \neq W$. En vertu de c), on a donc $(V \cup W) \cap X_0 \neq W \cap X_0$, donc $V \cap X_0 \not\subset W$, et par suite $(V \cap \complement W) \cap X_0 \neq \emptyset$.

Pour voir que b) entraîne b'), il suffit d'appliquer b) à $Z \cap U$, où U est un voisinage ouvert arbitraire d'un point de Z. Comme $\overline{Z \cap X_0} \subset \overline{Z}$, il est trivial que b') implique a'). Pour montrer que a') entraîne a), remarquons que si Z est localement fermée dans X, on peut écrire $Z = F - F'$ où F et F' sont fermés dans X et $F' \subset F$; d'où $Z \cap X_0 = (F \cap X_0) - (F' \cap X_0)$. Si l'on avait $Z \cap X_0 = \emptyset$, on en déduirait $F \cap X_0 = F' \cap X_0$, donc $F = F'$ en vertu de a'), c'est-à-dire $Z = \emptyset$.

Pour voir que a) entraîne c'''), il suffit de montrer que si $Z \neq \emptyset$ est quasi-constructible, on a $Z \cap X_0 \neq \emptyset$: en effet, la relation $Z' \cap X_0$

$= Z'' \cap X_0$ est équivalente à $((Z' \cup Z'') - (Z' \cap Z'')) \cap X_0 = \emptyset$. Autrement dit, il suffit de prouver que a) entraîne b); en outre, remplaçant X et X_0 par un ouvert U de X et par $U \cap X_0$ respectivement, on est bien ramené au cas où Z est localement fermé dans X, d'où la conclusion.

Reste à montrer que l'application $\mathfrak{Q}c(X) \to \mathfrak{Q}c(X_0)$ est surjective. Soit donc Z_0 une partie quasi-constructible de X_0: il y a un recouvrement (V_α) de X_0 par des ouverts de X_0 tel que $Z_0 \cap V_\alpha$ soit globalement quasi-constructible dans V_α (et donc aussi dans X_0). En vertu de c), il y a pour tout α un seul ouvert U_α de X tel que $X_0 \cap U_\alpha = V_\alpha$, et en vertu de c'') un seul ensemble globalement quasi-constructible Z_α dans X tel que $Z_0 \cap V_\alpha = X_0 \cap Z_\alpha$. Si α et β sont deux indices quelconques, on a $Z_\beta \cap U_\alpha \cap X_0 = U_\alpha \cap Z_0 \cap V_\beta = V_\alpha \cap Z_0 \cap V_\beta = Z_\alpha \cap X_0 \cap V_\beta \subset Z_\alpha \cap X_0$; comme $Z_\beta \cap U_\alpha$ et Z_α sont globalement quasi-constructibles dans X, il résulte de c'')que $Z_\beta \cap U_\alpha \subset Z_\alpha$. Si l'on pose $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$, on a donc $Z \cap U_\alpha = Z_\alpha$ pour tout α; d'ailleurs, comme les V_α recouvrent X_0, il résulte de c) que les U_α recouvrent X, et l'on voit donc que Z est quasi-constructible dans X et $Z_0 = Z \cap X_0$.

Définition (2.6.3) *Lorsqu'une partie* X_0 *d'un espace topologique vérifie les conditions équivalentes de* (2.6.2), *on dit que* X_0 *est très dense dans* X.

On a déjà vu au cours de la démonstration de (2.6.2) que X_0 est alors *dense* dans X.

Corollaire (2.6.4) *Si* X_0 *est très dense dans* X *et* U *une partie ouverte de* X, $U \cap X_0$ *est très dense dans* U. *Inversement, si* (U_α) *est un recouvrement ouvert de* X *tel que* $U_\alpha \cap X_0$ *soit très dense dans* U_α *pour tout* α, *alors* X_0 *est très dense dans* X.

Comme toute partie localement fermée dans U est localement fermée dans X, la première assertion résulte du critère a) de (2.6.2); il en est de même de la seconde, car si $Z \neq \emptyset$ est localement fermée dans X, $Z \cap U_\alpha$ est localement fermée dans U_α pour tout α, et $Z \cap U_\alpha \neq \emptyset$ pour un α au moins.

2.7. Quasi-homéomorphismes

Proposition (2.7.1) *Soient* X_0, X *deux espaces topologiques,* $f: X_0 \to X$ *une application continue. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *L'application* $U \mapsto f^{-1}(U)$ *de* $\mathfrak{O}(X)$ *dans* $\mathfrak{O}(X_0)$ *est bijective.*

a') *L'application* $F \mapsto f^{-1}(F)$ *de* $\mathfrak{F}(X)$ *dans* $\mathfrak{F}(X_0)$ *est bijective.*

b) *La topologie de* X_0 *est image réciproque par f de celle de* X, *et* $f(X_0)$ *est très dense* (2.6.3) *dans* X.

Il est clair que a) et a') sont équivalentes, et a) implique que la topologie de X_0 est image réciproque par f de celle de X. D'autre part, si $f(X_0)$ n'est pas très dense dans X, il y a deux ouverts distincts U_1, U_2 de X tels que $U_1 \cap f(X_0) = U_2 \cap f(X_0)$, et par suite $f^{-1}(U_1) = f^{-1}(U_2)$, ce qui achève de montrer que a) entraîne b). Inversement, la condition b) implique que les applications $U \mapsto U \cap f(X_0)$ de $\mathfrak{O}(X)$ dans $\mathfrak{O}(f(X_0))$ et $V \mapsto f^{-1}(V)$ de $\mathfrak{O}(f(X_0))$ dans $\mathfrak{O}(X_0)$ sont bijectives, donc il en est de même de leur composée $U \mapsto f^{-1}(U)$.

Définition (2.7.2) *Lorsqu'une application continue $f: X_0 \to X$ vérifie les conditions équivalentes de* (2.7.1), *on dit que f est un quasi-homéomorphisme de X_0 dans* X.

En vertu de (2.7.1, b)), dire qu'une partie X_0 d'un espace topologique X est *très dense* dans X signifie donc que l'injection canonique $X_0 \to X$ est un *quasi-homéomorphisme.*

Corollaire (2.7.3) *Le composé de deux quasi-homéomorphismes est un quasi-homéomorphisme.*

Cela résulte aussitôt de (2.7.1, a)).

Corollaire (2.7.4) *Soient $f: X \to Y$ un quasi-homéomorphisme, Y' une partie quasi-constructible de* Y, $X' = f^{-1}(Y')$; *alors la restriction $f' = f|X' : X' \to Y'$ est un quasi-homéomorphisme.*

Il est clair en vertu de (2.7.1, b)) que la topologie induite sur X' par celle de X est l'image réciproque par f' de la topologie induite sur Y' par celle de Y. D'autre part, soit $Z \neq \emptyset$ une partie fermée *dans* Y', et $z \in Z$; il y a un voisinage ouvert U de z dans Y tel que $U \cap Y'$ soit réunion d'un nombre fini de parties Y'_i fermées *dans* U; si j est un indice tel que $z \in Y'_j$, $Z \cap Y'_j$ est donc fermé dans U. Puisque $f(X) \cap U$ est très dense dans U (2.6.4), $Z \cap Y'_j \cap f(X)$ n'est pas vide (2.7.2, a)), ni *a fortiori* $Z \cap f(X)$; mais comme $Z \subset Y'$, on a $Z \cap f(X) = Z \cap f'(X')$; le critère (2.6.2, a)) montre donc que $f'(X')$ est très dense dans Y', et l'on conclut à l'aide de (2.7.1, b)).

Corollaire (2.7.5) *Soient $f: X \to Y$ une application continue, (V_α) un recouvrement ouvert de* Y. *Si, pour tout α, la restriction $f^{-1}(V_\alpha) \to V_\alpha$ de f est un quasi-homéomorphisme, alors f est un quasi-homéomorphisme.*

Cela résulte aussitôt du critère (2.7.1, b)) et de (2.6.4).

Corollaire (2.7.6) *Soient $f: X \to Y$ un quasi-homéomorphisme, Y' une partie quasi-constructible de* Y, $X' = f^{-1}(Y')$. *Pour que* Y' *soit quasi-compact* (resp. *noethérien*, resp. *rétrocompact dans* Y), *il faut et il suffit que* X' *soit quasi-compact* (resp. *noethérien*, resp. *rétrocompact dans* X).

Démontrons d'abord les deux premières assertions; en vertu de (2.7.4), on peut se borner au cas où $Y' = Y$. Dire que X est quasi-compact (resp. noethérien) signifie que pour toute famille filtrante croissante (U_α) dans $\mathfrak{O}(X)$ ayant X pour plus grand élément (resp. pour toute famille filtrante croissante (U_α) dans $\mathfrak{O}(X)$), il existe γ tel que $U_\alpha = U_\gamma$ pour $\alpha \geqslant \gamma$. Comme $U \mapsto f^{-1}(U)$ est une bijection de $\mathfrak{O}(Y)$ sur $\mathfrak{O}(X)$, notre assertion résulte aussitôt de la remarque précédente.

Les ouverts quasi-compacts de X sont donc les ensembles de la forme $f^{-1}(U)$, où U est ouvert quasi-compact dans Y, en vertu de (2.7.1, a)) et de ce qui précède. Pour que X' soit rétrocompact dans X, il faut et il suffit alors que pour tout ouvert quasi-compact U dans Y, $f^{-1}(U) \cap X' = f^{-1}(U \cap Y')$ soit quasi-compact (2.3.1); la première partie de la démonstration montre que cela équivaut à dire que $U \cap Y'$ est quasi-compact pour tout ouvert quasi-compact U, c'est-à-dire que Y' est rétrocompact dans Y.

Proposition (2.7.7) *Soit* $f : X \to Y$ *un quasi-homéomorphisme. Alors l'application* $Z \mapsto f^{-1}(Z)$ *de* $\mathfrak{P}(Y)$ *dans* $\mathfrak{P}(X)$ *définit par restriction les bijections suivantes* (cf. (2.7.1) pour les notations):

$$\mathfrak{O}(Y) \simeq \mathfrak{O}(X)$$
$$\mathfrak{F}(Y) \simeq \mathfrak{F}(X)$$
$$\mathfrak{Cf}(Y) \simeq \mathfrak{Cf}(X)$$
$$\mathfrak{Gqc}(Y) \simeq \mathfrak{Gqc}(X)$$
$$\mathfrak{Qc}(Y) \simeq \mathfrak{Qc}(X)$$
$$\mathfrak{Gc}(Y) \simeq \mathfrak{Gc}(X)$$
$$\mathfrak{C}(Y) \simeq \mathfrak{C}(X).$$

Pour les deux premières, ce n'est autre que la définition (2.7.2); comme la topologie de X est l'image réciproque par f de celle de $f(X)$, les cinq dernières applications, où l'on remplace Y par $f(X)$, sont bijectives. On peut donc (par (2.7.1, b))) se borner au cas où X est un sous-espace très dense de Y, et le fait que les applications $\mathfrak{Cf}(Y) \to \mathfrak{Cf}(X)$, $\mathfrak{Gqc}(Y) \to \mathfrak{Gqc}(X)$, $\mathfrak{Qc}(Y) \to \mathfrak{Qc}(X)$ sont bijectives a déjà été prouvé (2.6.2). Toute partie constructible étant quasi-constructible, les applications $\mathfrak{C}(Y) \to \mathfrak{C}(X)$ et $\mathfrak{Gc}(Y) \to \mathfrak{Gc}(X)$ sont injectives; en outre, pour tout ouvert $U \subset Y$, la restriction $f^{-1}(U) \to U$ de f est un quasi-homéomorphisme (2.7.4), donc si l'on montre que $\mathfrak{Gc}(Y) \to \mathfrak{Gc}(X)$ est surjective, il en sera de même de $\mathfrak{C}(Y) \to \mathfrak{C}(X)$. Mais en vertu de (2.7.6), toute partie ouverte rétrocompacte Z dans X est de la forme $f^{-1}(T)$, où T est ouvert rétrocompact dans Y; cela prouve évidemment la surjectivité de $\mathfrak{Gc}(Y) \to \mathfrak{Gc}(X)$.

2.8. Espaces de Jacobson

Définition (2.8.1) *On dit qu'un espace topologique* X *est un espace de Jacobson si l'ensemble* X_0 *des points fermés de* X *est très dense dans* X (autrement dit, si l'injection canonique $X_0 \to X$ est un *quasi-homéomorphisme*).

Cela signifie donc (2.6.2) que toute partie localement fermée (ou seulement quasi-constructible) $Z \neq \emptyset$ de X contient un point fermé de X, ou encore que *toute partie fermée de* X *est l'adhérence de l'ensemble de ses points fermés.*

Proposition (2.8.2) *Soient* X *un espace de Jacobson,* Z *une partie quasi-constructible de* X; *alors le sous-espace* Z *de* X *est un espace de Jacobson, et pour qu'un point de* Z *soit fermé dans* Z, *il faut et il suffit qu'il soit fermé dans* X.

Si X_0 est l'ensemble des points fermés de X, $Z \cap X_0$ est très dense dans Z en vertu de (2.7.4) appliqué à l'injection $i : X_0 \to X$; comme l'ensemble Z_0 des points fermés de Z contient évidemment $Z \cap X_0$, il est *a fortiori* très dense dans Z, donc Z est un espace de Jacobson. Montrons maintenant qu'en fait on a $Z_0 = Z \cap X_0$; soit $x \in Z$ un point fermé dans Z; soit $\overline{\{x\}}$ son adhérence dans X; $\overline{\{x\}} \cap Z = \{x\}$ est donc une partie quasi-constructible de X, et comme son intersection avec X_0 est non vide (2.6.2), on a $x \in X_0$.

Proposition (2.8.3) *Soient* X *un espace topologique,* (U_α) *un recouvrement ouvert de* X. *Pour que* X *soit un espace de Jacobson, il faut et il suffit que chacun des sous-espaces* U_α *le soit.*

La condition est nécessaire en vertu de (2.8.2). Inversement, montrons d'abord que l'hypothèse que les U_α sont des espaces de Jacobson entraîne que pour qu'un point $x \in U_\alpha$ soit fermé dans X, il suffit qu'il soit fermé dans U_α. Il suffit en effet de voir que cette condition entraîne que x est aussi fermé dans chacun des U_β qui le contiennent; mais $U_\alpha \cap U_\beta$ est ouvert dans U_α, donc x est fermé dans $U_\alpha \cap U_\beta$, et en vertu de (2.8.2), x est aussi fermé dans U_β, ce qui achève la démonstration.

2.9. Espace sobre associé à un espace topologique

(2.9.1) Nous allons montrer que pour *tout* espace topologique X, on peut associer fonctoriellement à X un espace *sobre* ^{s}X (2.1.1). De façon précise, soit ***Top*** la catégorie des espaces topologiques, où les morphismes sont les applications continues; soit ***Sob*** la sous-catégorie *pleine* de ***Top*** formée des espaces sobres. Alors:

Proposition (2.9.2) *Le foncteur d'injection canonique*

$$j\colon \textbf{\textit{Sob}} \to \textbf{\textit{Top}}$$

qui à tout espace sobre fait correspondre le même espace considéré comme espace topologique, admet un adjoint à gauche (1.5.3)

$$(2.9.2.1) \qquad {}^{\mathrm{ad}}j\colon X \mapsto {}^{\mathrm{s}}X.$$

(2.9.2.2) Pour prouver (2.9.2), définissons d'abord l'ensemble ${}^{\mathrm{s}}X$ comme l'*ensemble des parties fermées irréductibles* de X (partie de $\mathfrak{P}(X)$). D'autre part, pour tout ouvert V de X, désignons par $\tilde{V}$ la partie de ${}^{\mathrm{s}}X$ formée des parties fermées irréductibles de X qui *rencontrent* V. On a évidemment $\tilde{\emptyset}=\emptyset$; en outre, pour toute famille (V_α) de parties ouvertes de X, on a

$$(2.9.2.3) \qquad \bigcup_\alpha \tilde{V}_\alpha = \Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big)^{\sim}$$

comme il résulte aussitôt de la définition; enfin, pour deux parties ouvertes V, W de X, on a

$$(2.9.2.4) \qquad \tilde{V} \cap \tilde{W} = (V \cap W)^{\sim}.$$

En effet, si E est une partie fermée irréductible de X qui rencontre à la fois V et W, $V \cap E$ et $W \cap E$ sont deux ouverts non vides dans l'espace irréductible E, donc $(V \cap E) \cap (W \cap E) = (V \cap W) \cap E$ n'est pas vide, la réciproque étant évidente. On déduit donc de (2.9.2.3) et (2.9.2.4) que lorsque V parcourt l'ensemble des ouverts de X, les ensembles $\tilde{V}$ forment les ouverts d'une *topologie* sur ${}^{\mathrm{s}}X$; nous noterons encore ${}^{\mathrm{s}}X$ l'espace topologique ainsi obtenu.

(2.9.2.5) (i) *L'application* $q : x \mapsto \overline{\{x\}}$ (*aussi notée* q_X), *est un quasi-homéomorphisme* (2.7.2) *de* X *dans* ${}^{\mathrm{s}}X$.

(ii) *L'espace* ${}^{\mathrm{s}}X$ *est sobre.*

(iii) *Si* X *est sobre, q est un homéomorphisme de* X *sur* ${}^{\mathrm{s}}X$.

Pour prouver (i), il suffit de montrer (2.7.1) que pour tout ouvert V de X, on a

$$(2.9.2.6) \qquad q^{-1}(\tilde{V}) = V,$$

car cela prouvera que $\tilde{V} \mapsto q^{-1}(\tilde{V})$ est une bijection de $\mathfrak{O}({}^{\mathrm{s}}X)$ sur $\mathfrak{O}(X)$. Or, cela est immédiat, car dire que l'ouvert V rencontre $\{x\}$ équivaut à dire que $x \in V$.

L'application $F \mapsto q^{-1}(F)$ est donc une bijection de l'ensemble des parties fermées de ${}^{\mathrm{s}}X$ sur l'ensemble des parties fermées de X; par définition des parties irréductibles d'un espace, $F \mapsto q^{-1}(F)$ est donc une bijection de l'ensemble des parties fermées *irréductibles* de ${}^{\mathrm{s}}X$ sur l'ensemble des parties fermées *irréductibles* de X.

Pour une partie fermée irréductible F de ${}^sX$, posons $y=q^{-1}(F)$, qui est donc un *point* de ${}^sX$, et montrons que $F=\overline{\{y\}}$ dans ${}^sX$. En effet, le complémentaire de $\overline{\{y\}}$ dans ${}^sX$ est le plus grand ouvert $\tilde{V}$ tel que $y\notin\tilde{V}$; en vertu de la définition de la topologie de ${}^sX$ et de (2.9.2.6), cela équivaut à $q^{-1}(F)\cap q^{-1}(\tilde{V})=\emptyset$, ou encore à $F\cap\tilde{V}=\emptyset$, d'où notre assertion. Ceci établit que y est le seul point de ${}^sX$ tel que $\overline{\{y\}}=F$, d'où la partie (ii) de l'énoncé.

Supposons enfin X sobre; alors $q: x\mapsto\overline{\{x\}}$ est par définition une bijection de X sur ${}^sX$, d'où l'assertion (iii).

(2.9.2.7) Pour achever de définir $X\mapsto{}^sX$ comme foncteur, il faut, pour toute application continue $f: X\to Y$, définir une application continue ${}^sf: {}^sX\to{}^sY$. Pour toute partie fermée irréductible E de X, nous poserons ${}^sf(E)=\overline{f(E)}$, qui est une partie fermée irréductible de Y puisque f est continue. En outre, pour tout ouvert W de Y, on a

$$({}^sf)^{-1}(\tilde{W})=(f^{-1}(W))^{\sim}. \tag{2.9.2.8}$$

En effet, dire que ${}^sf(E)\in\tilde{W}$ signifie que $\overline{f(E)}\cap W\neq\emptyset$, ce qui équivaut à $f(E)\cap W\neq\emptyset$ puisque W est ouvert, donc à $E\cap f^{-1}(W)\neq\emptyset$ et finalement à $E\in(f^{-1}(W))^{\sim}$. La relation (2.9.2.8) prouve la continuité de ${}^sf$, et pour une seconde application continue $g: Y\to Z$, il est clair que ${}^s(g\circ f)={}^sg\circ{}^sf$, car $g(f(E))$ est dense dans $g(\overline{f(E)})$. On a ainsi défini complètement le foncteur (2.9.2.1); il est clair en outre que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle q_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_Y} \\ {}^sX & \xrightarrow[{}^sf]{} & {}^sY \end{array} \tag{2.9.2.9}$$

est commutatif.

(2.9.2.10) Il est facile maintenant d'achever de prouver (2.9.2). Supposons en effet Y sobre; alors q_Y est un homéomorphisme, et $f\mapsto q_Y^{-1}\circ f$ est une application

$$\mathrm{Hom}_{Top}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{Sob}({}^sX,Y).$$

D'autre part, $g\mapsto g\circ q_X$ est une application

$$\mathrm{Hom}_{Sob}({}^sX,Y)\to\mathrm{Hom}_{Top}(X,Y).$$

Il suffit de voir que ces applications sont réciproques l'une de l'autre. Or la commutativité du diagramme (2.9.2.9) montre que $f=q_Y^{-1}\circ({}^sf\circ q_X)$; d'autre part, si g est une application continue de ${}^sX$ dans Y, E une partie fermée irréductible de X, notons z le point de ${}^sX$ égal à E, de sorte que

$E=q_X^{-1}(\overline{\{z\}})$; si $f=g\circ q_X$, on a donc $f(E)=g(\overline{\{z\}}\cap q_X(X))$; comme $\overline{\{z\}}\cap q_X(X)$ est dense dans $\overline{\{z\}}$ (2.6.2), on a $\overline{f(E)}=\overline{\{g(z)\}}$, et comme $g(z)$ est le seul point générique de $\overline{\{g(z)\}}$, on a bien $q_Y^{-1}\circ {}^s f=g$.

2.10. Applications ouvertes en un point

(2.10.1) Nous ne reviendrons pas sur la définition et les propriétés des applications *ouvertes* (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I, 4e éd., § 5, n° 1). Notons seulement ici que pour qu'une application continue $\psi : X\to Y$ soit ouverte, il faut et il suffit que, pour toute partie Z de Y, on ait

$$\psi^{-1}(\overline{Z})=\overline{\psi^{-1}(Z)}. \tag{2.10.1.1}$$

En effet, si ψ est ouverte, $\psi(X)$ est ouvert dans Y et on peut se borner, pour prouver (2.10.1.1) au cas où $\psi(X)=Y$; la relation est alors démontrée dans Bourbaki, *loc. cit.*, § 5, n° 4, prop. 7. Inversement, si cette relation a lieu, et si $U\subset X$ est ouvert, $\psi(U)$ est nécessairement ouvert dans Y: sans quoi, en posant $Z=Y-\psi(U)$, il existerait dans $\psi(U)$ un point z adhérent à Z, donc il y aurait dans U un point x tel que $x\in\psi^{-1}(\overline{Z})=\overline{\psi^{-1}(Z)}$, ce qui est absurde, car $U\cap\psi^{-1}(Z)=\emptyset$ et U est ouvert dans X.

On dit qu'une application continue $\psi : X\to Y$ est *ouverte en un point* $x\in X$ si l'image par ψ de *tout* voisinage de x dans X est un voisinage de $\psi(x)$ dans Y. On notera que cela *n'implique pas* qu'il existe un système fondamental de voisinages de x dont les images soient *ouvertes* dans Y.

Dire qu'une application continue $\psi : X\to Y$ est *ouverte* signifie qu'elle est *ouverte en tout point* de X.

Proposition (2.10.2) *Soient* X, Y *deux espaces topologiques,* $\psi : X\to Y$ *une application continue, x un point de* X, $y=\psi(x)$.

(i) *Si* ψ *est ouverte en x, alors, pour toute partie* Y′ *de* Y *contenant* $\psi(x)$, *la restriction* $\psi^{-1}(Y')\to Y'$ *de* ψ *à* Y′ *est ouverte au point x.*

(ii) *Supposons que* Y *soit réunion d'une famille localement finie de parties fermées* (Y_i) *et que pour tout i tel que* $\psi(x)\in Y_i$, *la restriction* $\psi^{-1}(Y_i)\to Y_i$ *de* ψ *soit ouverte au point x; alors* ψ *est ouverte au point x.*

(iii) *Soient* $\gamma : X'\to X$ *une application continue, x′ un point de* X′; *si l'application composée* $\psi\circ\gamma : X'\to Y$ *est ouverte au point x′,* ψ *est ouverte au point* $\gamma(x')$.

Si U est un voisinage de x, on a $\psi(U\cap\psi^{-1}(Y'))=\psi(U)\cap Y'$; d'où aussitôt (i). Pour prouver (ii), notons qu'il y a un voisinage W de $\psi(x)$ dans Y ne rencontrant que les parties fermées Y_i en nombre *fini* qui *contiennent* $\psi(x)$; donc W est réunion des $W\cap Y_i$ pour ces indices. Or, si U est un voisinage de x tel que $\psi(U)\cap Y_i$ soit un voisinage de $\psi(x)$ dans Y_i, il existe un voisinage $V\subset W$ de $\psi(x)$ dans Y tel que pour tous les i tels que $\psi(x)\in Y_i$, on ait $V\cap Y_i\subset\psi(U)\cap Y_i$, et comme la

réunion des $V \cap Y_i$ pour ces indices est V, on a $V \subset \psi(U)$, donc $\psi(U)$ est un voisinage de $\psi(x)$ dans Y. L'assertion (iii) est triviale.

Remarque **(2.10.3)** L'ensemble Z des points $x \in X$ où une application continue est ouverte *n'est pas nécessairement ouvert.* *Par exemple, soient K un corps, A l'anneau de polynômes $K[S,T]$, V le plan affine Spec(A), X le sous-schéma fermé de V «réunion de la droite X_1 définie par $T=0$ et de la droite X_2 définie par $S=0$», c'est-à-dire Spec(A/a), où $a = AST$; prenons $Y = X_2 = \mathrm{Spec}(A/AS)$ et pour f la projection correspondant à l'injection canonique $K[T] \to A/a$; alors on a $Z = X_2$, qui n'est pas ouvert dans X.*

Proposition (2.10.4) *Soient* X, Y *deux espaces topologiques,* $\psi : X \to Y$ *une application continue. Pour tout* $y \in Y$, *l'ensemble des* $x \in \psi^{-1}(y)$ *où* ψ *est ouvert est une partie fermée de* $\psi^{-1}(y)$.

En effet, supposons que ψ ne soit pas ouvert en un point $x \in \psi^{-1}(y)$; il existe alors un voisinage ouvert V de x dans X tel que $\psi(V)$ ne soit pas un voisinage de y; il en résulte que pour tout $x' \in V \cap \psi^{-1}(y)$, ψ n'est pas ouvert au point x'.

Remarque* **(2.10.5) Même si X et Y sont des schémas localement noethériens et f un morphisme *fini*, il peut se faire que f soit ouvert en tous les points d'une fibre $f^{-1}(y)$, sans qu'il existe un *voisinage* de $f^{-1}(y)$ en tous les points duquel f soit ouvert. Soient par exemple K un corps, A l'anneau de polynômes $K[T_1, T_2, T_3]$, $V = \mathrm{Spec}(A)$ l'espace affine à 3 dimensions sur K, $X = \mathrm{Spec}(A/a)$, où $a = bc$, avec $b = (T_3)$ et $c = (T_1) + (T_2 - T_3)$ dans A, de sorte que X est réunion du plan $X_1 = \mathrm{Spec}(A/b)$ («plan d'équation $T_3 = 0$») et de la droite $X_2 = \mathrm{Spec}(A/c)$ («droite d'équations $T_1 = 0$, $T_2 = T_3$») qui sont ses composantes irréductibles. Prenons $Y = X_1$ et soit $f : X \to Y$ la projection correspondant à l'injection canonique $K[T_1, T_2] \to A/a$; si y est le point commun à X_1 et X_2, $f^{-1}(y)$ est réduit à y et f est ouvert en ce point mais n'est ouvert en aucun point de X_2 dans un voisinage de y et distinct de y.*

Proposition (2.10.6) *Soit* $\psi : X \to Y$ *une application continue surjective et ouverte. Pour qu'une partie* Z *de* Y *soit localement fermée, il faut et il suffit que* $\psi^{-1}(Z)$ *soit localement fermée dans* X.

En effet, dire que Z est localement fermée dans Y signifie que $\overline{Z} - Z$ est fermée dans Y (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I, 4e éd., § 3, n° 3, prop. 5); comme Y est espace quotient de X (*loc. cit.*, § 5, n° 2, prop. 3), cela équivaut à dire que $\psi^{-1}(\overline{Z} - Z) = \psi^{-1}(\overline{Z}) - \psi^{-1}(Z)$ est fermée dans X; mais en vertu de (2.10.1.1) cela signifie aussi que $\overline{\psi^{-1}(Z)} - \psi^{-1}(Z)$ est fermée dans X, donc que $\psi^{-1}(Z)$ est localement fermée dans X.

§ 3. Compléments sur les faisceaux

3.1. Faisceaux à valeurs dans une catégorie

(3.1.1) La définition d'un *préfaisceau* $U \mapsto \mathscr{F}(U)$ sur un espace topologique X, à valeurs dans une catégorie $\boldsymbol{C}$ (G, I, 1.9) peut s'interpréter comme suit: désignons par $\boldsymbol{Ouv}_X$ la catégorie dont les objets sont les ouverts de X, et où, pour deux ouverts U, V de X, $\mathrm{Hom}(U,V)$ est vide si $U \not\subset V$, et est l'ensemble réduit à l'injection canonique si $U \subset V$ (la composition des morphismes étant la composition des injections canoniques). Alors on peut dire qu'un préfaisceau sur X, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, est un *foncteur contravariant* $\mathscr{F} : \boldsymbol{Ouv}_X \to \boldsymbol{C}$.

Nous dirons qu'un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, est un *faisceau* à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ s'il vérifie l'axiome suivant:

(F) *Pour tout objet* T *de* $\boldsymbol{C}$, $U \mapsto \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U))$ *est un faisceau d'ensembles.*

Si l'on explicite cette condition, on voit qu'elle signifie que pour tout recouvrement (U_α) d'un ouvert U de X par des ouverts U_α contenus dans U, si l'on note $\rho_\alpha : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U_\alpha)$, $\rho_{\alpha\beta} : \mathscr{F}(U_\alpha) \to \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ les morphismes de restriction, alors l'application qui, à tout $f \in \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U))$, fait correspondre la famille $(\rho_\alpha \circ f) \in \prod_\alpha \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U_\alpha))$ est une *bijection* de $\mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U))$ sur l'ensemble des (f_α) tels que $\rho_{\alpha\beta} \circ f_\alpha = \rho_{\beta\alpha} \circ f_\beta$ pour tout couple d'indices (α, β).

Lorsque les produits $\prod_\alpha \mathscr{F}(U_\alpha)$ et $\prod_{\alpha,\beta} \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ existent dans $\boldsymbol{C}$, la condition (F) s'exprime encore de la façon suivante: posons

$$r = (\rho_\alpha) : \mathscr{F}(U) \to \prod_\alpha \mathscr{F}(U_\alpha)$$

et soient

$$r' : \prod_\alpha \mathscr{F}(U_\alpha) \to \prod_{\alpha,\beta} \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \text{tel que} \quad \mathrm{pr}_{\alpha\beta} \circ r' = \rho_{\alpha\beta} \circ \mathrm{pr}_\alpha,$$

$$r'' : \prod_\alpha \mathscr{F}(U_\alpha) \to \prod_{\alpha,\beta} \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \text{tel que} \quad \mathrm{pr}_{\beta\alpha} \circ r'' = \rho_{\beta\alpha} \circ \mathrm{pr}_\beta.$$

Alors la condition (F) revient à dire que le diagramme

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{r} \prod_\alpha \mathscr{F}(U_\alpha) \underset{r''}{\overset{r'}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha,\beta} \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est *exact* (1.4.2).

(3.1.2) Supposons que $\boldsymbol{C}$ soit une catégorie définie par une «espèce de structure avec morphismes» Σ, les objets de $\boldsymbol{C}$ étant donc les ensembles (d'un univers donné) munis de structures d'espèce Σ et les morphismes ceux de Σ. Supposons en outre que dans $\boldsymbol{C}$, le *noyau* d'un couple de *morphismes* (u_1, u_2) existe et ait pour ensemble sous-jacent

le noyau du couple d'*applications* (u_1, u_2). Alors, la condition (F) entraîne que, considéré comme préfaisceau d'*ensembles*, $\mathscr{F}$ est encore un *faisceau*. En outre (avec les notations de (F)), pour qu'une application $u : T \to \mathscr{F}(U)$ soit un morphisme de $\boldsymbol{C}$, il faut et il suffit, en vertu de (F), que chaque application $\rho_\alpha \circ u : T \to \mathscr{F}(U_\alpha)$ soit un morphisme, ce qui signifie que la structure d'espèce Σ sur $\mathscr{F}(U)$ est *structure initiale* pour la famille de morphismes (ρ_α). Réciproquement, supposons qu'un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, soit un *faisceau d'ensembles* et vérifie la condition précédente; il satisfait alors à (F) et est donc un *faisceau à valeurs dans* $\boldsymbol{C}$.

(3.1.3) Lorsque Σ est l'espèce de structure de groupe ou d'anneau, le fait que le préfaisceau $U \mapsto \mathscr{F}(U)$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ est un faisceau d'*ensembles* entraîne *ipso facto* que c'est un faisceau *à valeurs dans* $\boldsymbol{C}$ (autrement dit, un faisceau de groupes ou d'anneaux au sens de (G)) [1]. Mais il n'en est plus de même lorsque par exemple $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des *anneaux topologiques* (avec pour morphismes les homomorphismes continus): un faisceau à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ est un faisceau d'anneaux $U \mapsto \mathscr{F}(U)$ tel que, pour tout ouvert U et tout recouvrement de U par des ouverts $U_\alpha \subset U$, la topologie de l'anneau $\mathscr{F}(U)$ soit *la moins fine* rendant continues les représentations $\mathscr{F}(U) \mapsto \mathscr{F}(U_\alpha)$. On dira dans ce cas que $U \mapsto \mathscr{F}(U)$ considéré comme faisceau d'anneaux (sans topologie) est *sous-jacent* au faisceau d'anneaux topologiques $U \mapsto \mathscr{F}(U)$. Les morphismes $u_V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}(V)$ (V ouvert arbitraire de X) de faisceaux d'anneaux topologiques sont donc des homomorphismes des faisceaux d'anneaux sous-jacents, tels que u_V soit *continu* pour tout ouvert $V \subset X$; pour les distinguer des homomorphismes quelconques des faisceaux d'anneaux sous-jacents, on les appellera homomorphismes *continus* de faisceaux d'anneaux topologiques. On a des définitions et conventions analogues pour les faisceaux d'espaces topologiques ou de groupes topologiques.

(3.1.4) Il est clair que pour toute catégorie $\boldsymbol{C}$, si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau (resp. un faisceau) sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ et U un ouvert de X, les $\mathscr{F}(V)$ pour les ouverts $V \subset U$ constituent un préfaisceau (resp. un faisceau) à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, que l'on appelle préfaisceau (resp. faisceau) *induit* par $\mathscr{F}$ sur U et que l'on note $\mathscr{F}|U$.

Pour tout morphisme $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de préfaisceaux sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, on désignera par $u|U$ le morphisme $\mathscr{F}|U \to \mathscr{G}|U$ formé des u_V pour $V \subset U$.

---

[1] Cela tient à ce que dans la catégorie $\boldsymbol{C}$, tout morphisme qui est une *bijection* (en tant qu'application d'ensembles) est un *isomorphisme*. Cela n'est plus vrai lorsque $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des espaces topologiques, par exemple.

(3.1.5) Supposons maintenant que la catégorie $\boldsymbol{C}$ admette des *limites inductives* (1.1.11); alors, pour tout préfaisceau (et en particulier tout faisceau) $\mathscr{F}$ sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ et tout $x \in X$, on peut définir la *fibre* $\mathscr{F}_x$ comme l'objet de $\boldsymbol{C}$ limite inductive des $\mathscr{F}(U)$ selon l'ensemble filtrant (pour $\supset$) des voisinages ouverts U de x dans X, et pour les morphismes $\rho_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$. Si $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de préfaisceaux à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, on définit pour tout $x \in X$ le morphisme $u_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ comme la limite inductive des $u_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ selon l'ensemble des voisinages ouverts de x; on définit ainsi $\mathscr{F}_x$ comme foncteur covariant en $\mathscr{F}$, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, pour tout $x \in X$.

Lorsque $\boldsymbol{C}$ est en outre définie par une espèce de structure avec morphismes Σ, on appelle encore *sections au-dessus de* U d'un *faisceau* $\mathscr{F}$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ les éléments de $\mathscr{F}(U)$, et on écrit alors $\Gamma(U,\mathscr{F})$ au lieu de $\mathscr{F}(U)$; pour $s \in \Gamma(U,\mathscr{F})$, V ouvert contenu dans U, on écrit $s|V$ au lieu de $\rho_V^U(s)$; pour tout $x \in U$, l'image canonique de s dans $\mathscr{F}_x$ est le *germe* de s au point x, noté s_x (*nous n'emploierons jamais la notation* $s(x)$ *dans ce sens*, cette notation étant réservée pour une autre notion relative aux faisceaux particuliers qui seront considérés dans ce Traité (4.1.9)).

Si alors $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de faisceaux à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, on écrira $u(s)$ au lieu de $u_V(s)$ pour tout $s \in \Gamma(V,\mathscr{F})$.

Si $\mathscr{F}$ est un *faisceau* de groupes commutatifs, ou d'anneaux, ou de modules, on dit que l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{F}_x \neq \{0\}$ est le *support* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$; cet ensemble n'est pas nécessairement fermé dans X. Pour toute section s de $\mathscr{F}$ au-dessus d'un ouvert U, le *support* de s est l'ensemble des $x \in U$ tels que $s_x \neq 0$; c'est un ensemble *fermé* dans U (certains auteurs appellent «support» de s (resp. $\mathscr{F}$) l'adhérence *dans* X du support de s (resp. $\mathscr{F}$) au sens précédent, adhérence que nous appellerons *support fermé de* s (resp. $\mathscr{F}$)).

3.2. Préfaisceaux sur une base d'ouverts

(3.2.1) Nous nous restreindrons dans ce qui suit à des catégories $\boldsymbol{C}$ où tout système projectif d'objets de $\boldsymbol{C}$ admet une *limite projective* (1.1.9). Soient X un espace topologique, $\mathfrak{B}$ une base d'ouverts pour la topologie de X. Nous appellerons *préfaisceau sur* $\mathfrak{B}$, *à valeurs dans* $\boldsymbol{C}$, une famille d'objets $\mathscr{F}(U) \in \boldsymbol{C}$, attachés à chaque $U \in \mathfrak{B}$, et une famille de morphismes $\rho_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ définis pour tout couple (U,V) d'éléments de $\mathfrak{B}$ tels que $U \subset V$, avec les conditions $\rho_U^U =$ identité et $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$ si U, V, W dans $\mathfrak{B}$ sont tels que $U \subset V \subset W$. On peut lui associer un *préfaisceau à valeurs dans* $\boldsymbol{C}$: $U \mapsto \mathscr{F}'(U)$ au sens ordinaire, en prenant pour tout ouvert U, $\mathscr{F}'(U) = \varprojlim \mathscr{F}(V)$, où V par-

court l'ensemble ordonné (pour $\subset$, *non filtrant* en général) des ensembles $V \in \mathfrak{B}$ tels que $V \subset U$, car les $\mathscr{F}(V)$ forment un système projectif pour les ρ_V^W ($V \subset W \subset U$, $V \in \mathfrak{B}$, $W \in \mathfrak{B}$). En effet, si U, U' sont deux ouverts de X tels que $U \subset U'$, on définit $\rho'^{U'}_U$ comme la limite projective (pour $V \subset U$) des morphismes canoniques $\mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(V)$, autrement dit l'unique morphisme $\mathscr{F}'(U') \to \mathscr{F}'(U)$, qui, composé avec les morphismes canoniques $\mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(V)$, donne les morphismes canoniques $\mathscr{F}'(U') \to \mathscr{F}(V)$; la vérification de la transitivité des $\rho'^{U'}_U$ est alors immédiate. De plus, si $U \in \mathfrak{B}$, le morphisme canonique $\mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U)$ est un isomorphisme, permettant d'identifier ces deux objets [1].

(3.2.2) Pour que le préfaisceau $\mathscr{F}'$ ainsi défini soit un *faisceau*, il faut et il suffit que le préfaisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{B}$ vérifie la condition:

(F_0) *Pour tout recouvrement* (U_α) *de* $U \in \mathfrak{B}$ *par des ensembles* $U_\alpha \in \mathfrak{B}$ *contenus dans* U, *et pour tout objet* $T \in \boldsymbol{C}$, *l'application qui, à tout* $f \in \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U))$ *fait correspondre la famille* $(\rho^U_{U_\alpha} \circ f) \in \prod_\alpha \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U_\alpha))$ *est une bijection de* $\mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U))$ *sur l'ensemble des* (f_α) *tels que* $\rho_V^{U_\alpha} \circ f_\alpha = \rho_V^{U_\beta} \circ f_\beta$ *pour tout couple d'indices* (α, β) *et tout* $V \in \mathfrak{B}$ *tel que* $V \subset U_\alpha \cap U_\beta$.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, considérons d'abord une seconde base $\mathfrak{B}'$ de la topologie de X, *contenue dans* $\mathfrak{B}$, et montrons que si $\mathscr{F}''$ désigne le préfaisceau déduit de la sous-famille $(\mathscr{F}(V))_{V \in \mathfrak{B}'}$, alors $\mathscr{F}''$ est *canoniquement isomorphisme* à $\mathscr{F}'$. En effet, tout d'abord la limite projective (pour $V \in \mathfrak{B}'$, $V \subset U$) des morphismes canoniques $\mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(V)$ est un morphisme $\mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}''(U)$ pour tout ouvert U. Si $U \in \mathfrak{B}$, ce morphisme est un isomorphisme, car par hypothèse les morphismes canoniques $\mathscr{F}''(U) \to \mathscr{F}(V)$ pour $V \in \mathfrak{B}'$, $V \subset U$, se factorisent en $\mathscr{F}''(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, et il est immédiat de voir que les composés des morphismes $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U)$ et $\mathscr{F}''(U) \to \mathscr{F}(U)$ ainsi définis sont les identités. Ceci étant, pour tout ouvert U, les morphismes $\mathscr{F}''(U) \to \mathscr{F}''(W) = \mathscr{F}(W)$ pour $W \in \mathfrak{B}$ et $W \subset U$ vérifient les conditions caractérisant la limite projective des $\mathscr{F}(W)$ ($W \in \mathfrak{B}$, $W \subset U$), ce qui démontre notre assertion, compte tenu de l'unicité d'une limite projective à un isomorphisme prés.

---

[1] Si X est un espace *noethérien*, on peut encore définir $\mathscr{F}'(U)$ et montrer que c'est un préfaisceau (au sens ordinaire) lorsqu'on suppose seulement que $\boldsymbol{C}$ admet des limites projectives pour les systèmes projectifs *finis*. En effet, si U est un ouvert quelconque de X, il y a un recouvrement *fini* (V_i) de U formé d'ensembles de $\mathfrak{B}$; pour tout couple (i,j) d'indices, soit (V_{ijk}) un recouvrement fini de $V_i \cap V_j$ formé d'ensembles de $\mathfrak{B}$. Soit I l'ensemble formé des i et des triplets (i,j,k), ordonné par les seules relations $i > (i,j,k)$, $j > (i,j,k)$; on prend alors pour $\mathscr{F}'(U)$ la limite projective du système des $\mathscr{F}(V_i)$ et $\mathscr{F}(V_{ijk})$; on vérifie aisément que cela ne dépend pas des recouvrements (V_i) et (V_{ijk}) et que $U \mapsto \mathscr{F}'(U)$ est un préfaisceau.

Cela posé, soient U un ouvert quelconque de X, (U_α) un recouvrement de U par des ouverts contenus dans U, et soit $\mathfrak{B}'$ la sous-famille de $\mathfrak{B}$ constituée par les ensembles de $\mathfrak{B}$ contenus dans un U_α au moins; il est clair que $\mathfrak{B}'$ est encore une base de la topologie de U, donc $\mathscr{F}'(U)$ (resp. $\mathscr{F}'(U_\alpha)$) est limite projective des $\mathscr{F}(V)$ pour $V \in \mathfrak{B}'$ et $V \subset U$ (resp. $V \subset U_\alpha$); l'axiome (F) se vérifie alors aussitôt en vertu de la définition de la limite projective.

Lorsque (F_0) est vérifié, nous dirons par abus de langage que le préfaisceau $\mathscr{F}$ sur la base $\mathfrak{B}$ est *un faisceau*.

(3.2.3) Soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux préfaisceaux sur la base $\mathfrak{B}$, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$; on définit un *morphisme* $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ comme une famille $(u_V)_{V \in \mathfrak{B}}$ de morphismes $u_V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}(V)$ satisfaisant aux conditions de compatibilité usuelles avec les morphismes de restriction ρ_V^W. Avec les notations de (3.2.1), on en déduit un morphisme $u' : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$ des préfaisceaux (ordinaires) correspondants en prenant pour u'_U la limite projective des u_V pour $V \in \mathfrak{B}$ et $V \subset U$; la vérification des conditions de compatibilité avec les $\rho'^{U'}_U$ découle du caractère fonctoriel de la limite projective.

(3.2.4) Si la catégorie $\boldsymbol{C}$ admet des limites inductives, et si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau sur la base $\mathfrak{B}$, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, pour tout $x \in X$ les voisinages de x appartenant à $\mathfrak{B}$ forment un ensemble cofinal (pour $\supset$) dans l'ensemble des voisinages de x, donc, si $\mathscr{F}'$ est le préfaisceau (ordinaire) correspondant à $\mathscr{F}$, la fibre $\mathscr{F}'_x$ est égale à $\varinjlim_{\mathfrak{B}} \mathscr{F}(V)$ selon l'ensemble des $V \in \mathfrak{B}$ contenant x. Si $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de préfaisceaux sur $\mathfrak{B}$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, $u' : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$ le morphisme correspondant de préfaisceaux ordinaires, u'_x est de même la limite inductive des morphismes $u_V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}(V)$ pour $V \in \mathfrak{B}$, $x \in V$.

(3.2.5) Revenons aux conditions générales de (3.2.1). Si $\mathscr{F}$ est un *faisceau* ordinaire à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, $\mathscr{F}_1$ le faisceau *sur* $\mathfrak{B}$ obtenu par restriction de $\mathscr{F}$ à $\mathfrak{B}$, le faisceau ordinaire $\mathscr{F}'_1$ obtenu à partir de $\mathscr{F}_1$ par le procédé de (3.2.1) est canoniquement isomorphe à $\mathscr{F}$, en vertu de la condition (F) et des propriétés d'unicité de la limite projective. On identifiera d'ordinaire $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'_1$.

Si $\mathscr{G}$ est un second faisceau (ordinaire) sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, et $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme, la remarque précédente montre que la donnée des $u_V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}(V)$ *pour les* $V \in \mathfrak{B}$ *seulement* détermine complètement u; inversement, il suffit, les u_V étant donnés pour $V \in \mathfrak{B}$, de vérifier le diagramme de commutativité avec les morphismes de restriction ρ_V^W pour $V \in \mathfrak{B}$, $W \in \mathfrak{B}$ et $V \subset W$, pour qu'il existe un morphisme u' et un seul de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ tel que $u'_V = u_V$ pour tout $V \in \mathfrak{B}$ (3.2.3).

(3.2.6) Supposons toujours que $\boldsymbol{C}$ admette des limites projectives. Alors la catégorie des *faisceaux sur* X *à valeurs dans* $\boldsymbol{C}$ admet aussi des *limites projectives*; si $(\mathscr{F}_\lambda)$ est un système projectif de faisceaux sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, les $\mathscr{F}(U) = \varprojlim_\lambda \mathscr{F}_\lambda(U)$ définissent en effet un préfaisceau à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, et la vérification de l'axiome (F) résulte de la transitivité des limites projectives; le fait que $\mathscr{F}$ est alors limite projective des $\mathscr{F}_\lambda$ est immédiat.

Lorsque $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des ensembles, pour tout système projectif $(\mathscr{H}_\lambda)$ tel que $\mathscr{H}_\lambda$ soit un *sous-faisceau* de $\mathscr{F}_\lambda$ pour tout λ, $\varprojlim \mathscr{H}_\lambda$ s'identifie canoniquement à un *sous-faisceau* de $\varprojlim \mathscr{F}_\lambda$. Si $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des groupes commutatifs, le foncteur covariant $\varprojlim \mathscr{F}_\lambda$ est *additif* et *exact à gauche*.

3.3. Recollement de faisceaux

(3.3.1) Supposons encore que la catégorie $\boldsymbol{C}$ admette des limites projectives. Soient X un espace topologique, $\mathfrak{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ un recouvrement ouvert de X, et pour chaque $\lambda \in L$, soit $\mathscr{F}_\lambda$ un faisceau sur U_λ, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$; pour tout couple d'indices (λ, μ), supposons donné un *isomorphisme* $\theta_{\lambda\mu} : \mathscr{F}_\mu | (U_\lambda \cap U_\mu) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_\lambda | (U_\lambda \cap U_\mu)$; en outre, supposons que pour tout triplet (λ, μ, ν), en désignant par $\theta'_{\lambda\mu}, \theta'_{\mu\nu}, \theta'_{\lambda\nu}$ les restrictions de $\theta_{\lambda\mu}, \theta_{\mu\nu}, \theta_{\lambda\nu}$ à $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$, on ait $\theta'_{\lambda\nu} = \theta'_{\lambda\mu} \circ \theta'_{\mu\nu}$ (*condition de recollement* pour les $\theta_{\lambda\mu}$). Alors, il existe un faisceau $\mathscr{F}$ sur X, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, et pour chaque λ un isomorphisme $\eta_\lambda : \mathscr{F} | U_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_\lambda$ tels que, pour tout couple (λ, μ), en désignant par η'_λ et η'_μ les restrictions de η_λ et η_μ à $U_\lambda \cap U_\mu$, on ait $\theta_{\lambda\mu} = \eta'_\lambda \circ \eta'^{-1}_\mu$; en outre, $\mathscr{F}$ et les η_λ sont déterminés à un isomorphisme unique près par ces conditions. L'unicité résulte en effet aussitôt de (3.2.5). Pour établir l'existence de $\mathscr{F}$, désignons par $\mathfrak{B}$ la base d'ouverts formée des ouverts contenus dans un U_λ au moins, et pour tout $U \in \mathfrak{B}$, choisissons (par la fonction τ de Hilbert) un des $\mathscr{F}_\lambda(U)$ pour un des λ tels que $U \subset U_\lambda$; si on désigne cet objet par $\mathscr{F}(U)$, les ρ_U^V pour $U \subset V$, $U \in \mathfrak{B}$, $V \in \mathfrak{B}$ se définissent de façon évidente (au moyen des $\theta_{\lambda\mu}$), et la condition de transitivité est conséquence de la condition de recollement; en outre, la vérification de (F_0) est immédiate, donc le préfaisceau sur $\mathfrak{B}$ ainsi défini est bien un faisceau, et on en déduit par le procédé général (3.2.1) un faisceau (ordinaire) encore noté $\mathscr{F}$ et qui répond à la question. On dit que $\mathscr{F}$ est obtenu par *recollement des* $\mathscr{F}_\lambda$ *au moyen des* $\theta_{\lambda\mu}$ et on identifiera d'ordinaire $\mathscr{F}_\lambda$ et $\mathscr{F} | U_\lambda$ au moyen de η_λ.

Il est clair que tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ peut être considéré comme obtenu par recollement des faisceaux $\mathscr{F}_\lambda = \mathscr{F} | U_\lambda$

(où (U_λ) est un recouvrement ouvert arbitraire de X), au moyen des isomorphismes $\theta_{\lambda\mu}$ réduits à l'identité.

(3.3.2) Avec les mêmes notations, soit $\mathscr{G}_\lambda$ un second faisceau sur U_λ (pour tout $\lambda \in L$) à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, et soit donné pour tout couple (λ, μ) un isomorphisme $\omega_{\lambda\mu} : \mathscr{G}_\mu|(U_\lambda \cap U_\mu) \simeq \mathscr{G}_\lambda|(U_\lambda \cap U_\mu)$, ces isomorphismes vérifiant la condition de recollement. Supposons enfin donné pour tout λ un morphisme $u_\lambda : \mathscr{F}_\lambda \to \mathscr{G}_\lambda$, et supposons que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_\mu|(U_\lambda \cap U_\mu) & \xrightarrow{u_\mu} & \mathscr{G}_\mu|(U_\lambda \cap U_\mu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{F}_\lambda|(U_\lambda \cap U_\mu) & \xrightarrow[u_\lambda]{} & \mathscr{G}_\lambda|(U_\lambda \cap U_\mu) \end{array} \tag{3.3.2.1}$$

soient commutatifs. Alors, si $\mathscr{G}$ est obtenu par recollement des $\mathscr{G}_\lambda$ au moyen des $\omega_{\lambda\mu}$, il existe un morphisme $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et un seul tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}|U_\lambda & \xrightarrow{u|U_\lambda} & \mathscr{G}|U_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{F}_\lambda & \xrightarrow[u_\lambda]{} & \mathscr{G}_\lambda \end{array}$$

soient commutatifs; cela résulte aussitôt de (3.2.3). La correspondance entre la famille (u_λ) et u est une bijection fonctorielle de la partie de $\prod_\lambda \mathrm{Hom}(\mathscr{F}_\lambda, \mathscr{G}_\lambda)$ vérifiant les conditions (3.3.2.1) sur $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.

(3.3.3) Avec les notations de (3.3.1), soit V un ouvert de X; il est immédiat que les restrictions à $V \cap U_\lambda \cap U_\mu$ des $\theta_{\lambda\mu}$ satisfont à la condition de recollement pour les faisceaux induits $\mathscr{F}_\lambda|(V \cap U_\lambda)$ et que le faisceau sur V obtenu par recollement de ces derniers s'identifie canoniquement à $\mathscr{F}|V$.

3.4. Images directes de préfaisceaux

(3.4.1) Soient X, Y deux espaces topologiques, $\psi : X \to Y$ une application continue. Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X à valeurs dans une catégorie $\boldsymbol{C}$; pour tout ouvert $U \subset Y$, soit $\mathscr{G}(U) = \mathscr{F}(\psi^{-1}(U))$, et si U, V sont deux parties ouvertes de Y telles que $U \subset V$, soit ρ_U^V le morphisme $\mathscr{F}(\psi^{-1}(V)) \to \mathscr{F}(\psi^{-1}(U))$; il est immédiat que les $\mathscr{G}(U)$ et les ρ_U^V définissent un *préfaisceau* sur Y à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, que l'on appelle l'*image directe de* $\mathscr{F}$ *par* ψ et que l'on note $\psi_*(\mathscr{F})$. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau, on vérifie aussitôt l'axiome (F) pour le préfaisceau $U \mapsto \mathscr{G}(U)$, donc $\psi_*(\mathscr{F})$ est un faisceau.

(3.4.2) Soient $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ deux préfaisceaux sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, et soit $u : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ un morphisme. Lorsque U parcourt

l'ensemble des parties ouverts de Y, la famille de morphismes $u_{\psi^{-1}(U)} : \mathscr{F}_1(\psi^{-1}(U)) \to \mathscr{F}_2(\psi^{-1}(U))$ satisfait aux conditions de compatibilité avec les morphismes de restriction, et définit par suite un morphisme $\psi_*(u) : \psi_*(\mathscr{F}_1) \to \psi_*(\mathscr{F}_2)$. Si $v : \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3$ est un morphisme de $\mathscr{F}_2$ dans un troisième préfaisceau sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, on a $\psi_*(v \circ u) = \psi_*(v) \circ \psi_*(u)$; autrement dit, $\psi_*(\mathscr{F})$ est un *foncteur covariant* en $\mathscr{F}$, de la catégorie des préfaisceaux (resp. faisceaux) sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, dans celle des préfaisceaux (resp. faisceaux) sur Y à valeurs dans $\boldsymbol{C}$.

(3.4.3) Soient Z un troisième espace topologique, $\psi' : Y \to Z$ une application continue, et soit $\psi'' = \psi' \circ \psi$. Il est clair que l'on a $\psi''_*(\mathscr{F}) = \psi'_*(\psi_*(\mathscr{F}))$ pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$; en outre, pour tout morphisme $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de tels préfaisceaux, on a $\psi''_*(u) = \psi'_*(\psi_*(u))$. En d'autres termes, ψ''_* est le *composé* des foncteurs ψ'_* et ψ_*, ce qu'on peut écrire

$$(\psi' \circ \psi)_* = \psi'_* \circ \psi_*.$$

En outre, pour tout ouvert U de Y, l'image par la restriction $\psi|\psi^{-1}(U)$ du préfaisceau induit $\mathscr{F}|\psi^{-1}(U)$ n'est autre que le préfaisceau induit $\psi_*(\mathscr{F})|U$.

(3.4.4) Supposons que la catégorie $\boldsymbol{C}$ admette des limites inductives, et soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$; pour tout $x \in X$, les morphismes $\Gamma(\psi^{-1}(U), \mathscr{F}) \to \mathscr{F}_x$ (U voisinage ouvert de $\psi(x)$ dans Y) forment un système inductif, qui donne par passage à la limite un morphisme $\psi_x : (\psi_*(\mathscr{F}))_{\psi(x)} \to \mathscr{F}_x$ des fibres; en général, ce morphisme n'est *ni injectif ni surjectif*. Il est fonctoriel; en effet, si $u : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ est un morphisme de préfaisceaux sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\psi_*(\mathscr{F}_1))_{\psi(x)} & \xrightarrow{\psi_x} & (\mathscr{F}_1)_x \\ \downarrow{\scriptstyle (\psi_*(u))_{\psi(x)}} & & \downarrow{\scriptstyle u_x} \\ (\psi_*(\mathscr{F}_2))_{\psi(x)} & \xrightarrow[\psi_x]{} & (\mathscr{F}_2)_x \end{array}$$

est commutatif. Si Z est un troisième espace topologique, $\psi' : Y \to Z$ une application continue, et $\psi'' = \psi' \circ \psi$, on a $\psi''_x = \psi_x \circ \psi'_{\psi(x)}$ pour $x \in X$.

(3.4.5) Sous les hypothèses de (3.4.4), supposons en outre que ψ soit un *homéomorphisme* de X sur le sous-espace $\psi(X)$ de Y. Alors, pour tout $x \in X$, ψ_x est un *isomorphisme*. Ceci s'applique en particulier à l'injection canonique j d'une partie X de Y dans Y.

(3.4.6) Supposons que $\boldsymbol{C}$ soit la catégorie des groupes, ou des anneaux, etc. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, de support S,

et si $y \notin \overline{\psi(S)}$, il résulte de la définition de $\psi_*(\mathscr{F})$ que $(\psi_*(\mathscr{F}))_y = \{0\}$, autrement dit le support de $\psi_*(\mathscr{F})$ est contenu dans $\overline{\psi(S)}$; mais il n'est pas nécessairement contenu dans $\psi(S)$. Sous les mêmes hypothèses, si j est l'injection canonique d'une partie X de Y dans Y, le faisceau $j_*(\mathscr{F})$ induit $\mathscr{F}$ sur X; si de plus X est *fermée* dans Y, $j_*(\mathscr{F})$ est le faisceau sur Y qui induit $\mathscr{F}$ sur X et 0 sur $Y - X$ (G, II, 2.9.2), mais il est en général distinct de ce dernier lorsqu'on suppose X localement fermée mais non fermée.

3.5. Images réciproques de préfaisceaux

(3.5.1) Sous les hypothèses de (3.4.1), si $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) est un préfaisceau sur X (resp. Y) à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, tout morphisme $u : \mathscr{G} \to \psi_*(\mathscr{F})$ de préfaisceaux sur Y s'appelle encore un ψ-*morphisme* de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$, et se note aussi $\mathscr{G} \to \mathscr{F}$. On désigne aussi par $\mathrm{Hom}_\psi(\mathscr{G},\mathscr{F})$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G},\psi_*(\mathscr{F}))$ des ψ-morphismes de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$. Pour tout couple (U, V), où U est un ouvert de X, V un ouvert de Y tel que $\psi(U) \subset V$, on a un morphisme $u_{U,V} : \mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(U)$ en composant le morphisme de restriction $\mathscr{F}(\psi^{-1}(V)) \to \mathscr{F}(U)$ et le morphisme $u_V : \mathscr{G}(V) \to \psi_*(\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(\psi^{-1}(V))$; il est immédiat que ces morphismes rendent commutatifs les diagrammes

(3.5.1.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}(V) & \xrightarrow{u_{U,V}} & \mathscr{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{G}(V') & \xrightarrow[u_{U',V'}]{} & \mathscr{F}(U') \end{array}$$

pour $U' \subset U$, $V' \subset V$, $\psi(U') \subset V'$. Inversement, la donnée d'une famille $(u_{U,V})$ de morphismes rendant commutatifs les diagrammes (3.5.1.1) définit un ψ-morphisme u, car il suffit de prendre $u_V = u_{\psi^{-1}(V),V}$.

Si la catégorie $\boldsymbol{C}$ admet des limites projectives, et si $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ sont des bases des topologies de X et Y respectivement, pour définir un ψ-morphisme u de *faisceaux*, on peut se borner à se donner les $u_{U,V}$ pour $U \in \mathfrak{B}$, $V \in \mathfrak{B}'$ et $\psi(U) \subset V$, vérifiant les conditions de compatibilité (3.5.1.1) pour U, U' dans $\mathfrak{B}$ et V, V' dans $\mathfrak{B}'$; il suffit en effet de définir u_W, pour tout ouvert $W \subset Y$, comme limite projective des $u_{U,V}$ pour $V \in \mathfrak{B}'$ et $V \subset W$, $U \in \mathfrak{B}$ et $\psi(U) \subset V$.

Lorsque la catégorie $\boldsymbol{C}$ admet des limites inductives, on a, pour tout $x \in X$, un morphisme $\mathscr{G}(V) \to \mathscr{F}(\psi^{-1}(V)) \to \mathscr{F}_x$ pour tout voisinage ouvert V de $\psi(x)$ dans Y, et ces morphismes forment un système inductif qui donne par passage à la limite un morphisme $\mathscr{G}_{\psi(x)} \to \mathscr{F}_x$.

(3.5.2) Sous les hypothèses de (3.4.3), soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ des préfaisceaux à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ sur X, Y, Z respectivement, et soient $u : \mathscr{G} \to \psi_*(\mathscr{F})$,

$v : \mathscr{H} \to \psi'_*(\mathscr{G})$ un ψ-morphisme et un ψ'-morphisme respectivement. On en déduit un ψ''-morphisme

$$w : \mathscr{H} \xrightarrow{v} \psi'_*(\mathscr{G}) \xrightarrow{\psi'_*(u)} \psi'_*(\psi_*(\mathscr{F})) = \psi''_*(\mathscr{F}),$$

que l'on appelle, par définition, le *composé* de u et de v. On peut donc considérer les couples $(X, \mathscr{F})$ formés d'un espace topologique X et d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur X (à valeurs dans $\boldsymbol{C}$) comme formant une *catégorie*, les morphismes étant les couples $(\psi, \theta) : (X, \mathscr{F}) \to (Y, \mathscr{G})$ formés d'une application continue $\psi : X \to Y$ et d'un ψ-morphisme $\theta : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$.

(3.5.3) Soient $\psi : X \to Y$ une application continue, $\mathscr{G}$ un *préfaisceau* sur Y à valeurs dans $\boldsymbol{C}$. Alors $\mathscr{F} \mapsto \mathrm{Hom}_\psi(\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, \psi_*(\mathscr{F}))$ est un foncteur covariant de la catégorie des *faisceaux* sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, dans la catégorie ***Ens*** (les ensembles de morphismes étant bien entendu formés de morphismes de *préfaisceaux*); si ce foncteur est *représentable* par un *faisceau* $\mathscr{G}'$ sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, on dit que ce faisceau (qui est déterminé à isomorphisme unique près) est *l'image réciproque* de $\mathscr{G}$ par ψ et on le note $\psi^{-1}(\mathscr{G})$. C'est donc l'objet *associé* à $\mathscr{G}$ au sens de (1.5.1) (appliqué aux catégories opposées), et tout ce qui a été dit à cette occasion s'applique ici. On notera $v \mapsto v^\flat$ l'isomorphisme fonctoriel en $\mathscr{F}$

$$\mathrm{Hom}_X(\psi^{-1}(\mathscr{G}), \mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, \psi_*(\mathscr{F})) \tag{3.5.3.1}$$

et $u \mapsto u^\sharp$ l'isomorphisme réciproque. Pour tout morphisme $w : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ de faisceaux sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, on a

$$(w \circ v)^\flat = \psi_*(w) \circ v^\flat. \tag{3.5.3.2}$$

En particulier, pour $v = 1_{\psi^{-1}(\mathscr{G})}$ on a un morphisme canonique

$$\rho_{\mathscr{G}} = (1_{\psi^{-1}(\mathscr{G})})^\flat : \mathscr{G} \to \psi_*(\psi^{-1}(\mathscr{G})) \tag{3.5.3.3}$$

et on a la factorisation canonique

$$v^\flat : \mathscr{G} \xrightarrow{\rho_{\mathscr{G}}} \psi_*(\psi^{-1}(\mathscr{G})) \xrightarrow{\psi_*(v)} \psi_*(\mathscr{F}). \tag{3.5.3.4}$$

(3.5.4) Supposons maintenant que la catégorie $\boldsymbol{C}$ soit telle que *tout* préfaisceau $\mathscr{G}$ sur Y à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ admette une image réciproque par ψ (cf. (3.7) pour des exemples de telles catégories). Alors $\mathscr{G} \mapsto \psi^{-1}(\mathscr{G})$ est le foncteur *adjoint à gauche* du foncteur $\mathscr{F} \mapsto \psi_*(\mathscr{F})$ (considéré comme prenant ses valeurs dans la catégorie des *préfaisceaux* sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$), et ψ_* est donc l'*adjoint à droite* de ψ^{-1}, l'isomorphisme

(3.5.3.1) étant un isomorphisme de bifoncteurs en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ (1.5.2 et 1.5.3). Pour tout morphisme de préfaisceaux sur Y à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, $w: \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$, $\psi^{-1}(w): \psi^{-1}(\mathscr{G}_1) \to \psi^{-1}(\mathscr{G}_2)$ est défini par $\psi^{-1}(w) = (\rho_{\mathscr{G}_2} \circ w)^\sharp$ (1.5.2), et on a le diagramme commutatif (1.5.2.2)

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}_1 & \xrightarrow{\quad w \quad} & \mathscr{G}_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathscr{G}_1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathscr{G}_2}} \\ \psi_*(\psi^{-1}(\mathscr{G}_1)) & \xrightarrow[\psi^*(\psi^{-1}(w))]{} & \psi_*(\psi^{-1}(\mathscr{G}_2)) \end{array}$$

et pour tout morphisme $u: \mathscr{G}_2 \to \psi_*(\mathscr{F})$, où $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, on a la relation (1.5.3.2)

$$(u \circ w)^\sharp = u^\sharp \circ \psi^{-1}(w).$$

Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, on a un morphisme canonique

$$\text{(3.5.4.1)} \qquad \sigma_{\mathscr{F}} = (1_{\psi_*(\mathscr{F})})^\sharp : \psi^{-1}(\psi_*(\mathscr{F})) \to \mathscr{F}$$

et la factorisation canonique, pour tout morphisme $u: \mathscr{G} \to \psi_*(\mathscr{F})$,

$$\text{(3.5.4.2)} \qquad u^\sharp : \psi^{-1}(\mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^{-1}(u)} \psi^{-1}(\psi_*(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sigma_{\mathscr{F}}} \mathscr{F}.$$

(3.5.5) Soit $\psi': Y \to Z$ une application continue, et supposons que tout préfaisceau $\mathscr{H}$ sur Z à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ admette une image réciproque $\psi'^{-1}(\mathscr{H})$ par ψ'. Alors (avec les hypothèses de (3.5.4)), tout préfaisceau $\mathscr{H}$ sur Z à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ admet une image réciproque par $\psi'' = \psi' \circ \psi$, et l'on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\text{(3.5.5.1)} \qquad \psi''^{-1}(\mathscr{H}) \simeq \psi^{-1}(\psi'^{-1}(\mathscr{H})).$$

Cela résulte en effet aussitôt des définitions, tenant compte de ce que $\psi''_* = \psi'_* \circ \psi_*$. En outre, si $u: \mathscr{G} \to \psi_*(\mathscr{F})$ est un ψ-morphisme, $v: \mathscr{H} \to \psi'_*(\mathscr{G})$ un ψ'-morphisme, et $w = \psi'_*(u) \circ v$ leur composé (3.5.2), on constate aussitôt que w est le morphisme composé

$$w^\sharp : \psi^{-1}(\psi'^{-1}(\mathscr{H})) \xrightarrow{\psi^{-1}(v^\sharp)} \psi^*(\mathscr{G}) \xrightarrow{u^\sharp} \mathscr{F}.$$

(3.5.6) Prenons en particulier pour ψ l'application identique $1_X: X \to X$. Alors si l'image réciproque par ψ d'un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ existe, on dit que cette image réciproque est le *faisceau associé au préfaisceau* $\mathscr{F}$. Tout morphisme $u: \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ dans un *faisceau* $\mathscr{F}'$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ se factorise donc de façon unique en

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\rho_{\mathscr{F}}} 1_X^{-1}(\mathscr{F}) \xrightarrow{u^\sharp} \mathscr{F}'.$$

3.6. Faisceaux simples et faisceaux localement simples

(3.6.1) Nous dirons qu'un *préfaisceau* $\mathscr{F}$ sur X, à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, est *constant* si les morphismes de restriction $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$ sont des *isomorphismes* pour tout ouvert $U \subset X$; on notera que $\mathscr{F}$ n'est pas nécessairement un faisceau. On dit qu'un *faisceau* est *simple* s'il est isomorphe au faisceau associé (3.5.6) à un préfaisceau constant. On dit qu'un faisceau $\mathscr{F}$ est *localement simple* si tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $\mathscr{F}|U$ soit simple.

(3.6.2) Supposons que X soit *irréductible* (2.1.1); alors les propriétés suivantes d'un *préfaisceau* $\mathscr{F}$ sur X sont équivalentes:

a) *le morphisme* $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$ *est un isomorphisme pour tout ouvert non vide* U *de* X;

b) $\mathscr{F}$ *est un faisceau simple sur* X;

c) $\mathscr{F}$ *est un faisceau localement simple sur* X.

En effet supposons a) vérifiée; si U, V sont deux ouverts non vides dans X, $U \cap V$ est non vide, donc $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U \cap V)$ et $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$ étant des isomorphismes, il en est de même de $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U \cap V)$ et de même $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U \cap V)$ est un isomorphisme. On en conclut aussitôt que l'axiome (F) de (3.1.2) est bien vérifié, $\mathscr{F}$ est isomorphe à son faisceau associé, et par suite a) entraîne b).

Soient maintenant (U_α) un recouvrement ouvert de X par des ouverts non vides et $\mathscr{F}$ un faisceau sur X tel que $\mathscr{F}|U_\alpha$ soit simple pour tout α; comme U_α est irréductible, $\mathscr{F}|U_\alpha$ vérifie a) en vertu de ce qui précède. Comme $U_\alpha \cap U_\beta$ n'est pas vide, $\mathscr{F}(U_\alpha) \to \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ et $\mathscr{F}(U_\beta) \to \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ sont des isomorphismes, d'où on déduit un isomorphisme canonique $\theta_{\alpha\beta} : \mathscr{F}(U_\alpha) \to \mathscr{F}(U_\beta)$ pour tout couple d'indices. Mais alors, si on applique la condition (F) pour $U = X$, on voit que pour tout indice α_0 et tout objet T de $\boldsymbol{C}$, on a un diagramme exact

$$\mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U_{\alpha_0})) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U_\alpha)) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta))$$

où la première flèche est déduite des isomorphismes $\theta_{\alpha_0\alpha}$. Comme on a aussi un diagramme exact lorsque dans le précédent on remplace

$$\mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U_{\alpha_0})) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U_\alpha))$$

par

$$\mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(X)) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U_\alpha))$$

où la flèche est déduite des morphismes de restriction $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U_\alpha)$, on en déduit (1.1.7) que le morphisme de restriction $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U_{\alpha_0})$ est un isomorphisme, ce qui prouve que c) entraîne a).

3.7. Images réciproques de préfaisceaux de groupes ou d'anneaux

(3.7.1) Nous allons montrer que lorsqu'on prend pour $\boldsymbol{C}$ la catégorie des ensembles, l'image réciproque par ψ de tout préfaisceau $\mathscr{G}$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ *existe toujours* (les notations et hypothèses sur X, Y, ψ étant celles de (3.5.3)). En effet, pour tout ouvert $U \subset X$, définissons $\mathscr{G}'(U)$ comme suit: un élément s' de $\mathscr{G}'(U)$ est une famille $(s'_x)_{x\in U}$, où $s'_x \in \mathscr{G}_{\psi(x)}$ pour tout $x \in U$, et où, pour tout $x \in U$, la condition suivante est remplie: il existe un voisinage ouvert V de $\psi(x)$ dans Y, un voisinage $W \subset \psi^{-1}(V) \cap U$ de x et un élément $s \in \mathscr{G}(V)$ tels que $s'_z = s_{\psi(z)}$ pour tout $z \in W$. On vérifie immédiatement que $U \mapsto \mathscr{G}'(U)$ satisfait bien aux axiomes des *faisceaux*; notons ce faisceau $\psi^{-1}(\mathscr{G})$.

Soit maintenant $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles sur X, et soient $u : \mathscr{G} \to \psi_*(\mathscr{F})$, $v : \psi^{-1}(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$ des morphismes. On définit $u^\sharp$ et $v^\flat$ de la façon suivante: si s' est une section de $\psi^{-1}(\mathscr{G})$ au-dessus d'un voisinage U de $x \in X$ et si V est un voisinage ouvert de $\psi(x)$ et $s \in \mathscr{G}(V)$ est tel que l'on ait $s'_z = s_{\psi(z)}$ pour z dans un voisinage de x contenu dans $\psi^{-1}(V) \cap U$, on prend $u^\sharp_x(s'_x) = u_{\psi(x)}(s_{\psi(x)})$. De même, si $s \in \mathscr{G}(V)$ (V ouvert dans Y), $v^\flat(s)$ est la section de $\mathscr{F}$ au-dessus de $\psi^{-1}(V)$, image par v de la section s' de $\psi^{-1}(\mathscr{G})$ telle que $s'_x = s_{\psi(x)}$ pour tout $x \in \psi^{-1}(V)$. En outre, l'homomorphisme canonique (3.5.3) $\rho_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to \psi_*(\psi^{-1}(\mathscr{G}))$ se définit de la façon suivante: pour tout ouvert $V \subset Y$ et toute section $s \in \Gamma(V, \mathscr{G})$, $\rho_{\mathscr{G}}(s)$ est la section $(s_{\psi(x)})_{x\in\psi^{-1}(V)}$ de $\psi^{-1}(\mathscr{G})$ au-dessus de $\psi^{-1}(V)$. La vérification des relations $(u^\sharp)^\flat = u$, $(v^\flat)^\sharp = v$ et $\iota^\flat = \psi_*(v) \circ \rho_{\mathscr{G}}$ est immédiate, et démontre notre assertion.

On vérifie que, si $w : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ est un homomorphisme de préfaisceaux d'ensembles sur Y, $\psi^{-1}(w)$ s'explicite de la façon suivante: si $s' = (s'_x)_{x\in U}$ est une section de $\psi^{-1}(\mathscr{G}_1)$ au-dessus d'un ouvert U de X, $(\psi^{-1}(w))(s')$ est la famille $(w_{\psi(x)}(s'_x))_{x\in U}$. Enfin, il est immédiat que pour tout ouvert V de Y, l'image réciproque de $\mathscr{G}|V$ par la restriction de ψ à $\psi^{-1}(V)$ est identique au faisceau induit $\psi^{-1}(\mathscr{G})|\psi^{-1}(V)$.

Lorsque ψ est l'identité 1_X, on retrouve la définition d'un faisceau d'ensembles associé à un préfaisceau (G, II, 1.2). Les considérations précédentes s'appliquent sans changement lorsque $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des groupes ou des anneaux (non nécessairement commutatifs).

Lorsque X est une partie quelconque d'un espace topologique Y, et j l'injection canonique $X \to Y$, pour tout faisceau $\mathscr{G}$ sur Y à valeurs dans une catégorie $\boldsymbol{C}$, on appelle faisceau *induit* sur X par $\mathscr{G}$ l'image réciproque $j^{-1}(\mathscr{G})$ (lorsqu'elle existe); pour les faisceaux d'ensembles (ou de groupes, ou d'anneaux) on retrouve la définition usuelle (G, II, 1.5).

(3.7.2) Conservant les notations et hypothèses de (3.5.3), supposons que $\mathscr{G}$ soit un *faisceau* de groupes (resp. d'anneaux) sur Y. La définition des sections de $\psi^{-1}(\mathscr{G})$ (3.7.1) montre (compte tenu de (3.4.4)) que

l'homomorphisme de fibres $\psi_x \circ (\rho_{\mathscr{G}})_{\psi(x)} : \mathscr{G}_{\psi(x)} \to (\psi^{-1}(\mathscr{G}))_x$ est un *isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{G}$, qui permet d'identifier ces deux fibres; avec cette identification, $u_x^\sharp$ est identique à l'homomorphisme défini dans (3.5.1), et en particulier, on a $\mathrm{Supp}(\psi^{-1}(\mathscr{G})) = \psi^{-1}(\mathrm{Supp}(\mathscr{G}))$.

Une conséquence immédiate de ce résultat est que *le foncteur* $\mathscr{G} \mapsto \psi^{-1}(\mathscr{G})$ *est exact en* $\mathscr{G}$ dans la catégorie abélienne des faisceaux de groupes commutatifs.

3.8. Quasi-homéomorphismes et images réciproques de faisceaux

Proposition (3.8.1) *Soient* X_0, X *deux espaces topologiques,* $f : X_0 \to X$ *une application continue. Pour que* f *soit un quasi-homéomorphisme* (2.6.2), *il faut et il suffit que le foncteur* $\mathscr{F} \mapsto f^{-1}(\mathscr{F})$ *de la catégorie des faisceaux d'ensembles* (resp. *des faisceaux de groupes commutatifs*) *sur* X, *dans la catégorie des faisceaux d'ensembles* (resp. *des faisceaux de groupes commutatifs*) *sur* X_0, *soit une équivalence de catégories.*

Supposons que f soit un quasi-homéomorphisme; alors l'application canonique $\rho_{\mathscr{F}} : \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(f^{-1}(U), f^{-1}(\mathscr{F}))$ (3.5.3.3) est bijective pour tout ouvert U de X, puisque l'application $U \mapsto f^{-1}(U)$ de $\mathfrak{O}(X)$ dans $\mathfrak{O}(X_0)$ est bijective: il suffit en effet de noter que tout voisinage d'un point $x_0 \in X_0$ contient $f^{-1}(f(x_0))$ et d'utiliser (3.7.1). Ceci prouve que $\mathscr{F} \mapsto f^{-1}(\mathscr{F})$ est une équivalence de catégories.

Inversement, supposons qu'il en soit ainsi pour la catégorie des faisceaux d'ensembles; alors il en est de même pour la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs, car cette dernière n'est autre que la catégorie des *objets en groupes commutatifs* dans la catégorie des faisceaux d'ensembles (1.6.5). Il suffira donc de prouver que f est un quasi-homéomorphisme lorsque $\mathscr{F} \mapsto f^{-1}(\mathscr{F})$ est une équivalence de catégories pour la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs.

Montrons d'abord que $f(X_0)$ est très dense dans X; en effet, dans le cas contraire, il existerait deux parties fermées distinctes $Y \supset Y'$ de X telles que $Y \cap f(X_0) = Y' \cap f(X_0)$. Soit $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}'$) le faisceau de groupes commutatifs sur X, image directe par l'injection canonique $Y \to X$ (resp. $Y' \to X$) du faisceau simple associé au préfaisceau constant $\mathbf{Z}$ sur Y (resp. Y'); la définition de l'image réciproque (3.7.1) montre que $f^{-1}(\mathscr{F})$ est isomorphe à $f^{-1}(\mathscr{F}')$, mais $\mathscr{F}$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{F}'$, donc $\mathscr{F} \mapsto f^{-1}(\mathscr{F})$ ne serait pas une équivalence de catégories (ce ne serait même pas un foncteur *fidèle*, car si u et v sont l'automorphisme identique et l'endomorphisme nul de $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$, $f^{-1}(u)$ et $f^{-1}(v)$ sont égaux).

Montrons maintenant que la topologie de X_0 est l'image réciproque de celle de X par f. Soit $\mathbf{Z}_X$ le faisceau simple sur X associé au préfaisceau constant égal à $\mathbf{Z}$; la donnée d'un homomorphisme $u : \mathbf{Z}_X \to \mathscr{F}$ de faisceaux de groupes commutatifs équivaut à celle de la section

$s=u(1)\in\Gamma(X,\mathscr{F})$: en effet, lorsque s est donnée, pour toute section $n_U\in\Gamma(U,\mathbf{Z}_X)$ qui est constante, on a nécessairement $u(n_U)=n_U\cdot(s|U)$; on a donc un isomorphisme canonique $\Gamma(X,\mathscr{F})\simeq\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_X,\mathscr{F})$ de groupes commutatifs, fonctoriel en $\mathscr{F}$. Comme par définition (3.7.1), on a $f^{-1}(\mathbf{Z}_X)=\mathbf{Z}_{X_0}$, l'hypothèse que $\mathscr{F}\mapsto f^{-1}(\mathscr{F})$ est une équivalence de catégories entraîne que l'homomorphisme canonique $\rho_{\mathscr{F}}:\Gamma(X,\mathscr{F})\to\Gamma(X_0,f^{-1}(\mathscr{F}))$ est *bijectif* pour tout faisceau de groupes commutatifs $\mathscr{F}$ sur X. Or, soit Y_0 une partie fermée de X_0, et soit $\mathscr{F}_0$ le faisceau sur X_0 image directe par l'injection canonique $Y_0\to X_0$ du faisceau simple $\mathbf{Z}_{Y_0}$. Comme $\mathscr{F}\mapsto f^{-1}(\mathscr{F})$ est une équivalence, $\mathscr{F}_0$ est isomorphe à un faisceau de la forme $f^{-1}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{F}$ est un faisceau de groupes commutatifs sur X. Soit s_0 la section de $\mathscr{F}_0$ au-dessus de X_0 telle que $(s_0)_{x_0}=1_{x_0}$ si $x_0\in Y_0$, et $(s_0)_{x_0}=0_{x_0}$ si $x_0\notin Y_0$. Les remarques précédentes montrent qu'il existe une section s de $\mathscr{F}$ au-dessus de X telle que $(s_0)_{x_0}=s_{f(x_0)}$ pour tout $x_0\in X_0$ (les fibres $(\mathscr{F}_0)_{x_0}$ et $\mathscr{F}_{f(x_0)}$ étant canoniquement identifiées (3.7.1)); cela entraîne que Y_0 est l'image réciproque par f de l'ensemble Y des $x\in X$ tels que $s_x\neq 0_x$, et Y est fermé dans X. CQFD.

Remarques **(3.8.2)** On a vu dans la démonstration précédente que l'homomorphisme canonique $\Gamma(X,\mathscr{F})\to\Gamma(X_0,f^{-1}(\mathscr{F}))$ est un isomorphisme de groupes commutatifs, fonctoriel en $\mathscr{F}$ dans la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs sur X. Comme f^{-1} est exact dans cette catégorie (3.7.2), cela implique que les homomorphismes canoniques

$$H^i(X,\mathscr{F})\to H^i(X_0,f^{-1}(\mathscr{F}))$$

(T, 3.2.2) sont *bijectifs* pour tout i.

3.9. Faisceaux d'espaces pseudo-discrets

(3.9.1) Soit X un espace topologique dont la topologie admet une base $\mathfrak{B}$ formée d'ensembles ouverts *quasi-compacts*. Soit $\mathscr{F}$ un *faisceau d'ensembles* sur X; si on munit chacun des $\mathscr{F}(U)$ de la topologie *discrète*, $U\mapsto\mathscr{F}(U)$ est un *préfaisceau d'espaces topologiques*. Nous allons voir qu'il existe un *faisceau d'espaces topologiques* $\mathscr{F}'$ *associé à* $\mathscr{F}$ (3.5.6) tel que $\Gamma(U,\mathscr{F}')$ soit l'espace discret $\mathscr{F}(U)$ pour tout ouvert *quasi-compact* U. Il suffira pour cela de montrer que le préfaisceau $U\mapsto\mathscr{F}(U)$ d'espaces topologiques discrets *sur* $\mathfrak{B}$ vérifie la condition (F_0) de (3.2.2), et plus généralement que si U est un ouvert quasi-compact et si (U_α) est un recouvrement de U par des ensembles de $\mathfrak{B}$ contenus dans U, la topologie la moins fine $\mathscr{T}$ sur $\Gamma(U,\mathscr{F})$ rendant continues les applications $\Gamma(U,\mathscr{F})\to\Gamma(U_\alpha,\mathscr{F})$ est la topologie *discrète*. Or, il existe un nombre fini d'indices α_i tels que $U=\bigcup_i U_{\alpha_i}$. Soit $s\in\Gamma(U,\mathscr{F})$ et soit s_i son image

dans $\Gamma(U_{\alpha_i}, \mathscr{F})$; l'intersection des images réciproques des ensembles $\{s_i\}$ est par définition un voisinage de s pour $\mathscr{T}$; mais puisque $\mathscr{F}$ est un faisceau d'ensembles et que les U_{α_i} recouvrent U, cette intersection se réduit à s, d'où notre assertion.

On notera que si U est un ouvert non quasi-compact de X, l'espace topologique $\Gamma(U, \mathscr{F}')$ a encore $\Gamma(U, \mathscr{F})$ comme ensemble sous-jacent, mais sa topologie n'est pas discrète en général: c'est la moins fine rendant continues les applications $\Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(V, \mathscr{F})$, pour $V \in \mathfrak{B}$ et $V \subset U$ (les $\Gamma(V, \mathscr{F})$ étant discrets).

Les considérations précédentes s'appliquent sans modification aux faisceaux de groupes ou d'anneaux (non nécessairement commutatifs), et leur associent respectivement des faisceaux de *groupes topologiques* ou d'*anneaux topologiques*. Pour abréger, nous dirons que le faisceau $\mathscr{F}'$ est le faisceau d'*espaces* (resp. *groupes*, *anneaux*) *pseudo-discrets* associé au faisceau d'ensembles (resp. groupes, anneaux) $\mathscr{F}$.

(3.9.2) Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux faisceaux d'ensembles (resp. groupes, anneaux) sur X, $u: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorphisme. Alors u est aussi un homomorphisme *continu* $\mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$, en désignant par $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}'$ les faisceaux pseudo-discrets associés à $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$; cela résulte en effet de (3.2.5).

(3.9.3) Soient $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles, $\mathscr{H}$ un sous-faisceau de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{H}'$ les faisceaux pseudo-discrets associés à $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$ respectivement. Alors, pour tout ouvert $U \subset X$, $\Gamma(U, \mathscr{H}')$ est *fermé* dans $\Gamma(U, \mathscr{F}')$: en effet, c'est l'intersection des images réciproques des $\Gamma(V, \mathscr{H})$ (pour $V \in \mathfrak{B}$, $V \subset U$) par les applications continues $\Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(V, \mathscr{F})$, et $\Gamma(V, \mathscr{H})$ est fermé dans l'espace discret $\Gamma(V, \mathscr{F})$.

§ 4. Espaces annelés

4.1. Espaces annelés, $\mathscr{A}$-Modules, $\mathscr{A}$-Algèbres

(4.1.1) Un *espace annelé* (resp. *topologiquement annelé*) est un couple $(X, \mathscr{A})$ formé d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux (non nécessairement commutatifs) (resp. d'un faisceau d'anneaux topologiques) $\mathscr{A}$ sur X; on dit que X est l'espace topologique *sous-jacent* à l'espace annelé $(X, \mathscr{A})$, et $\mathscr{A}$ le *faisceau structural*. Ce dernier se note $\mathscr{O}_X$, et sa fibre en un point $x \in X$ se note $\mathscr{O}_{X,x}$ ou simplement $\mathscr{O}_x$ lorsqu'il n'en résulte pas de confusion.

On désignera par 1 ou e la *section unité* de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de X (élément unité de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$).

Lorsque $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux commutatifs, on dit que $(X,\mathscr{A})$ est un espace *commutativement annelé*. Comme dans ce Traité nous aurons surtout à considérer des faisceaux d'anneaux *commutatifs*, il sera sous-entendu, lorsque nous parlerons d'un espace annelé $(X,\mathscr{A})$ sans préciser, qu'il s'agit d'un espace commutativement annelé.

Les espaces annelés à faisceau structural non nécessairement commutatif (resp. les espaces topologiquement annelés) forment une *catégorie*, lorsqu'on définit un *morphisme* $(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$ comme un couple $(\psi,\theta)=\Psi$ formé d'une application continue $\psi: X\to Y$ et d'un *ψ-morphisme* $\theta:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ (3.5.1) de faisceaux d'anneaux (resp. de faisceaux d'anneaux topologiques). Comme la catégorie des anneaux admet des limites inductives, pour tout $x\in X$, on déduit de θ un homomorphisme d'anneaux $\mathscr{B}_{\psi(x)}\to\mathscr{A}_x$ (3.5.1); d'ailleurs, compte tenu de ce que $\psi_x\circ(\rho_{\mathscr{B}})_{\psi(x)}$ est un isomorphisme (3.7.2), l'homomorphisme précédent s'identifie à $\theta^{\#}_x$. Le *composé* d'un second morphisme $\Psi'=(\psi',\theta'):(Y,\mathscr{B})\to(Z,\mathscr{C})$ et de Ψ, noté $\Psi''=\Psi'\circ\Psi$, est le morphisme (ψ'',θ'') où $\psi''=\psi'\circ\psi$, et θ'' est le composé de θ et θ' (égal à $\psi'_*(\theta)\circ\theta'$, cf. 3.5.2). Pour les espaces annelés, rappelons que l'on a alors $\theta''^{\#}=\theta^{\#}\circ\psi^{-1}(\theta'^{\#})$ (3.5.5); donc si $\theta'^{\#}$ et $\theta^{\#}$ sont des homomorphismes *injectifs* (resp. *surjectifs*), il en est de même de $\theta''^{\#}$, compte tenu du fait que $\psi_x\circ(\rho_{\mathscr{B}})_{\psi(x)}$ est un isomorphisme pour tout $x\in X$ (3.7.2). On vérifie aussitôt, grâce à ce qui précède, que lorsque ψ est une application continue *injective* et $\theta^{\#}$ un homomorphisme *surjectif* de faisceaux d'anneaux, le morphisme (ψ,θ) est un *monomorphisme* (T, 1.1) dans la catégorie des espaces annelés.

Par abus de langage, on remplacera souvent ψ par Ψ dans les notations, par exemple en écrivant $\Psi^{-1}(U)$ au lieu de $\psi^{-1}(U)$ pour une partie U de Y, lorsque cela ne risquera pas d'entrainer confusion.

(4.1.2) Pour toute partie M de X, le couple $(M,\mathscr{A}|M)$ est évidemment un espace annelé, dit *induit* sur M par l'espace annelé $(X,\mathscr{A})$ (et appelé encore la *restriction* de $(X,\mathscr{A})$ à M). Si j est l'injection canonique $M\to X$ et ω l'application identique de $\mathscr{A}|M$, $(j,\omega^{\flat})$ est un monomorphisme $(M,\mathscr{A}|M)\to(X,\mathscr{A})$ d'espaces annelés, appelé l'*injection canonique*. Le composé d'un morphisme $\Psi:(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$ et de cette injection est appelé la *restriction* de Ψ à M et se note $\Psi|M$.

(4.1.3) Nous ne reviendrons pas sur la définition des *$\mathscr{A}$-Modules* sur un espace annelé $(X,\mathscr{A})$ (G, II, 2.2); lorsque $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux non nécessairement commutatifs, par $\mathscr{A}$-Module, il faudra toujours sous-entendre «$\mathscr{A}$-Module à gauche» sauf mention expresse du contraire. Les sous-$\mathscr{A}$-Modules de $\mathscr{A}$ seront qualifiés de *faisceaux d'idéaux* (à gauche, à droite ou bilatères) dans $\mathscr{A}$ ou de *$\mathscr{A}$-Idéaux*.

Lorsque $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux commutatifs, et que, dans la définition des $\mathscr{A}$-Modules, on remplace partout la structure de *module*

par celle d'*algèbre*, on obtient la définition d'une *$\mathscr{A}$-Algèbre* sur X. Il revient au même de dire qu'une $\mathscr{A}$-Algèbre (non nécessairement commutative) est un $\mathscr{A}$-Module $\mathscr{C}$, muni d'un homomorphisme de $\mathscr{A}$-Modules $\varphi: \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ (cf. G, II, 2.8) et d'une section e au-dessus de X, tels que: 1° le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C} & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C} \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C} & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathscr{C} \end{array}$$

soit commutatif; 2° pour tout ouvert $U \subset X$ et toute section $s \in \Gamma(U, \mathscr{C})$, on ait $\varphi((e|U) \otimes s) = \varphi(s \otimes (e|U)) = s$. Dire que $\mathscr{C}$ est une $\mathscr{A}$-algèbre commutative revient en outre à dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C} & \xrightarrow{\sigma} & \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C} \\ & {\scriptstyle \varphi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi} & \\ & \mathscr{C} & \end{array}$$

est commutatif, σ désignant la symétrie canonique du produit tensoriel $\mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C}$.

Les homomorphismes de $\mathscr{A}$-Algèbres se définissent aussi comme les homomorphismes de $\mathscr{A}$-Modules dans (G, II, 2.2), mais naturellement ne forment plus un groupe.

Si $\mathscr{M}$ est un sous-$\mathscr{A}$-Module d'une $\mathscr{A}$-Algèbre $\mathscr{C}$, la *sous-$\mathscr{A}$-Algèbre de $\mathscr{C}$ engendrée par $\mathscr{M}$* est la somme des images des homomorphismes $\otimes^n \mathscr{M} \to \mathscr{C}$ (pour les $n \geqslant 0$). C'est aussi le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathscr{B}(U)$ d'algèbres, $\mathscr{B}(U)$ étant la sous-algèbre de $\Gamma(U, \mathscr{C})$ engendrée par le sous-module $\Gamma(U, \mathscr{M})$.

(4.1.4) On dit qu'un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ sur un espace topologique X est *réduit* (resp. *intègre*) en un point x de X si la fibre $\mathscr{A}_x$ est un anneau *réduit* (resp. *intègre*) (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 6, déf. 5); on dit que $\mathscr{A}$ est *réduit* s'il est réduit en tout point de X. Rappelons qu'un anneau A est dit *régulier* si chacun des anneaux locaux $A_{\mathfrak{p}}$ (où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A) est un anneau local régulier (cf. [$\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}^{*}$, 17.1.2]); nous dirons qu'un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ sur X est *régulier en un point x* (resp. *régulier*) si la fibre $\mathscr{A}_x$ est un anneau régulier (resp. si $\mathscr{A}$ est régulier en tout point). Enfin, nous dirons qu'un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ sur X est *normal en un point x* (resp. *normal*) si sa fibre $\mathscr{A}_x$ est un anneau *intègre et intégralement clos* (resp. si $\mathscr{A}$ est normal

en tout point). Nous dirons qu'un espace annelé $(X,\mathscr{A})$ est *réduit* (resp. *normal*, *régulier*) si le faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ a cette propriété [1].

Un faisceau d'*anneaux gradués* $\mathscr{A}$ est par définition un faisceau d'anneaux qui est somme directe (G, II, 2.7) d'une famille $(\mathscr{A}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de faisceaux de groupes commutatifs avec les conditions $\mathscr{A}_m\mathscr{A}_n\subset\mathscr{A}_{m+n}$; un $\mathscr{A}$-*Module gradué* est un $\mathscr{A}$-Module $\mathscr{F}$ somme directe d'une famille $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de faisceaux de groupes commutatifs, satisfaisant aux conditions $\mathscr{A}_m\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{m+n}$. Il revient d'ailleurs au même de dire que l'on a $(\mathscr{A}_m)_x(\mathscr{A}_n)_x\subset(\mathscr{A}_{m+n})_x$ (resp. $(\mathscr{A}_m)_x(\mathscr{F}_n)_x\subset(\mathscr{F}_{m+n})_x$) en tout point x.

(4.1.5) Étant donné un espace annelé $(X,\mathscr{A})$ (non nécessairement commutativement annelé), nous ne rappellerons pas ici les définitions des bifoncteurs $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$, $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ (G, II, 2.8 et 2.2) dans les catégories des $\mathscr{A}$-Modules à gauche ou à droite (selon les cas), à valeurs dans la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs (ou plus généralement des $\mathscr{C}$-Modules, si $\mathscr{C}$ est le centre de $\mathscr{A}$). La fibre $(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G})_x$ en tout point $x\in X$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{F}_x\otimes_{\mathscr{A}_x}\mathscr{G}_x$ et on définit un homomorphisme canonique fonctoriel $(\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}))_x\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x)$ qui, en général, n'est ni injectif ni surjectif. Les bifoncteurs considérés ci-dessus sont additifs et, en particulier, commutent aux sommes directes finies; $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ est exact à droite en $\mathscr{F}$ et en $\mathscr{G}$, commute aux limites inductives, et $\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{A}$) s'identifie canoniquement à $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{F}$). La foncteurs $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ sont *exacts à gauche* en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$; de façon précise, si on a une suite exacte de la forme $0\to\mathscr{G}'\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}''$, la suite

$$0\to\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}')\to\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})\to\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}'')$$

est exacte, et si on a une suite exacte de la forme $\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$, la suite

$$0\to\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}'',\mathscr{G})\to\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G})\to\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}',\mathscr{G})$$

est exacte, avec des propriétés analogues pour le foncteur Hom. En outre, $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{A},\mathscr{G})$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{G}$; enfin, pour tout ouvert $U\subset X$, on a

$$\Gamma(U,\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{G}))=\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}|U}(\mathscr{F}|U,\mathscr{G}|U).$$

Pour tout $\mathscr{A}$-Module à gauche $\mathscr{F}$ (resp. à droite), on appelle *dual* de $\mathscr{F}$ et on note $\check{\mathscr{F}}$ le $\mathscr{A}$-Module à droite (resp. à gauche) $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F},\mathscr{A})$.

Enfin, si $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux commutatifs, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-Module, $U\mapsto\wedge^p\Gamma(U,\mathscr{F})$ est un préfaisceau dont le faisceau associé est un $\mathscr{A}$-

[1] Nous ne donnons pas de définition «globale» d'«espace annelé intègre»; pour les *schémas*, la définition de «schéma intègre» n'est pas analogue aux précédentes (cf. I, 2.1.8).

Module qui se note $\wedge^p \mathscr{F}$ et s'appelle la *puissance extérieure p-ème de* $\mathscr{F}$; on vérifie aisément que l'application canonique du préfaisceau $U \mapsto \wedge^p \Gamma(U, \mathscr{F})$ dans le faisceau associé $\wedge^p \mathscr{F}$ est *injective*, et que pour tout $x \in X$, on a $(\wedge^p \mathscr{F})_x = \wedge^p (\mathscr{F}_x)$. Il est clair que $\wedge^p \mathscr{F}$ est un foncteur covariant en $\mathscr{F}$.

(4.1.6) Supposons que $\mathscr{A}$ soit un faisceau d'anneaux non nécessairement commutatifs, $\mathscr{J}$ un Idéal à gauche de $\mathscr{A}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-Module à gauche; on note alors $\mathscr{J}\mathscr{F}$ le sous-$\mathscr{A}$-Module de $\mathscr{F}$, image de $\mathscr{J} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathscr{F}$ (où $\mathbf{Z}$ est le faisceau associé au préfaisceau constant $U \mapsto \mathbf{Z}$) par l'application canonique $\mathscr{J} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathscr{F} \to \mathscr{F}$; il est clair que pour tout $x \in X$, on a $(\mathscr{J}\mathscr{F})_x = \mathscr{J}_x \mathscr{F}_x$. Lorsque $\mathscr{A}$ est commutatif, $\mathscr{J}\mathscr{F}$ est aussi l'image canonique de $\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{F} \to \mathscr{F}$. Il est immédiat que $\mathscr{J}\mathscr{F}$ est aussi le $\mathscr{A}$-Module associé au préfaisceau $U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{J})\,\Gamma(U, \mathscr{F})$. Si $\mathscr{J}_1$, $\mathscr{J}_2$ sont deux Idéaux à gauche de $\mathscr{A}$, on a $\mathscr{J}_1(\mathscr{J}_2 \mathscr{F}) = (\mathscr{J}_1 \mathscr{J}_2)\mathscr{F}$.

(4.1.7) Soit $(X_\lambda, \mathscr{A}_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille d'espaces annelés; pour tout couple (λ, μ), supposons donnée une partie ouverte $V_{\lambda\mu}$ de X_λ, et un isomorphisme d'espaces annelés $\varphi_{\lambda\mu} : (V_{\mu\lambda}, \mathscr{A}_\mu | V_{\mu\lambda}) \xrightarrow{\sim} (V_{\lambda\mu}, \mathscr{A}_\lambda | V_{\lambda\mu})$, avec $V_{\lambda\lambda} = X_\lambda$, $\varphi_{\lambda\lambda}$ étant l'identité. Supposons de plus que, pour tout triplet (λ, μ, ν), si on désigne par $\varphi'_{\mu\lambda}$ la restriction de $\varphi_{\mu\lambda}$ à $V_{\lambda\mu} \cap V_{\lambda\nu}$, $\varphi'_{\mu\lambda}$ soit un isomorphisme de $(V_{\lambda\mu} \cap V_{\lambda\nu}, \mathscr{A}_\lambda | (V_{\lambda\mu} \cap V_{\lambda\nu}))$ sur $(V_{\mu\nu} \cap V_{\mu\lambda}, \mathscr{A}_\mu | (V_{\mu\nu} \cap V_{\mu\lambda}))$ et que l'on ait $\varphi'_{\lambda\nu} = \varphi'_{\lambda\mu} \circ \varphi'_{\mu\nu}$ (*condition de recollement* pour les $\varphi_{\lambda\mu}$). On peut tout d'abord considérer alors l'espace topologique obtenu par recollement (au moyen des $\varphi_{\lambda\mu}$) des X_λ le long des $V_{\lambda\mu}$; si l'on identifie X_λ à la partie ouverte X'_λ correspondante dans X, les hypothèses entraînent que les trois ensembles $V_{\lambda\mu} \cap V_{\lambda\nu}$, $V_{\mu\nu} \cap V_{\mu\lambda}$, $V_{\nu\lambda} \cap V_{\nu\mu}$ s'identifient à $X'_\lambda \cap X'_\mu \cap X'_\nu$. On peut alors transporter à X'_λ la structure d'espace annelé de X_λ, et si $\mathscr{A}'_\lambda$ est le faisceau d'anneaux transporté de $\mathscr{A}_\lambda$, les $\mathscr{A}'_\lambda$ vérifient la condition de recollement (3.3.1) et définissent donc un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ sur X; on dit que $(X, \mathscr{A})$ est l'espace annelé obtenu par *recollement des* $(X_\lambda, \mathscr{A}_\lambda)$ *le long des* $V_{\lambda\mu}$, *au moyen des* $\varphi_{\lambda\mu}$.

(4.1.8) Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé (non nécessairement commutativement annelé). Pour qu'une section $s \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ au-dessus d'un ouvert U de X soit *inversible*, il faut et il suffit que pour tout recouvrement ouvert (U_α) de U par des ouverts de U, la restriction de s à U_α soit inversible dans $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_X)$, en vertu de l'unicité de l'inverse dans un anneau; il y a donc un *sous-faisceau de groupes multiplicatifs* $\mathscr{O}_X^*$ de $\mathscr{O}_X$ tel que, pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U, \mathscr{O}_X^*)$ soit le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$. Pour tout $x \in X$, la fibre $(\mathscr{O}_X^*)_x$ de ce faisceau est l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$, car si $s_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ admet un inverse t_x dans cet anneau, s_x et t_x sont les germes de deux sections s, t de $\mathscr{O}_X$ au-dessus d'un voisinage ouvert V de x, et la relation $(st)_x = 1_x$ entraîne $st|W = 1$ pour un voisinage $W \subset V$ de x.

Par contre, avec les mêmes notations, si s est un élément *régulier* de $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ et V un ouvert contenu dans U, $s|V$ n'est pas nécessairement régulier dans $\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$, car si $(s|V)t=0$ pour une section $t\in\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$, t ne se prolonge pas nécessairement en une section au-dessus de U. Nous noterons $\mathscr{S}(\mathscr{O}_X)$ le préfaisceau d'ensembles tel que $\mathscr{S}(\mathscr{O}_X)(U)$, pour tout ouvert U de X, soit l'ensemble des sections $s\in\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ dont la restriction à *tout* ouvert $V\subset U$ est un élément régulier de l'anneau $\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$; il est clair que $\mathscr{S}(\mathscr{O}_X)$ est un *faisceau*. Il revient au même de dire que pour tout ouvert $V\subset U$, les applications $t\mapsto t(s|V)$ et $t\mapsto(s|V)t$ de $\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$ dans lui-même sont injectives; par l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ dans la catégorie des modules, on en déduit que pour tout $x\in U$, le germe s_x est *régulier* dans $\mathscr{O}_{X,x}$; inversement, s'il en est ainsi pour tout $x\in U$, il ne peut exister de section $t\neq 0$ dans un $\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$ pour un $V\subset U$ telle que $(s|V)t=0$ ou $t(s|V)=0$, car on en déduirait $s_xt_x=0$ ou $t_xs_x=0$ pour tout $x\in V$ et par hypothèse $t_x\neq 0$ pour un au moins de ces points, ce qui est absurde. On peut dire que $\mathscr{S}(\mathscr{O}_X)$ est le faisceau d'ensembles défini par la condition que $\Gamma(U,\mathscr{S}(\mathscr{O}_X))$ est l'ensemble des sections de $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ dont le germe en *tout* point $x\in U$ est régulier.

On aura soin de noter que la fibre $(\mathscr{S}(\mathscr{O}_X))_x$, qui est contenue dans l'ensemble des éléments réguliers de $\mathscr{O}_{X,x}$, *n'est pas toujours égale* à cet ensemble.

(4.1.9) On appelle *espace localement annelé* un espace commutativement annelé $(X,\mathscr{O}_X)$ tel que, pour tout $x\in X$, $\mathscr{O}_{X,x}$ soit un anneau *local* (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 1). Nous désignerons par $\mathfrak{m}_x$ l'*idéal maximal* de $\mathscr{O}_{X,x}$, par $\kappa(x)=\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ son *corps résiduel*. Pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, tout ouvert U de X, tout point $x\in U$ et toute section $f\in\Gamma(U,\mathscr{F})$, nous désignerons par $f(x)\in\kappa(x)$ la *classe* du germe $f_x\in\mathscr{F}_x$ modulo $\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$, et nous dirons que c'est la *valeur* de f au point x. La relation $f(x)=0$ signifie donc que $f_x\in\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$; on aura soin de ne pas confondre cette relation avec $f_x=0_x$. On note parfois U_f l'ensemble des $x\in U$ tels que $f(x)\neq 0$ (autrement dit, $f_x\notin\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$).

On notera que si $f\in\Gamma(X,\mathscr{F})$, l'ensemble X_f est contenu dans $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$.

Proposition (4.1.10) *Soient* $(X,\mathscr{O}_X)$ *un espace localement annelé,* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathscr{O}_X$*-Modules. Pour tout* $x\in X$, $(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G})_x/\mathfrak{m}_x(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G})_x$ *s'identifie canoniquement à* $(\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x)\otimes_{\kappa(x)}(\mathscr{G}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{G}_x)$. *Si* s (resp. t) *est une section de* $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) *au-dessus de* X, $(s\otimes t)(x)$ *s'identifie à* $s(x)\otimes t(x)$, *et on a*

$$X_{s\otimes t}=X_s\cap X_t. \tag{4.1.10.1}$$

En effet $(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G})_x=\mathscr{F}_x\otimes_{\mathscr{O}_x}\mathscr{G}_x$, et $(\mathscr{F}_x\otimes_{\mathscr{O}_x}\mathscr{G}_x)\otimes_{\mathscr{O}_x}(\mathscr{O}_x/\mathfrak{m}_x)$ est canoniquement isomorphe à $(\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x)\otimes_{\mathscr{O}_x}(\mathscr{G}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{G}_x)$, donc à

$(\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x)\otimes_{\mathscr{O}_x/\mathfrak{m}_x}(\mathscr{G}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{G}_x)$; la relation (4.1.10.1) résulte alors de ce que dans un produit tensoriel d'espaces vectoriels, un produit $a\otimes b$ de deux vecteurs ne peut être nul que si l'un d'eux l'est.

Proposition (4.1.11) *Soit* $(X,\mathscr{O}_X)$ *un espace localement annelé. L'ensemble des idempotents de l'anneau* $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ *est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de* X. *En particulier, pour que* X *soit connexe, il faut et il suffit que* $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ *n'ait pas d'autre élément idempotent que* 0 *et* 1 *(ou encore ne soit pas le produit de deux anneaux non réduits à* 0).

Soit U une partie à la fois ouverte et fermée de X; il lui correspond la section $s\in\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ telle que $s|V=1$ pour tout ouvert $V\subset U$ et $s|V=0$ pour tout ouvert $V\subset X-U$; ces ouverts formant par hypothèse une base de la topologie de X, on définit bien ainsi une section $s=e_U$ de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de X, qui est un idempotent de $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$. Inversement, si s est un tel idempotent, pour tout $x\in X$, s_x est un idempotent dans $\mathscr{O}_{X,x}$, donc égal à 0_x ou à 1_x puisque $\mathscr{O}_{X,x}$ est un anneau *local*. Mais il est clair que l'ensemble U des $x\in X$ tels que $s_x=1_x$ est ouvert, et il en est de même de l'ensemble $X-U$ des $x\in X$ tels que $s_x=0_x$, donc U est à la fois ouvert et fermé et l'on a $s=e_U$.

On notera qu'on a $e_U e_V=e_{U\cap V}$ pour deux ensembles ouverts et fermés U, V.

(4.1.12) On appelle *morphisme d'espaces localement annelés* un morphisme $f=(\psi,\theta):(X,\mathscr{O}_X)\to(Y,\mathscr{O}_Y)$, où $(X,\mathscr{O}_X)$ et $(Y,\mathscr{O}_Y)$ sont localement annelés et où, de plus, pour tout $x\in X$, l'homomorphisme $\theta_x^{\#}:\mathscr{O}_{Y,\psi(x)}\to\mathscr{O}_{X,x}$ (4.1.1) est *local* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 1). Avec cette définition, il est clair que les espaces localement annelés forment une sous-catégorie *non pleine* de celle des espaces annelés.

Proposition (4.1.13) *Soient* $f:X\to Y$ *un morphisme d'espaces localement annelés,* x *un point de* X, $y=f(x)$. *Pour tout* $\mathscr{O}_Y$*-Module* $\mathscr{G}$, $(f^*(\mathscr{G}))_x/\mathfrak{m}_x(f^*(\mathscr{G}))_x$ *s'identifie canoniquement à* $(\mathscr{G}_y/\mathfrak{m}_y\mathscr{G}_y)\otimes_{\kappa(y)}\kappa(x)$. *Si* t *est une section de* $\mathscr{G}$ *au-dessus de* Y, $s=\rho_{\mathscr{G}}(t)$ *la section correspondante de* $f^*(\mathscr{G})$ *au-dessus de* X (4.4.3), $s(x)$ *s'identifie à* $t(y)\otimes 1$ *et on a*

$$X_s=f^{-1}(Y_t). \tag{4.1.13.1}$$

On a en effet (4.3.1) $(f^*(\mathscr{G}))_x=\mathscr{G}_y\otimes_{\mathscr{O}_y}\mathscr{O}_x$, donc $(f^*(\mathscr{G}))_x\otimes_{\mathscr{O}_x}(\mathscr{O}_x/\mathfrak{m}_x)$ s'identifie à $\mathscr{G}_y\otimes_{\mathscr{O}_y}\kappa(x)$; comme l'homomorphisme $\mathscr{O}_y\to\mathscr{O}_x$ est local par hypothèse, $\mathfrak{m}_y$ annule $\kappa(x)$ et $\mathscr{G}_y\otimes_{\mathscr{O}_y}\kappa(x)$ est isomorphe à $(\mathscr{G}_y/\mathfrak{m}_y\mathscr{G}_y)\otimes_{\kappa(y)}\kappa(x)$; la dernière assertion résulte de ce que la relation $t(y)\otimes 1=0$ équivaut à $t(y)=0$. ∎

4.2. Image directe d'un $\mathscr{A}$-Module

(4.2.1) Soient $(X,\mathscr{A})$, $(Y,\mathscr{B})$ deux espaces annelés, $\Psi=(\psi,\theta)$ un morphisme $(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$; $\psi_*(\mathscr{A})$ est donc un faisceau d'anneaux sur Y, et θ un homomorphisme $\mathscr{B}\to\psi_*(\mathscr{A})$ de faisceaux d'anneaux. Soit alors $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-Module; son image directe $\psi_*(\mathscr{F})$ est un faisceau de groupes commutatifs sur Y. En outre, pour tout ouvert $U\subset Y$,

$$\Gamma(U,\psi_*(\mathscr{F}))=\Gamma(\psi^{-1}(U),\mathscr{F})$$

est muni d'une structure de module par rapport à l'anneau $\Gamma(U,\psi_*(\mathscr{A}))=\Gamma(\psi^{-1}(U),\mathscr{A})$; les applications bilinéaires qui définissent ces structures étant compatibles avec les opérations de restriction, définissent sur $\psi_*(\mathscr{F})$ une structure de $\psi_*(\mathscr{A})$-Module. L'homomorphisme $\theta:\mathscr{B}\to\psi_*(\mathscr{A})$ permet alors de définir aussi sur $\psi_*(\mathscr{F})$ une structure de $\mathscr{B}$-*Module;* nous dirons que ce $\mathscr{B}$-Module est l'*image directe de* $\mathscr{F}$ *par le morphisme* Ψ, et nous le noterons $\Psi_*(\mathscr{F})$. Si $\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$ sont deux $\mathscr{A}$-Modules sur X et u un $\mathscr{A}$-homomorphisme $\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_2$, il est immédiat (en considérant les sections au-dessus des ouverts de Y) que $\psi_*(u)$ est un $\psi_*(\mathscr{A})$-homomorphisme $\psi_*(\mathscr{F}_1)\to\psi_*(\mathscr{F}_2)$, et *a fortiori* un $\mathscr{B}$-homomorphisme $\Psi_*(\mathscr{F}_1)\to\Psi_*(\mathscr{F}_2)$; en tant que $\mathscr{B}$-homomorphisme, nous le noterons $\Psi_*(u)$. On voit donc que Ψ_* est un *foncteur covariant* de la catégorie des $\mathscr{A}$-Modules dans celle des $\mathscr{B}$-Modules. En outre, il est immédiat que ce foncteur est *exact à gauche* (G, II, 2.12).

Sur $\psi_*(\mathscr{A})$, la structure de $\mathscr{B}$-Module et la structure de faisceau d'anneaux définissent une structure de $\mathscr{B}$-Algèbre; on notera $\Psi_*(\mathscr{A})$ cette $\mathscr{B}$-Algèbre.

(4.2.2) Soient $\mathscr{M},\mathscr{N}$ deux $\mathscr{A}$-Modules. Pour tout ouvert U de Y, on a une application canonique

$$\Gamma(\psi^{-1}(U),\mathscr{M})\times\Gamma(\psi^{-1}(U),\mathscr{N})\to\Gamma(\psi^{-1}(U),\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{N})$$

qui est bilinéaire sur l'anneau $\Gamma(\psi^{-1}(U),\mathscr{A})=\Gamma(U,\psi_*(\mathscr{A}))$, et *a fortiori* sur $\Gamma(U,\mathscr{B})$; elle définit donc un homomorphisme

$$\Gamma(U,\Psi_*(\mathscr{M}))\otimes_{\Gamma(U,\mathscr{B})}\Gamma(U,\Psi_*(\mathscr{N}))\to\Gamma(U,\Psi_*(\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{N}))$$

et comme on vérifie aussitôt que ces homomorphismes sont compatibles avec les opérations de restriction, ils donnent un homomorphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{B}$-Modules

$$\Psi_*(\mathscr{M})\otimes_{\mathscr{B}}\Psi_*(\mathscr{N})\to\Psi_*(\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{N}) \tag{4.2.2.1}$$

qui ne sera en général ni injectif ni surjectif. Si $\mathscr{P}$ est un troisième $\mathscr{A}$-Module, on vérifie aussitôt que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Psi_*(\mathscr{M}) \otimes_{\mathscr{B}} \Psi_*(\mathscr{N}) \otimes_{\mathscr{B}} \Psi_*(\mathscr{P}) & \to & \Psi_*(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{N}) \otimes_{\mathscr{B}} \Psi_*(\mathscr{P}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Psi_*(\mathscr{M}) \otimes_{\mathscr{B}} \Psi_*(\mathscr{N} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{P}) & \longrightarrow & \Psi_*(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{P}) \end{array} \tag{4.2.2.2}$$

est commutatif.

(4.2.3) Soient $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{A}$-Modules. Pour tout ouvert $U \subset Y$, on a par définition $\Gamma(\psi^{-1}(U), \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}, \mathscr{N})) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}|V}(\mathscr{M}|V, \mathscr{N}|V)$, où on a posé pour alléger $V = \psi^{-1}(U)$; l'application $u \mapsto \Psi_*(u)$ est un homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}|V}(\mathscr{M}|V, \mathscr{N}|V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}|U}(\Psi_*(\mathscr{M})|U, \Psi_*(\mathscr{N})|U)$$

pour les structures de $\Gamma(U, \mathscr{B})$-modules; ces homomorphismes étant compatibles aux opérations de restriction définissent donc un homomorphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{B}$-Modules

$$\Psi_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{M}, \mathscr{N})) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(\Psi_*(\mathscr{M}), \Psi_*(\mathscr{N})). \tag{4.2.3.1}$$

(4.2.4) Si $\mathscr{C}$ est une $\mathscr{A}$-Algèbre, l'homomorphisme composé

$$\Psi_*(\mathscr{C}) \otimes_{\mathscr{B}} \Psi_*(\mathscr{C}) \to \Psi_*(\mathscr{C} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{C}) \to \Psi_*(\mathscr{C})$$

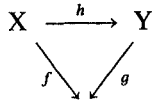
définit sur $\Psi_*(\mathscr{C})$ une structure de *$\mathscr{B}$-Algèbre*, comme il résulte de (4.2.2.2). On voit de même que si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{C}$-Module, $\Psi_*(\mathscr{M})$ est muni canoniquement d'une structure de $\Psi_*(\mathscr{C})$-Module.

(4.2.5) Considérons en particulier le cas où X est un sous-espace *fermé* de Y et où ψ est l'injection canonique $j: X \to Y$. Si $\mathscr{B}' = \mathscr{B}|X = j^{-1}(\mathscr{B})$ est la restriction du faisceau d'anneaux $\mathscr{B}$ à X, un $\mathscr{A}$-Module $\mathscr{M}$ peut être considéré comme $\mathscr{B}'$-Module au moyen de l'homomorphisme $\theta^{\#}: \mathscr{B}' \to \mathscr{A}$; $\Psi_*(\mathscr{M})$ est alors le $\mathscr{B}$-Module qui induit $\mathscr{M}$ sur X et 0 ailleurs. Si $\mathscr{N}$ est un second $\mathscr{A}$-Module, $\Psi_*(\mathscr{M}) \otimes_{\mathscr{B}} \Psi_*(\mathscr{N})$ s'identifie donc à $\Psi_*(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{B}'} \mathscr{N})$ et $\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(\Psi_*(\mathscr{M}), \Psi_*(\mathscr{N}))$ à $\Psi_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{B}'}(\mathscr{M}, \mathscr{N}))$.

(4.2.6) Soient $(Z, \mathscr{C})$ un troisième espace annelé, $\Psi' = (\psi', \theta')$ un morphisme $(Y, \mathscr{B}) \to (Z, \mathscr{C})$; si Ψ'' est le morphisme composé $\Psi' \circ \Psi$, il est clair que l'on a $\Psi''_* = \Psi'_* \circ \Psi_*$.

(4.2.7) Soit $(S, \mathscr{O}_S)$ un espace annelé et soit $f: (X, \mathscr{O}_X) \to (S, \mathscr{O}_S)$ un morphisme d'espaces annelés. Lorsque l'on fixe S, on note encore $\mathscr{A}(X)$ (si aucune confusion n'en résulte), l'image directe $f_*(\mathscr{O}_X)$, qui est une $\mathscr{O}_S$-Algèbre (4.2.4); pour tout ouvert U de S, on a $\mathscr{A}(f^{-1}(U)) = \mathscr{A}(X)|U$. De même, pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ (resp. toute $\mathscr{O}_X$-Algèbre $\mathscr{B}$), on écrit $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ (resp. $\mathscr{A}(\mathscr{B})$) l'image directe $f_*(\mathscr{F})$ (resp. $f_*(\mathscr{B})$), qui est un $\mathscr{A}(X)$-Module (resp. une $\mathscr{A}(X)$-Algèbre) et non seulement un $\mathscr{O}_S$-Module (resp. une $\mathscr{O}_S$-Algèbre).

On peut définir $\mathscr{A}(X)$ comme un *foncteur contravariant en* X, de la catégorie des S-*espaces annelés* (1.1.10) dans la catégorie des $\mathscr{O}_S$-*Algèbres*. En effet, considérons deux morphismes $f: X \to S$, $g: Y \to S$ et soit $h: X \to Y$ un S-morphisme, de sorte que le diagramme



est commutatif. On a par définition $h = (\psi, \theta)$, où $\theta: \mathscr{O}_Y \to h_*(\mathscr{O}_X) = \psi_*(\mathscr{O}_X)$ est un homomorphisme de faisceaux d'anneaux; on en déduit (4.2.2) un homomorphisme de $\mathscr{O}_S$-Algèbres $g_*(\theta): g_*(\mathscr{O}_Y) \to g_*(h_*(\mathscr{O}_X)) = f_*(\mathscr{O}_X)$, autrement dit, un homomorphisme de $\mathscr{O}_S$-Algèbres $\mathscr{A}(Y) \to \mathscr{A}(X)$, que nous noterons $\mathscr{A}(h)$. Si $h': Y \to Z$ est un second S-morphisme, on a $\mathscr{A}(h' \circ h) = \mathscr{A}(h) \circ \mathscr{A}(h')$, ce qui achève notre définition du foncteur $X \mapsto \mathscr{A}(X)$.

(4.2.8) Soient maintenant $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_Y$-Module, et $u: \mathscr{G} \to h_*(\mathscr{F})$ un homomorphisme de $\mathscr{O}_Y$-Modules. Alors $g_*(u): g_*(\mathscr{G}) \to g_*(h_*(\mathscr{F})) = f_*(\mathscr{F})$ est un homomorphisme $\mathscr{A}(\mathscr{G}) \to \mathscr{A}(\mathscr{F})$ de $\mathscr{O}_S$-Modules, que nous noterons $\mathscr{A}(u)$; en outre, le couple $(\mathscr{A}(h), \mathscr{A}(u))$ constitue un *di-homomorphisme* du $\mathscr{A}(Y)$-Module $\mathscr{A}(\mathscr{G})$ dans le $\mathscr{A}(X)$-Module $\mathscr{A}(\mathscr{F})$. L'espace annelé S étant fixé, on peut considérer les couples $(X, \mathscr{F})$, où X est un S-espace annelé et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module, comme formant une *catégorie*, en définissant un *morphisme* $(X, \mathscr{F}) \to (Y, \mathscr{G})$ comme un couple (h, u), où $h: X \to Y$ est un S-morphisme et $u: \mathscr{G} \to h_*(\mathscr{F})$ un homomorphisme de $\mathscr{O}_Y$-Modules. On peut alors dire que $(X, \mathscr{F}) \mapsto (\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(F))$ est un *foncteur contravariant* de la catégorie précédente, à valeurs dans la catégorie dont les objets sont les couples formés d'une $\mathscr{O}_S$-Algèbre et d'un Module sur cette Algèbre, et les morphismes sont les di-homomorphismes.

4.3. Image réciproque d'un $\mathscr{B}$-Module

(4.3.1) Les hypothèses et notations étant celles de (4.2.1), soient $\mathscr{G}$ un $\mathscr{B}$-Module et $\psi^{-1}(\mathscr{G})$ son image réciproque (3.7.1), qui est donc un faisceau de groupes commutatifs sur X. La définition des sections de $\psi^{-1}(\mathscr{G})$ et de $\psi^{-1}(\mathscr{B})$ (3.7.1) montre que $\psi^{-1}(\mathscr{G})$ est canoniquement muni d'une structure de $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-Module. D'autre part, l'homomorphisme $\theta^\sharp: \psi^{-1}(\mathscr{B}) \to \mathscr{A}$ munit $\mathscr{A}$ d'une structure de $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-Module, que nous noterons $\mathscr{A}_{[\theta]}$ lorsqu'il y a lieu d'éviter des confusions; le produit tensoriel $\psi^{-1}(\mathscr{G}) \otimes_{\psi^{-1}(\mathscr{B})} \mathscr{A}_{[\theta]}$ est alors muni d'une structure de $\mathscr{A}$-Module. Nous dirons que ce $\mathscr{A}$-Module est *l'image réciproque de* $\mathscr{G}$ *par le morphisme* Ψ et nous le noterons $\Psi^*(\mathscr{G})$. Si $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$ sont deux $\mathscr{B}$-Modules

sur Y, v un $\mathscr{B}$-homomorphisme $\mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$, $\psi^{-1}(v)$, comme on le vérifie aussitôt, est un $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-homomorphisme de $\psi^{-1}(\mathscr{G}_1)$ dans $\psi^{-1}(\mathscr{G}_2)$; par suite $\psi^{-1}(v) \otimes 1_{\mathscr{A}}$ est un $\mathscr{A}$-homomorphisme $\Psi^*(\mathscr{G}_1) \to \Psi^*(\mathscr{G}_2)$, que nous noterons $\Psi^*(v)$. On a donc défini Ψ^* comme un *foncteur covariant* de la catégorie des $\mathscr{B}$-Modules dans celle des $\mathscr{A}$-Modules. Ici, ce foncteur (contrairement à ψ^{-1}) n'est plus exact en général, mais seulement *exact à droite*, la tensorisation par $\mathscr{A}$ étant un foncteur exact à droite dans la catégorie des $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-Modules. Nous verrons un peu plus loin (4.4) que $\mathscr{G} \mapsto \Psi^*(\mathscr{G})$ est l'*adjoint à gauche* du foncteur $\mathscr{F} \mapsto \Psi_*(\mathscr{F})$.

Pour tout $x \in X$, on a $(\Psi^*(\mathscr{G}))_x = \mathscr{G}_{\psi(x)} \otimes_{\mathscr{B}_{\psi(x)}} \mathscr{A}_x$, en vertu de (3.7.2). Le support de $\Psi^*(\mathscr{G})$ est donc contenu dans $\psi^{-1}(\mathrm{Supp}\,\mathscr{G})$.

(4.3.2) Soit $(\mathscr{G}_\lambda)$ un système inductif de $\mathscr{B}$-Modules, et soit $\mathscr{G} = \varinjlim \mathscr{G}_\lambda$ sa limite inductive. Les homomorphismes canoniques $\mathscr{G}_\lambda \to \mathscr{G}$ définissent des $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-homomorphismes $\psi^{-1}(\mathscr{G}_\lambda) \to \psi^{-1}(\mathscr{G})$, qui donnent un homomorphisme canonique $\varinjlim \psi^{-1}(\mathscr{G}_\lambda) \to \psi^{-1}(\mathscr{G})$. Comme la fibre en un point d'une limite inductive de faisceaux est la limite inductive des fibres au même point (G, II, 1.11), l'homomorphisme canonique précédent est *bijectif* (3.7.2). En outre, le produit tensoriel commute aux limites inductives de faisceaux de modules, et on a donc un *isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\varinjlim \Psi^*(\mathscr{G}_\lambda) \simeq \Psi^*(\varinjlim \mathscr{G}_\lambda)$$

de $\mathscr{A}$-Modules.

D'autre part, pour une somme directe finie $\bigoplus_i \mathscr{G}_i$ de $\mathscr{B}$-Modules, il est clair que $\psi^{-1}\left(\bigoplus_i \mathscr{G}_i\right) = \bigoplus_i \psi^{-1}(\mathscr{G}_i)$, donc, par produit tensoriel avec $\mathscr{A}_{[\theta]}$,

$$\Psi^*\left(\bigoplus_i \mathscr{G}_i\right) = \bigoplus_i \Psi^*(\mathscr{G}_i). \tag{4.3.2.1}$$

Par passage à la limite inductive, on en déduit, en vertu de ce qui précède, que l'égalité précédente est encore vraie pour une somme directe *quelconque*.

(4.3.3) Soient $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$ deux $\mathscr{B}$-Modules; de la définition des images réciproques de faisceaux de groupes commutatifs (3.7.1), on déduit aussitôt un homomorphisme canonique

$$\psi^{-1}(\mathscr{G}_1) \otimes_{\psi^{-1}(\mathscr{B})} \psi^{-1}(\mathscr{G}_2) \to \psi^{-1}(\mathscr{G}_1 \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{G}_2)$$

de $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-Modules, et la fibre en un point d'un produit tensoriel de faisceaux étant le produit tensoriel des fibres en ce point (G, II, 2.8), on déduit de (3.7.2) que l'homomorphisme précédent est en fait un *isomorphisme*. Par produit tensoriel avec $\mathscr{A}$, on en déduit un *isomorphisme canonique* fonctoriel

$$\Psi^*(\mathscr{G}_1) \otimes_{\mathscr{A}} \Psi^*(\mathscr{G}_2) \simeq \Psi^*(\mathscr{G}_1 \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{G}_2). \tag{4.3.3.1}$$

(4.3.4) Soit $\mathscr{C}$ une $\mathscr{B}$-Algèbre; la donnée de la structure d'Algèbre sur $\mathscr{C}$ revient à la donnée d'un $\mathscr{B}$-homomorphisme $\mathscr{C} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ satisfaisant aux conditions d'associativité et de commutativité (conditions qui se vérifient sur chaque fibre); l'isomorphisme (4.3.3.1) permet de transporter cet homomorphisme en un homomorphisme de $\mathscr{A}$-Modules $\Psi^*(\mathscr{C}) \otimes_{\mathscr{A}} \Psi^*(\mathscr{C}) \to \Psi^*(\mathscr{C})$ satisfaisant aux mêmes conditions, donc $\Psi^*(\mathscr{C})$ est ainsi muni d'une structure de $\mathscr{A}$-Algèbre. En particulier, il résulte aussitôt des définitions que la $\mathscr{A}$-Algèbre $\Psi^*(\mathscr{B})$ est *égale à* $\mathscr{A}$ (à un isomorphisme canonique près). Si $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ sont deux $\mathscr{B}$-Algèbres, $v : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ un homomorphisme de $\mathscr{B}$-Algèbres, alors $\Psi^*(v) : \Psi^*(\mathscr{C}_1) \to \Psi^*(\mathscr{C}_2)$ est un homomorphisme de $\mathscr{A}$-Algèbres.

De même, si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{C}$-Module, la donnée de cette structure de Module revient à celle d'un $\mathscr{B}$-homomorphisme $\mathscr{C} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ vérifiant la condition d'associativité; d'où par transport une structure de $\Psi^*(\mathscr{C})$-Module sur $\Psi^*(\mathscr{M})$.

(4.3.5) Soit $\mathscr{J}$ un faisceau d'idéaux de $\mathscr{B}$; comme le foncteur ψ^{-1} est exact, le $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-Module $\psi^{-1}(\mathscr{J})$ s'identifie canoniquement à un faisceau d'idéaux de $\psi^{-1}(\mathscr{B})$; l'injection canonique $\psi^{-1}(\mathscr{J}) \to \psi^{-1}(\mathscr{B})$ donne alors un homomorphisme de $\mathscr{A}$-Modules $\Psi^*(\mathscr{J}) = \psi^{-1}(\mathscr{J}) \otimes_{\psi^{-1}(\mathscr{B})} \mathscr{A}_{[\theta]} \to \mathscr{A}$; nous noterons $\Psi^*(\mathscr{J})\mathscr{A}$, ou $\mathscr{J}\mathscr{A}$ si aucune confusion n'est à craindre, l'image de $\Psi^*(\mathscr{J})$ par cet homomorphisme. On a donc par définition $\mathscr{J}\mathscr{A} = \theta^\sharp(\psi^{-1}(\mathscr{J}))\mathscr{A}$ et en particulier, pour tout $x \in X$, $(\mathscr{J}\mathscr{A})_x = \theta_x^\sharp(\mathscr{J}_{\psi(x)})\mathscr{A}_x$, en tenant compte de l'identification canonique des fibres de $\psi^{-1}(\mathscr{J})$ et de celles de $\mathscr{J}$ (3.7.2). Si $\mathscr{J}_1$, $\mathscr{J}_2$ sont deux idéaux de $\mathscr{B}$, on a $(\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2)\mathscr{A} = \mathscr{J}_1(\mathscr{J}_2\mathscr{A}) = (\mathscr{J}_1\mathscr{A})(\mathscr{J}_2\mathscr{A})$.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{A}$-Module, on posera $\mathscr{J}\mathscr{F} = (\mathscr{J}.\mathscr{A}).\mathscr{F}$.

(4.3.6) Soient $(Z, \mathscr{C})$ un troisième espace annelé, $\Psi' = (\psi', \theta')$ un morphisme $(Y, \mathscr{B}) \to (Z, \mathscr{C})$; si Ψ'' est le morphisme composé $\Psi' \circ \Psi$, il résulte de la définition (4.3.1) et de (4.3.3.1) que l'on a $\Psi''^* = \Psi^* \circ \Psi'^*$.

Remarque **(4.3.7)** Sur tout espace topologique X, on peut définir un faisceau d'anneaux canonique $\mathbf{Z}_X$, savoir le faisceau simple associé au préfaisceau constant $U \mapsto \mathbf{Z}$. Il est clair alors que les faisceaux de groupes commutatifs sur X s'identifient aux $\mathbf{Z}_X$-*Modules* sur l'espace annelé $(X, \mathbf{Z}_X)$, et on peut en particulier considérer le produit tensoriel $\mathscr{F} \otimes_{\mathbf{Z}_X} \mathscr{G}$ de faisceaux de groupes commutatifs $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sur X. Si $\psi : X \to Y$ est une application continue, pour tout ouvert V de Y, on a un homomorphisme canonique d'anneaux $\mathbf{Z} \to \Gamma(\psi^{-1}(V), \mathbf{Z}_X)$, et ces homomorphismes définissent un homomorphisme de faisceaux d'anneaux sur Y, $\theta : \mathbf{Z}_Y \to \psi_*(\mathbf{Z}_X)$; on associe donc canoniquement à ψ un morphisme d'espaces annelés $f = (\psi, \theta) : (X, \mathbf{Z}_X) \to (Y, \mathbf{Z}_Y)$. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de groupes commutatifs sur Y, $f^*(\mathscr{F})$ s'identifie canoniquement à $\psi^{-1}(\mathscr{F})$; si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$

sont deux faisceaux de groupes commutatifs sur Y, on a donc (4.3.3) à isomorphisme canonique près, $\psi^{-1}(\mathscr{F}\otimes_{Z_Y}\mathscr{G})=\psi^{-1}(\mathscr{F})\otimes_{Z_X}\psi^{-1}(\mathscr{G})$. On en déduit que si ψ est un *quasi-homéomorphisme* (2.6.2), ψ^{-1} est non seulement une équivalence de la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs sur Y et de la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs sur X (3.8.1), mais aussi une équivalence de la catégorie des faisceaux d'anneaux sur Y, et de la catégorie des faisceaux d'anneaux sur X; la donnée d'une structure d'espace annelé sur Y est donc équivalente à celle d'une structure d'espace annelé sur X.

Etant donnés deux espaces annelés $(X,\mathscr{O}_X)$, $(Y,\mathscr{O}_Y)$, nous dirons qu'un morphisme d'espaces annelés $f=(\psi,\theta):(X,\mathscr{O}_X)\to(Y,\mathscr{O}_Y)$ est un *quasi-isomorphisme* si ψ est un quasi-homéomorphisme de X dans Y et $\theta:\psi^{-1}(\mathscr{O}_Y)\to\mathscr{O}_X$ un isomorphisme de faisceaux d'anneaux; lorsqu'il en est ainsi, l'espace annelé $(X,\mathscr{O}_X)$ est entièrement déterminé, à isomorphisme près, par $(Y,\mathscr{O}_Y)$, l'espace X et le quasi-homéomorphisme ψ (que l'on peut prendre arbitraire).

Lorsque f est un quasi-isomorphisme d'espaces annelés, le foncteur $\mathscr{F}\mapsto f^*(\mathscr{F})$ est une *équivalence* de la catégorie des $\mathscr{O}_Y$-Modules et de celle des $\mathscr{O}_X$-Modules, puisque $f^*(\mathscr{F})$ s'identifie ici à $\psi^{-1}(\mathscr{F})$. On en conclut par exemple des isomorphismes de bi-∂-foncteurs

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F},\mathscr{G})\simeq\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{F}),f^*(\mathscr{G})).$$

De façon générale, on peut dire que les constructions usuelles de la théorie des faisceaux et de l'algèbre homologique, faites sur l'espace annelé Y ou l'espace annelé X, sont équivalentes.

4.4. Relations entre images directes et images réciproques

(4.4.1) Les hypothèses et notations étant celles de (4.2.1), soit $\mathscr{G}$ un $\mathscr{B}$-Module. Par définition, un homomorphisme $u:\mathscr{G}\to\Psi_*(\mathscr{F})$ de $\mathscr{B}$-Modules s'appelle encore un *Ψ-morphisme de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$*, ou simplement un *homomorphisme de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$* et on l'écrit $u:\mathscr{G}\to\mathscr{F}$ quand aucune confusion n'en résulte. Se donner un tel homomorphisme revient à se donner, pour tout couple (U,V) où U est un ouvert de X, V un ouvert de Y, tels que $\psi(U)\subset V$, un *homomorphisme* $u_{U,V}:\Gamma(V,\mathscr{G})\to\Gamma(U,\mathscr{F})$ *de $\Gamma(V,\mathscr{B})$-modules*, $\Gamma(U,\mathscr{F})$ étant considéré comme $\Gamma(V,\mathscr{B})$-module au moyen de l'homomorphisme d'anneaux $\theta_{U,V}:\Gamma(V,\mathscr{B})\to\Gamma(U,\mathscr{A})$; les $u_{U,V}$ doivent en outre rendre commutatifs les diagrammes (3.5.1.1). Il suffit d'ailleurs pour définir u de se donner les $u_{U,V}$ lorsque U (resp. V) parcourt une base $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{B}'$) de la topologie de X (resp. Y) et de vérifier la commutativité de (3.5.1.1) pour ces restrictions.

(4.4.2) Sous les hypothèses de (4.2.1) et (4.2.6), soient $\mathscr{H}$ un $\mathscr{C}$-Module, $v: \mathscr{H} \to \Psi'_*(\mathscr{G})$ un Ψ'-morphisme; alors

$$w: \mathscr{H} \xrightarrow{v} \Psi'_*(\mathscr{G}) \xrightarrow{\Psi'_*(u)} \Psi'_*(\Psi_*(\mathscr{F}))$$

est un Ψ''-morphisme que l'on appelle le *composé* de u et v.

(4.4.3) Nous allons maintenant voir que l'on peut définir un *isomorphisme* canonique de *bifoncteurs* en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\Psi^*(\mathscr{G}), \mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathscr{G}, \Psi^*(\mathscr{F})) \tag{4.4.3.1}$$

que nous désignerons par $v \mapsto v_\theta^\flat$ (ou simplement $v \mapsto v^\flat$ si aucune confusion n'est possible); nous noterons $u \mapsto u_\theta^\sharp$, ou $u \mapsto u^\sharp$, l'isomorphisme réciproque. Cette définition est la suivante: en composant $v: \Psi^*(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$ avec l'application canonique $\psi^{-1}(\mathscr{G}) \to \Psi^*(\mathscr{G})$, on obtient un homomorphisme de faisceaux de groupes $v': \psi^{-1}(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$, qui est aussi un homomorphisme de $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-modules. On en déduit (3.7.1) un homomorphisme $v'^\flat: \mathscr{G} \to \psi_*(\mathscr{F}) = \Psi_*(\mathscr{F})$, qui est aussi un homomorphisme de $\mathscr{B}$-Modules comme on le vérifie sans peine; on prend $v_\theta^\flat = v'^\flat$. De même, de $u: \mathscr{G} \to \Psi_*(\mathscr{F})$, qui est un homomorphisme de $\mathscr{B}$-Modules, on déduit (3.7.1) un homomorphisme $u^\sharp: \psi^{-1}(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$ de $\psi^{-1}(\mathscr{B})$-Modules, d'où par tensorisation avec $\mathscr{A}$ un homomorphisme de $\mathscr{A}$-Modules $\Psi^*(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$, que nous désignerons par $u_\theta^\sharp$. Il est immédiat de vérifier que $(u_\theta^\sharp)_\theta^\flat = u$ et $(v_\theta^\flat)_\theta^\sharp = v$, ainsi que le caractère fonctoriel en $\mathscr{F}$ de l'isomorphisme $v \mapsto v_\theta^\flat$. Le caractère fonctoriel en $\mathscr{G}$ de $u \mapsto u_\theta^\sharp$ s'en déduit alors formellement (1.5.2) et on voit donc que $\mathscr{G} \mapsto \Psi^*(\mathscr{G})$ est le foncteur *adjoint à gauche* de $\mathscr{F} \mapsto \Psi_*(\mathscr{F})$.

Si on prend pour v l'homomorphisme identique de $\Psi^*(\mathscr{G})$, $v_\theta^\flat$ est un homomorphisme

$$\rho_{\mathscr{G}}: \mathscr{G} \to \Psi_*(\Psi^*(\mathscr{G})); \tag{4.4.3.2}$$

si on prend pour u l'homomorphisme identique de $\Psi_*(\mathscr{F})$, $u_\theta^\sharp$ est un homomorphisme

$$\sigma_{\mathscr{F}}: \Psi^*(\Psi_*(\mathscr{F})) \to \mathscr{F}; \tag{4.4.3.3}$$

ces homomorphismes seront dits *canoniques*. Ils ne sont en général ni injectifs ni surjectifs. On a des factorisations canoniques analogues à (3.5.3.4) et (3.5.4.2).

On notera que si s est une section de $\mathscr{G}$ au-dessus d'un ouvert V de Y, $\rho_{\mathscr{G}}(s)$ est la section $s' \otimes 1$ de $\Psi^*(\mathscr{G})$ au-dessus de $\psi^{-1}(\mathrm{V})$, s' étant telle que $s'_x = s_{\psi(x)}$ pour tout $x \in \psi^{-1}(\mathrm{V})$; on dit encore que $\rho_{\mathscr{G}}(s)$ est l'*image réciproque* de s par Ψ. Notons aussi que si $u: \mathscr{G} \mapsto \psi_*(\mathscr{F})$ est un homomorphisme, il définit pour tout $x \in \mathrm{X}$ un homomorphisme $u_x: \mathscr{G}_{\psi(x)} \to \mathscr{F}_x$ sur les fibres, obtenu en composant $(u^\sharp)_x: (\Psi^*(\mathscr{G}))_x \to \mathscr{F}_x$ et l'homomor-

phisme canonique $s_x \mapsto s_x \otimes 1$ de $\mathscr{G}_{\psi(x)}$ dans $(\Psi^*(\mathscr{G}))_x = \mathscr{G}_{\psi(x)} \otimes_{\mathscr{B}_{\psi(x)}} \mathscr{A}_x$. L'homomorphisme u_x s'obtient aussi par passage à la limite inductive à partir des homomorphismes $\Gamma(V, \mathscr{G}) \xrightarrow{u} \Gamma(\psi^{-1}(V), \mathscr{F}) \to \mathscr{F}_x$, où V parcourt les voisinages de $\psi(x)$.

(4.4.4) Soient $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ des $\mathscr{A}$-Modules, $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2$ des $\mathscr{B}$-Modules, u_i $(i = 1, 2)$ un homomorphisme de $\mathscr{G}_i$ dans $\mathscr{F}_i$. Nous désignerons par $u_1 \otimes u_2$ l'homomorphisme $u : \mathscr{G}_1 \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{G}_2 \to \mathscr{F}_1 \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{F}_2$ tel que $u^\# = (u_1)^\# \otimes (u_2)^\#$ (compte tenu de (4.3.3.1)); on vérifie que u est aussi le composé $\mathscr{G}_1 \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{G}_2 \to \Psi_*(\mathscr{F}_1) \otimes_{\mathscr{B}} \Psi_*(\mathscr{F}_2) \to \Psi_*(\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{F}_2)$, où la première flèche est le produit tensoriel ordinaire $u_1 \otimes_{\mathscr{B}} u_2$ et la seconde l'homomorphisme canonique (4.2.2.1).

(4.4.5) Soient $(\mathscr{G}_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système inductif de $\mathscr{B}$-Modules, et, pour tout $\lambda \in L$, soit u_λ un homomorphisme $\mathscr{G}_\lambda \to \Psi_*(\mathscr{F})$, ces homomorphismes formant un système inductif; posons $\mathscr{G} = \varinjlim \mathscr{G}_\lambda$ et $u = \varinjlim u_\lambda$; alors les $(u_\lambda)^\#$ forment un système inductif d'homomorphismes $\Psi^*(\mathscr{G}_\lambda) \to \mathscr{F}$, et la limite inductive de ce système n'est autre que $u^\#$.

(4.4.6) Soient $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ deux $\mathscr{B}$-Modules, V un ouvert de Y, $U = \psi^{-1}(V)$; l'application $v \mapsto \Psi^*(v)$ est un homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}|V}(\mathscr{M}|V, \mathscr{N}|V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}|U}(\Psi^*(\mathscr{M})|U, \Psi^*(\mathscr{N})|U)$$

pour les structures de $\Gamma(V, \mathscr{B})$-module: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}|U}(\Psi^*(\mathscr{M})|U, \Psi^*(\mathscr{N})|U)$ est normalement muni d'une structure de $\Gamma(U, \psi^{-1}(\mathscr{B}))$-module, et grâce à l'homomorphisme canonique (3.7.2) $\Gamma(V, \mathscr{B}) \to \Gamma(U, \psi^{-1}(\mathscr{B}))$, c'est donc aussi un $\Gamma(V, \mathscr{B})$-module. On voit aussitôt que ces homomorphismes sont compatibles avec les restrictions, et par suite définissent un homomorphisme canonique fonctoriel

$$\gamma : \mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(\mathscr{M}, \mathscr{N}) \to \Psi_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\Psi^*(\mathscr{M}), \Psi^*(\mathscr{N})))\,;$$

il correspond par suite aussi à cet homomorphisme l'homomorphisme

$$\gamma^\# : \Psi^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(\mathscr{M}, \mathscr{N})) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\Psi^*(\mathscr{M}), \Psi^*(\mathscr{N}))$$

et ces homomorphismes canoniques sont fonctoriels en $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$.

(4.4.7) Supposons que $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) soit une $\mathscr{A}$-Algèbre (resp. une $\mathscr{B}$-Algèbre). Si $u : \mathscr{G} \to \Psi_*(\mathscr{F})$ est un homomorphisme de $\mathscr{B}$-Algèbres, $u^\#$ est un homomorphisme $\Psi^*(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$ de $\mathscr{A}$-Algèbres; cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{G} \\ \downarrow & & \downarrow u \\ \Psi_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{F}) & \longrightarrow & \Psi_*(\mathscr{F}) \end{array}$$

et de (4.4.4). De même, si $v : \Psi^*(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$ est un homomorphisme de $\mathscr{A}$-Algèbres, $v^\flat : \mathscr{G} \to \Psi_*(\mathscr{F})$ est un homomorphisme de $\mathscr{B}$-Algèbres. On a donc un isomorphisme canonique de bifoncteurs

$$\text{(4.4.7.1)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Alg}}(\Psi^*(\mathscr{G}), \mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}\text{-Alg}}(\mathscr{G}, \Psi_*(\mathscr{F})).$$

On peut aussi dire que $\mathscr{G} \mapsto \Psi^*(\mathscr{G})$ est *adjoint à gauche* du foncteur $\mathscr{F} \mapsto \Psi_*(\mathscr{F})$ de la catégorie des $\mathscr{A}$-Algèbres dans celle des $\mathscr{B}$-Algèbres.

(4.4.8) Avec les notations de (4.4.2), on vérifie que $w^\sharp$ est l'homomorphisme

$$\Psi^*(\Psi'^*(\mathscr{H})) \xrightarrow{\Psi^*(v^\sharp)} \Psi^*(\mathscr{G}) \xrightarrow{u^\sharp} \mathscr{F}.$$

4.5. Immersions ouvertes et morphismes représentables par des immersions ouvertes

(4.5.1) Etant donné un espace annelé $(X, \mathscr{O}_X)$, on appelle *immersion ouverte* d'un espace annelé $(Y, \mathscr{O}_Y)$ dans $(X, \mathscr{O}_X)$, un morphisme $f = (\psi, \theta) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$, composé de l'injection canonique $(U, \mathscr{O}_X|U) \to (X, \mathscr{O}_X)$ de l'espace annelé *induit sur un ouvert* U de X, et d'un *isomorphisme* $(Y, \mathscr{O}_Y) \simeq (U, \mathscr{O}_X|U)$; c'est un monomorphisme. Il est immédiat que tout isomorphisme d'espaces annelés est une immersion ouverte et que la *composée* de deux immersions ouvertes est une immersion ouverte.

(4.5.2) Montrons maintenant que si $j : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ est une immersion ouverte et $g : (Z, \mathscr{O}_Z) \to (X, \mathscr{O}_X)$ un morphisme quelconque d'espaces annelés, alors, dans la catégorie des espaces annelés, *le produit fibré* $Y \times_X Z$ *existe* (pour les morphismes j et g), et la projection $j' = p_2 : Y \times_X Z \to Z$ est une immersion ouverte. A un isomorphisme près, on peut supposer que Y est un ouvert de X, $\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X|Y$, et j l'injection canonique. Si $g = (\psi, \theta)$, soit P l'ouvert $\psi^{-1}(Y)$ de Z; nous allons voir que l'espace annelé $(P, \mathscr{O}_P)$ *induit* par Z sur l'ouvert P de Z est le produit fibré cherché lorsqu'on définit la projection $p_2 : P \to Z$ comme l'injection canonique, et la projection $p_1 : P \to Y$ comme égale au morphisme (ψ_1, θ_1), où ψ_1 est la restriction de ψ à P, considérée comme application dans $Y \supset \psi(P)$, et $\theta_1^\sharp$ la restriction de $\theta^\sharp : \psi^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_Z$ à l'ouvert P, $\psi_1^{-1}(\mathscr{O}_X)$ s'identifiant à $\psi^{-1}(\mathscr{O}_X)|P$ (3.7.1). Il est clair que l'on a $g \circ p_2 = j \circ p_1$. Pour montrer qu'on a bien ainsi obtenu un produit fibré, considérons un espace annelé T et deux morphismes $u = (\rho, \alpha) : T \to Y$, $v = (\sigma, \beta) : T \to Z$, tels que $j \circ u = g \circ v$. Cette dernière relation montre d'abord que $\psi(\sigma(T)) \subset U$, donc $\sigma(T) \subset \psi^{-1}(U) = P$;

si l'on note τ l'application σ considérée comme application de T dans P, on a alors $\tau^{-1}(\mathscr{O}_P) = \sigma^{-1}(\mathscr{O}_Z)$; on définit donc un morphisme $w=(\tau,\gamma): T \to P$ en prenant $\gamma^\# : \tau^{-1}(\mathscr{O}_P) \to \mathscr{O}_T$ égal à $\beta^\#$, et il est clair que ce morphisme est le seul tel que $p_2 \circ w = v$. Il reste à voir que $p_1 \circ w = u$; or il est clair que $\psi_1 \circ \tau$ est égale à $\psi \circ \sigma$, donc à ρ; on a donc $\tau^{-1}(\psi_1^{-1}(\mathscr{O}_Y)) = \sigma^{-1}(\psi^{-1}(\mathscr{O}_X))$ et $\gamma^\# \circ \theta_1^\#$ est égal à $\beta^\# \circ \theta^\#$, donc à $\alpha^\#$, ce qui achève la démonstration.

(4.5.3) Les immersions ouvertes sont donc des morphismes de la catégorie ***Esp. ann*** des espaces annelés, qui satisfont aux conditions de (1.7.7) et on peut donc parler de morphismes fonctoriels $F \to G$ (où F et G sont des foncteurs contravariants de ***Esp. ann*** dans ***Ens***), qui sont *représentables par des immersions ouvertes.* Il en est de même lorsqu'au lieu de la catégorie ***Esp. ann***, on considère la catégorie $\mathbf{Esp.\ ann}_{/S}$, où S est un espace annelé «base» (1.1.11).

Proposition (4.5.4) *Soient* S *un espace annelé,* $F : (\mathbf{Esp.\ ann}_{/S})^\circ \to \mathbf{Ens}$ *un foncteur contravariant,* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-foncteurs de* F (1.7.1). *On suppose vérifiées les hypothèses suivantes*:

(i) *Chacun des morphismes fonctoriels canoniques* $u_i : F_i \to F$ *est représentable par une immersion ouverte.*

(ii) *Pour tout* S*-espace annelé* X, *l'application* $U \mapsto F(U)$, *où* U *parcourt l'ensemble des* S*-espaces annelés induits sur les ouverts de* X, *est un faisceau d'ensembles.*

(iii) *Pour tout* S*-espace annelé* Z *et tout morphisme fonctoriel* $\mathbf{h}_Z \to F$, *si* Z_i *est le* S*-espace annelé représentant le foncteur* $F_i \times_F \mathbf{h}_Z$ (1.7.4) *et* U_i *l'image dans* Z *de l'espace sous-jacent à* Z_i (image qui est un ouvert de Z, puisque le morphisme $Z_i \to Z$ est une immersion ouverte par (i)), *alors les* U_i *forment un recouvrement de* Z.

(iv) *Chaque foncteur* F_i *est représentable par un* S*-espace annelé* X_i.

Dans ces conditions, F *est représentable par un* S*-espace annelé* X, *et les images des espaces sous-jacents aux* X_i *par les morphismes* $X_i \to X$ (qui sont des immersions ouvertes par (i)) *forment un recouvrement ouvert de* X.

Pour tout couple d'indices (i,j), posons $F_{ij} = F_i \times_F F_j$ (1.7.2), de sorte que F_{ij} est un *sous-foncteur* de F_i et de F_j et que l'on a un diagramme commutatif de morphismes fonctoriels

$$\begin{array}{ccc} F_{ij} & \xrightarrow{u_{ji}} & F_i \\ {\scriptstyle u_{ij}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_i} \\ F_j & \xrightarrow[u_j]{} & F \end{array}$$

où u_{ji} et u_{ij} sont, en vertu de (i) et de (1.7.7), représentables par des immersions ouvertes. En vertu de (iv), F_i et F_j sont représentables respectivement par des couples (X_i, ξ_i), (X_j, ξ_j), où $\xi_i \in F(X_i)$, $\xi_j \in F(X_j)$; on déduit de (1.7.6) que F_{ij} est représentable par un couple (X_{ij}, ξ_{ij}) avec $\xi_{ij} \in F(X_{ij})$ et qu'il existe des immersions ouvertes uniques $f_{ji} : X_{ij} \to X_i$, $f_{ij} : X_{ij} \to X_j$ telles que $u_{ji} = \mathbf{h}_{f_{ji}}$, $u_{ij} = \mathbf{h}_{f_{ij}}$ et que, pour tout S-morphisme $v : Y \to X_{ij}$, on ait

$$\begin{aligned}(u_{ji}(Y))(F(v)(\xi_{ij})) &= F(f_{ji} \circ v)(\xi_i),\\ (u_{ij}(Y))(F(v)(\xi_{ij})) &= F(f_{ij} \circ v)(\xi_j).\end{aligned} \tag{4.5.4.1}$$

Notons U_{ji} (resp. U_{ij}) le S-espace annelé induit par X_i (resp. X_j) sur l'ouvert image par f_{ji} (resp. f_{ij}) de l'espace sous-jacent à X_{ij}; on peut écrire $f_{ji} = \rho_{ji} \circ \varphi_{ji}$ (resp. $f_{ij} = \rho_{ij} \circ \varphi_{ij}$), où $\rho_{ji} : U_{ji} \to X_i$ (resp. $\rho_{ij} : U_{ij} \to X_j$) est l'injection canonique, $\varphi_{ji} : X_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$ (resp. $\varphi_{ij} : X_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ij}$) un isomorphisme; on posera $\zeta_{ji} = F(\varphi_{ji}^{-1})(\xi_{ij})$, $\zeta_{ij} = F(\varphi_{ij}^{-1})(\xi_{ij})$. Si on pose $\theta_{ij} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{ji}^{-1}$, θ_{ij} est un S-*isomorphisme* de U_{ji} sur U_{ij}, et l'on a, en vertu de (4.5.4.1),

$$F(\theta_{ij})(\zeta_{ij}) = \zeta_{ji}. \tag{4.5.4.2}$$

Considérons maintenant un troisième indice k, et posons

$$F_{ijk} = F_{ij} \times_{F_i} F_{ik} = (F_i \times_F F_j) \times_{F_i} (F_i \times_F F_k).$$

Alors F_{ijk} est représentable par un couple (X_{ijk}, ξ_{ijk}) de sorte qu'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_{ijk} & \longrightarrow & X_{ik} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{ki}} \\ X_{ij} & \xrightarrow[f_{ji}]{} & X_i \end{array}$$

où toutes les flèches sont des immersions ouvertes; compte tenu de (4.5.2), cela donne un isomorphisme $\varphi_i : U_{ji} \cap U_{ki} \xrightarrow{\sim} X_{ijk}$ tel que si ζ_i est l'image commune de ζ_{ji} et ζ_{ki} par les applications transformées par F des injections canoniques $U_{ji} \cap U_{ki} \to U_{ji}$ et $U_{ji} \cap U_{ki} \to U_{ki}$ on ait $F(\varphi_i)(\xi_{ijk}) = \zeta_i$.

En vertu de l'associativité du produit fibré de foncteurs, il y a des isomorphismes fonctoriels canoniques de F_{ijk} sur $F_{ij} \times_{F_j} F_{jk}$ et $F_{ik} \times_{F_k} F_{jk}$; identifiant ainsi ces deux derniers à F_{ijk}, on en déduit comme ci-dessus des isomorphismes $\varphi_j : U_{ij} \cap U_{kj} \xrightarrow{\sim} X_{ijk}$, $\varphi_k : U_{ik} \cap U_{jk} \xrightarrow{\sim} X_{ijk}$ et des éléments $\zeta_j \in F(U_{ij} \cap U_{kj})$, $\zeta_k \in F(U_{ik} \cap U_{jk})$ tels que $F(\varphi_j)(\xi_{ijk}) = \zeta_j$, $F(\varphi_k)(\xi_{ijk}) = \zeta_k$.

Si alors θ'_{ij} est la restriction de θ_{ij} à $U_{ji} \cap U_{ki}$, θ'_{jk} la restriction de θ_{jk} à $U_{kj} \cap U_{ij}$, θ'_{ik} la restriction de θ_{ik} à $U_{ki} \cap U_{ji}$, on a $F(\theta'_{ij})(\zeta_j) = \zeta_i$, $F(\theta'_{jk})(\zeta_k) = \zeta_j$, $F(\theta'_{ik})(\zeta_k) = \zeta_i$ en vertu des définitions de $\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k$, du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_{ji} & \xrightarrow{\theta_{ij}} & U_{ij} \\ \uparrow & & \uparrow \\ U_{ji} \cap U_{ki} & \xrightarrow[\theta'_{ij}]{} & U_{ij} \cap U_{kj} \end{array}$$

et des deux analogues. Mais on a aussi $F(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(\zeta_j) = \zeta_i$, $F(\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j)(\zeta_k) = \zeta_j$, $F(\varphi_k^{-1} \circ \varphi_i)(\zeta_k) = \zeta_i$; on en conclut que l'on a $\theta'_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$, $\theta'_{jk} = \varphi_k^{-1} \circ \varphi_j$, $\theta'_{ik} = \varphi_k^{-1} \circ \varphi_i$ (1.1.8), et par suite que θ'_{ij}, θ'_{jk} et θ'_{ik} sont des *isomorphismes* qui vérifient la *condition de recollement* $\theta'_{ik} = \theta'_{jk} \circ \theta'_{ij}$. On voit donc (4.1.7) qu'il existe un S-espace annelé X, un *recouvrement ouvert* (Z_i) de X et pour chaque i un S-isomorphisme $\psi_i : X_i \xrightarrow{\sim} Z_i$, tels que l'image de U_{ji} par ψ_i soit $Z_i \cap Z_j$ et que l'on ait $\theta_{ij} = (\psi_j^{-1} \circ \psi_i) | U_{ji}$. En outre, si l'on pose $F(\psi_i^{-1})(\xi_i) = \xi'_i$, et si $\rho'_{ji} : Z_i \cap Z_j \to Z_i$, $\rho'_{ij} : Z_i \cap Z_j \to Z_j$ sont les injections canoniques, il résulte de (4.5.4.2) que l'on a $F(\rho'_{ji})(\xi'_i) = F(\rho'_{ij})(\xi'_j)$ quels que soient i, j. Mais en vertu de la condition (ii), cela entraîne qu'il existe un élément $\xi \in F(X)$ tel que si $\rho'_i : Z_i \to X$ est l'injection canonique, on ait $F(\rho'_i)(\xi) = \xi'_i$ pour tout i.

Montrons enfin que le couple (X, ξ) *représente* le foncteur F. Considérons donc un S-espace annelé T, et l'application $g \mapsto F(g)(\xi)$, qui applique $\mathrm{Hom}_S(T, X)$ dans $F(T)$; il s'agit de voir que cette application est *bijective*.

Donnons-nous donc un élément $\alpha \in F(T)$ et considérons le morphisme fonctoriel $\mathbf{h}_T \to F$ qu'il définit (1.1.4). En vertu de la condition (iii), pour chaque i, il y a un ouvert T_i de T tel que, si α_i est l'image de α par $F(\sigma_i)$, où $\sigma_i : T_i \to T$ est l'injection canonique, le couple $(T_i, (\alpha_i, \sigma_i))$ représente le foncteur $F_i \times_F \mathbf{h}_T$; en outre (T_i) est un recouvrement de T. Mais puisque F_i est représenté par le couple (Z_i, ξ'_i), il existe un S-morphisme $g_i : T_i \to Z_i$ et un seul tel que l'on ait $F(g_i)(\xi'_i) = \alpha_i$ pour tout i. Montrons que si $\sigma_{ji} : T_i \cap T_j \to T_i$ et $\sigma_{ij} : T_i \cap T_j \to T_j$ sont les injections canoniques, les images de $T_i \cap T_j$ par $g_i \circ \sigma_{ji}$ et $g_j \circ \sigma_{ij}$ sont contenues dans $Z_i \cap Z_j$ et que $g_i \circ \sigma_{ji}$ et $g_j \circ \sigma_{ij}$, considérés comme morphismes de $T_i \cap T_j$ dans $Z_i \cap Z_j$, sont égaux. En effet, on a $F(\sigma_{ji})(\alpha_i) = F(\sigma_{ij})(\alpha_j)$, donc $F(g_i \circ \sigma_{ji})(\xi'_i) = F(g_j \circ \sigma_{ij})(\xi'_j)$, et comme le foncteur produit fibré F_{ij} est représenté par $(Z_i \cap Z_j, \xi'_{ij})$, où $\xi'_{ij} = F(\rho'_{ji})(\xi'_i) = F(\rho'_{ij})(\xi'_j)$, on voit qu'il existe un morphisme unique $g_{ij} : T_i \cap T_j \to Z_i \cap Z_j$ tel que $g_i \circ \sigma_{ji} = \rho'_{ji} \circ g_{ij}$ et $g_i \circ \sigma_{ij} = \rho'_{ij} \circ g_{ij}$, ce qui prouve notre assertion.

Il y a par suite un S-morphisme $g: T \to X$ qui coïncide avec $\rho'_i \circ g_i$ dans chacun des T_i, autrement dit $g \circ \sigma_i = \rho'_i \circ g_i$. On a alors $F(\sigma_i)(F(g)(\xi)) = F(g_i)(F(\rho'_i)(\xi)) = F(g_i)(\xi'_i) = \alpha_i = F(\sigma_i)(\alpha)$ pour tout i; en vertu de la condition (ii), cela implique que $F(g)(\xi) = \alpha$.

Enfin, si g' est un S-morphisme de T dans X tel que $F(g')(\xi) = \alpha$, on a $F(g' \circ \sigma_i)(\xi) = F(\sigma_i)(\alpha) = \alpha_i \in F_i(T_i)$. Or, si l'on considère le morphisme fonctoriel $\mathbf{h}_X \to F$ défini par ξ, il résulte de la condition (i) que $(Z_i, (\xi'_i, \rho'_i))$ représente le foncteur $F_i \times_F \mathbf{h}_X$; comme l'élément $(\alpha_i, g' \circ \sigma_i)$ appartient à $(F_i \times_F \mathbf{h}_X)(T_i)$ d'après ce qui précède, il s'écrit $(F_i(g'_i)(\xi'_i), \rho'_i \circ g'_i)$ pour un seul S-morphisme $g'_i: Z_i \to T_i$. Or, on a vu plus haut que le seul S-morphisme tel que $F_i(g'_i)(\xi'_i) = \alpha_i$ était g_i; on a donc $g' \circ \sigma_i = \rho'_i \circ g'_i$ pour tout i, et par suite $g' = g$. CQFD.

Corollaire (4.5.5) *Soient* S *un espace annelé,* (S_i) *une famille d'espaces annelés induits par* S *sur des ouverts* S_i *formant un recouvrement ouvert de* S. *Soit* $F: (\boldsymbol{Esp.ann}_{/S})^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ *un foncteur contravariant, vérifiant la condition* (ii) *de* (4.5.4). *Alors, pour que* F *soit représentable, il faut et il suffit que chacun des foncteurs* $F_i = F \times_{\mathbf{h}_S} \mathbf{h}_{S_i}$ *le soit.*

La condition est nécessaire puisque l'on sait (4.5.2) que le produit fibré $X \times_S S_i$ existe pour tout S-espace annelé X. Pour voir qu'elle est suffisante, prouvons que les F_i satisfont aux conditions (i) et (iii) de (4.5.4). Or, pour tout S-espace annelé X, on a $F_i \times_F \mathbf{h}_X = \mathbf{h}_X \times_{\mathbf{h}_S} \mathbf{h}_{S_i}$ à isomorphisme près, et $X \times_S S_i$ existe et est (à isomorphisme près) induit sur un ouvert X_i de X (4.5.2). En outre, si $\psi: X \to S$ est le morphisme structural, X_i a pour espace sous-jacent l'ouvert $\psi^{-1}(S_i)$ (4.5.2), et ces ouverts forment donc un recouvrement de X, ce qui achève la démonstration.

Remarque **(4.5.6)** Un foncteur contravariant quelconque

(4.5.6.1) $$F: (\boldsymbol{Esp.ann}_{/S})^\circ \to \boldsymbol{Ens}$$

définit, pour tout S-espace annelé X, un *préfaisceau d'ensembles* $U \mapsto F(U)$ sur X (U parcourant l'ensemble des S-espaces annelés induits sur les ouverts de X). Lorsque pour *tout* S-espace annelé X ce préfaisceau est un faisceau (condition (ii) de (4.5.4)), on dit encore que F est un *faisceau sur la catégorie* $\boldsymbol{Esp.ann}_{/S}$ (expression qui apparaît ici comme un abus de langage, mais sera justifiée plus tard par la théorie générale des faisceaux sur les catégories); ces foncteurs forment donc une sous-catégorie pleine de la catégorie $\boldsymbol{Hom}((\boldsymbol{Esp.ann}_{/S})^\circ, \boldsymbol{Ens})$, notée $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Esp.ann}_{/S}}$. Il résulte de (1.1.3) et (3.2.6) qu'une *limite projective* de foncteurs de $\boldsymbol{Hom}((\boldsymbol{Esp.ann}_{/S})^\circ, \boldsymbol{Ens})$ qui sont des faisceaux, est encore un faisceau.

Un foncteur (4.5.6.1) qui est *représentable* est toujours un *faisceau:* il est clair en effet que le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Hom}_S(U, Z)$ sur un espace

annelé X est un faisceau, car pour tout recouvrement ouvert (U_α) d'un ouvert U de X, la donnée d'un S-morphisme de U dans Z équivaut à se donner une famille de S-morphismes $f_\alpha: U_\alpha \to Z$ telle que pour tout couple d'indices α, β, les restrictions de f_α et de f_β à $U_\alpha \cap U_\beta$ coïncident.

On peut donc dire, compte tenu de (1.1.8), qu'on a un foncteur *pleinement fidèle* $Z \mapsto \mathbf{h}_Z$ de la catégorie $\boldsymbol{Esp.ann}_{/S}$ dans la catégorie $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Esp.ann}_{/S}}$, permettant d'identifier la première à une sous-catégorie *pleine* de la seconde.

Remarque **(4.5.7)** Tous les résultats de cette section sont valables sans changement lorsqu'au lieu de la catégorie des espaces annelés, on considère la sous-catégorie (non pleine) des *espaces localement annelés* (4.1.12): en effet, un espace annelé X obtenu par recollement d'espaces localement annelés X_i est localement annelé, et si un morphisme d'espaces annelés $X \to S$ (où S est localement annelé) est tel que sa restriction à chaque X_i soit un morphisme d'espace localement annelé, c'est un morphisme d'espace localement annelé.

5. Faisceaux quasi-cohérents et faisceaux cohérents

5.1. Faisceaux quasi-cohérents

(5.1.1) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module. La donnée d'un homomorphisme $u: \mathcal{O}_X \to \mathscr{F}$ de $\mathcal{O}_X$-Modules équivaut à celle de la section $s = u(1) \in \Gamma(X, \mathscr{F})$. En effet, lorsque s est donnée, pour toute section $t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, on a nécessairement $u(t) = t \circ (s|U)$; on dit que u est *défini par la section* s. Si maintenant I est un ensemble d'indices quelconque, considérons le faisceau somme directe $\mathcal{O}_X^{(I)}$, et pour tout $i \in I$, soit h_i l'injection canonique du i-ème facteur dans $\mathcal{O}_X^{(I)}$; on sait que $u \mapsto (u \circ h_i)$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathscr{F})$ sur le produit $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{F}))^I$. Il y a donc correspondance biunivoque canonique entre les homomorphismes $u: \mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathscr{F}$ et les *familles de sections* $(s_i)_{i \in I}$ *de* $\mathscr{F}$ *au-dessus de* X. L'homomorphisme u correspondant à (s_i) applique un élément $(a_i) \in (\Gamma(U, \mathcal{O}_X))^{(I)}$ sur $\sum_{i \in I} a_i \circ (s_i|U)$.

On dit que $\mathscr{F}$ est *engendré par la famille* (s_i) si l'homomorphisme $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathscr{F}$ défini par cette famille est *surjectif* (autrement dit, si, pour tout $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module engendré par les $(s_i)_x$). On dit que $\mathscr{F}$ est *engendré par ses sections au-dessus de* X s'il est engendré par la famille de toutes ces sections (ou par une sous-famille), autrement dit, s'il existe un homomorphisme surjectif $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathscr{F}$ pour un I convenable.

On notera qu'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ peut être tel qu'il existe un point $x_0 \in X$ pour lequel $\mathscr{F}|U$ n'est pas engendré par ses sections au-dessus de U, *quel que soit le voisinage ouvert* U *de* x_0: il suffit de prendre $X = \mathbf{R}$, pour $\mathcal{O}_X$ le faisceau simple $\mathbf{Z}$, pour $\mathscr{F}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$ tel que $\mathscr{F}_0 = \{0\}$, $\mathscr{F}_x = \mathbf{Z}$ pour $x \neq 0$, et enfin $x_0 = 0$: la seule section de $\mathscr{F}|U$ au-dessus de U est 0 pour un voisinage U de 0.

(5.1.2) Soit $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module engendré par ses sections au-dessus de X, alors l'homomorphisme canonique $f^*(f_*(\mathscr{F})) \to \mathscr{F}$ (4.4.3.3) est *surjectif*: en effet, avec les notations de (5.1.1), $s_i \otimes 1$ est une section de $f^*(f_*(\mathscr{F}))$ au-dessus de X, et son image dans $\mathscr{F}$ est s_i. L'exemple de (5.1.1) où f est l'identité, montre que la réciproque de cette proposition est inexacte en général.

(5.1.3) On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ est *quasi-cohérent* si, pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$ soit isomorphe au *conoyau* d'un homomorphisme de la forme $\mathcal{O}_X^{(I)}|U \to \mathcal{O}_X^{(J)}|U$, où I et J sont des ensembles d'indices arbitraires. Il est clair que $\mathcal{O}_X$ lui-même est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, et que toute somme directe *finie* de $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent. On dit qu'une $\mathcal{O}_X$-*Algèbre* $\mathscr{A}$ est *quasi-cohérente* si elle l'est en tant que $\mathcal{O}_X$-Module.

(5.1.4) Soit $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si $\mathscr{G}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent, alors $f^*(\mathscr{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent. En effet, pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert V de $f(x)$ dans Y tel que $\mathscr{G}|V$ soit le conoyau d'un homomorphisme $\mathcal{O}_Y^{(I)}|V \to \mathcal{O}_Y^{(J)}|V$. Si $U = f^{-1}(V)$, et si f_U est la restriction de f à U, on a $f^*(\mathscr{G})|U = f_U^*(\mathscr{G}|V)$; comme f_U^* est exact à droite et commute aux sommes directes, $f_U^*(\mathscr{G}|V)$ est conoyau d'un homomorphisme $\mathcal{O}_X^{(I)}|U \to \mathcal{O}_X^{(J)}|U$. On voit de même que si $\mathscr{G}$ est engendré par ses sections au-dessus de Y (5.1.1), $f^*(\mathscr{G})$ est engendré par ses sections au-dessus de X.

5.2. Faisceaux de type fini

(5.2.1) On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ est *de type fini* si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$ soit engendré par une famille *finie* de sections au-dessus de U, ou encore soit isomorphe à un faisceau quotient d'un faisceau de la forme $(\mathcal{O}_X|U)^p$ où p est fini. Tout faisceau quotient d'un faisceau de type fini est de type fini, ainsi que toute somme directe finie et tout produit tensoriel fini de faisceaux de type fini. Un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini n'est pas nécessairement quasi-cohérent, comme on peut le voir pour le $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{O}_X/\mathscr{F}$, où $\mathscr{F}$ est l'exemple de (5.1.1). Si $\mathscr{F}$ est de type fini, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module de type fini pour tout $x \in X$, mais l'exemple (5.1.1) montre que cette condition nécessaire n'est pas en général suffisante.

Proposition (5.2.2) *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module de type fini.*

(i) *Si s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des sections de $\mathscr{F}$ au-dessus d'un voisinage ouvert U d'un point x et si les $(s_i)_x$ engendrent $\mathscr{F}_x$, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que les $(s_i)_y$ engendrent $\mathscr{F}_y$ pour tout $y \in V$.*

(ii) *Si $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module, $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorphisme tel que $u_x = 0$, il existe un voisinage U de x tel que $u|U = 0$.*

(iii) *Si $v : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ est un homomorphisme tel que v_x soit surjectif, il existe un voisinage V de x tel que $v|V$ soit un épimorphisme.*

(iv) *Le support de $\mathscr{F}$ (3.1.5) est fermé.*

(i) Soient t_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ des sections de $\mathscr{F}$ au-dessus d'un voisinage $U' \subset U$ de x qui engendrent $\mathscr{F}|U'$. Puisque les $(s_i)_x$ engendrent $\mathscr{F}_x$, il existe des sections a_{ij} de $\mathscr{O}_X$ au-dessus d'un voisinage $U'' \subset U'$ de x telles que $(t_j)_x = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij})_x (s_i)_x$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$. On en conclut qu'il existe un voisinage $V \subset U''$ de x tel que pour tout $y \in V$, on ait $(t_j)_y = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij})_y (s_i)_y$, donc les $(s_i)_y$ engendrent $\mathscr{F}_y$ pour $y \in V$.

L'assertion (iv) résulte aussitôt de (i) en prenant $n = 1$, $(s_1)_x = 0$. L'assertion (iii) découle de (iv) en considérant Coker (v) qui est de type fini. Enfin, (ii) résulte aussi de (iv) en considérant $\mathrm{Im}(u)$, qui est de type fini.

Corollaire (5.2.2.1) *Supposons que $(X, \mathscr{O}_X)$ soit un espace localement annelé, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module de type fini. L'ensemble* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *est alors l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathscr{F}_x \neq 0$.*

En effet, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathscr{O}_x$-module de type fini, et comme $\mathfrak{m}_x$ est le radical de $\mathscr{O}_x$, le corollaire résulte du lemme de Nakayama.

Corollaire (5.2.2.2) *Soient $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace localement annelé, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-Modules de type fini. Alors on a*

$$\mathrm{Supp}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}) = \mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{G}). \tag{5.2.2.3}$$

Comme le produit tensoriel de deux $\kappa(x)$-espaces vectoriels ne peut être nul que si l'un de ces espaces vectoriels l'est, la formule (5.2.2.3) résulte de (5.2.2.1) et de (4.1.10).

(5.2.3) Supposons X *quasi-compact*, et soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-Modules tels que $\mathscr{G}$ soit de *type fini*, $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorphisme *surjectif*. Supposons de plus que $\mathscr{F}$ soit limite inductive d'un système inductif filtrant $(\mathscr{F}_\lambda)$ de $\mathscr{O}_X$-Modules. Alors il existe un indice μ tel que l'homomorphisme $\mathscr{F}_\mu \to \mathscr{G}$ soit *surjectif*. En effet, pour tout $x \in X$, il existe un système fini de sections s_i de $\mathscr{G}$ au-dessus d'un voisinage ouvert $U(x)$ de x tel que les $(s_i)_y$ engendrent $\mathscr{G}_y$ pour tout $y \in U(x)$; il y a donc un voisinage ouvert $V(x) \subset U(x)$ de x et n sections t_i de $\mathscr{F}$ au-dessus de $V(x)$ telles que $s_i|V(x) = u(t_i)$ pour tout i; on peut en outre supposer que

les t_i sont les images canoniques de sections d'un même faisceau $\mathscr{F}_{\lambda(x)}$ au-dessus de $V(x)$. Couvrons alors X avec un nombre fini de voisinages $V(x_k)$, et soit μ un indice supérieur à tous les $\lambda(x_k)$; il est clair que cet indice répond à la question.

Supposant toujours X quasi-compact, soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module de type fini engendré par ses sections au-dessus de X (5.1.1); alors $\mathscr{F}$ est engendré par une sous-famille *finie* de ces sections: il suffit en effet de couvrir X par un nombre fini de voisinages ouverts U_k tels que, pour chaque k, il y ait un nombre fini de sections s_{ik} de $\mathscr{F}$ au-dessus de X dont les restrictions à U_k engendrent $\mathscr{F}|U_k$; il est clair que les s_{ik} engendrent alors $\mathscr{F}$.

(5.2.4) Soit $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_Y$-Module de type fini, alors $f^*(\mathscr{G})$ est un $\mathscr{O}_X$-module de type fini. En effet, pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert V de $f(x)$ dans Y et un homomorphisme surjectif $v: \mathscr{O}_V^p|V \to \mathscr{G}|V$. Si $U = f^{-1}(V)$ et si f_U est la restriction de f à U, on a $f^*(\mathscr{G})|U = f_U^*(\mathscr{G}|V)$; comme f_U^* est exact à droite (4.3.1) et commute aux sommes directes (4.3.2), $f_U^*(v)$ est un homomorphisme surjectif $\mathscr{O}_X^p|U \to f^*(\mathscr{G})|U$.

Corollaire (5.2.4.1) *Soit $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces localement annelés* (4.1.9). *Pour tout $\mathscr{O}_Y$-Module $\mathscr{G}$ de type fini, on a*

$$\text{(5.2.4.2)} \qquad \operatorname{Supp}(f^*(\mathscr{G})) = f^{-1}(\operatorname{Supp}(\mathscr{G})).$$

Cela résulte de (5.2.2.1) et (4.1.13).

(5.2.5) On dit qu'un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ *admet une présentation finie* si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$ soit isomorphe à un *conoyau d'un* $(\mathscr{O}_X|U)$-*homomorphisme* $\mathscr{O}_X^p|U \to \mathscr{O}_X^q|U$, p et q étant deux entiers > 0. Un tel $\mathscr{O}_X$-Module est donc de type fini et quasi-cohérent. Si $f: X \to Y$ est un morphisme d'espaces annelés, et si $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_Y$-Module admettant une présentation finie, $f^*(\mathscr{G})$ admet une présentation finie, comme le montre le raisonnement de (5.1.4).

(5.2.6) Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module admettant une présentation finie (5.2.5); alors, pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{H}$, l'homomorphisme canonique fonctoriel

$$(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{H}))_x \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}_x, \mathscr{H}_x)$$

est *bijectif* (T, 4.1.1).

(5.2.7) Soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-Modules ayant une présentation finie. Si, pour un $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ et $\mathscr{G}_x$ sont deux $\mathscr{O}_x$-modules *isomorphes*, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$ et $\mathscr{G}|U$ soient *isomorphes*. En effet, si $\varphi: \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ et $\psi: \mathscr{G}_x \to \mathscr{F}_x$ sont deux isomorphismes réci-

proques, il existe, d'après (5.2.6), un voisinage ouvert V de x et une section u (resp. v) de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ (resp. $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G},\mathscr{F})$) au-dessus de V telle que $u_x=\varphi$ (resp. $v_x=\psi$). Comme $(u\circ v)_x$ et $(v\circ u)_x$ sont les automorphismes identiques, il existe un voisinage ouvert $U \subset V$ de x tel que $(u\circ v)|U$ et $(v\circ u)|U$ soient les automorphismes identiques (5.2.6), d'où la proposition.

(5.2.8) Soient x un point de X, M un $\mathscr{O}_{X,x}$-module de présentation finie, donc isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\varphi : \mathscr{O}_x^p \to \mathscr{O}_x^q$; alors il existe un voisinage ouvert U de x et un $(\mathscr{O}_X|U)$-Module de présentation finie $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}_x$ soit *isomorphe à* M. En effet, en vertu de (5.2.6), il existe une section u de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^p, \mathscr{O}_X^q)$ au-dessus d'un voisinage ouvert U de x, telle que $u_x=\varphi$; le conoyau $\mathscr{F}$ de l'homomorphisme $u : \mathscr{O}_X^p|U \to \mathscr{O}_X^q|U$ répond à la question.

(5.2.9) Soit $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{u} \mathscr{G} \xrightarrow{v} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-Modules. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$ sont de type fini, il en est de même de $\mathscr{G}$. En effet, la question étant locale, on peut supposer $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{H}$) engendré par un nombre fini de sections s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (resp. t_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$) au-dessus de X, et on peut supposer en outre qu'il y a des sections t'_i $(1 \leqslant j \leqslant m)$ de $\mathscr{G}$ au-dessus de X telles que $t_j = v(t'_j)$ pour tout j; il est clair alors que $\mathscr{G}$ est engendré par les sections $u(s_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et t'_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

5.3. Faisceaux cohérents

(5.3.1) On dit qu'un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ est *cohérent* s'il vérifie les deux conditions suivantes:

a) $\mathscr{F}$ est de type fini.

b) Pour tout ouvert U de X, tout entier $n \geqslant 0$ et tout homomorphisme $u : \mathscr{O}_X^n|U \to \mathscr{F}|U$, le noyau de u est de type fini.

On notera que ces deux conditions sont de caractère *local*. Il résulte aussitôt de cette définition que tout sous-$\mathscr{O}_X$-Module *de type fini* d'un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent est cohérent.

Il résulte des conditions a) et b) qu'un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent est de *présentation finie* (5.2.5); la réciproque n'est pas nécessairement exacte, $\mathscr{O}_X$ lui-même n'étant pas nécessairement un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent.

Proposition (5.3.2) *Soit* $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{u} \mathscr{G} \xrightarrow{v} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathscr{O}_X$*-Modules; si deux d'entre eux sont cohérents, il en est de même du troisième* (cf. (**I**, 1.4.7)).

1°. Supposons $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ cohérents. La question étant locale, on peut supposer qu'il existe un homomorphisme *surjectif* $w : \mathscr{O}_X^p \to \mathscr{G}$. Puisque $\mathscr{H}$ est cohérent, $\mathrm{Ker}(v\circ w) = \mathscr{J}$ est de type fini; donc il en est de même de $w(\mathscr{J}) \subset \mathscr{G}$, qui est par suite cohérent. Mais puisque w est surjectif,

$w(\mathscr{J})=u(\mathscr{F})$ et u est un isomorphisme de $\mathscr{F}$ sur $u(\mathscr{F})$; donc $\mathscr{F}$ est cohérent.

2°. Supposons $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ cohérents. Puisque $\mathscr{G}$ est de type fini, il en est de même de $\mathscr{H}$, est il suffit de prouver que $\mathscr{H}$ vérifie la condition b) de (5.3.1).

Considérons donc un homomorphisme $f: \mathscr{O}_X^n|U \to \mathscr{H}|U$, et soit (s_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ la famille correspondante de sections de $\mathscr{H}$ au-dessus de U (5.1.1); la question étant locale, on peut supposer qu'il existe n sections s_i' de $\mathscr{G}$ au-dessus de U telles que $s_i = v(s_i')$, et d'autre part que $\mathscr{F}|U$ est engendré par m sections t_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ au-dessus de U, de sorte que $u(\mathscr{F})|U$ est engendré par les sections $u(t_j)$ de $\mathscr{G}$ au-dessus de U. Considérons alors l'homomorphisme $w: \mathscr{O}_X^{n+m}|U \to \mathscr{G}$ défini par les $n+m$ sections s_i' et $u(t_j)$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est l'image de $\mathrm{Ker}(w)$ par la projection canonique $p: \mathscr{O}_X^{n+m}|U \to \mathscr{O}_X^n|U$. En effet, si en un point $x \in U$, les coordonnées d'un élément $r_x \in (\mathrm{Ker}\, w)_x$ sont $(g_i)_x$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et $(h_j)_x$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, on a par définition

$$\sum_{i=1}^{n} (g_i)_x (s_i')_x + \sum_{j=1}^{m} (h_j)_x (u(t_j))_x = 0,$$

et puisque $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$, on a $\sum_{i=1}^{n} (g_i)_x (s_i)_x = 0$, c'est-à-dire $(p(r))_x \in (\mathrm{Ker}\, f)_x$. Inversement, si $q_x \in (\mathrm{Ker}\, f)_x$, et si $(g_i)_x$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont ses coordonnées, il existe des éléments $(h_j)_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} (g_i)_x (s_i')_x + \sum_{j=1}^{m} (h_j)_x (u(t_j))_x = 0,$$

donc q_x est la projection d'un élément $r_x \in (\mathrm{Ker}\, w)_x$. Par hypothèse $\mathrm{Ker}\, w$ est de type fini, donc il en est de même de son image par p, ce qui prouve que $\mathscr{H}$ est cohérent.

3°. Supposons enfin $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$ cohérents. Il résulte d'abord de (5.2.9) que $\mathscr{G}$ est de type fini; prouvons que $\mathscr{G}$ vérifie aussi la condition b) de (5.3.1). Soit donc un homomorphisme $f: \mathscr{O}_X^n|U \to \mathscr{G}|U$. Puisque $\mathscr{H}$ est cohérent, $\mathrm{Ker}(v \circ f)$ est de type fini; la question étant locale, on peut supposer que $\mathrm{Ker}(v \circ f)|U$ est engendré par un nombre fini de sections g_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ de $\mathscr{O}_X^n$ au-dessus de U; notons g_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les coordonnées de g_j; si $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la famille des sections de $\mathscr{G}$ au-dessus de U correspondant à f, posons $t_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ji} s_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$. On a par définition

$$v(t_j) = \sum_{i=1}^{n} g_{ji} v(s_i) = 0,$$

donc les t_j sont des sections de $u(\mathscr{F})$ au-dessus de U. Considérons alors l'homomorphisme $w: \mathscr{O}_X^m|U \to u(\mathscr{F})|U$ défini par les t_j (5.1.1);

puisque $u(\mathscr{F})$, isomorphe à $\mathscr{F}$, est cohérent, $\mathrm{Ker}(w)$ est de type fini, et on peut supposer qu'il est engendré par un nombre fini de sections h_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ de $\mathscr{O}_X^m$ au-dessus de U; notons h_{kj} $(1 \leqslant j \leqslant m)$ les coordonnées de h_k, et posons $r_k = \sum_{j=1}^{m} h_{kj} g_j$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Montrons que les r_k engendrent $\mathrm{Ker}(f)$. En effet, si en un point $x \in U$, les coordonnées d'un élément $q_x \in (\mathrm{Ker}\, f)_x$ sont $(q_i)_x$, de sorte que $\sum_{i=1}^{n} (q_i)_x (s_i)_x = 0$, on a aussi $\sum_{i=1}^{n} (q_i)_x (v(s_i))_x = 0$, donc il existe des éléments $(p_j)_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ tels que $(q_i)_x = \sum_{j=1}^{m} (p_j)_x (g_{ji})_x$ pour chaque i. Si l'on écrit que $\sum_{i=1}^{n} (q_i)_x (s_i)_x = 0$, on obtient la relation $\sum_{j=1}^{m} (p_j)_x (t_j)_x = 0$, donc il existe des éléments $(n_k)_x \in \mathscr{O}_{X,x}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ tels que $(p_j)_x = \sum_{k=1}^{p} (n_k)_x (h_{kj})_x$ pour tout j, d'où l'on tire aussitôt $q_x = \sum_{k=1}^{p} (n_k)_x (r_k)_x$. CQFD.

Corollaire (5.3.3) *Toute somme directe finie de $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents est un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent.*

Corollaire (5.3.4) *Soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents, $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorphisme. Alors* $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$ *et* $\mathrm{Coker}(u)$ *sont cohérents.*

Il est clair que le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathrm{Im}(u)$ est de type fini; étant un sous-$\mathscr{O}_X$-Module d'un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, il est cohérent (5.3.1). En appliquant (5.3.2) aux suites exactes

$$0 \to \mathrm{Ker}(u) \to \mathscr{F} \to \mathrm{Im}(u) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Im}(u) \to \mathscr{G} \to \mathrm{Coker}(u) \to 0$$

on conclut que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Coker}(u)$ sont cohérents.

Corollaire (5.3.5) *Soit $\mathscr{F}_1 \xrightarrow{u} \mathscr{F}_2 \xrightarrow{v} \mathscr{F}_3 \xrightarrow{w} \mathscr{F}_4 \xrightarrow{t} \mathscr{F}_5$ une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-Modules. Si $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_4$ et $\mathscr{F}_5$ sont cohérents, il en est de même de $\mathscr{F}_3$.*

En effet, $\mathrm{Coker}(u) = \mathscr{F}_2/\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Ker}(t)$ sont cohérents (5.3.4), et il suffit d'appliquer (5.3.2) à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Coker}(u) \to \mathscr{F}_3 \to \mathrm{Im}(w) \to 0.$$

Corollaire (5.3.6) *Si $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ sont des sous-$\mathscr{O}_X$-Modules cohérents d'un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$, $\mathscr{G} + \mathscr{H}$ et $\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$ sont des $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents.*

En effet, $\mathscr{G} + \mathscr{H}$ est un sous-$\mathscr{O}_X$-Module de type fini de $\mathscr{F}$, et $\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$ est le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{H} \to \mathscr{F}/\mathscr{G}$.

Corollaire (5.3.7) *Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents, il en est de même de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ et de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.*

La question étant locale, on peut supposer que $\mathscr{F}$ est le conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{O}_X^p \to \mathscr{O}_X^q$; alors $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ est, en vertu de l'exactitude à droite du foncteur produit tensoriel, isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{O}_X^p \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G} \to \mathscr{O}_X^q \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$; mais ces deux $\mathscr{O}_X$-Modules sont respectivement isomorphes à $\mathscr{G}^p$ et à $\mathscr{G}^q$, donc sont cohérents, et il suffit d'appliquer (5.3.4).

De même, compte tenu de (5.2.6), on a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^q, \mathscr{G}) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^p, \mathscr{G})$$

et les deux derniers de ces $\mathscr{O}_X$-Modules sont respectivement isomorphes à $\mathscr{G}^q$ et $\mathscr{G}^p$, donc sont cohérents; on conclut à l'aide de (5.3.5).

Corollaire (5.3.8) *Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, $\mathscr{J}$ un Idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$. Alors le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{J}\mathscr{F}$ est cohérent.*

En effet, c'est l'image de l'homomorphisme canonique $\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{F}$, d'où la conclusion par (5.3.7) et (5.3.4).

(5.3.9) On dit qu'une $\mathscr{O}_X$-Algèbre $\mathscr{A}$ est *cohérente* si $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent. En particulier, $\mathscr{O}_X$ est une $\mathscr{O}_X$-Algèbre cohérente si, pour tout ouvert $U \subset X$ et tout homomorphisme $\mathscr{O}_X^p|U \to \mathscr{O}_X|U$ de $\mathscr{O}_U$-Modules, le noyau de cet homomorphisme est de type fini. On dit encore alors que $\mathscr{O}_X$ est un *faisceau cohérent d'anneaux*. Si $\mathscr{O}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux, tout $\mathscr{O}_X$-Module *de présentation finie* (5.2.5) est cohérent d'en vertu de (5.3.3) et (5.3.4).

(5.3.10) L'*annulateur* d'un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ est le noyau $\mathscr{J}$ de l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_X \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ qui, à toute section $s \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ fait correspondre la multiplication par s dans $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}|U, \mathscr{F}|U)$; si $\mathscr{O}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux et si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, $\mathscr{J}$ est donc *cohérent* en vertu de (5.3.7) et de (5.3.4), et il résulte de (5.2.6) que pour tout $x \in X$, $\mathscr{J}_x$ est l'annulateur du $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$.

(5.3.11) Supposons que $\mathscr{O}_X$ soit un faisceau cohérent d'anneaux; soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, x un point de X, M un sous-$\mathscr{O}_x$-module de type fini de $\mathscr{F}_x$; il existe alors un voisinage ouvert U de x et un sous-$(\mathscr{O}_X|U)$-Module cohérent $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}|U$ tel que $\mathscr{G}_x = M$ (T, 4.1, lemme 1).

Ce résultat, joint aux propriétés des sous-$\mathscr{O}_X$-Modules d'un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, impose des conditions nécessaires aux anneaux $\mathscr{O}_{X,x}$ pour que le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$ soit cohérent. Par exemple (5.3.6), l'intersection de deux idéaux de type fini de $\mathscr{O}_{X,x}$ doit être encore un idéal de type fini.

(5.3.12) Supposons le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ cohérent, et soit M un $\mathcal{O}_{X,x}$-module de présentation finie. Alors il résulte de (5.2.8) et de (5.3.9) qu'il existe un voisinage ouvert U de x et un $\mathcal{O}_U$-Module cohérent $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}_x$ soit isomorphe à M.

Proposition (5.3.13) *Supposons que $\mathcal{O}_X$ soit un faisceau cohérent d'anneaux, et soit $\mathscr{J}$ un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$. Pour qu'un $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$-Module $\mathscr{F}$ soit cohérent, il faut et il suffit qu'en tant que $\mathcal{O}_X$-Module, $\mathscr{F}$ soit cohérent. En particulier, $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ est un faisceau cohérent d'anneaux.*

Notons que $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent (5.3.4). Si $\mathscr{F}$ est un $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$-Module cohérent, tout point de X admet un voisinage ouvert U tel que $\mathscr{F}|U$ soit conoyau d'un homomorphisme $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})^m|U \to (\mathcal{O}_X/\mathscr{J})^n|U$, donc $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent (5.3.4).

Inversement, supposons que $\mathscr{F}$, en tant que $\mathcal{O}_X$-Module, soit cohérent. En premier lieu, étant un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini, *a fortiori* $\mathscr{F}$ est un $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$-Module de type fini. D'autre part, soient U un ouvert de X et $f: (\mathcal{O}_X/\mathscr{J})^n|U \to \mathscr{F}|U$ un $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$-homomorphisme; en le composant avec l'homomorphisme canonique $v: \mathcal{O}_X^n|U \to (\mathcal{O}_X/\mathscr{J})^n|U$, on obtient un homomorphisme $f \circ v: \mathcal{O}_X^n|U \to \mathscr{F}|U$, et $\mathrm{Ker}(f \circ v)$ est par hypothèse de type fini; mais puisque v est surjectif, $\mathrm{Ker}(f)$ est l'image de $\mathrm{Ker}(f \circ v)$ par v, donc est aussi de type fini.

(5.3.14) Soit $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés, et supposons que $\mathcal{O}_X$ soit un faisceau cohérent d'anneaux; alors, pour tout $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent $\mathscr{G}$, $f^*(\mathscr{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent. En effet, avec les notations de (5.2.4), on peut supposer que $\mathscr{G}|V$ est conoyau d'un homomorphisme $v: \mathcal{O}_Y^q|V \to \mathcal{O}_Y^p|V$; comme f_U^* est exact à droite, $f^*(\mathscr{G})|U = f_U^*(\mathscr{G}|V)$ est conoyau de l'homomorphisme

$$f_U^*(v): \mathcal{O}_X^q|U \to \mathcal{O}_X^p|U,$$

d'où notre assertion (5.3.4).

(5.3.15) Soient Y une partie fermée de X, $j: Y \to X$ l'injection canonique, $\mathcal{O}_Y$ un faisceau d'anneaux sur Y, et posons $\mathcal{O}_X = j_*(\mathcal{O}_Y)$. Pour qu'un $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathscr{G}$ soit de type fini, il faut et il suffit que $j_*(\mathscr{G})$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini, le foncteur j_* étant exact. Pour la même raison, pour que $\mathscr{G}$ soit un $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent (resp. cohérent), il faut et il suffit que $j_*(\mathscr{G})$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent (resp. cohérent).

5.4. Faisceaux localement libres

(5.4.1) Soit X un espace annelé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ est *localement libre* si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$ soit isomorphe à un $(\mathcal{O}_X|U)$-Module de la forme

$\mathscr{O}_X^{(1)}|U$, où I peut dépendre de U. Si pour tout U, I est fini, on dit que $\mathscr{F}$ est *de rang fini;* si pour tout U, I a le même nombre fini d'éléments n, on dit que $\mathscr{F}$ *est de rang n*. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang fini, pour tout $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathscr{O}_x$-module libre de rang fini $n(x)$, et il existe un voisinage U de x tel que $\mathscr{F}|U$ soit de rang $n(x)$; si X est connexe, $n(x)$ est donc *constant.*

Il est clair que tout faisceau localement libre est quasi-cohérent, et si $\mathscr{O}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux, tout $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang fini est cohérent.

Si $\mathscr{E}$ est localement libre, $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}$ est un foncteur *exact* en $\mathscr{F}$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules.

Nous aurons surtout à considérer des $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres de rang fini, et lorsque nous parlerons de faisceaux localement libres sans préciser, il sera sous-entendu qu'ils sont de *rang fini.*

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module de *présentation finie* (5.2.5). Alors, si, en un point $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathscr{O}_x$-module *libre de rang n*, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$ soit *localement libre de rang n;* en effet, $\mathscr{F}_x$ est alors isomorphe à $\mathscr{O}_x^n$, et la proposition résulte de (5.2.7).

(5.4.2) Si $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ sont deux $\mathscr{O}_X$-Modules, on a un homomorphisme canonique fonctoriel

$$\check{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{O}_X) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \tag{5.4.2.1}$$

défini de la façon suivante: pour tout ouvert U, à tout couple (u,t), où $u \in \Gamma(U, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{O}_X)) = \mathrm{Hom}(\mathscr{E}|U, \mathscr{O}_X|U)$ et $t \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, on fait correspondre l'élément de $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}|U, \mathscr{F}|U)$ qui, pour tout $x \in U$, fait correspondre à $s_x \in \mathscr{E}_x$ l'élément $u_x(s_x)t_x$ de $\mathscr{F}_x$. Si $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{F}$ est *localement libre de rang fini*, cet homomorphisme est *bijectif;* la propriété étant locale, on peut en effet se borner au cas où $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X^n$ ou $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X^n$; comme pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X^n, \mathscr{G})$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{G}^n$ et $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, \mathscr{O}_X^n)$ à $\check{\mathscr{G}}^n$, on est ramené au cas $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X$ ou $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$, qui est immédiat.

(5.4.3) Si $\mathscr{L}$ est localement libre de rang 1, il en est de même de son dual $\mathscr{L} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)$, car on se ramène aussitôt (la question étant locale) au cas $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$. En outre, on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_X; \tag{5.4.3.1}$$

en effet, d'après (5.4.2), il suffit de définir un isomorphisme canonique $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{L}) \simeq \mathscr{O}_X$. Or, pour *tout* $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, on a un homomorphisme canonique $\mathscr{O}_X \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ (5.3.10) Il reste à prouver que si $\mathscr{F} = \mathscr{L}$ est localement libre de rang 1, cet homomorphisme est

bijectif, et comme la question est locale, on est ramené au cas $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$, qui est immédiat.

En raison de ce qui précède, on pose $\mathscr{L}^{-1} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)$, et on dit que $\mathscr{L}^{-1}$ est l'*inverse* de $\mathscr{L}$.

(5.4.4) Si $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont deux $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres de rang 1, il en est de même de $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}'$, car la question étant locale, on peut supposer que $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$, et le résultat est alors trivial. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par $\mathscr{L}^{\otimes n}$ le produit tensoriel de n faisceaux identiques à $\mathscr{L}$; on pose par convention $\mathscr{L}^{\otimes 0} = \mathscr{O}_X$ et pour $n \geqslant 1$, $\mathscr{L}^{\otimes(-n)} = (\mathscr{L}^{-1})^{\otimes n}$. Avec ces notations, il existe alors un *isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\mathscr{L}^{\otimes m} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}^{\otimes(n+m)} \tag{5.4.4.1}$$

quels que soient les entiers rationnels m, n: en effet, en vertu des définitions, on se ramène aussitôt au cas où $m = -1$, $n = 1$, et l'isomorphisme en question a alors été défini en (5.4.3).

(5.4.5) Soit $f: Y \to X$ un morphisme d'espaces annelés. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre (resp. localement libre de rang n), $f^*(\mathscr{E})$ est un $\mathscr{O}_Y$-Module localement libre (resp. localement libre de rang n): cela résulte aussitôt de ce que les images réciproques de deux $\mathscr{O}_X$-Modules localement isomorphes sont localement isomorphes, de ce que f^* commute aux sommes directes quelconques (4.3.2) et de ce que $f^*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_Y$ (4.3.4). En outre, on sait qu'on a un homomorphisme canonique fonctoriel $f^*(\check{\mathscr{E}}) \to (f^*(\mathscr{E}))^{\check{}}$ (4.4.6), et lorsque $\mathscr{E}$ est localement libre, cet homomorphisme est *bijectif:* on est en effet encore ramené au cas où $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X$, qui est trivial. On en conclut que si $\mathscr{L}$ est localement libre de rang 1, $f^*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ s'identifie canoniquement à $(f^*(\mathscr{L}))^{\otimes n}$ pour tout entier rationnel n.

(5.4.6) Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang 1; on désigne par $\Gamma_*(X, \mathscr{L})$ ou simplement $\Gamma_*(\mathscr{L})$ le groupe commutatif somme directe $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$; on le munit d'une structure d'*anneau gradué*, en faisant correspondre au couple (s_n, s_m), où $s_n \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$, $s_m \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$, la section de $\mathscr{L}^{\otimes(n+m)}$ au-dessus de X qui correspond canoniquement (5.4.4.1) à la section $s_n \otimes s_m$ de $\mathscr{L}^{\otimes n} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes m}$; l'associativité de cette multiplication se vérifie de façon immédiate. Il est clair que $\Gamma_*(X, \mathscr{L})$ est un foncteur covariant en $\mathscr{L}$, à valeurs dans la catégorie des anneaux gradués.

Si maintenant $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module quelconque, on pose

$$\Gamma_*(\mathscr{L}, \mathscr{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes n}).$$

On munit ce groupe commutatif d'une structure de *module gradué* sur l'anneau gradué $\Gamma_*(\mathscr{L})$ de la façon suivante: au couple (s_n, u_m), où

$s_n \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ et $u_m \in \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m})$, on fait correspondre la section de $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes(m+n)}$ qui correspond canoniquement (5.4.4.1) à $s_n \otimes u_m$; la vérification des axiomes des modules est immédiate. Pour X et $\mathscr{L}$ fixés, $\Gamma_*(\mathscr{L}, \mathscr{F})$ est un foncteur covariant en $\mathscr{F}$ à valeurs dans la catégorie des $\Gamma_*(\mathscr{L})$-modules gradués; pour X et $\mathscr{F}$ fixés, c'est un foncteur covariant en $\mathscr{L}$ à valeurs dans la catégorie des groupes commutatifs.

Si $f: Y \to X$ est un morphisme d'espaces annelés, l'homomorphisme canonique (4.4.3.2) $\rho: \mathscr{L}^{\otimes n} \to f_*(f^*(\mathscr{L}^{\otimes n}))$ définit un homomorphisme de groupes commutatifs $\Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n}) \to \Gamma(Y, f^*(\mathscr{L}^{\otimes n}))$, et comme $f^*(\mathscr{L}^{\otimes n}) = (f^*(\mathscr{L}))^{\otimes n}$, il résulte des définitions des homomorphismes canoniques (4.4.3.2) et (5.4.4.1) que les homomorphismes précédents définissent un *homomorphisme fonctoriel d'anneaux gradués* $\Gamma_*(\mathscr{L}) \to \Gamma_*(f^*(\mathscr{L}))$. Le même homomorphisme canonique (4.4.3) définit de même un homomorphisme de groupes commutatifs $\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \to \Gamma(Y, f^*(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}))$, et comme

$$f^*(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) = f^*(\mathscr{F}) \otimes (f^*(\mathscr{L}))^{\otimes n} \quad (4.3.3.1),$$

ces homomorphismes (pour $n \in \mathbf{Z}$) définissent un *di-homomorphisme de modules gradués* $\Gamma_*(\mathscr{L}, \mathscr{F}) \backsimeq \Gamma_*(f^*(\mathscr{L}), f^*(\mathscr{F}))$.

(5.4.7) Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux $\mathscr{O}_X$-Modules, $\mathscr{F}$ étant supposé *localement libre* de rang *fini*, et soit $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_X$-Module *extension de $\mathscr{F}$ par $\mathscr{E}$*, autrement dit tel qu'il existe une suite exacte $0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{j} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \mathscr{F} \to 0$. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x tel que $\mathscr{G}|U$ soit isomorphe à la *somme directe* $(\mathscr{E}|U) \oplus (\mathscr{F}|U)$. On peut en effet se borner au cas où $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X^n$; soient e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les *sections canoniques* de $\mathscr{O}_X^n$, c'est-à-dire telles que $(e_i)_y$ soit égal au i-ème élément de la base canonique de $\mathscr{O}_{X,y}^n$ pour tout $y \in X$; il existe alors un voisinage ouvert U de x et n sections s_i de $\mathscr{G}$ au-dessus de U telles que $p(s_i|U) = e_i|U$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Cela étant, soit f l'homomorphisme $\mathscr{F}|U \to \mathscr{G}|U$ défini par les sections $s_i|U$ (5.1.1). Il est immédiat que pour tout ouvert $V \subset U$, et toute section $s \in \Gamma(V, \mathscr{G})$, on a $s - f(p(s)) \in \Gamma(V, \mathscr{E})$, d'où notre assertion.

De ce résultat, on déduit sous les mêmes hypothèses, en vertu de [4], un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{E}) \backsimeq \mathrm{H}^1(X, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{E})). \tag{5.4.7.1}$$

(5.4.8) Soient $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-Module *localement libre de rang fini*. Il existe alors un isomorphisme canonique

$$f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{E} \backsimeq f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*(\mathscr{E})). \tag{5.4.8.1}$$

En effet, pour tout $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathscr{E}$, on a un homomorphisme canonique

$$f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{E} \xrightarrow{1\otimes\rho_{\mathscr{E}}} f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*(f^*(\mathscr{E})) \xrightarrow{\alpha} f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathscr{E}))$$

$\rho_{\mathscr{E}}$ étant l'homomorphisme (4.4.3.2) et α l'homomorphisme (4.2.2.1). Pour montrer que lorsque $\mathscr{E}$ est localement libre, cet homomorphisme est bijectif, il suffit, la question étant locale sur Y, de considérer le cas où $\mathscr{E} = \mathcal{O}_Y^n$; comme en outre f_* et f^* commutent aux sommes directes finies, on peut supposer $n=1$, et dans ce cas, la proposition résulte aussitôt des définitions et de la relation $f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$.

(5.4.9) Soient $f: X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathcal{O}_Y$-Modules, et supposons que $\mathscr{F}$ soit *localement libre de rang fini.* Alors l'homomorphisme canonique (4.4.6)

$$(5.4.9.1) \quad f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$$

est un *isomorphisme.* En effet, la question est locale sur Y, et on peut donc se borner au cas où $\mathscr{F} = \mathcal{O}_Y^n$; mais alors $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathscr{G})$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{G}^n$ (5.1.1), $f^*(\mathscr{F})$ à $\mathcal{O}_X^n$ et $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$ à $(f^*(\mathscr{G}))^n$, d'où la conclusion

5.5. Modules localement libres sur un espace localement annelé

Proposition (5.5.1) *Soient* X *un espace localement annelé,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module localement libre de rang fini. Alors, pour toute section* s *de* $\mathscr{E}$ *au-dessus de* X, *l'ensemble* X_s *des* $x \in X$ *tels que* $s(x) \neq 0$ (4.1.9) *est ouvert dans* X.

La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathscr{E} = \mathcal{O}_X^n$; si s_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ sont les projections de s sur les n Modules facteurs égaux à $\mathcal{O}_X$, dire que $s(x) \neq 0$ équivaut à dire que $s_j(x) \neq 0$ pour un j au moins, donc X_s est réunion des X_{s_j}, et il suffit de considérer le cas où $\mathscr{E} = \mathcal{O}_X$. Mais dire que $s(x) \neq 0$ signifie alors que $s_x \notin \mathfrak{m}_x$, donc s_x est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Mais on sait alors (4.1.8) qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $s|U$ soit inversible dans $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$; par suite $s(y) \neq 0$ pour tout $y \in U$.

Corollaire (5.5.2) *Les hypothèses et notations étant celles de* (5.5.1), *soient* $s_1, \ldots, s_p$ *des sections de* $\mathscr{E}$ *au-dessus de* X; *alors l'ensemble des* $x \in X$ *tels que* $s_1(x), \ldots, s_p(x)$ *soient linéairement indépendants dans* $\mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x$ *est ouvert dans* X.

En effet, $\wedge^p \mathscr{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang $\binom{n}{p}$, car la question est locale et on est ramené au cas où $\mathscr{E} = \mathcal{O}_X^n$, où c'est immédiat; en outre, pour tout $x \in X$, $(\wedge^p \mathscr{E})_x/\mathfrak{m}_x(\wedge^p \mathscr{E})_x$ s'identifie canoniquement à $\wedge^p(\mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x)$. Si $s = s_1 \wedge \ldots \wedge s_p$, section de $\wedge^p \mathscr{E}$ au-dessus de X,

$s(x)$ s'identifie donc à $s_1(x) \wedge \ldots \wedge s_p(x)$, et dire que $s(x) \neq 0$ équivaut à dire que les $s_j(x)$ sont linéairement indépendants; le corollaire résulte donc de (5.5.1).

Corollaire (5.5.3) *Soient* X *un espace localement annelé,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module localement libre de rang* n, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *des sections de* $\mathscr{E}$ *au-dessus de* X *telles que, pour tout* $x \in X$, $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ *soient linéairement indépendants. Alors l'homomorphisme* $u : \mathscr{O}_X^n \to \mathscr{E}$ *défini par les* s_i (5.1.1) *est bijectif.*

En effet, la question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X^n$ et où on identifie canoniquement $\wedge^n \mathscr{E}$ et $\mathscr{O}_X$; $s = s_1 \wedge \cdots \wedge s_n$ est alors une section de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de X telle que $s(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$, donc s est *inversible* dans $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$; on définit alors un homomorphisme réciproque de u au moyen des formules de Cramer.

On peut aussi invoquer Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 5 appliqué au $\mathscr{O}_x$-module libre $\mathscr{E}_x$; les conditions de cette proposition sont en effet remplies puisque $\mathscr{O}_x$ est un anneau local, et $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ une base de $\mathscr{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathscr{E}_x$.

Proposition (5.5.4) *Soient* X *un espace localement annelé,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module de type fini,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module localement libre de rang fini,* $u : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ *un homomorphisme,* x *un point de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *L'homomorphisme* u_x *est inversible à gauche* (autrement dit, u_x est injectif et son image est facteur direct de $\mathscr{F}_x$).

b) *L'homomorphisme d'espaces vectoriels* $u_x \otimes 1 : \mathscr{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathscr{F}_x$ *déduit de* u_x *par passage aux quotients, est injectif.*

c) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x *tel que* $u|U : \mathscr{E}|U \to \mathscr{F}|U$ *soit inversible à gauche*; *l'image* $u(\mathscr{E})|U$ *est un* $\mathscr{O}_U$*-Module localement libre isomorphe à* $\mathscr{E}|U$, *qui admet dans* $\mathscr{F}|U$ *un supplémentaire localement libre.*

En outre l'ensemble des $x \in X$ *vérifiant ces conditions est ouvert.*

L'équivalence de a) et b) est un résultat d'algèbre commutative (6.7.3), et il est clair que c) entraîne a). Montrons réciproquement que a) entraîne c); il existe par hypothèse un homomorphisme de $\mathscr{O}_x$-modules $w : \mathscr{F}_x \to \mathscr{E}_x$ tel que $w \circ u_x$ soit l'automorphisme identique de $\mathscr{E}_x$. Comme $\mathscr{F}$ est localement libre de rang fini, donc de présentation finie, il résulte de (5.2.6) qu'il existe un voisinage ouvert U de x et un homomorphisme $v : \mathscr{F}|U \to \mathscr{E}|U$ tels que $w = v_x$, donc $(v \circ (u|U))_x = v_x \circ u_x$ est l'automorphisme identique. On conclut donc de (5.2.2, (ii)), en restreignant au besoin U, que l'on peut supposer que $v \circ (u|U)$ est l'identité dans $\mathscr{E}|U$, autrement dit $u|U$ est inversible à gauche. On sait alors que $p = (u|U) \circ v$ est un *projecteur* de $\mathscr{F}|U$ sur $u(\mathscr{E})|U$, et que $u|U$ est un *isomorphisme* de $\mathscr{E}|U$ sur $u(\mathscr{E})|U$; montrons que (en restreignant encore U

si nécessaire), $u(\mathscr{E})|U$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des $\mathscr{O}_U$-Modules *localement libres* (supplémentaires dans $\mathscr{F}|U$). En effet, $p_x : \mathscr{F}_x \to (u(\mathscr{E}))_x$ est un projecteur, donc aussi $p_x \otimes 1 : \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x \to (u(\mathscr{E}))_x/\mathfrak{m}_x(u(\mathscr{E}))_x$. Il existe n sections s_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ de $\mathscr{F}$ au-dessus de U (en restreignant au besoin U) telles que les m premières sections s_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ soient des sections de $u(\mathscr{E})$, les $n-m$ dernières $(m+1 \leqslant j \leqslant n)$ des sections de $\mathrm{Ker}(p)$, et que les $s_j(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ forment une base de $\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$. En vertu de (5.5.3), en restreignant encore U, on peut supposer que le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{M}$ engendré par les s_j pour $1 \leqslant j \leqslant m$ et le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{N}$ engendré par les s_j pour $m+1 \leqslant j \leqslant n$ sont libres et supplémentaires dans $\mathscr{F}|U$; on a évidemment en outre $\mathscr{M} \subset u(\mathscr{E})|U$ et $\mathscr{N} \subset \mathrm{Ker}(p)$; d'autre part, si $i : \mathscr{M} \to u(\mathscr{E})|U$ et $j : \mathscr{N} \to \mathrm{Ker}(p)$ sont les injections canoniques, les définitions entraînent que i_x et j_x sont des bijections; comme $u(\mathscr{E})|U$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des $\mathscr{O}_U$-Modules de type fini (le second étant l'image de $\mathscr{F}|U$ par $1-p$), on conclut par (5.2.2), en restreignant encore U, que $\mathscr{M} = u(\mathscr{E})|U$ et $\mathscr{N} = \mathrm{Ker}(p)$.

Corollaire (5.5.5) *Les hypothèses sur* X, $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$ *étant les mêmes que dans* (5.5.4), *les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Pour tout morphisme d'espaces localement annelés* (4.1.12) $g : X' \to X$, *l'homomorphisme* $g^*(u) : g^*(\mathscr{E}) \to g^*(\mathscr{F})$ *est injectif.*

b) *Pour tout* $x \in X$, *l'homomorphisme* $u_x \otimes 1 : \mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ *est injectif.*

c) *Pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *tel que* $u|U : \mathscr{E}|U \to \mathscr{F}|U$ *soit inversible à gauche* (donc un isomorphisme de $\mathscr{E}|U$ sur un facteur direct de $\mathscr{F}|U$.

En outre, $\mathscr{E}$ *est alors un* $\mathscr{O}_X$*-Module localement libre de rang fini.*

L'équivalence de b) et c) et la dernière assertion résultent de (5.5.4). Le fait que c) entraîne a) résulte de ce que l'on peut se borner au cas où $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X^n$ et $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X^m$ et de (4.3), la question étant locale sur X. Enfin, montrons que b) est un cas particulier de a): il suffit de considérer l'espace localement annelé X′ réduit au point x, et dont le faisceau d'anneaux structural est le corps $\kappa(x)$; on prend $g = (\psi, \theta)$, où ψ est l'injection canonique $\{x\} \to X$ et $\theta^\#$ le ψ-morphisme $\mathscr{O}_X \to \kappa(x)$ tel que pour tout voisinage ouvert U de x, $\theta^\#_U$ soit la composée des applications canoniques $\Gamma(U, \mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_{X,x} \to \kappa(x)$. On vérifie alors aussitôt que $g^*(u)$ est dans ce cas $u_x \otimes 1$.

Lorsque u vérifie les conditions équivalentes de (5.5.5), on dit que c'est un *homomorphisme universellement injectif.*

Corollaire (5.5.6) *Soient* X *un espace localement annelé,* $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ *deux* $\mathscr{O}_X$*-Modules localement libres de rang fini,* $u : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ *un homomorphisme,* x *un point de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *L'homomorphisme* $u_x \otimes 1 : \mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x \to \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ *est surjectif.*

b) *L'homomorphisme* u_x *est surjectif.*

c) *L'homomorphisme* $\wedge^m u_x : \wedge^m \mathscr{E}_x \to \wedge^m \mathscr{F}_x$ *(où* m *est le rang de* $\mathscr{F}_x$*) est surjectif.*

d) *L'homomorphisme* ${}^t u_x : \check{\mathscr{F}}_x \to \check{\mathscr{E}}_x$ *est inversible à gauche.*

En outre, l'ensemble S *des* $x \in X$ *vérifant ces conditions est ouvert dans* X; $\mathrm{Ker}(u)|S$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-Module localement libre et tout* $x \in S$ *admet un voisinage ouvert* $U \subset S$ *tel que* $\mathrm{Ker}(u)|U$ *admette dans* $\mathscr{E}|U$ *un supplémentaire localement libre (isomorphe à* $\mathscr{F}|U$).

L'équivalence de a) et b) résulte du lemme de Nakayama; pour la même raison, c) équivaut à dire que

$$(\wedge^m u_x) \otimes 1 : (\wedge^m \mathscr{E}_x)/\mathfrak{m}_x(\wedge^m \mathscr{E}_x) \to (\wedge^m \mathscr{F}_x)/\mathfrak{m}_x(\wedge^m \mathscr{F}_x)$$

est surjectif; mais $(\wedge^m u_x) \otimes 1$ s'identifie à

$$\wedge^m(u_x \otimes 1) : \wedge^m(\mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x) \to \wedge^m(\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x),$$

et comme $\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ est un espace vectoriel de rang m sur $\kappa(x)$, $\wedge^m(u_x \otimes 1)$ est surjectif lorsque $u_x \otimes 1$ est surjectif, et nul dans le cas contraire; d'où l'équivalence de a) et c). D'autre part, comme $(\mathscr{E}^\vee)^\vee = \mathscr{E}$, $(\mathscr{F}^\vee)^\vee = \mathscr{F}$ et ${}^t({}^t u) = u$, il revient au même de dire que $u_x \otimes 1$ est surjectif, ou que son transposé ${}^t(u_x \otimes 1) = ({}^t u_x) \otimes 1 : \check{\mathscr{F}}_x/\mathfrak{m}_x\check{\mathscr{F}}_x \to \check{\mathscr{E}}_x/\mathfrak{m}_x\check{\mathscr{E}}_x$ est injectif, d'où l'équivalence de a) et d) en vertu de (5.5.4). Le fait que S est ouvert résulte de (5.5.4). On peut donc se borner au cas où $S = X$, et les autres assertions de l'énoncé se déduisent par transposition des conclusions de (5.5.4) appliquées à ${}^t u$.

Corollaire (5.5.7) *Avec les notations de* (5.5.6)*, on suppose de plus que* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$ *aient même rang en tout point. Alors, pour tout* $x \in X$*, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) u_x *est inversible à gauche.*

b) u_x *est surjectif.*

c) u_x *est bijectif.*

En outre, l'ensemble des $x \in X$ *vérifiant ces propriétés est ouvert dans* X.

Corollaire (5.5.8) *Avec les notations de* (5.5.6)*, soit* $f : X' \to X$ *un morphisme d'espaces localement annelés* (4.1.12) *et posons* $\mathscr{E}' = f^*(\mathscr{E})$, $\mathscr{F}' = f^*(\mathscr{F})$*, qui sont des* $\mathscr{O}_{X'}$*-Modules localement libres de rang fini* (5.4.5)*; soit* $u' = f^*(u) : \mathscr{E}' \to \mathscr{F}'$*. Afin qu'en un point* $x' \in X'$*,* $u'_{x'}$ *soit surjectif* (resp. *inversible à gauche*) *il faut et il suffit qu'au point* $x = f(x')$*,* u_x *soit surjectif* (resp. *inversible à gauche*).

En effet, on a $\mathscr{E}'_{x'} = \mathscr{E}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \mathscr{O}_{x'}$, $\mathscr{F}'_{x'} = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \mathscr{O}_{x'}$, et $u'_{x'}$ se déduit de u_x par le changement de base de $\mathscr{O}_x$ à $\mathscr{O}_{x'}$. Si k et k' sont les corps résiduels respectifs de X et X' aux points x et x', on a donc $\mathscr{E}'_{x'} \otimes k' = (\mathscr{E}_x \otimes k) \otimes_k k'$ et $\mathscr{F}'_{x'} \otimes k' = (\mathscr{F}_x \otimes k) \otimes_k k'$ et l'homomorphisme $u'_{x'} \otimes 1_{k'} : \mathscr{E}'_{x'} \otimes k' \to \mathscr{F}'_{x'} \otimes k'$ se déduit de $u_x \otimes 1_k : \mathscr{E}_x \otimes k \to \mathscr{F}_x \otimes k$ par changement de base de k à k'.

La conclusion résulte alors de ce que ce changement de base est *fidèlement plat*, du lemme de Nakayama et de (5.5.5) et (5.5.6).

Proposition (5.5.9) *Soient* X *un espace localement annelé,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module de type fini. Pour que* $\mathscr{L}$ *soit un* $\mathscr{O}_X$*-Module localement libre de rang* 1, *il faut et il suffit qu'il existe un* $\mathscr{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$ *tel que* $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}$ *soit isomorphe à* $\mathscr{O}_X$; *tout* $\mathscr{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$ *ayant cette propriété est alors isomorphe à* $\mathscr{L}^{-1}$ (5.4.3).

On a vu (5.4.3) que la condition est nécessaire; en outre, si $\mathscr{L}$ est localement libre de rang 1, $\mathscr{L}^{-1}$ est isomorphe à $\mathscr{L}^{-1} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X$, donc à $\mathscr{L}^{-1} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F})$ et finalement à $\mathscr{F}$. Reste donc à prouver que si $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{L}$ est localement libre de rang 1. Soit $x \in X$ et posons $\mathscr{O}_{X,x} = A$ (qui est un anneau *local* d'idéal maximal $\mathfrak{m}$), $\mathscr{L}_x = M$, $\mathscr{F}_x = N$; l'hypothèse entraîne que $M \otimes_A N$ est isomorphe à A, et comme $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A (M \otimes_A N)$ s'identifie à $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (N/\mathfrak{m}N)$, ce dernier produit tensoriel d'espaces vectoriels sur le corps $A/\mathfrak{m}$ est isomorphe à $A/\mathfrak{m}$, ce qui exige que $M/\mathfrak{m}M$ et $N/\mathfrak{m}N$ soient de rang 1 sur $A/\mathfrak{m}$. Pour tout élément $z \in M$ n'appartenant pas à $\mathfrak{m}M$, on a donc $M = Az + \mathfrak{m}M$, ce qui entraîne $M = Az$ en vertu du lemme de Nakayama (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 1 de la prop. 4); par ailleurs, l'annulateur de z annule aussi $M \otimes_A N$, qui est isomorphe à A, donc cet annulateur est réduit à 0, et M est *isomorphe à* A. Il y a donc une section s de $\mathscr{L}$ au-dessus d'un voisinage ouvert U de x dans X, telle que $t_x \mapsto t_x s_x$ soit un isomorphisme du $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{O}_{X,x}$ sur le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{L}_x$. Puisque $\mathscr{L}$ est de type fini, on peut, en restreignant au besoin U, supposer que s *engendre* $\mathscr{L}|U$ (5.2.2), autrement dit, on a un homomorphisme surjectif $u : \mathscr{O}_U \to \mathscr{L}|U$ (5.1.1); en outre, pour tout $y \in U$, l'homomorphisme $\mathscr{O}_{X,y}/\mathfrak{m}_y \to \mathscr{L}_y/\mathfrak{m}_y \mathscr{L}_y$ déduit de u est bijectif, donc il en est de même de u (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. de la prop. 6), CQFD.

Les $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres de rang 1 sur un espace localement annelé X sont encore appelés $\mathscr{O}_X$-Modules *inversibles.*

Proposition (5.5.10) *Soient* X *un espace localement annelé,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module inversible, f une section de* $\mathscr{L}$ *au-dessus de* X. *Pour tout* $x \in X$, *les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) f_x *engendre le* $\mathscr{O}_{X,x}$*-module* $\mathscr{L}_x$.

b) $f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathscr{L}_x$ (autrement dit (4.1.9), $f(x) \neq 0$).

c) *Il existe une section* g *de* $\mathscr{L}^{-1}$ *au-dessus d'un voisinage ouvert* V *de* x *telle que l'image canonique de* $(f|V) \otimes g$ *dans* $\Gamma(V, \mathscr{O}_X)$ (5.4.3) *soit l'élément unité.*

L'ensemble X_f *des* $x \in X$ *vérifiant ces conditions est ouvert dans* X.

En effet, la question étant locale sur X, on peut se borner au cas où $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$, et dans ce cas la proposition résulte de (4.1.8).

5.6. Groupe de Picard

(5.6.1) Soit X un espace annelé. Pour tout entier $n>0$, montrons qu'il existe un *ensemble* $\mathfrak{M}_n$ (noté aussi $\mathfrak{M}_n(X)$) de $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres de rang n tel que *tout* $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang n soit isomorphe à un élément de $\mathfrak{M}_n$ et un seul. Considérons pour cela l'ensemble $\mathfrak{R}_n$ des couples $(\mathfrak{U},\Theta)$, où $\mathfrak{U}$ parcourt l'ensemble des recouvrements ouverts de X (partie de $\mathfrak{P}(X)$) et où, pour chaque $\mathfrak{U}$, Θ parcourt l'ensemble des familles $(\theta_{UV})_{(U,V)\in\mathfrak{U}\times\mathfrak{U}}$, θ_{UV} étant un isomorphisme de $\mathscr{O}_X^n|(U\cap V)$ sur lui-même, avec θ_{UU} égal à l'automorphisme identique de $\mathscr{O}_U^n$, et la famille (θ_{UV}) étant assujettie à satisfaire la condition de recollement (3.3.1). Il correspond à tout élément $(\mathfrak{U},\Theta)$ de $\mathfrak{R}_n$ un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang n bien déterminé (à l'aide de la fonction τ de Hilbert) (3.3.1). Si l'on désigne par $\mathfrak{L}_n$ l'ensemble de ces $\mathscr{O}_X$-Modules, il résulte des définitions que tout $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang n est isomorphe à un élément de $\mathfrak{L}_n$; il suffit alors de prendre pour $\mathfrak{M}_n$ (à l'aide de la fonction τ de Hilbert) un système de représentants dans $\mathfrak{L}_n$ pour la relation d'équivalence: «$\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont isomorphes» dans $\mathfrak{L}_n$. Pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{E}$ localement libre de rang n, on note $\mathrm{cl}(\mathscr{E})$ l'unique élément de $\mathfrak{M}_n$ qui lui est isomorphe.

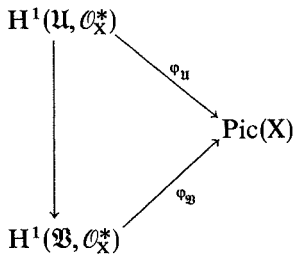
(5.6.2) On peut définir sur l'ensemble $\mathfrak{M}_1(X)$ une *loi de composition* en faisant correspondre à deux éléments $\mathscr{L},\mathscr{L}'$ de $\mathfrak{M}_1(X)$ l'élément $\mathrm{cl}(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}')$; il est clair que cette loi est associative et commutative et a pour élément neutre $\mathrm{cl}(\mathscr{O}_X)$; en outre il résulte de (5.4.3) que pour tout $\mathscr{L}\in\mathfrak{M}_1(X)$, $\mathrm{cl}(\mathscr{L}^{-1})$ est inverse de $\mathscr{L}$ pour cette loi. On a donc ainsi défini sur $\mathfrak{M}_1(X)$ une structure de *groupe commutatif;* muni de cette loi, $\mathfrak{M}_1(X)$ est appelé le *groupe de Picard* de l'espace annelé X et noté $\mathrm{Pic}(X)$.

(5.6.3) Nous allons maintenant définir un *isomorphisme canonique de groupes*

$$\varphi_X\colon \mathrm{H}^1(X,\mathscr{O}_X^*)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(X). \tag{5.6.3.1}$$

Notons pour celà (5.4.2) que pour tout ouvert $U\subset X$, le groupe multiplicatif des sections $\Gamma(U,\mathscr{O}_X^*)$ s'identifie canoniquement au *groupe des automorphismes* du $\mathscr{O}_U$-Module $\mathscr{O}_U$, l'identification faisant correspondre à une section ε de $\mathscr{O}_X^*$ au-dessus de U l'automorphisme u de $\mathscr{O}_U$ tel que $u_x(s_x)=\varepsilon_x s_x$ pour tout $x\in U$ et tout $s_x\in\mathscr{O}_{X,x}$. Soit alors $\mathfrak{U}=(U_\lambda)$ un recouvrement ouvert de X; la donnée, pour tout couple d'indices (λ,μ), d'un automorphisme θ_λ de $\mathscr{O}_X|(U_\lambda\cap U_\mu)$, revient à se donner une 1-*cochaîne* du recouvrement $\mathfrak{U}$, à valeurs dans $\mathscr{O}_X^*$, et dire que les $\theta_{\lambda\mu}$ vérifient la condition de recollement (3.3.1) signifie que la cochaîne correspondante est un *cocycle*. De même, la donnée, pour tout λ, d'un

automorphisme ω_λ de $\mathcal{O}_{U_\lambda}$, revient à la donnée d'une 0-cochaîne du recouvrement $\mathfrak{U}$, à valeurs dans $\mathcal{O}_X^*$, et le *cobord* de cette cochaîne correspond à la famille des automorphismes $(\omega_\lambda|(U_\lambda \cap U_\mu)) \circ (\omega_\mu|(U_\lambda \cap U_\mu))^{-1}$. Faisons alors correspondre à tout 1-cocycle $(\theta_{\lambda\mu})$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_X^*$, l'élément $\mathrm{cl}(\mathscr{L})$ de $\mathrm{Pic}(X)$, où $\mathscr{L}$ est le $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang 1 obtenu par recollement à partir de $\mathfrak{U}$ et de la famille $\theta = (\theta_{\lambda\mu})$; à deux cocycles cohomologues correspond le même élément de $\mathrm{Pic}(X)$ (3.3.2), de sorte que l'on a défini ainsi une application $\varphi_{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) \to \mathrm{Pic}(X)$. En outre, si $\mathfrak{V}$ est un second recouvrement ouvert de X, plus fin que $\mathfrak{U}$, le diagramme



où la flèche verticale est l'homomorphisme canonique (G, II, 5.7), est commutatif, comme il résulte de (3.3.3). Par passage à la limite inductive, on obtient donc bien une application $\varphi_X : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to \mathrm{Pic}(X)$, le groupe de cohomologie de Čech $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ s'identifiant canoniquement, comme on sait, au premier groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ (G, II, 5.9, cor. du th. 5.9.1). L'application φ_X est surjective, comme il résulte de (5.6.1); elle est aussi injective, car il suffit de le montrer pour les applications $\varphi_{\mathfrak{U}}$, et celà résulte de la définition de $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$ et des remarques faites plus haut. Il reste à voir que chacune des $\varphi_{\mathfrak{U}}$ est un homomorphisme de groupes. Or, soient $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ deux $\mathcal{O}_X$-Modules localement libres de rang 1 tels que, pour tout λ, $\mathscr{L}|U_\lambda$ et $\mathscr{L}'|U_\lambda$ soient isomorphes à $\mathcal{O}_{U_\lambda}$; il y a donc pour chaque indice λ un élément a_λ (resp. a'_λ) de $\Gamma(U_\lambda, \mathscr{L})$ (resp. $\Gamma(U_\lambda, \mathscr{L}')$) tel que les éléments de $\Gamma(U_\lambda, \mathscr{L})$ (resp. de $\Gamma(U_\lambda, \mathscr{L}')$) soient les $s_\lambda \cdot a_\lambda$ (resp. $s_\lambda \cdot a'_\lambda$), où s_λ parcourt $\Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_X)$. Les cocycles correspondants $(\varepsilon_{\lambda\mu})$, $(\varepsilon'_{\lambda\mu})$ sont tels que la relation $s_\lambda \cdot a_\lambda = s_\mu \cdot a_\mu$ (resp. $s_\lambda \cdot a'_\lambda = s_\mu \cdot a'_\mu$) au-dessus de $U_\lambda \cap U_\mu$ soit équivalente à $s_\lambda = \varepsilon_{\lambda\mu} s_\mu$ (resp. $s_\lambda = \varepsilon'_{\lambda\mu} s_\mu$) au-dessus de $U_\lambda \cap U_\mu$. Comme les sections de $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}'$ au-dessus de U_λ sont les sommes finies des $s_\lambda s'_\lambda \cdot (a_\lambda \otimes a'_\lambda)$ où s_λ et s'_λ parcourent $\Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_X)$, il est clair que le cocycle $(\varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon'_{\lambda\mu})$ correspond à $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}'$, ce qui achève la démonstration (pour une forme générale de ce résultat, voir [4]).

(5.6.4) Soit $u = (\psi, \omega) : X' \to X$ un morphisme d'espaces annelés; si $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ sont deux $\mathcal{O}_X$-Modules localement libres de rang 1 et isomorphes,

les $\mathcal{O}_{X'}$-Modules $u^*(\mathscr{L}_1)$ et $u^*(\mathscr{L}_2)$ (5.4.5) sont isomorphes; d'autre part, pour deux $\mathcal{O}_X$-Modules quelconques $\mathscr{F}, \mathscr{G}$, on a $u^*(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}) = u^*(\mathscr{F}) \otimes u^*(\mathscr{G})$ à isomorphisme canonique près (4.3.3); on en conclut que le morphisme u définit canoniquement un homomorphisme de groupes commutatifs

$$\mathrm{Pic}(u)\colon \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X').$$

D'autre part, on a un homomorphisme canonique (T, 3.2.2)

$$\mathrm{H}^1(u)\colon \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to \mathrm{H}^1(X', \mathcal{O}_{X'}^*)$$

correspondant à la restriction à $\mathcal{O}_X^*$ de l'homomorphisme $\omega : \mathcal{O}_X \to \psi_*(\mathcal{O}_{X'})$. Montrons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\mathrm{H}^1(u)} & \mathrm{H}^1(X', \mathcal{O}_{X'}^*) \\ \varphi_X \wr \downarrow & & \downarrow \wr \ \varphi_{X'} \\ \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow[\mathrm{Pic}(u)]{} & \mathrm{Pic}(X') \end{array}$$

est commutatif. En effet, si $\mathscr{L}$ provient d'un cocycle $(\varepsilon_{\lambda\mu})$ d'un recouvrement ouvert (U_λ) de X, il suffit de prouver que $u^*(\mathscr{L})$ provient d'un cocycle dont la classe de cohomologie est l'image par $\mathrm{H}^1(u)$ de celle de $(\varepsilon_{\lambda\mu})$. Mais si θ_{λ_μ} est l'automorphisme de $\mathcal{O}_X|(U_\lambda \cap U_\mu)$ correspondant à $\varepsilon_{\lambda\mu}$, il est clair que $u^*(\mathscr{L})$ s'obtient par recollement des $\mathcal{O}_{X'}|\psi^{-1}(U_\lambda)$ au moyen des automorphismes $u^*(\theta_{\lambda\mu})$, et il suffit donc de vérifier que ces derniers correspondent au cocycle $(\omega^\#(\varepsilon_{\lambda\mu}))$; mais cela résulte aussitôt des définitions en identifiant $\varepsilon_{\lambda\mu}$ à son image canonique par $\rho_{\mathcal{O}_X}$ (3.7.1), section de $\psi^{-1}(\mathcal{O}_X)$ au-dessus de $\psi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu)$.

5.7. Morphismes plats d'espaces annelés

(5.7.1) Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module. On dit que $\mathscr{F}$ est *f-plat* (ou Y-*plat* lorsque aucune confusion n'est à craindre sur f) *en un point* $x \in X$ si $\mathscr{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{f(x)}$-module plat; on dit que $\mathscr{F}$ est *f-plat au-dessus de* $y \in Y$ si $\mathscr{F}$ est f-plat en tous les points $x \in f^{-1}(y)$; on dit que $\mathscr{F}$ est *f-plat* si $\mathscr{F}$ est f-plat en tous les points de X. On dit que le morphisme f est *plat en* $x \in X$ (resp. *plat au-dessus de* $y \in Y$, resp. *plat*) si $\mathcal{O}_X$ est f-plat en x (resp. f-plat au-dessus de y, resp. f-plat). Si f est un morphisme plat, on dit encore que X est *plat sur* Y, ou Y-*plat*.

(5.7.2) Avec les notations de (5.7.1), si $\mathscr{F}$ est f-plat en x, pour tout voisinage ouvert U de $y = f(x)$, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto (f^*(\mathscr{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})_x$ est *exact* dans la catégorie des $(\mathcal{O}_Y|U)$-Modules; en effet, cette fibre s'identifie canoniquement à $\mathscr{G}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathscr{F}_x$, et notre assertion résulte de la définition.

En particulier, si f est un morphisme *plat*, le foncteur f^* est *exact* dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-Modules.

(5.7.3) Inversement, supposons le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Y$ *cohérent*, et supposons que pour *tout* voisinage ouvert U de y, le foncteur $(f^*(\mathscr{G})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{F})_x$ soit exact en $\mathscr{G}$ dans la catégorie des $(\mathcal{O}_Y|U)$-Modules *cohérents*. Alors $\mathscr{F}$ est *f-plat en x*. En effet, il suffit de prouver que pour tout idéal de type fini $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{O}_y$, l'homomorphisme canonique $\mathfrak{J}\otimes_{\mathcal{O}_y}\mathscr{F}_x\to\mathscr{F}_x$ est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 3, Remarque 1). Or, on sait (5.3.12) qu'il existe alors un voisinage ouvert U de y et un Idéal cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_Y|U$ tel que $\mathscr{J}_y=\mathfrak{J}$, d'où la conclusion.

(5.7.4) Les résultats sur les modules plats se transcrivent aussitôt en propositions sur les faisceaux f-plats en un point:

Si $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules et si $\mathscr{F}''$ est f-plat au point $x\in X$, alors, pour tout voisinage ouvert U de $y=f(x)$ et tout $(\mathcal{O}_Y|U)$-Module $\mathscr{G}$, la suite

$$0\to(f^*(\mathscr{G})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{F}')_x\to(f^*(\mathscr{G})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{F})_x\to(f^*(\mathscr{G})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{F}'')_x\to 0$$

est exacte. Pour que $\mathscr{F}$ soit f-plat en x, il faut et il suffit alors que $\mathscr{F}'$ le soit. On a des énoncés analogues pour les notions correspondantes de $\mathcal{O}_X$-Module f-plat au-dessus de $y\in Y$, ou de $\mathcal{O}_X$-Module f-plat.

(5.7.5) Soient $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ deux morphismes d'espaces annelés; soient $x\in X$, $y=f(x)$, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module. Si $\mathscr{F}$ est f-plat au point x et si le morphisme g est plat au point y, alors $\mathscr{F}$ est $(g\circ f)$-plat en x (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, cor. 3 de la prop. 8). En particulier, si f et g sont des morphismes plats, $g\circ f$ est plat.

(5.7.6) Soient X, Y deux espaces annelés, $f: X\to Y$ un morphisme *plat*. Alors l'homomorphisme canonique de bifoncteurs (4.4.6)

$$f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F},\mathscr{G}))\to\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}),f^*(\mathscr{G})) \tag{5.7.6.1}$$

est un *isomorphisme* lorsque $\mathscr{F}$ admet une *présentation finie* (5.2.5).

En effet, la question étant locale, on peut supposer qu'il existe une suite exacte $\mathcal{O}_Y^m\to\mathcal{O}_Y^n\to\mathscr{F}\to 0$. Or, les deux membres de (5.7.6.1) sont des foncteurs exacts à gauche en $\mathscr{F}$ en vertu de l'hypothèse sur f; on est alors ramené à démontrer la proposition lorsque $\mathscr{F}=\mathcal{O}_Y$, cas où elle est triviale.

(5.7.7) On dit qu'un morphisme $f: X\to Y$ d'espaces annelés est *fidèlement plat* si f est *surjectif* et si, pour tout $x\in X$, $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_{f(x)}$-module *fidèlement plat*. Lorsque X et Y sont des espaces *localement annelés* (4.1.9) et f un morphisme d'espaces localement annelés (4.1.12),

il revient au même de dire que f est *surjectif* et *plat* (6.6.1). Lorsque f est fidèlement plat, f^* est un foncteur *exact* et *fidèle* dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-Modules (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 2, prop. 2), et pour qu'un $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathcal{G}$ soit Y-plat, il faut et il suffit que $f^*(\mathcal{G})$ le soit (*loc. cit.*, n° 3, prop. 6).

§ 6. Compléments d'algèbre commutative

6.1. Limites inductives d'anneaux

Dans toute cette section, $(A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ désigne un *système inductif d'anneaux* dont l'ensemble d'indices I est préordonné *filtrant* à droite; on pose $A = \varinjlim A_\alpha$ et on désigne par φ_α l'homomorphisme canonique $A_\alpha \to A$.

Proposition (6.1.1) *Pour que* $A = 0$, *il faut et il suffit qu'il existe un indice* γ *tel que* $A_\gamma = 0$, *et l'on a alors* $A_\beta = 0$ *pour tout* $\beta \geqslant \gamma$.

En effet, pour tout $\alpha \in I$, l'homomorphisme φ_α transforme l'élément unité de A_α en celui de A; dire que $A = 0$ signifie que $\varphi_\alpha(1) = 0$ ou encore $\varphi_\alpha(1) = \varphi_\alpha(0)$. Mais celà équivaut à dire qu'il existe un $\gamma \geqslant \alpha$ tel que $\varphi_{\gamma\alpha}(1) = \varphi_{\gamma\alpha}(0)$; or cette dernière relation équivaut à $A_\gamma = 0$, d'où la proposition.

Proposition (6.1.2) (i) *Pour tout indice* α, *soit* $\mathfrak{a}_\alpha$ *un idéal de* A_α *tel que, pour* $\beta \geqslant \alpha$, *on ait* $\varphi_{\beta\alpha}(\mathfrak{a}_\alpha) \subset \mathfrak{a}_\beta$, *de sorte que les* $\mathfrak{a}_\alpha$ *forment un système inductif d'ensembles pour les restrictions des* $\varphi_{\beta\alpha}$. *Alors* $\mathfrak{a} = \varinjlim \mathfrak{a}_\alpha$ *s'identifie canoniquement à un idéal de* A, *et* $A/\mathfrak{a}$ *à* $\varinjlim (A_\alpha/\mathfrak{a}_\alpha)$. *Si de plus on a* $\mathfrak{a}_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathfrak{a}_\beta)$ *pour* $\beta \geqslant \alpha$, *alors* $\mathfrak{a}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{a})$ *pour tout* α.

(ii) *Inversement, pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A, *si l'on pose* $\mathfrak{a}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{a})$ *pour tout* α, *les* $\mathfrak{a}_\alpha$ *forment un système inductif tel que* $\mathfrak{a} = \varinjlim \mathfrak{a}_\alpha$.

Comme A est réunion des $\varphi_\alpha(A_\alpha)$, il est clair que (ii) est un cas particulier de (i). Dans (i), le fait que $\mathfrak{a}$ s'identifie canoniquement à un idéal de A, et $A/\mathfrak{a}$ à $\varinjlim (A_\alpha/\mathfrak{a}_\alpha)$, provient de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ dans la catégorie des modules (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 6, n° 6, prop. 8). Pour prouver la dernière assertion, notons que $\mathfrak{a}$ est réunion de la famille croissante des $\varphi_\alpha(\mathfrak{a}_\alpha)$; si $x_\alpha \in A_\alpha$ est tel que $\varphi_\alpha(x_\alpha) \in \mathfrak{a}$, il existe $\beta \geqslant \alpha$ tel que $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$ pour un $x_\beta \in \mathfrak{a}_\beta$, donc $\varphi_\beta(\varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)) = \varphi_\beta(x_\beta)$; mais celà entraîne l'existence d'un $\gamma \geqslant \beta$ tel que $\varphi_{\gamma\beta}(\varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)) = \varphi_{\gamma\beta}(x_\beta)$, donc $\varphi_{\gamma\alpha}(x_\alpha) \in \mathfrak{a}_\gamma$; si l'on suppose que $\mathfrak{a}_\alpha = \varphi_{\gamma\alpha}^{-1}(\mathfrak{a}_\gamma)$, on en conclut que $x_\alpha \in \mathfrak{a}_\alpha$.

Corollaire (6.1.3) *Si* $\mathfrak{N}_\alpha$ *est le nilradical de* A_α, *le nilradical* $\mathfrak{N}$ *de* A *s'identifie à* $\varinjlim \mathfrak{N}_\alpha$, *et* $A_{red} = A/\mathfrak{N}$ *à* $\varinjlim (A_\alpha)_{red}$. *En particulier, si les* A_α *sont réduits, il en est de même de* A.

Il est clair en effet que $\varphi_{\beta\alpha}(\mathfrak{N}_\alpha) \subset \mathfrak{N}_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$, et que $\varinjlim \mathfrak{N}_\alpha$ est un nilidéal de A, donc contenu dans $\mathfrak{N}$. Inversement, si $x \in \mathfrak{N}$, on a $x^h = 0$ pour un entier h; on peut écrire $x = \varphi_\alpha(x_\alpha)$ pour un α et un $x_\alpha \in A_\alpha$; la relation $\varphi_\alpha(x_\alpha^h) = 0$ entraîne l'existence d'un $\beta \geqslant \alpha$ tel que $\varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha^h) = 0$, ou encore $x_\beta^h = 0$ en posant $x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$; par suite $x_\beta \in \mathfrak{N}_\beta$, et comme $x = \varphi_\beta(x_\beta)$, cela achève de prouver le corollaire.

Proposition (6.1.4) *Supposons que chacun des* A_α *soit un anneau local d'idéal maximal* $\mathfrak{m}_\alpha$, *et que les* $\varphi_{\beta\alpha}$ *soient des homomorphismes locaux*; *soit* $k_\alpha = A_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha$ *le corps résiduel de* A_α. *Alors* A *est un anneau local dont* $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{m}_\alpha$ *est l'idéal maximal et* $k = \varinjlim k_\alpha$ *le corps résiduel; en outre, si* $\mathfrak{m}_\beta = \mathfrak{m}_\alpha A_\beta$ *pour* $\alpha \leqslant \beta$, *on a* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\alpha A$ *pour tout* α.

Pour prouver la première assertion, il suffit de montrer que tout $x \notin \mathfrak{m}$ est inversible dans A; mais il existe α et un $x_\alpha \in A_\alpha$ tels que $x = \varphi_\alpha(x_\alpha)$, et comme $\mathfrak{m}_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathfrak{m}_\beta)$ pour $\beta \geqslant \alpha$, il résulte de (6.1.2, (i)) que l'hypothèse $x \notin \mathfrak{m}$ entraîne $x_\alpha \notin \mathfrak{m}_\alpha$; donc x_α est inversible dans A_α et par suite x l'est dans A. L'hypothèse $\mathfrak{m}_\beta = \mathfrak{m}_\alpha A_\beta$ signifie que l'application canonique $\mathfrak{m}_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\beta \to \mathfrak{m}_\beta$ est surjective; la relation $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\alpha A$ résulte alors de l'exactidude du foncteur $\varinjlim$ et du fait qu'il commute au produit tensoriel (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 6, n° 6, prop. 8 et n° 7, prop. 12).

Proposition (6.1.5) *Pour tout indice* α, *soit* S_α *une partie multiplicative de* A_α, *et supposons que pour* $\alpha \leqslant \beta$, *on ait* $\varphi_{\beta\alpha}(S_\alpha) \subset S_\beta$, *de sorte que les* S_α *forment un système inductif d'ensembles pour les restrictions des* $\varphi_{\beta\alpha}$, *et que* $S = \varinjlim S_\alpha$ *est une partie multiplicative de* A, *telle que* $\varphi_\alpha(S_\alpha) \subset S$ *pour tout* α. *Pour* $\alpha \leqslant \beta$, *soit* $\rho_{\beta\alpha} : S_\alpha^{-1} A_\alpha \to S_\beta^{-1} A_\beta$ *l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha & \xrightarrow{\varphi_{\beta\alpha}} & A_\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_\alpha^{-1} A_\alpha & \xrightarrow[\rho_{\beta\alpha}]{} & S_\beta^{-1} A_\beta \end{array}$$

(Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 1, prop. 2); *alors* $(S_\alpha^{-1} A_\alpha, \rho_{\beta\alpha})$ *est un système inductif d'anneaux*; *posons* $A' = \varinjlim (S_\alpha^{-1} A_\alpha)$ *et soit* ρ_α:

$S_\alpha^{-1}A_\alpha \to A'$ *l'application canonique. D'autre part, soit* $\psi_\alpha : S_\alpha^{-1}A_\alpha \to S^{-1}A$ *l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_\alpha^{-1}A_\alpha & \xrightarrow[\psi_\alpha]{} & S^{-1}A \end{array}$$

Alors (ψ_α) *est un système inductif d'homomorphismes; soit* $\psi : A' \to S^{-1}A$ *sa limite. Alors* ψ *est un isomorphisme.*

Il est immédiat par construction que ψ est surjectif. D'autre part, soit $\rho_\alpha(a_\alpha/s_\alpha) \in A'$ tel que $\psi(\rho_\alpha(a_\alpha/s_\alpha)) = 0$, autrement dit $\psi_\alpha(a_\alpha/s_\alpha) = 0$, ou encore $\varphi_\alpha(a_\alpha)/\varphi_\alpha(s_\alpha) = 0$ dans $S^{-1}A$. Cela équivaut à dire qu'il existe $t \in S$ tel que $t\varphi_\alpha(a_\alpha) = 0$; mais il y a un $\beta \geqslant \alpha$ et un $t_\beta \in S_\beta$ tels que $t = \varphi_\beta(t_\beta)$, et comme $\varphi_\alpha(a_\alpha) = \varphi_\beta(a_\beta)$ avec $a_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(a_\alpha)$, on a $\varphi_\beta(t_\beta a_\beta) = 0$. Cela entraîne l'existence d'un $\gamma \geqslant \beta$ tel que, si l'on pose $t_\gamma = \varphi_{\gamma\beta}(t_\beta)$, $a_\gamma = \varphi_{\gamma\beta}(a_\beta) = \varphi_{\gamma\alpha}(a_\alpha)$, on ait $t_\gamma a_\gamma = 0$. On en conclut que, pour $s_\gamma = \varphi_{\gamma\alpha}(s_\alpha)$, on a $\rho_\alpha(a_\alpha/s_\alpha) = \rho_\gamma(a_\gamma/s_\gamma) = \rho_\gamma(t_\gamma a_\gamma/t_\gamma s_\gamma) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Proposition (6.1.6) (i) *Pour tout indice* α, *soit* $\mathfrak{p}_\alpha$ *un idéal premier de* A_α *tel que, pour* $\alpha \leqslant \beta$, *on ait* $\varphi_{\beta\alpha}(\mathfrak{p}_\alpha) \subset \mathfrak{p}_\beta$. *Alors* $\mathfrak{p} = \varinjlim \mathfrak{p}_\alpha$ *est un idéal premier de* A. *En particulier, si les* A_α *sont intègres, il en est de même de* A.

(ii) *Si de plus on a* $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathfrak{p}_\beta)$ *pour* $\alpha \leqslant \beta$, *alors* $A_\mathfrak{p}$ *s'identifie canoniquement à* $\varinjlim (A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$.

(iii) *Si* A *est un anneau local,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal, et si les homomorphismes* φ_α *sont injectifs, alors, en posant* $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{m})$, *on a* $A = \varinjlim (A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$ *et les homomorphismes* $(A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha} \to A_\mathfrak{m} = A$ *sont injectifs.*

Les deux assertions de (i) sont en fait équivalentes puisque $A/\mathfrak{p} = \varinjlim (A_\alpha/\mathfrak{p}_\alpha)$. Supposons donc tous les A_α intègres, et soient x, y deux éléments de A tels que $xy = 0$. Il existe par suite un indice α tel que $x = \varphi_\alpha(x_\alpha)$, $y = \varphi_\alpha(y_\alpha)$ pour x_α, y_α dans A_α, et $\varphi_\alpha(x_\alpha y_\alpha) = 0$; cela entraîne l'existence d'un indice $\beta \geqslant \alpha$ tel que, si l'on pose $x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$, $y_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(y_\alpha)$, on ait $x_\beta y_\beta = 0$; comme A_β est intègre, on a $x_\beta = 0$ ou $y_\beta = 0$, et puisque $x = \varphi_\beta(x_\beta)$, $y = \varphi_\beta(y_\beta)$, cela prouve que A est intègre.

Pour prouver (ii), il suffit d'observer que les $S_\alpha = A_\alpha - \mathfrak{p}_\alpha$ forment alors un système inductif de parties multiplicatives des A_α, dont la limite inductive est $S = A - \mathfrak{p}$. Il suffit alors d'appliquer (6.1.5).

La première assertion de (iii) résulte de (ii), puisque $A_\mathfrak{m} = A$. En outre, les éléments de $A_\alpha - \mathfrak{p}_\alpha$ sont inversibles dans A, donc (en considérant A comme un A_α-module) on a aussi $A_{\mathfrak{p}_\alpha} = A$, et le fait que $(A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha} \to A_{\mathfrak{p}_\alpha}$ soit injectif résulte par platitude de ce que φ_α est injectif.

6.2. Identification du module M_f à une limite inductive

(6.2.1) Soient A un anneau, M un A-module, f un élément de A. Considérons une suite (M_n) de A-modules, tous identiques à M, et pour tout couple d'entiers $m \leqslant n$ soit $\varphi_{mn}: M_m \to M_n$ l'homomorphisme $z \mapsto f^{n-m}z$; il est immédiat que $((M_n),(\varphi_{nm}))$ est un système inductif de A-modules; soit $N = \varinjlim M_n$ sa limite inductive. Nous allons définir un A-isomorphisme canonique fonctoriel $\theta: N \xrightarrow{\sim} M_f$. Pour cela, remarquons que pour tout n, $\theta_n: z \mapsto z/f^n$ est un A-homomorphisme de $M_n = M$ dans M_f, et il est immédiat que $\theta_n \circ \varphi_{nm} = \theta_m$ pour $m \leqslant n$, autrement dit (θ_n) est un système inductif d'homomorphismes. Prenons pour θ la limite inductive de ce système, de sorte que si $\varphi_n: M_n \to N$ est l'homomorphisme canonique, on a $\theta_n = \theta \circ \varphi_n$ pour tout n. Comme par définition tout élément de M_f est de la forme z/f^n pour un n au moins, θ est surjectif. D'autre part, si $\theta(\varphi_n(z)) = 0$, autrement dit $z/f^n = 0$, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $f^k z = 0$, donc $\varphi_{n+k,n}(z) = 0$, ce qui entraîne $\varphi_n(z) = 0$. On peut donc identifier M_f et $\varinjlim M_n$ au moyen de θ.

(6.2.2) Ecrivons maintenant $M_{f,n}$, φ^f_{nm} et φ^f_n au lieu de M_n, φ_{nm} et φ_n. Soit g un second élément de A. Comme f^n divise $f^n g^n$, on a un homomorphisme fonctoriel

$$\rho_{fg,f}: M_f \to M_{fg}$$

(Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 3, prop. 8). Si on identifie canoniquement M_f et M_{fg} à $\varinjlim M_{f,n}$ et $\varinjlim M_{fg,n}$ respectivement, $\rho_{fg,f}$ s'identifie à la limite inductive des applications $\rho^n_{fg,f}: M_{f,n} \to M_{fg,n}$ définies par $\rho^n_{fg,f}(z) = g^n z$. En effet, cela résulte immédiatement de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_{f,n} & \xrightarrow{\rho^n_{fg,f}} & M_{fg,n} \\ {\scriptstyle \varphi^f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{fg}_n} \\ M_f & \xrightarrow[\rho_{fg,f}]{} & M_{fg} \end{array}$$

6.3. Propriétés de finitude

(6.3.1) Nous ne reviendrons pas sur la définition d'un A-module de type fini ou de présentation finie (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8). Rappelons que tout module de présentation finie est de type fini, que tout module *projectif* de type fini est de présentation finie et que si A est noethérien, tout A-module de type fini est de présentation finie (*loc. cit.*, lemme 8). Un module plat de présentation finie est projectif (Bourbaki,

Alg. comm., chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1); par contre un module plat de type fini n'est pas nécessairement projectif (ni par suite de présentation finie) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, exerc. 18).

Proposition (6.3.1.1) *Si* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{j} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de* A*-modules et si* M′ *et* M″ *sont de type fini* (resp. *de présentation finie*), *alors* M *est de type fini* (resp. *de présentation finie*).

On a en effet deux homomorphismes surjectifs $g' : L' \to M'$ et $g'' : L'' \to M''$, où L′ et L″ sont des A-modules *libres* de type fini. On en déduit un homomorphisme $g : L' \oplus L'' \to M$ tel que le diagramme

(6.3.1.2)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{u} & L' \oplus L'' & \xrightarrow{v} & L'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g''} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow[j]{} & M & \xrightarrow[p]{} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(où u et v sont les homomorphismes canoniques) soit commutatif: en effet, puisque L″ est libre, il existe un homomorphisme $h'' : L'' \to M$ tel que $p \circ h'' = g''$; on prend alors $g(x' + x'') = j(g'(x')) + h''(x'')$ et la commutativité de (6.3.1.2) est immédiate. Comme les lignes de ce diagramme sont exactes, on en déduit une suite exacte (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 1, n° 4, prop. 2)

$$\mathrm{Ker}(g') \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(g'') \to \mathrm{Coker}(g') \to \mathrm{Coker}(g) \to \mathrm{Coker}(g'')$$

et comme $\mathrm{Coker}(g') = \mathrm{Coker}(g'') = 0$, on en déduit déjà $\mathrm{Coker}(g) = 0$, ce qui prouve que M est de type fini. Si de plus M′ et M″ sont de présentation finie, $\mathrm{Ker}(g')$ et $\mathrm{Ker}(g'')$ sont de type fini, et la suite exacte précédente montre (puisque $\mathrm{Coker}(g') = 0$) que $\mathrm{Ker}(g)$ est aussi de type fini, donc M de présentation finie.

Proposition (6.3.1.3) *Soient* M, N *deux* A*-modules.*

(i) *Pour que* $M \oplus N$ *soit de présentation finie, il faut et il suffit que* M *et* N *le soient.*

(ii) *Si* M *et* N *sont de présentation finie, il en est de même de* $M \otimes_A N$.

(iii) *Si* M *est un* A*-module projectif de type fini et si* N *est de présentation finie,* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *est de présentation finie.*

(i) La suffisance de la condition est un cas particulier (trivial) de (6.3.1.1). Inversement, s'il y a un homomorphisme surjectif $u : A^m \to M \oplus N$ dont le noyau R est de type fini, et si $p : M \oplus N \to M$ est la projection canonique, le noyau de $p \circ u : A^m \to M$ est $u^{-1}(N)$. Or il est clair que N est de type fini, et $u^{-1}(N)$ est engendré par R et par un ensemble fini dont les images par u forment un système générateur de N,

donc $u^{-1}(N)$ est de type fini et par suite M est de présentation finie.

(ii) Si $M \cong A^m/R$ et $N \cong A^n/S$, $M \otimes_A N$ est isomorphe à $A^{mn}/(\mathrm{Im}(A^m \otimes S) + \mathrm{Im}(R \otimes A^n))$. Si chacun des modules R, S est de type fini, il en est de même de $\mathrm{Im}(A^m \otimes S) + \mathrm{Im}(R \otimes A^n)$, d'où la conclusion.

(iii) L'hypothèse entraîne l'existence d'un A-module P tel que $M \oplus P$ soit isomorphe à A^n; on en déduit que $\mathrm{Hom}_A(M,N) \oplus \mathrm{Hom}_A(P,N)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(A^n,N) \cong N^n$, donc est de présentation finie; la conclusion résulte alors de (i).

On a enfin la proposition suivante:

Proposition (6.3.1.4) *Tout* A*-module est isomorphe à une limite inductive filtrante de* A*-modules de présentation finie.*

Soit M un A-module. Pour toute partie finie L de M, considérons le A-module A^L, et si $L \subset L'$ sont deux parties finies de M, soit $u_{L',L} : A^L \to A^{L'}$ l'injection qui, pour toute application f de L dans A, est telle que $u_{L',L}(f)$ soit le prolongement de f par 0 aux éléments de $L' - L$; soit d'autre part $u_L : A^L \to M$ l'homomorphisme de A-modules transformant en un élément $m \in L$ l'élément de la base canonique de A^L d'indice m. Soit P_L le noyau $\mathrm{Ker}(u_L)$; considérons l'ensemble des couples $\alpha = (L, R_L)$, où L parcourt l'ensemble des parties finies de M et, pour chaque L, R_L parcourt l'ensemble des parties finies de P_L. Il est clair que l'on a $u_{L',L}(P_L) \subset P_{L'}$ pour $L = L'$; nous ordonnerons l'ensemble des couples (L, R_L) en posant $(L, R_L) \leqslant (L', R'_{L'})$ si $L \subset L'$ et si $u_{L',L}(R_L) \subset R'_{L'}$. Il est immédiat que l'on a ainsi défini une relation d'ordre; en outre cette relation est *filtrante*, car si (L, R_L) et $(L', R'_{L'})$ sont quelconques, on considère $L'' = L \cup L'$ et $R''_{L''}$ réunion des images $u_{L'',L}(R_L)$ et $u_{L'',L'}(R'_{L'})$; $(L'', R''_{L''})$ est un majorant de (L, R_L) et de $(L', R'_{L'})$. Pour tout couple $\alpha = (L, R_L)$, soit alors $N(R_L) \subset P_L$ le sous-module engendré par R_L dans A^L; le A-module $M_\alpha = A^L/N(R_L)$ est *de présentation finie*; pour $\alpha \leqslant \beta = (L', R'_{L'})$, on a $u_{L',L}(N(R_L)) \subset N(R'_{L'})$, et on note $v_{\beta\alpha}$ l'homomorphisme $M_\alpha \to M_\beta$ obtenu à partir de $u_{L',L}$ par passage aux quotients. Il est immédiat que $(M_\alpha, v_{\beta\alpha})$ est un système inductif de A-modules; montrons que sa limite inductive M' est isomorphe à M. Notons $v_\alpha : M_\alpha \to M'$ l'homomorphisme canonique, et soit d'autre part $w_\alpha : M_\alpha \to M$ l'homomorphisme déduit de u_L par passage au quotient; les w_α forment un système inductif, de limite $w : M' \to M$, et il s'agit de prouver que w est bijectif. En vertu des définitions, il est clair que w est surjectif. Supposons que $w(x') = 0$ pour un $x' \in M'$; alors il existe un $\alpha = (L, R_L)$ et un $x_\alpha \in M_\alpha$ tels que $x' = v_\alpha(x_\alpha)$ et $w_\alpha(x_\alpha) = 0$; donc x_α est image canonique d'un élément $y_L \in P_L$; si R'_L est réunion de R_L et de $\{y_L\}$ et si $\beta = (L, R'_L)$, on a donc $v_{\beta\alpha}(x_\alpha) = 0$ et par suite $x' = 0$. CQFD.

Proposition (6.3.2) *Soient* A_0 *un anneau,* $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ *un système inductif de* A_0*-algèbres,* $A=\varinjlim A_\lambda$; *soient* M_0, N_0 *deux* A_0*-modules, et posons* $M_\lambda=M_0\otimes_{A_0}A_\lambda$, $N_\lambda=N_0\otimes_{A_0}A_\lambda$, $M=M_0\otimes_{A_0}A=\varinjlim M_\lambda$, $N=N_0\otimes_{A_0}A=\varinjlim N_\lambda$. *Si* M_0 *est un* A_0*-module de type fini* (resp. *de présentation finie*), *l'homomorphisme canonique*

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda,N_\lambda)\to \mathrm{Hom}_A(M,N) \tag{6.3.2.1}$$

est injectif (resp. *bijectif*).

L'homomorphisme (6.3.2.1) est défini de la façon suivante: puisque, pour $\lambda\leqslant\mu$, on a $M_\mu=M_\lambda\otimes_{A_\lambda}A_\mu$, $N_\mu=N_\lambda\otimes_{A_\lambda}A_\mu$, on a une application canonique $u_{\mu\lambda}:\mathrm{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda,N_\lambda)\to\mathrm{Hom}_{A_\mu}(M_\mu,N_\mu)$ (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 3), et ces applications définissent un système inductif de A_λ-modules $(\mathrm{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda,N_\lambda),u_{\mu\lambda})$; d'autre part, on a de même des applications canoniques $v_\lambda:\mathrm{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda,N_\lambda)\to\mathrm{Hom}_A(M,N)$, qui forment un système inductif d'applications; l'homomorphisme (6.3.2.1) est la limite inductive de ce système d'applications.

Pour démontrer la proposition, remarquons (Bourbaki, *loc. cit.*, n° 1) que l'on a des isomorphismes canoniques fonctoriels

$$\mathrm{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda,N_\lambda)\simeq\mathrm{Hom}_{A_0}(M_0,N_\lambda),\qquad \mathrm{Hom}_A(M,N)\simeq\mathrm{Hom}_{A_0}(M_0,N)$$

si bien que l'homomorphisme (6.3.2.1) n'est autre, à des isomorphismes canoniques près, que l'homomorphisme canonique

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{A_0}(M_0,N_\lambda)\to\mathrm{Hom}_{A_0}(M_0,\varinjlim N_\lambda) \tag{6.3.2.2}$$

qui, à tout système inductif d'homomorphismes de A_0-modules $\theta_\lambda:M_0\to N_\lambda$, fait correspondre sa limite inductive.

Or, si M_0 est de type fini (resp. de présentation finie), on a une suite exacte $A_0^m\to M_0\to 0$ (resp. $A_0^n\to A_0^m\to M_0\to 0$); comme il est clair que (6.3.2.2) est bijectif lorsque M_0 est de la forme A_0^q, il suffit d'utiliser l'exactitude à gauche du foncteur $M_0\mapsto\mathrm{Hom}_{A_0}(M_0,P)$ et l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ (dans la catégorie des A_0-modules) pour conclure.

Proposition (6.3.3) *Soient* (A_α) *un système inductif d'anneaux,* $A=\varinjlim A_\alpha$. *Pour tout* A*-module de présentation finie* M, *il existe un indice* α *et un* A_α*-module de présentation finie* M_α *tel que* M *soit isomorphe à* $M_\alpha\otimes_{A_\alpha}A$.

En effet, on peut supposer que $M=A^r/P$, où P est un sous-A-module de type fini de A^r. Comme $A^r=\varinjlim(A_\alpha^r)$ et que P est de type fini, il existe un α et un sous-A_α-module de type fini P_α de A_α^r tel que P soit

l'image canonique de $P_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$; l'exactitude à droite du produit tensoriel montre donc que M est isomorphe a $(A_\alpha^r/P_\alpha) \otimes_{A_\alpha} A$.

(6.3.4) Nous ne reviendrons pas sur la définition d'une A-algèbre *de type fini* (resp. *finie*) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 1, n° 1 et chap. V, § 1, n° 1). Rappelons que si B est une A-algèbre de type fini (resp. finie), A' une A-algèbre, alors $B' = B \otimes_A A'$ est une A'-algèbre de type fini (resp. finie). Si B est une A-algèbre de type fini (resp. finie) et C une B-algèbre de type fini (resp. finie), alors C est une A-algèbre de type fini (resp. finie). Lorsque A est un corps et B un surcorps de A, on évitera de confondre la notion d'*extension de type fini* du corps A et de A-*algèbre de type fini:* le corps des fractions rationnelles A(X) est engendré par l'unique élément X en tant qu'extension de A, mais n'est pas une A-algèbre de type fini.

(6.3.5) On peut encore dire qu'une A-algèbre de type fini est une algèbre isomorphe à une algèbre quotient $A[T_1,\ldots,T_n]/\mathfrak{a}$ d'une algèbre de polynômes. On dit qu'une A-algèbre B est *de présentation finie* si elle est isomorphe à un tel quotient où en outre l'idéal $\mathfrak{a}$ est *de type fini.* Pour toute A-algèbre A', $B' = B \otimes_A A'$ est alors une A'-algèbre de présentation finie, étant isomorphe au quotient de $A'[T_1,\ldots,T_n]$ par l'image canonique dans cet anneau de $\mathfrak{a} \otimes_A A'$, qui est un $A'[T_1,\ldots,T_n]$-module de type fini.

Si B est une A-algèbre de présentation finie, et C une B-algèbre de présentation finie, alors C est une A-algèbre de présentation finie. En effet, on peut supposer que $B = A[S_1,\ldots,S_m]/\mathfrak{a}$ et $C = B[T_1,\ldots,T_n]/\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$) est un idéal de type fini de $A[S_1,\ldots,S_m]$ (resp. $B(T_1,\ldots,T_n]$); d'après ce qui précède, l'anneau $B[T_1,\ldots,T_n] = B \otimes_A A[T_1,\ldots,T_n]$ est isomorphe à $A[S_1,\ldots,S_m,T_1,\ldots,T_n]/\mathfrak{a}'$, où $\mathfrak{a}'$ est un idéal de type fini; l'idéal $\mathfrak{b}$ de $B[T_1,\ldots,T_n]$ est donc de la forme $\mathfrak{b}'/\mathfrak{a}'$, où $\mathfrak{b}'$ est un idéal de $A[S_1,\ldots,S_m,T_1,\ldots,T_n]$; comme $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}'/\mathfrak{a}'$ sont des modules de type fini sur $A[S_1,\ldots,S_m,T_1,\ldots,T_n]$, il en est de même de $\mathfrak{b}'$, d'où notre assertion.

Lorsque A est un anneau *noethérien*, il en est de même de $A[T_1,\ldots,T_n]$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 10, cor. 2 du th. 2), donc toute A-algèbre de type fini est alors de présentation finie. Au contraire, si A n'est pas noethérien, il y a des idéaux $\mathfrak{a}$ de A non de type fini, et $A/\mathfrak{a}$ est une A-algèbre *finie* dont on peut montrer qu'elle n'est pas de présentation finie (cf. **I**, 6.2.7). Toutefois, on a la proposition suivante:

Proposition (6.3.6) *Si* B *est une* A-*algèbre finie, il existe un homomorphisme* surjectif *de* A-*algèbres* $u: B' \to B$, *où* B' *est une* A-*algèbre finie et de présentation finie qui est un* A-*module libre.*

En effet, il y a un système générateur fini $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de la A-algèbre B, tel que chacun des a_i vérifie une relation $F_i(a_i)=0$, ou $F_i\in A[T]$ est un polynôme unitaire de degré >0; la A-algèbre quotient $B'_i=A[T]/(F_i)$ est donc libre de rang fini sur A; soit c_i la classe de T dans B'_i. Il existe un homomorphisme de A-algèbres $u_i: B'_i\to B$ tel que $u_i(c_i)=a_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$; on prend alors pour B′ le produit tensoriel $B'_1\otimes_A B'_2\otimes\cdots\otimes_A B'_m$, et pour $u: B'\to B$ l'homomorphisme $u_1\otimes u_2\otimes\cdots\otimes u_m$, qui est surjectif par construction. En outre, si $B''=A[T_1,\ldots,T_m]$, B″ s'identifie au produit tensoriel $A[T_1]\otimes A[T_2]\otimes\cdots\otimes A[T_m]$ et B′ au produit tensoriel $(A[T_1]/(F_1(T_1)))\otimes\cdots\otimes(A[T_m]/(F_m(T_m)))$, donc au quotient B″/b″, où b″ est l'idéal engendré par les polynômes $F_i(T_i)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$; ceci prouve que B′ est une A-algèbre de présentation finie.

Corollaire (6.3.7) *Soit* B *une* A*-algèbre finie qui est un* A-module *de présentation finie. Alors* B *est une* A-algèbre *de présentation finie.*

En effet, avec les notations de (6.3.6), le noyau $\mathfrak{a}$ de $u: B'\to B$ est un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8, lemme 9) et *a fortiori* un idéal de type fini de B′: par suite B′ est une B-algèbre de présentation finie, et comme B′ est une A-algèbre de présentation finie, B est une A-algèbre de présentation finie (6.3.5) (pour une réciproque, voir (**I**, 6.2.10)).

Proposition (6.3.8) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre. Alors* B *est* A*-isomorphe à une limite inductive filtrante* $\varinjlim B_\lambda$, *où les* B_λ *sont des* A*-algèbres de présentation finie.*

On raisonne comme dans (6.3.1.4). Pour toute partie finie L de B, on considère l'algèbre $C_L=A[(T_m)_{m\in L}]$; si $L\subset L'$ sont deux parties finies de B, soit $u_{L',L}: C_L\to C_{L'}$ l'injection canonique qui à tout T_m pour $m\in L$ fait correspondre le même élément; soit d'autre part $u_L: C_L\to B$ l'homomorphisme de A-algèbres transformant en $m\in L$ chaque élément T_m. On considère l'idéal $P_L=\mathrm{Ker}(u_L)$, et l'ensemble des couples $\alpha=(L,R_L)$ où, pour chaque L, R_L parcourt l'ensemble des parties finies de P_L. On ordonne l'ensemble de ces couples comme dans (6.3.1.4), compte tenu de ce que $u_{L',L}(P_L)\subset P_{L'}$ pour $L\subset L'$; puis, pour tout $\alpha=(L,R_L)$, on note $N(R_L)$ l'idéal de C_L engendré par R_L, de sorte que $B_\alpha=C_L/N(R_L)$ est une A-algèbre *de présentation finie.* Pour $\alpha\leqslant\beta=(L',R'_{L'})$, on a encore $u_{L',L}(N(R_L))\subset N(R'_{L'})$, et on note $v_{\beta\alpha}$ l'homomorphisme $B_\alpha\to B_\beta$ de A-algèbres obtenu à partir de $u_{L',L}$ par passage aux quotients. La fin du raisonnement est la même que dans (6.3.1.4).

Proposition (6.3.9) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre entière. Alors* B *est* A*-isomorphe à une limite inductive filtrante* $\varinjlim B_\lambda$, *où les* B_λ *sont des* A*-algèbres finies et de présentation finie.*

On raisonne encore de la même manière, en associant ici à tout élément $m \in B$ un polynôme $F_m \in A[T]$ unitaire de degré >0 et tel que $F_m(m)=0$. On considère ici pour toute partie finie L de B la A-algèbre finie $\bigotimes_{m\in L} (A[T_m]/(F_m(T_m)))$, et on définit $u_{L',L}$ et u_L comme dans (6.3.8), ainsi que les P_L, R_L, $N(R_L)$ et la relation d'ordre entre les couples $\alpha=(L,R_L)$; comme C_L est une A-algèbre finie, $B_\alpha = C_L/N(R_L)$ est cette fois une A-algèbre *finie et de présentation finie*. Le raisonnement se termine encore comme dans (6.3.1.4).

Proposition (6.3.10) *Soient* A_0 *un anneau,* $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ *un système inductif filtrant de* A_0*-algèbres,* $A = \varinjlim A_\lambda$; *soient* B_0, C_0 *deux* A_0*-algèbres et posons* $B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $C_\lambda = C_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $B = B_0 \otimes_{A_0} A = \varinjlim B_\lambda$, $C = C_0 \otimes_{A_0} A = \varinjlim C_\lambda$. *Si* B_0 *est une* A_0*-algèbre de type fini* (resp. *de présentation finie*), *l'application canonique*

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{A_\lambda\text{-alg}}(B_\lambda, C_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B,C) \tag{6.3.10.1}$$

est injective (resp. *bijective*).

L'application (6.3.10.1) se définit comme dans (6.3.2) à l'aide des applications canoniques $\mathrm{Hom}_{A_\lambda\text{-alg}}(B_\lambda, C_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{A_\mu\text{-alg}}(B_\mu, C_\mu)$ pour $\lambda \leqslant \mu$ et $\mathrm{Hom}_{A_\lambda\text{-alg}}(B_\lambda, C_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B,C)$ (Bourbaki, *Alg.* chap. III, 3e éd., § 1, n° 5). On sait (Bourbaki, *loc. cit.*, n° 5) que l'on a des bijections canoniques fonctorielles

$$\mathrm{Hom}_{A_\lambda\text{-alg}}(B_\lambda, C_\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{A_0\text{-alg}}(B_0, C_\lambda),$$
$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, C) \simeq \mathrm{Hom}_{A_0\text{-alg}}(B_0, C)$$

si bien que (6.3.10) est conséquence de la proposition plus précise suivante:

Proposition (6.3.11) (i) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre de type fini. Alors, pour tout système inductif filtrant* (C_λ) *de* A*-algèbres, l'application canonique*

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, C_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, \varinjlim C_\lambda) \tag{6.3.11.1}$$

qui, à tout système inductif d'homomorphismes, fait correspondre sa limite inductive, est une application injective.

(ii) *Afin que pour* tout *système inductif filtrant* (C_λ) *de* A*-algèbres, l'application* (6.3.11.1) *soit bijective, il faut et il suffit que* B *soit une* A*-algèbre de présentation finie.*

(i) Soit $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système générateur de la A-algèbre B; montrons que, si (θ'_λ), (θ''_λ) sont deux systèmes inductifs d'homomorphismes $B \to C_\lambda$

tels que $\varinjlim \theta'_\lambda = \varinjlim \theta''_\lambda$, il existe μ tel que $\theta'_\mu = \theta''_\mu$. En effet, soient $\varphi_{\mu\lambda} : C_\lambda \to C_\mu$ (pour $\lambda \leqslant \mu$) et $\varphi_\lambda : C_\lambda \to C = \varinjlim C_\lambda$ les homomorphismes canoniques du système inductif (C_λ); par hypothèse, pour chaque indice i, il existe un indice λ_i tel que $\varphi_{\lambda_i}(\theta'_{\lambda_i}(t_i)) = \varphi_{\lambda_i}(\theta''_{\lambda_i}(t_i))$, et l'on peut supposer tous les λ_i égaux à un même λ; il en résulte l'existence d'un $\mu \geqslant \lambda$ tel que $\varphi_{\mu\lambda}(\theta'_\lambda(t_i)) = \varphi_{\mu\lambda}(\theta''_\lambda(t_i))$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, c'est-à-dire $\theta'_\mu(t_i) = \theta''_\mu(t_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, d'où $\theta'_\mu = \theta''_\mu$.

(ii) Montrons d'abord que la condition est suffisante; supposons donc que $B = A[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de type fini; notons t_i la classe de $T_i \bmod \mathfrak{J}$ et soit $(P_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ un système générateur de $\mathfrak{J}$. Supposons donné un homomorphisme de A-algèbres $\theta : B \to C$, et posons $c_i = \theta(t_i)$; on a donc par définition $P_j(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \theta(P_j(t_1, t_2, \ldots t_n)) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$. Or il existe un λ et des éléments $x_1, \ldots, x_n$ dans C_λ tels que $c_i = \varphi_\lambda(x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; on a donc $\varphi_\lambda(P_j(x_1, \ldots, x_n)) = P_j(c_1, \ldots, c_n) = 0$, et par suite il existe $\mu \geqslant \lambda$ tel que $\varphi_{\mu\lambda}(P_j(x_1, \ldots, x_n)) = P_j(\varphi_{\mu\lambda}(x_1), \ldots, \varphi_{\mu\lambda}(x_n)) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$; on en conclut qu'il existe un homomorphisme de A-algèbres $\theta_\mu : B \to C_\mu$ tel que $\theta_\mu(t_i) = \varphi_{\mu\lambda}(x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On en déduit pour tout $\nu \geqslant \mu$ un homomorphisme de A-algèbres $\theta_\nu = \varphi_{\nu\mu} \circ \theta_\mu$ de B dans C_ν, et il est clair que $\theta = \varinjlim \theta_\nu$.

Prouvons enfin que la condition est nécessaire. Prenons d'abord pour (C_λ) le système inductif filtrant des sous-A-algèbres de type fini de B, de sorte que $\varinjlim C_\lambda = B$. Le fait que (6.3.11.1) soit bijective entraîne en particulier que l'application identique 1_B se factorise en $B \to C_\lambda \to B$ pour un λ assez grand, ce qui entraîne $C_\lambda = B$, donc B est une A-algèbre *de type fini*. Posons donc $B = C/\mathfrak{J}$, où $C = A[T_1, \ldots, T_n]$ et $\mathfrak{J}$ est un idéal de C. Alors $\mathfrak{J}$ est limite inductive filtrante du système inductif des idéaux de type fini $\mathfrak{J}_\lambda \subset \mathfrak{J}$ de C; posant $C_\lambda = C/\mathfrak{J}_\lambda$ et utilisant l'exactitude du foncteur $\varinjlim$, on voit que B est isomorphe à la limite inductive du système inductif filtrant (C_λ); notons $p_{\mu\lambda} : C_\lambda \to C_\mu$ (pour $\lambda \leqslant \mu$) et $p_\lambda : C_\lambda \to B$ les homomorphismes canoniques correspondants. Il existe par hypothèse un λ et un A-homomorphisme $u : B \to C_\lambda$ tels que le composé $B \xrightarrow{u} C_\lambda \xrightarrow{p_\lambda} B$ soit l'identité. Soit $q_\lambda : C \to C_\lambda$ l'homomorphisme canonique et posons $t_i = p_\lambda(q_\lambda(T_i))$; on a donc $p_\lambda(u(t_i)) = p_\lambda(q_\lambda(T_i))$, autrement dit $u(t_i) - q_\lambda(T_i) \in \mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\lambda$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Il existe par suite un $\mu \geqslant \lambda$ tel que les n éléments $u(t_i) - q_\lambda(T_i)$ appartiennent à $\mathfrak{J}_\mu/\mathfrak{J}_\lambda$, d'où $p_{\mu\lambda}(u(t_i)) = p_{\mu\lambda}(q_\lambda(T_i)) = q_\mu(T_i)$. Remplaçant λ par μ et u par $p_{\mu\lambda} \circ u$, on peut donc déjà supposer que $u(T_i) = q_\lambda(T_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; si $r = p_\lambda \circ q_\lambda$ est l'homomorphisme canonique $C \to C/\mathfrak{J} = B$, on peut donc écrire $u(r(T_i)) = q_\lambda(T_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, d'où $q_\lambda = u \circ r$. Mais cela entraîne nécessairement que $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\lambda$, car si $z \in \mathfrak{J}$, on a $r(z) = 0$; donc $B = C_\lambda$.

Remarque **(6.3.12)** On peut se demander si l'hypothèse que (6.3.11.1) est injective pour tout système inductif filtrant (C_λ) n'entraîne pas que B soit une A-algèbre de type fini. On voit aussitôt qu'il n'en est rien en prenant B égal à un localisé $S^{-1}A$ de A, puisque $A \to S^{-1}A$ est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 1, prop. 1).

Proposition (6.3.13) *Soient* A_0 *un anneau,* (A_λ) *un système inductif de* A_0*-algèbres,* $A = \varinjlim A_\lambda$; *si* B *est une* A*-algèbre de présentation finie, il existe un* λ *et une* A_λ*-algèbre de présentation finie* B_λ *tels que* B *soit isomorphe à* $B_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$.

Soit $\varphi_\lambda : A_\lambda \to A$ l'homomorphisme canonique. Par hypothèse, B est isomorphe à une algèbre de la forme $A[T_1,\dots,T_n]/\mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de type fini; soit $(F_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ un système générateur de $\mathfrak{J}$. Il existe λ tel que chacun des coefficients de chacun des polynômes F_j soit image par φ_λ d'un élément de A_λ. Autrement dit, il existe un système de polynômes $(F_{j\lambda})_{1 \leqslant j \leqslant m}$ de $A_\lambda[T_1,\dots,T_n]$ tels que $F_j = \varphi_\lambda(F_{j\lambda})$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$. Si $\mathfrak{J}_\lambda$ est l'idéal de $A_\lambda[T_1,\dots,T_n]$ engendré par les $F_{j\lambda}$, $\mathfrak{J}$ est l'image de $\mathfrak{J}_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$ dans $A[T_1,\dots,T_n] = A_\lambda[T_1,\dots,T_n] \otimes_{A_\lambda} A$; l'anneau $B_\lambda = A_\lambda[T_1,\dots,T_n]/\mathfrak{J}_\lambda$ répond par suite à la question.

(6.3.14) On a déjà remarqué (6.3.4) que même si B est une A-algèbre *finie*, les localisés $S^{-1}B$ de B ne sont pas en général des A-algèbres de type fini. On dit qu'une A-algèbre C est *essentiellement de type fini* si C est A-isomorphe à une A-algèbre de la forme $S^{-1}B$, ou B est une A-algèbre *de type fini* et S une partie multiplicative de B.

Proposition (6.3.15) (i) *Si* B *est une* A*-algèbre essentiellement de type fini, et* C *une* B*-algèbre essentiellement de type fini, alors* C *est une* A*-algèbre essentiellement de type fini.*

(ii) *Soient* B *une* A*-algèbre essentiellement de type fini,* A′ *une* A*-algèbre; alors* $B' = B \otimes_A A'$ *est une* A′*-algèbre essentiellement de type fini.*

(i) Soient $B = S^{-1}B_1$ et $C = T^{-1}C_1$, où B_1 (resp. C_1) est une A-algèbre (resp. une B-algèbre) de type fini et S (resp. T) une partie multiplicative de B_1 (resp. C_1). On peut donc supposer que $C_1 = B[T_1,\dots,T_n]/\mathfrak{J}$, et comme $B[T_1,\dots,T_n] = S^{-1}(B_1[T_1,\dots,T_n])$, l'idéal $\mathfrak{J}$ est de la forme $S^{-1}\mathfrak{J}_1$, où $\mathfrak{J}_1$ est un idéal de $B_1[T_1,\dots,T_n]$; celà montre que $C_1 = S^{-1}B_2$, où $B_2 = B_1[T_1,\dots,T_n]/\mathfrak{J}_1$ est une B_1-algèbre de type fini. Donc B_2 est une A-algèbre de type fini, et $C = T^{-1}(S^{-1}B_2)$ une A-algèbre essentiellement de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 3, prop. 7).

(ii) Si $B = S^{-1}C$, où C est une A-algèbre de type fini, on a $B' = S^{-1}(C \otimes_A A')$ et $C \otimes_A A'$ est une A′-algèbre de type fini.

(6.3.16) Si B est une A-algèbre *locale* essentiellement de type fini, B est de la forme C_q, où C est une A-algèbre de type fini et q un idéal premier de C (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 5, prop. 11). Soit p l'image réciproque dans A de l'idéal q; si l'on pose $S=A-p$, C_q est aussi un anneau local en un idéal premier de $S^{-1}C$; comme $S^{-1}C$ est une algèbre de type fini sur $A_p=S^{-1}A$, on voit que B est aussi une A_p-*algèbre essentiellement de type fini*, et en outre l'homomorphisme $A_p \to B$ est *local*.

Proposition (6.3.17) *Si* B *est une* A*-algèbre locale essentiellement de type fini,* B *est* A*-isomorphe à une* A*-algèbre quotient d'une* A*-algèbre de la forme* C_q*, où* C *est une algèbre de polynômes* $A[T_1,\ldots,T_n]$*, et* q *un idéal premier de* C.

En effet, par définition, B est isomorphe à $C'_{q'}$, où C' est une A-algèbre de type fini et q' un idéal premier de C'; mais $C'=C/b$, où $C=A[T_1,\ldots,T_n]$ et b est un idéal de C; donc on a $q'=q/b$, où q est un idéal premier de C, et $C'_{q'}$ est isomorphe à $C_q/b\,C_q$.

6.4. Critères pour qu'un anneau soit noethérien

(6.4.1) Le critère le plus fréquemment utilisé pour vérifier qu'un anneau B est noethérien consiste à prouver que B est une A-algèbre *essentiellement de type fini*, où A est un anneau noethérien (par exemple un corps, ou un anneau de Dedekind, ou un anneau de valuation discrète). Une autre méthode consiste à prouver qu'il existe une B-algèbre C qui soit un anneau noethérien et un B-module *fidèlement plat* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, cor. de la prop. 8) (on rappelle qu'un sous-anneau d'un anneau noethérien n'est pas nécessairement noethérien).

Signalons enfin les critères plus particuliers suivants:

Proposition (6.4.2) *Soient* A *un anneau,* a *et* b *deux idéaux de* A; *si* A/a *et* A/b *sont noethériens, il en est de même de* $A/(a\cap b)$.

En effet, soit c un idéal de A tel que $a\cap b\subset c$; on a donc $a\cap b\subset a\cap c\subset c$; or $c/(a\cap c)$ est un A-module isomorphe à $(a+c)/a$, donc à un idéal de A/a, et par hypothèse est donc de type fini; d'autre part $(a\cap c)/(a\cap b)$ est un sous-A-module de $a/(a\cap b)$, et ce dernier est isomorphe à $(a+b)/b$, qui est par hypothèse un idéal de l'anneau noethérien A/b; tout sous-(A/b)-module de $(a+b)/b$ est donc de type fini, et comme tout sous-A-module de $(a+b)/b$ est aussi un (A/b)-module, on voit que $(a\cap c)/(a\cap b)$ est un A-module de type fini: on en conclut que $c/(a\cap b)$ est un A-module de type fini. CQFD.

Corollaire (6.4.3) *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *deux idéaux de* A; *si* $A/\mathfrak{a}$ *et* $A/\mathfrak{b}$ *sont artiniens, il en est de même de* $A/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$.

Il suffit de voir que $A/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ est un A-module de longueur finie; il en est ainsi de $A/\mathfrak{a}$ par hypothèse, et de $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$, puisque ce dernier est isomorphe à $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$, idéal de l'anneau artinien $A/\mathfrak{b}$; d'où la conclusion.

Corollaire (6.4.4) *Soient* A *un anneau,* M *un* A*-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) M *est un* A*-module noethérien* (resp. *de longueur finie*).

b) *L'anneau* $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ *est noethérien* (resp. *artinien*) *et* M *est un* A*-module de type fini.*

Posons $B=A/\mathrm{Ann}_A(M)$; si B est noethérien (resp. artinien) et si M est un A-module de type fini, on en conclut que M est un B-module de type fini, donc noethérien (resp. de longueur finie); *a fortiori* M est un A-module noethérien (resp. de longueur finie), et par suite b) implique a). Montrons maintenant que a) implique b). Soit $(m_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ un système générateur du A-module M, et posons $\mathfrak{a}_i=\mathrm{Ann}_A(Am_i)$ $(1\leqslant i\leqslant r)$. On a donc des isomorphismes de A-modules $A/\mathfrak{a}_i\simeq Am_i$, donc, pour tout i, $A/\mathfrak{a}_i$ est un A-module noethérien (resp. de longueur finie), et *a fortiori* un anneau noethérien (resp. artinien). Comme $\mathrm{Ann}_A(M)=\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i$, la conclusion résulte de (6.4.2) (resp. (6.4.3)).

Lemme (6.4.5) *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A *et* b *un élément de* A. *Si les idéaux* $\mathfrak{a}+Ab$ *et* $\mathfrak{a}:(Ab)$ (*transporteur* de Ab dans $\mathfrak{a}$, formé des $x\in A$ tels que $bx\in\mathfrak{a}$) *sont de type fini, il en est de même de* $\mathfrak{a}$.

En effet, il existe un nombre fini d'éléments a_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ de $\mathfrak{a}$ tels que les a_i et b engendrent $\mathfrak{a}+Ab$, et un nombre fini d'éléments c_j de $\mathfrak{a}:(Ab)$ qui engendrent cet idéal. Soit $\mathfrak{a}'$ l'idéal engendré par les a_i et les bc_j; on $\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{a}$ par définition. Si $x\in\mathfrak{a}$, on a $x\in\mathfrak{a}'+Ab=\mathfrak{a}+Ab$, donc $x\equiv yb \bmod \mathfrak{a}'$ pour un $y\in A$. Comme $x\in\mathfrak{a}$, on en conclut $yb\in\mathfrak{a}$, donc $y\in\mathfrak{a}:(Ab)$, et par suite $yb\in\mathfrak{a}'$; on en déduit que $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}$, ce qui prouve le lemme.

Corollaire (6.4.6) *Soient* A *un anneau,* $\mathscr{F}$ *l'ensemble des idéaux de* A *qui ne sont pas de type fini. Si* $\mathscr{F}$ *n'est pas vide, c'est un ensemble inductif pour la relation* $\subset$, *et tout élément maximal de* $\mathscr{F}$ *est un idéal premier.*

Soit $\mathscr{G}$ une partie de $\mathscr{F}$ totalement ordonnée par inclusion. La réunion $\mathfrak{a}$ des idéaux appartenant à $\mathscr{G}$ ne peut être de type fini, sinon un système générateur fini de $\mathfrak{a}$ appartiendrait à un idéal appartenant à $\mathscr{G}$, donc engendrerait cet idéal, contrairement à l'hypothèse. Ceci prouve que $\mathscr{F}$ est inductif; par le th. de Zorn, $\mathscr{F}$ admet donc un élément maximal $\mathfrak{p}$. Montrons que $\mathfrak{p}$ est premier. Dans le cas contraire, il existe-

rait deux éléments a, b n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$ et tels que $ab \in \mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{p}+Ab$ et $\mathfrak{p}:(Ab)$ contiendraient $\mathfrak{p}$ et seraient distincts de $\mathfrak{p}$. Par définition, ces deux idéaux seraient de type fini, donc il en serait de même de $\mathfrak{p}$ en vertu de (6.4.5), ce qui est absurde.

Proposition (6.4.7) *Soit* A *un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) A *est un anneau noethérien.*

b) *Tout idéal premier de* A *est de type fini.*

Il est clair que a) entraîne b). Inversement, si b) est vérifiée et s'il existait dans A un idéal non de type fini, il résulterait de (6.4.6) qu'il existerait aussi un idéal premier de A non de type fini, contrairement à l'hypothèse.

Lemme (6.4.8) *Soient* B *un anneau,* A *un sous-anneau de* B, $\mathfrak{f}$ *le conducteur de* A *dans* B (*égal à* $\mathrm{Ann}_A(B/A)$, *ou encore le plus grand idéal de* A *qui soit aussi un idéal de* B).

(i) *Pour tout idéal* $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{f}$ *de* B, *il existe une application strictement croissante de l'ensemble des idéaux* $\mathfrak{L}$ *de* A *tels que* $B \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{J}$ *sur l'ensemble des sous-*$(A/\mathfrak{f})$*-modules de* $\mathfrak{J}/\mathfrak{f}\mathfrak{J}$.

(ii) *Si* $A/\mathfrak{f}$ *et* B *sont noethériens, et si* B *est une* A*-algèbre finie, alors toute suite croissante d'idéaux de* A *contenus dans* $\mathfrak{f}$ *est stationnaire.*

(i) On a $\mathfrak{f}\mathfrak{J} = \mathfrak{f}(B \cdot \mathfrak{L}) = \mathfrak{f}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$ puisque $\mathfrak{L}$ est un idéal de A, d'où la conclusion.

(ii) Soit $(\mathfrak{L}_n)$ une suite croissante d'idéaux de A contenus dans $\mathfrak{f}$. La suite des idéaux $B \cdot \mathfrak{L}_n$ de B est stationnaire puisque B est noethérien; on peut donc supposer que tous les idéaux $B \cdot \mathfrak{L}_n$ sont égaux à un même idéal $\mathfrak{J}$ de B. Comme B est noethérien, $\mathfrak{J}/\mathfrak{f}\mathfrak{J}$ est un B-module de type fini, donc aussi un A-module de type fini puisque B est une A-algèbre finie, et puisque $\mathfrak{J}/\mathfrak{f}\mathfrak{J}$ est annulé par $\mathfrak{f}$, c'est aussi un $(A/\mathfrak{f})$-module de type fini. Mais puisque $A/\mathfrak{f}$ est noethérien, $\mathfrak{J}/\mathfrak{f}\mathfrak{J}$ est un $(A/\mathfrak{f})$-module noethérien, et la conclusion résulte de (i).

Proposition (6.4.9) *Soient* B *un anneau,* A *un sous-anneau de* B. *Si* B *est un anneau noethérien et une* A*-algèbre finie, alors* A *est noethérien.*

Nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{a}$ de A est *contracté dans* B s'il est de la forme $\mathfrak{b} \cap A$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal de B (il revient au même de dire que $\mathfrak{a} = A \subset (B\mathfrak{a})$). Puisque B est noethérien, toute suite croissante d'idéaux de A contractés dans B est stationnaire. Comme l'idéal 0 de A est contracté dans B, pour prouver que A est noethérien, il suffit de montrer que la famille $\mathscr{F}$ des idéaux $\mathfrak{a}$ de A contractés dans B et tels que $A/\mathfrak{a}$ ne soit pas noethérien, est *vide*. Supposons le contraire; alors, en vertu de la remarque faite ci-dessus, $\mathscr{F}$ contiendrait un élément maximal $\mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{a} = A \cap B\mathfrak{a}$, l'anneau $A' = A/\mathfrak{a}$ s'identifie à un sous-anneau de

$B'=B/B\mathfrak{a}$; comme B′ est noethérien et fini sur A′, on voit qu'on peut, en remplaçant A par A′ et B par B′, se borner à considérer le cas où la famille $\mathscr{F}$ est réduite à l'idéal (0). On voit donc qu'on peut se borner à prouver la proposition en *ajoutant* aux hypothèses le fait que pour tout idéal $\mathfrak{a}\neq 0$ de A, l'anneau $A/\mathfrak{a}$ est noethérien.

Par hypothèse, B est un A-module engendré par un nombre fini d'éléments $x_1,\ldots,x_r$; si l'on pose $B_j=A[x_1,\ldots,x_j]$, il suffit, par récurrence descendante, de prouver successivement la proposition pour les anneaux $B_{r-1},\ldots,B_1,A$; on peut donc se borner au cas où $B=A[x]$. Soit $P(T)=a_nT^n+a_{n-1}T^{n-1}+\cdots+a_0$ un polynôme de A[T] de degré *minimum* tel que $P(x)=0$, et posons $C=A[a_nx]$; on va montrer qu'il suffit d'établir que C *est noethérien*. Distinguons pour cela deux cas:

(i) a_n *n'est pas diviseur de* 0 *dans* A. Alors, en posant $y=a_nx$, les éléments $1,y,\ldots,y^{n-1}$ sont linéairement indépendants dans le A-module C: en effet, s'il y avait une relation $\lambda_0+\lambda_1y+\cdots+\lambda_py^p=0$ avec $p\leqslant n-1$, les $\lambda_j\in A$ et $\lambda_p\neq 0$, on en déduirait, par définition de P, $\lambda_pa_n^p=0$, ce qui est absurde. Comme $y^n=(a_nx)^n$ est combinaison linéaire de $1,y,\ldots,y^{n-1}$, ces derniers éléments forment une *base* du A-module C. Si C est noethérien, il en est de même alors de A, par (6.4.1).

(ii) a_n *est diviseur de* 0 *dans* A. Soit $\mathfrak{f}=\mathrm{Ann}_A(C/A)$ le conducteur de A dans C. Par hypothèse, il existe un élément $c\neq 0$ dans A tel que $ca_n=0$, ce qui entraîne $c\in\mathfrak{f}$ par définition de C, et par suite $\mathfrak{f}'=A\cap(Bc)\subset\mathfrak{f}$. Or, puisque $\mathfrak{f}'$ est un idéal $\neq 0$ contracté dans B, $A/\mathfrak{f}'$ est noethérien par hypothèse, donc aussi l'anneau quotient $A/\mathfrak{f}$. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{f})$ est un A-module isomorphe à $(\mathfrak{a}+\mathfrak{f})/\mathfrak{f}$, donc est un A-module de type fini. Si C est noethérien, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{f}$ est un A-module de type fini en vertu de (6.4.8), donc $\mathfrak{a}$ est un A-module de type fini, et A est noethérien.

Raisonnant comme au début de la démonstration en considérant un élément maximal $\mathfrak{c}'$ de la famille des idéaux de C contractés dans B, on peut remplacer C par $C/\mathfrak{c}'$, B par $B/B\mathfrak{c}'$ et x par la classe de x mod. $B\mathfrak{c}'$ (a_nx étant remplacé par sa classe mod. $\mathfrak{c}'=C\cap B\mathfrak{c}'$); on peut donc supposer que pour tout idéal $\mathfrak{c}\neq 0$ de C, C/c est *noethérien*. Posons $\mathfrak{J}=\mathrm{Ann}_C(B/C)$, conducteur de C dans B; notons que l'on a $a_n^n\in\mathfrak{J}$: en effet, il résulte de la définition de C que $a_n^nx^n\in C$ et $a_n^nx^{n+p}=-a_{n-1}a_n^nx^{n+p-1}-\cdots-a_0a_n^nx^p$, et on voit par récurrence sur p que $a_n^nx^{n+p}\in C$.

En vertu de (6.4.7), il suffit de montrer que tout idéal *premier* $\mathfrak{p}$ de C est de type fini. Distinguons trois cas.

(a) Supposons que $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{J}\neq 0$, et soit $c\neq 0$ un élément de $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{J}$. Comme B est entier sur C, on a $C\cap B\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ par le th. de Cohen-Seidenberg (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, cor. 1 du th. 1), donc $Bc\subset\mathfrak{p}$. Comme $Bc=C\cap Bc$ est un idéal $\neq 0$ de C, contracté dans B, C/Bc est noethérien par hypothèse, donc $\mathfrak{p}/Bc$ est un C-module de type

fini; d'autre part B est un C-module de type fini, donc il en est de même de Bc, et par suite $\mathfrak{p}$ est bien un C-module de type fini.

(b) Supposons maintenant que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{J} = 0$ mais $\mathfrak{J} \neq 0$; comme $B\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$ par définition, $\mathfrak{J}$ est un idéal $\neq 0$ de C contracté dans B; $C/\mathfrak{J}$ est donc un anneau noethérien, et $(\mathfrak{p}+\mathfrak{J})/\mathfrak{J}$ est par suite un C-module de type fini; mais l'hypothèse entraîne que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{J})$, donc $\mathfrak{p}$ est isomorphe à $(\mathfrak{p}+\mathfrak{J})/\mathfrak{J}$, donc de type fini.

(c) Supposons enfin que $\mathfrak{J} = 0$. Alors on a vu ci-dessus que $a_n^n = 0$; a_n étant nilpotent, on a $a_n \in \mathfrak{p}$. Soit $r \geqslant 0$ tel que $a_n^{r+1} \neq 0$ et $a_n^{r+2} = 0$, et posons $\mathfrak{K} = C \cap B a_n^{r+1}$; $\mathfrak{K}$ est un idéal de C contracté de B et $\neq 0$, donc $C/\mathfrak{K}$ est noethérien; en outre, comme a_n^{r+1} est annulé par $\mathfrak{K}$, $B a_n^{r+1}$ est un $(C/\mathfrak{K})$-module de type fini, donc un C-module noethérien; a fortiori $\mathfrak{K} \subset B a_n^{r+1}$ est un C-module de type fini. On a vu que $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{p}$ puisque $\mathfrak{K}$ est nilpotent, donc $\mathfrak{p}/\mathfrak{K}$, idéal de l'anneau noethérien $C/\mathfrak{K}$, est un C-module de type fini; ceci prouve encore que $\mathfrak{p}$ est un C-module de type fini, et achève la démonstration de (6.4.9).

Corollaire (6.4.10) *Si* B *est un anneau artinien,* A *un sous-anneau de* B *tel que* B *soit une* A*-algèbre finie, alors* A *est artinien.*

En effet, A est noethérien par (6.4.9); d'autre part, tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est tel que $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n}$ est un idéal premier de B, par le th. de Cohen-Seidenberg (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, th. 1); mais comme B est artinien, $\mathfrak{n}$ est *maximal* dans B, donc $\mathfrak{p}$ est maximal dans A (*loc. cit.*, n° 1, prop. 1) et par suite A est artinien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, prop. 9).

Corollaire (6.4.11) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre finie,* M *un* B*-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) M *est un* B*-module noethérien* (resp. *de longueur finie*).

b) M *est un* A*-module noethérien* (resp. *de longueur finie*).

En effet, puisque B est un A-module de type fini, il revient au même de dire que M est un B-module de type fini ou un A-module de type fini. D'autre part, si $\rho : A \to B$ est l'homomorphisme canonique, on a $\mathrm{Ann}_A(M) = \rho^{-1}(\mathrm{Ann}_B(M))$, donc l'homomorphisme $A/\mathrm{Ann}_A(M) \to B/\mathrm{Ann}_B(M)$ est injectif, et fait de $B/\mathrm{Ann}_B(M)$ une algèbre finie sur $A/\mathrm{Ann}_A(M)$. La conclusion résulte alors de (6.4.4) et (6.4.9).

(6.4.12) Un dernier critère pour qu'un anneau soit noethérien est le théorème de Krull-Akizuki (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, n° 5, prop. 5), que nous allons généraliser aux anneaux *réduits:*

Proposition (6.4.13) *Soient* A *un anneau noetherien réduit de dimension* $\leqslant 1$, $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *ses idéaux premiers minimaux,* K_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *le corps des fractions de* $A/\mathfrak{p}_i$, *de sorte que* A *est canoniquement plongé dans*

$K = \prod_i K_i$ *qui est son anneau total des fractions. Pour tout indice* i, *soit* L_i *une extension de* K_i *de degré fini, et posons* $L = \prod_i L_i$. *Alors tout anneau* B *tel que* $A \subset B \subset L$ *est noethérien et de dimension* $\leqslant 1$.

En effet, pour tout i, soit $a_i = \prod_{j \neq i} L_j$, et considérons l'idéal $b_i = B \cap a_i$ de B; comme l'intersection des b_i est réduite à 0, il suffit de montrer que chacun des anneaux B/b_i est noethérien et de dimension $\leqslant 1$: en effet, B sera alors noethérien par (6.4.2); d'autre part, B s'identifie à un sous-anneau du produit C des B/b_i; si chacun des B/b_i est de dimension $\leqslant 1$, il en sera de même de C, et comme C est entier sur B et $B \subset C$, B sera de dimension $\leqslant 1$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, cor. 1 de la prop. 1). Mais B/b_i est isomorphe à $\mathrm{pr}_i(B)$, qui est un sous-anneau de L_i contenant $\mathrm{pr}_i(A) = A/\mathfrak{p}_i$. Comme par hypothèse $A/\mathfrak{p}_i$ est un corps ou un anneau intègre noethérien de dimension 1, la conclusion résulte du théorème de Krull-Akizuki.

6.5. Anneaux normaux et fermeture intégrale

(6.5.1) On dit qu'un anneau A est *normal* si, pour *tout* idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est *intègre et intégralement clos* *(ce que nous exprimerons au chap. I de façon équivalente en disant que le schéma Spec(A) est *normal* au sens de la théorie des espaces annelés (4.1.4))$_*$.

Il suffit d'ailleurs que pour tout idéal *maximal* $\mathfrak{m}$ de A, $A_\mathfrak{m}$ soit intègre et intégralement clos, tout localisé d'un tel anneau étant encore intègre et intégralement clos (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 5, prop. 16); pour un anneau *local*, il revient donc *au même* de dire qu'il est normal ou qu'il est intègre et intégralement clos. Un anneau normal A est *réduit*, car si $\mathfrak{N}$ est son nilradical, on a $\mathfrak{N}_\mathfrak{m} = 0$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, d'où la conclusion (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1). En outre, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\mathfrak{p}$ ne peut contenir qu'*un seul* idéal premier minimal $\mathfrak{q}_\alpha$ de A, puisque $A_\mathfrak{p}$ est intègre; en outre $\mathfrak{q}_\alpha$ est alors le noyau de l'homomorphisme $A \to A_\mathfrak{p}$, et $A_\mathfrak{p}$ est isomorphe à $(A/\mathfrak{q}_\alpha)_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_\alpha}$; comme l'anneau intègre $A/\mathfrak{q}_\alpha$ est l'intersection de ses localisés $(A/\mathfrak{q}_\alpha)_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_\alpha}$ (Bourbaki, *loc. cit.*, cor. 4 du th. 1), il est *intégralement clos* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 2, prop. 8). Inversement, il est clair que si un anneau A est tel que pour chacun de ses idéaux premiers minimaux $\mathfrak{q}_\alpha$, $A/\mathfrak{q}_\alpha$ est intègre et intégralement clos, et si tout idéal premier de A ne contient qu'un seul idéal premier minimal $\mathfrak{q}_\alpha$, alors A est normal. En particulier, pour qu'un anneau A ne contenant qu'un nombre *fini* d'idéaux premiers minimaux $\mathfrak{q}_i$ (par exemple un anneau *noethérien*) soit normal, il faut

et il suffit qu'il soit *composé direct* des A/q_i et que chacun des A/q_i soit intégralement clos; en effet, les composantes irréductibles $\mathrm{Spec}(A/q_i)$ de $\mathrm{Spec}(A)$ doivent être deux à deux disjointes, et la conclusion résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, prop. 15.

Proposition (6.5.2) *Soit* R *un anneau composé direct d'un nombre fini de corps* K_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, A *un sous-anneau de* R *ayant* R *pour anneau total des fractions* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 1, *Exemple* 7); *les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) A *est normal.*

b) A *est composé direct de sous-anneaux* $A_i \subset K_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *ayant* K_i *pour corps des fractions et intégralement clos.*

c) A *est intégralement fermé dans* R.

L'anneau A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et K_i est le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}_i$ pour tout i; l'équivalence de a) et b) a donc été vue dans (6.5.1), et l'équivalence de b) et c) résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 2, cor. de la prop. 9.

Corollaire (6.5.3) *Soit* R *un anneau composé direct d'un nombre fini de corps, et soit* (A_λ) *une famille de sous-anneaux normaux de* R; *si* $A = \bigcap_\lambda A_\lambda$ *admet* R *pour anneau total des fractions,* A *est normal.*

En effet, chacun des A_λ admet *a fortiori* R comme anneau total des fractions, et le corollaire résulte aussitôt de (6.5.2) et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 2, prop. 8.

(6.5.4) La construction de la fermeture intégrale d'un anneau A dans une A-algèbre peut se ramener au cas où cette A-algèbre est un anneau *réduit*:

Proposition (6.5.5) (i) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre,* $B_0 = B/\mathfrak{n}$ *le quotient de* B *par un nilidéal. Si* A'_0 *est la fermeture intégrale de* A *dans* B_0, *l'image réciproque de* A'_0 *par l'application canonique* $\varphi : B \to B_0$ *est la fermeture intégrale de* A *dans* B.

(ii) *Supposons en outre* A *intègre, et que l'homomorphisme* $\rho : A \to B$ *fasse de* B *un* A*-module fidèlement plat. Si l'on pose* $C = B_{\mathrm{red}}$, *l'homomorphisme composé* $\psi : A \xrightarrow{\rho} B \xrightarrow{\varphi} B_{\mathrm{red}} = C$ *est injectif et se prolonge en un homomorphisme injectif (encore noté* ψ*) du corps des fractions* K *de* A *dans l'anneau total des fractions* R *de* C; *en outre, si* C′ *est la fermeture intégrale de* C *dans* R, $\psi^{-1}(C')$ *est la clôture intégrale* A′ *de* A.

(i) Si $x \in B$ est tel que $\varphi(x)$ vérifie une relation de dépendance intégrale à coefficients dans A, on en déduit que x vérifie une relation de la forme $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathfrak{n}$ avec $a_i \in A$, d'où, en élevant à une puissance assez grande, une relation de dépendance intégrale pour x, à coefficients dans A.

(ii) Comme A est intègre et ρ injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, prop. 8), l'intersection de $\rho(A)$ et du nilradical $\mathfrak{N}$ de B est réduite à 0, et comme $C=B/\mathfrak{N}$, ψ est injectif. Tout $a\neq 0$ dans A étant non diviseur de zéro dans A ne l'est pas non plus dans B par platitude; on en déduit que a n'est pas non plus diviseur de zéro dans C, car si l'on avait $ax\in\mathfrak{N}$ pour un $x\notin\mathfrak{N}$ dans B, on en tirerait $a^n x^n=0$ pour un entier n, ce qui contredit ce qui précède puisque $x^n\neq 0$. On peut donc prolonger ψ en un homomorphisme injectif de K dans R. Pour prouver la dernière assertion, notons qu'il est clair que $A'\subset\psi^{-1}(C')$. Inversement, soit $x\in K$ tel que $\psi(x)\in C'$; $\psi(x)$ est donc entier sur C, et *a fortiori* sur B, autrement dit $B[x]$ est une B-algèbre finie; d'ailleurs, par platitude, $K=A\otimes_A K$ s'identifie à un sous-anneau de $B\otimes_A K$, et le sous-anneau $B[x]$ de $B\otimes_A K$ s'identifie à $B\otimes_A A[x]$; on en conclut que $A[x]$ est un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 6, prop. 11), donc $x\in A'$.

(6.5.6) Contrairement à la terminologie de Bourbaki, nous réserverons le nom d'*anneau de valuation* aux anneaux de valuation (au sens de Bourbaki) qui *ne sont pas des corps*. Rappelons que si K est un corps, A un sous-anneau local de K qui n'est pas un corps, il existe un anneau de valuation ayant K pour corps des fractions et dominant A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 1, n° 2, cor. du th. 2), et la *fermeture intégrale* A' de A dans K est l'intersection des anneaux de valuation ayant K pour corps des fractions et dominant A (*loc. cit.*, n° 3, th. 3).

Le résultat précédent peut se préciser de la façon suivante: si B est un anneau de valuation, k son corps résiduel, L une extension quelconque de k, alors il existe un anneau de valuation *complet* C qui domine (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 1, n° 1) B et dont le corps résiduel est L. En effet, soit K le corps des fractions de B; L est extension algébrique d'une extension transcendante pure $L'=k(T_\mu)_{\mu\in M}$; on sait qu'on peut prolonger la valuation de K correspondant à B en une valuation de $K'=K(T_\mu)_{\mu\in M}$ de sorte que L' soit le corps résiduel de cette valuation; cela résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 10, n° 1, prop. 2, en bien ordonnant l'ensemble M. Remplaçant B par le complété de l'anneau de cette valuation prolongée, on voit qu'on peut se limiter au cas où B est complet et L est une *clôture algébrique* de k. Si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K, on peut alors prolonger à $\bar{K}$ la valuation qui définit B (*loc. cit.*, § 3, n° 3, prop. 5) et le corps résiduel correspondant est une clôture algébrique de k, comme on le voit en relevant dans $\bar{K}$ les coefficients d'un polynôme unitaire de $k[T]$. On est donc finalement ramené au cas où $L=k$, et il suffit alors de prendre

pour C le complété de B pour répondre à la question (*loc. cit.*, § 5, n° 3, prop. 5).

(6.5.7) Rappelons que les *anneaux de valuation noethériens* sont les anneaux de valuation *discrète* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 6, prop. 9). Rappelons d'autre part qu'un anneau local A est dit *de dimension* 1 si son idéal maximal $\mathfrak{m}$ n'est pas minimal et si tout idéal premier distinct de $\mathfrak{m}$ est minimal. Pour un anneau local *noethérien* A, les conditions suivantes sont équivalentes: a) A est de dimension 1 et *normal* (6.5.1); b) l'idéal maximal de A est principal (ce qui revient ici à dire que A est un anneau *régulier* ($\mathbf{0}^*_{\mathrm{IV}}$, 17.1.1)); c) A est un anneau de valuation discrète (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 6, prop. 9 et chap. VII, § 1, n° 7, prop. 11). Pour les anneaux de valuation discrète, les résultats rappelés dans (6.5.6) ont les analogues suivants:

Proposition (6.5.8) *Soient* A *un anneau local noethérien intègre qui n'est pas un corps*, K *son corps des fractions*, L *une extension de type fini de* K; *il existe alors un anneau de valuation* discrète *ayant* L *pour corps des fractions et dominant* A.

Supposons d'abord $L = K$. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $(x_1, \ldots, x_n)$ un système générateur de $\mathfrak{m}$ formé d'éléments $\neq 0$, B le sous-anneau $A[x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1]$ de K, qui est noethérien. Il est immédiat que l'idéal $\mathfrak{m}B$ de B est identique à l'idéal principal $x_1 B$; si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal dans $\mathrm{Ass}(x_1 B)$, on sait que $B_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local noethérien de *dimension* 1 ($\mathbf{0}^*_{\mathrm{IV}}$, 16.3.2); il est clair que $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \cap A$ est un idéal de A contenant $\mathfrak{m}$ et ne contenant pas 1, donc égal à $\mathfrak{m}$, autrement dit $B_{\mathfrak{p}}$ domine A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 1, n° 1). En vertu du théorème de Krull-Akizuki (6.4.13), la clôture intégrale C de $B_{\mathfrak{p}}$ est un anneau noethérien (bien que C ne soit pas nécessairement une $B_{\mathfrak{p}}$-algèbre finie); si $\mathfrak{n}$ est un idéal maximal de C, $C_{\mathfrak{n}}$ domine $B_{\mathfrak{p}}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1), donc A; d'autre part, en vertu du théorème de Krull-Akizuki, $C_{\mathfrak{n}}$ est de dimension 1, donc un anneau de valuation discrète.

Si maintenant L est une extension de type fini de K, on peut, d'après ce qui précède, se limiter au cas où A est déjà un anneau de valuation discrète. Soit w une valuation de K associée à A; il existe une valuation discrète w' de L qui prolonge w: en effet, on se ramène par récurrence sur le nombre des générateurs de L au cas où $L = K(\alpha)$ et alors le résultat est classique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 3, prop. 5, § 8, n° 1, cor. 3 de la prop. 1 et § 10, n° 1, prop. 2).

Corollaire (6.5.9) *Soient* A *un anneau intègre noethérien*, K *son corps des fractions*, L *une extension de type fini de* K. *Alors la fermeture intégrale de* A *dans* L *est l'intersection des anneaux de valuation discrète ayant* L *pour corps des fractions et contenant* A.

En effet, un tel anneau de valuation discrète, étant normal, contient *a fortiori* tout élément de L entier sur A. Il suffit donc de prouver que si $x \in L$ n'est pas entier sur A, il existe un anneau de valuation discrète C ayant L pour corps des fractions, contenant A et ne contenant pas x. L'hypothèse sur x signifie que l'on a $x \notin B = A[1/x]$, autrement dit $1/x$ n'est pas inversible dans l'anneau noethérien B. Il y a donc un idéal premier $\mathfrak{p}$ de B contenant $1/x$. L'anneau local intègre $B_{\mathfrak{p}}$ est noethérien et contenu dans L, qui est une extension de type fini du corps des fractions de $B_{\mathfrak{p}}$ (ce dernier contenant K). En vertu de (6.5.8), il y a donc un anneau de valuation discrète C, dominant $B_{\mathfrak{p}}$ et ayant L pour corps des fractions; comme $1/x \in \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ appartient à l'idéal maximal de C, on a $x \notin C$, CQFD.

(6.5.10) On dit qu'un anneau *local* A est *unibranche* si l'anneau A_{red} est intègre et si la clôture intégrale de A_{red} est un anneau *local;* on dit que A est *géométriquement unibranche* s'il est unibranche et si en outre le corps résiduel de l'anneau local, clôture intégrale de A_{red}, est une extension *radicielle* de celui de A. Il est clair qu'un anneau local *normal* est géométriquement unibranche.

(6.5.11) Contrairement à la notion d'anneau normal, celle d'anneau unibranche (resp. géométriquement unibranche) *n'est pas stable* par localisation en un idéal premier, comme le montre l'exemple suivant.

*Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique 0, B l'anneau intègre $K[U,V,W]/(U^2(U-W)-V^2(U+W))$ (U, V, W indéterminées), de sorte que Spec(B) est un «cône de sommet l'origine ayant une génératrice double»; soient u, v, w les images de U, V, W dans B. Soit R le corps des fractions de B, et considérons dans R l'élément $t = v(u+w)/u$, qui n'appartient pas à B; montrons que $C = B[t]$ est la *clôture intégrale* de B. On a en effet $t^2 = u^2 - w^2$, donc t est entier sur B; d'autre part, C est isomorphe à l'anneau $K[T,U,V,W]/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est l'idéal engendré par les deux polynômes $P_1 = U^2(U-W) - V^2(U+W)$ et $P_2 = TU - V(U+W)$; ces polynômes sont irréductibles, d'où résulte aussitôt qu'ils forment une suite régulière en tout idéal premier de $K[T,U,V,W]$ contenant $\mathfrak{a}$, et par suite (**O**$^*_{IV}$, 16.5.6) C est un anneau de Cohen-Macaulay et Spec(C) vérifie donc la condition (S_2); le critère jacobien de Zariski (**O**$^*_{IV}$, 22.6.7) prouve d'autre part que Spec(C) vérifie la condition (R_1), et C est donc bien *normal* en vertu du critère de Serre (**IV***, 5.8.6). Il est immédiat que si $\mathfrak{m}_0$ est l'idéal maximal de B engendré par u, v, w («sommet du cône») il existe un seul idéal maximal de C au-dessus de $\mathfrak{m}_0$, savoir l'idéal $\mathfrak{n}_0$ engendré par t, u, v, w, égal à $\mathfrak{m}_0 B$. Si l'on pose $A = B_{\mathfrak{m}_0}$, la clôture intégrale de A est $A' = C_{\mathfrak{n}_0}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 5, prop. 16 et § 2, n° 1, prop. 2). Mais dans A l'idéal premier $\mathfrak{p}$ engendré par u et v («droite double») est tel que

la clôture intégrale $A_p[t]$ de A_p ne soit pas un anneau local, donc A est géométriquement unibranche sans que A_p le soit.*

Proposition (6.5.12) *Soit* $(A_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ *un système inductif d'anneaux, et soit* $A = \varinjlim A_\alpha$.

(i) *Soit* $(B_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ *un second système inductif d'anneaux ayant même ensemble d'indices, et pour tout* α, *soit* $\theta_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$ *un homomorphisme faisant de* B_α *une* A_α*-algèbre, de sorte que les* θ_α *forment un système inductif d'homomorphismes. Alors, si* A'_α *est la fermeture intégrale de* A_α *dans* B_α *(pour* θ_α*), les* A'_α *forment un système inductif d'anneaux et* $A' = \varinjlim A'_\alpha$ *est la fermeture intégrale de* A *dans* $B = \varinjlim B_\alpha$. *En particulier, si les* A_α *sont intègres et les* $\varphi_{\beta\alpha}$ *injectifs, les corps des fractions* K_α *des* A_α *forment un système inductif de corps, et si* A'_α *est la clôture intégrale de* A_α, *les* A'_α *forment un système inductif d'anneaux, et* $A' = \varinjlim A'_\alpha$ *est la clôture intégrale de* A.

(ii) *Supposons que les* A_α *soient normaux et que, pour* $\alpha \leqslant \beta$, *toute composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(A_\beta)$ *domine une composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(A_\alpha)$; *alors* A *est normal.*

(iii) *Si les* A_α *sont des anneaux locaux unibranches* (resp. *géométriquement unibranches*) *et les* $\varphi_{\beta\alpha}$ *des homomorphismes locaux injectifs,* A *est unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*).

(i) Si un élément $y_\alpha \in B_\alpha$ est entier sur $A_\alpha, \psi_{\beta\alpha}(y_\alpha) \in B_\beta$ est entier sur A_β pour $\beta \geqslant \alpha$, donc les A'_α forment un système inductif d'anneaux. Soit maintenant $z \in B$ un élément entier sur A, donc vérifiant une équation de dépendance intégrale $z^n + \sum_{i=1}^{n} c_i z^{n-i} = 0$ à coefficients $c_i \in A$. Il existe un indice α, un $z_\alpha \in B_\alpha$ et des $c_{i\alpha} \in A_\alpha$ tels que z (resp. chaque c_i) soit image canonique de z_α (resp. $c_{i\alpha}$); il y a par suite un indice $\beta \geqslant \alpha$ tel que, si l'on pose $z_\beta = \psi_{\beta\alpha}(z_\alpha)$, $c_{i\beta} = \psi_{\beta\alpha}(c_{i\alpha})$, on ait $z_\beta^n + \sum_{i=1}^{n} c_{i\beta} z_\beta^{n-i} = 0$, donc $z_\beta \in A'_\beta$ et par suite $z \in A'$.

Si maintenant on suppose les A_α intègres et les $\varphi_{\beta\alpha}$ injectifs, il résulte de (6.1.5), appliqué aux $S_\alpha = A_\alpha - \{0\}$, que $K = \varinjlim K_\alpha$ est le corps des fractions de A, et il suffit d'appliquer ce qui précède en remplaçant les B_α par les K_α.

(ii) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et pour tout α, posons $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$. En vertu de l'hypothèse, pour tout α, $\mathfrak{p}_\alpha$ contient un seul idéal premier minimal $\mathfrak{q}_\alpha$ (6.5.1) et pour $\alpha \leqslant \beta$, $\varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathfrak{q}_\beta)$ est un idéal premier minimal de A_α contenu dans $\mathfrak{p}_\alpha$, donc égal à $\mathfrak{q}_\alpha$. Si l'on pose $B_\alpha = A_\alpha/\mathfrak{q}_\alpha$, les anneaux intègres B_α forment donc un système inductif pour les homomorphismes $\varphi'_{\beta\alpha} : B_\alpha \to B_\beta$ déduits des $\varphi_{\beta\alpha}$ par passage aux quotients, et les $\varphi'_{\beta\alpha}$ sont injectifs par définition; en outre les B_α sont intégralement clos (6.5.1), donc il en est de même de $B = \varinjlim B_\alpha$ par (i). Si l'on pose $\mathfrak{p}'_\alpha = \mathfrak{p}_\alpha/\mathfrak{q}_\alpha$, on a

de plus $(B_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha} = (A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$, donc $A_\mathfrak{p} = \varinjlim (A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha} = \varinjlim (B_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha}$ est un anneau local en un idéal premier de B (6.1.6); c'est donc un anneau intègre et intégralement clos, ce qui prouve (ii).

(iii) Les homomorphismes $\varphi'_{\beta\alpha} = (A_\alpha)_{\mathrm{red}} \to (A_\beta)_{\mathrm{red}}$ déduits des $\varphi_{\beta\alpha}$ sont injectifs, car si l'image d'un élément a_α de A_α est nilpotente, a_α est nilpotent puisque les $\varphi_{\beta\alpha}$ sont injectifs; comme d'autre part $A_{\mathrm{red}} = \varinjlim (A_\alpha)_{\mathrm{red}}$ (6.1.3), on peut se borner au cas ou les A_α sont réduits, donc intègres. Il résulte de (6.1.4) que A est un anneau local dont le corps résiduel $k = \varinjlim k_\alpha$, où les k_α sont les corps résiduels des A_α; si les A_α sont unibranches, leurs clôtures intégrales A'_α sont des anneaux locaux, donc $A' = \varinjlim A'_\alpha$ est un anneau local (6.1.4) et on a vu dans (i) que A' est la clôture intégrale de A, donc A est unibranche. En outre, si les A_α sont géométriquement unibranches, le corps résiduel k'_α de A'_α est une extension radicielle de k_α; donc $k' = \varinjlim k'_\alpha$, qui est le corps résiduel de A' (6.1.4), est une extension radicielle de k, et A est géométriquement unibranche.

Proposition (6.5.13) *Soient* A *un anneau local intègre,* K *son corps des fractions. Pour que* A *soit unibranche, il faut et il suffit que tout sous-anneau* A_1 *de* K, *contenant* A *et qui est une* A*-algèbre finie, soit un anneau local.*

En effet, soit A' la clôture intégrale de A; tout idéal maximal de A_1 est la trace d'un idéal maximal de A' (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1 et th. 1), donc, si A' est local, il en est de même de A_1. Inversement, on a $A' = \varinjlim A_\alpha$, où les A_α sont les A-algèbres finies contenues dans K; si les A_α sont des anneaux locaux, il en est de même de A' (6.1.4).

Corollaire (6.5.14) *Soient* A *un anneau local noethérien, et* $\hat{A}$ *son complété. Si* $(\hat{A})_{\mathrm{red}}$ *est intègre,* A *est unibranche.*

Soient $\mathfrak{N}$ le nilradical de A, $\mathfrak{N}'$ celui de $\hat{A}$; on a $A \subset \hat{A}$ et $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' \cap A$, donc $A_{\mathrm{red}} = A/\mathfrak{N}$ s'identifie à un sous-anneau de $(\hat{A})_{\mathrm{red}} = \hat{A}/\mathfrak{N}'$; l'hypothèse entraîne donc d'abord que A_{red} est intègre. D'autre part, on a $(A_{\mathrm{red}})\hat{} = \hat{A}/\hat{\mathfrak{N}} = \hat{A}/\hat{A}\mathfrak{N}$ puisque $\mathfrak{N}$ est un idéal de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, th. 3); par suite $\hat{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{N}'$, et $((A_{\mathrm{red}})\hat{})_{\mathrm{red}} = (\hat{A}/\hat{\mathfrak{N}})/(\mathfrak{N}'/\hat{\mathfrak{N}}) = \hat{A}/\mathfrak{N}' = (\hat{A})_{\mathrm{red}}$. Quitte à remplacer A par A_{red}, on peut donc supposer que A est *intègre*. Soient alors $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, K le corps des fractions de A et L l'anneau total des fractions de $\hat{A}$; comme $L' = L_{\mathrm{red}}$ s'identifie à un anneau des fractions de $(\hat{A})_{\mathrm{red}}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 6, prop. 17), L' est intègre. D'autre part, par platitude, $K \otimes_A \hat{A}$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de L (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, cor. 2 du th. 3 et chap. II, § 2, n° 7, prop. 18). Soit B une sous-A-algèbre finie de K; par platitude, $B \otimes_A \hat{A}$ s'identifie à une sous-A-algèbre finie de L et est d'autre part isomorphe au complété de B pour la topologie $\mathfrak{m}$-préa-

dique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, th. 3). Or, $B \otimes_A \hat{A}$ est un anneau semi-local noethérien et sa topologie préadique est identique à la topologie $\mathfrak{m}$-préadique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9); étant complet, c'est donc un *composé direct* d'anneaux locaux (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 13, cor. de la prop. 19); donc $C = (B \otimes_A \hat{A})_{red}$ est un composé direct d'anneaux locaux; mais puisqu'il est isomorphe à un sous-anneau de $L' = L_{red}$, il est intègre, donc *local*, et il en est donc de même de $B \otimes_A \hat{A}$, et *a fortiori* de B; la conclusion résulte alors de (6.5.13).

6.6. Compléments sur la platitude

Nous ne reviendrons pas sur les définitions et notions essentielles concernant la platitude, exposées dans Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, II et III.

Proposition (6.6.1) *Soient* A, B *deux anneaux locaux,* $\varphi: A \to B$ *un homomorphisme local. Soit* $N \neq 0$ *un* B*-module de type fini qui est un* A*-module plat. Alors* N *est un* A*-module fidèlement plat et l'application* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *déduite de* φ *est surjective.*

Puisque $N \neq 0$ et que l'image par φ de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est contenue dans l'idéal maximal de B, le lemme de Nakayama montre que $N \otimes_A (A/\mathfrak{m}) \neq 0$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 4), donc $\mathfrak{m}N \neq N$, ce qui signifie que le A-module plat N est fidèlement plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, 3, n° 1); la dernière assertion résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 5, cor. 4 de la prop. 11.

Proposition (6.6.2) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre telle que* B *soit un* A*-module fidèlement plat et de présentation finie. Alors l'homomorphisme structural* $\varphi: A \to B$ *est un isomorphisme du* A*-module* A *sur un facteur direct du* A*-module* B. *Si* A *est un anneau local et* φ *un homomorphisme local,* B *est un* A*-module libre et il existe une base de ce module contenant l'élément unité de* B.

L'hypothèse entraîne que B est un A-module projectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1). La seconde assertion résulte donc de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, th. 1 et § 3, n° 2, prop. 5. Dans le cas général, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $B_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} = (B/A)_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module libre de type fini, donc B/A est un A-module projectif de type fini (*loc. cit.*, chap. II, § 5, n° 2, th. 1) et $\varphi(A)$ est par suite facteur direct de B.

Proposition (6.6.3) *Soient* A, B *deux anneaux locaux,* $\varphi: A \to B$ *un homomorphisme local,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A. *Soient* M *un* A*-module,* N *un* B*-module qui est un* A*-module fidèlement plat et tel que* $N/\mathfrak{m}N$ *soit un* B*-module de longueur finie; alors on a*

$$\mathrm{long}_B(M \otimes_A N) = \mathrm{long}_A(M) \cdot \mathrm{long}_B(N/\mathfrak{m}N). \tag{6.6.3.1}$$

Si M est de longueur infinie, il en est de même de $M \otimes_A N$, car pour toute suite strictement croissante de n sous-modules M_i de M ($1 \leqslant i \leqslant n$), les $M_i \otimes_A N$ s'identifient par fidèle platitude à des sous-B-modules de $M \otimes_A N$ deux à deux distincts (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 1, prop. 2). Comme $N \neq \mathfrak{m}N$ puisque N est un A-module fidèlement plat, le second membre de (6.6.3.1) est défini et a la valeur $+\infty$, donc (6.6.3.1) est vraie dans ce cas. Supposons donc M de longueur finie. Si $M = 0$, les deux membres de (6.6.3.1) sont nuls, donc on peut supposer $M \neq 0$. Les $\mathfrak{m}^k M$ sont des sous-modules de M, donc de longueur finie, et si $\mathfrak{m}^{k+1} M \neq 0$, il résulte du lemme de Nakayama (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 4) que $\mathfrak{m}^{k+1} M \neq \mathfrak{m}^k M$; donc il y a nécessairement un entier r tel que $\mathfrak{m}^r M = 0$. Par platitude, les $\mathfrak{m}^k M \otimes_A N$ s'identifient à des sous-B-modules de $M \otimes_A N$, $(\mathfrak{m}^k M \otimes_A N)/(\mathfrak{m}^{k+1} M \otimes_A N)$ étant isomorphe à $(\mathfrak{m}^k M/\mathfrak{m}^{k+1} M) \otimes_A N$, donc aussi à $(\mathfrak{m}^k M/\mathfrak{m}^{k+1} M) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (N/\mathfrak{m}N)$ ($0 \leqslant k \leqslant r-1$); la longueur de ce dernier, considéré comme B-module, est donc le produit de $\mathrm{long}_B(N/\mathfrak{m}N)$ et du rang du (A/m)-espace vectoriel $\mathfrak{m}^k M/\mathfrak{m}^{k+1} M$, rang qui est aussi la longueur du A-module $\mathfrak{m}^k M/\mathfrak{m}^{k+1} M$. Par addition (pour $0 \leqslant k \leqslant r-1$), on en déduit aussitôt la formule (6.6.3.1).

Corollaire (6.6.4) *Soient* A, B *deux anneaux locaux,* m *l'idéal maximal de* A, $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local. On suppose que* B *soit un* A*-module plat et* $B/\mathfrak{m}B$ *un* B*-module de longueur finie. Alors, pour qu'un* A*-module* M *soit de longueur finie, il faut et il suffit que* $M \otimes_A B$ *soit un* B*-module de longueur finie, et on a*

$$\mathrm{long}_B(M \otimes_A B) = \mathrm{long}_A(M) \cdot \mathrm{long}_B(B/\mathfrak{m}B). \tag{6.6.4.1}$$

C'est un cas particulier de (6.6.3), compte tenu de (6.6.1).

Corollaire (6.6.5) *Soient* A, B *deux anneaux,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux tel que* B *soit un* A*-module plat,* q *un idéal premier minimal de* B. *Dans ces conditions*:

(i) $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$ *est un idéal premier minimal de* A.

(ii) *Supposons en outre que* A *et* B *soient noethériens, et soit* M *un* A*-module de type fini; alors* $M_\mathfrak{p}$ *est un* $A_\mathfrak{p}$*-module de longueur finie, et on a*

$$\mathrm{long}_{B_\mathfrak{q}}(M \otimes_A B)_\mathfrak{q} = (\mathrm{long}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))\,(\mathrm{long}_{B_\mathfrak{q}}(B_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{q})). \tag{6.6.5.1}$$

(i) Comme l'homomorphisme $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ est local, il résulte de (6.6.1) que puisque $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{q})$ est réduit à un seul point, il en est de même de $\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p})$.

(ii) Puisque A et B sont noethériens, $A_\mathfrak{p}$ et $B_\mathfrak{q}$ sont artiniens (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, prop. 9); $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{q}$ est donc un $B_\mathfrak{q}$-module de longueur finie et $M_\mathfrak{p}$ un $A_\mathfrak{p}$-module de longueur finie, et la formule (6.6.5.1) résulte de (6.6.4).

Proposition (6.6.6) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre,* M *un* B*-module,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* B. *Soient* A′ *une* A*-algèbre; posons* $B' = B \otimes_A A'$, $M' = M \otimes_A A' = M \otimes_B B'$, $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}B'$. *On munit* M (resp. M′) *de la filtration* $\mathfrak{J}$*-préadique* (resp. $\mathfrak{J}'$*-préadique*) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 3). *Si le module gradué associé* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(M)$ *est un* A*-module plat, l'homomorphisme canonique*

$$(\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(M)) \otimes_A A' \to \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}'}(M')$$

est bijectif.

En effet, par récurrence sur k, l'hypothèse que les $\mathfrak{J}^k M/\mathfrak{J}^{k+1} M$ sont des A-modules plats pour $k \geqslant 0$ entraîne d'abord, en vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 5, prop. 4, que $M/\mathfrak{J}^{k+1} M$ est un A-module plat; pour la même raison, la suite

$$0 \to (\mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A' \to M \otimes_A A' \to (M/\mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A' \to 0$$

est exacte, autrement dit $(\mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A'$ s'identifie à son image canonique $\mathfrak{J}'^{k+1} M'$ dans M′. D'autre part, toujours pour la même raison, la suite

$$0 \to (\mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A' \to (\mathfrak{J}^k M) \otimes_A A' \to (\mathfrak{J}^k M/\mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A' \to 0$$

est exacte, ce qui prouve la proposition.

(6.6.7) On sait que la platitude se conserve par extension de l'anneau des scalaires (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, cor. 2 de la prop. 8). Les critères qui suivent donnent des conditions permettant d'affirmer qu'un module est plat lorsqu'il le devient après certaines extensions de l'anneau des scalaires.

Proposition (6.6.8) *Soient* A *un anneau noethérien réduit,* M *un* A*-module de type fini. On suppose que pour toute* A*-algèbre* B, *qui est un anneau de valuation discrète,* $M \otimes_A B$ *soit un* B*-module plat* (*donc libre* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5)). *Alors* M *est un* A*-module plat.*

On sait que, pour que M soit plat, il faut et il suffit que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $M_{\mathfrak{m}}$ soit un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.* chap. II, § 3, n° 4, cor. de la prop. 15); on peut donc se borner au cas ou A est *local*. Soient alors $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ ses idéaux premiers minimaux, $k = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel. On sait (6.5.8) qu'il existe pour chaque i un anneau de valuation discrète B_i ayant même corps des fractions K_i que l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}_i$ et dominant ce dernier. Posons $M_i = M \otimes_A B_i$. Par hypothèse, M_i est un B_i-module libre, donc on a, en désignant par k_i le corps résiduel de B_i,

$$\mathrm{rg}_{k_i}(M_i \otimes_{B_i} k_i) = \mathrm{rg}_{K_i}(M_i \otimes_{B_i} K_i). \tag{6.6.8.1}$$

Mais il est clair que l'homomorphisme composé $A \to A/p_i \to B_i$ est local, donc k_i est une extension de k, et l'on a $M_i \otimes_{B_i} k_i = M \otimes_A k_i = (M \otimes_A k) \otimes_k k_i$, et par ailleurs $M_i \otimes_{B_i} K_i = M \otimes_A K_i$. L'égalité (6.6.8.1) entraîne donc

$$\mathrm{rg}_k(M \otimes_A k) = \mathrm{rg}_{K_i}(M \otimes_A K_i) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Comme A est réduit, on sait que cette condition entraîne que M est un A-module *libre* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 7).

Proposition (6.6.9). *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{J}$ *un idéal nilpotent de* A, $u_\lambda : A \to B_\lambda$ $(\lambda \in L)$ *une famille d'homomorphismes d'anneaux telle que l'intersection des noyaux des* u_λ *soit réduite à* 0. *Soit* M *un* A*-module tel que pour tout* $\lambda \in L$, $M \otimes_A B_\lambda$ *soit un* B_λ*-module libre et que* $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ *soit un* $(A/\mathfrak{J})$*-module libre. Alors* M *est un* A*-module libre. Si de plus l'ensemble d'indices* L *est fini, on peut remplacer partout «libre» par «plat» dans l'énoncé précédent.*

Dans les deux cas il suffira de prouver que M est un A-module *plat*: en effet, lorsque $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module libre, il en résultera que M est un A-module libre en vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 5 et chap. III, § 5, n° 2, th. 1.

Nous utiliserons le lemme suivant, qui généralise une partie de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1:

Lemme (6.6.9.1) *Soit* A *un anneau muni d'une filtration finie* $(\mathfrak{J}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N+1}$ *avec* $\mathfrak{J}_0 = A$, $\mathfrak{J}_{N+1} = 0$. *Soit* M *un* A*-module muni de la filtration* $(\mathfrak{J}_n M)_{0 \leqslant n \leqslant N+1}$, *et désignons par* $\mathrm{gr}^\bullet(A)$ *et* $\mathrm{gr}^\bullet(M)$ *l'anneau et le module gradués correspondants. Supposons que* $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}_1)$ *soit un* $(A/\mathfrak{J}_1)$*-module plat et que l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{gr}^0(M) \otimes_{\mathrm{gr}(A)} \mathrm{gr}^\bullet(A) \to \mathrm{gr}^\bullet(M) \tag{6.6.9.2}$$

soit injectif. Alors M *est un* A*-module plat.*

L'homomorphisme canonique (6.6.9.2) se définit de la même façon que dans Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 3, comme étant en degré n l'homomorphisme

$$(M/\mathfrak{J}_1 M) \otimes (\mathfrak{J}_n/\mathfrak{J}_{n+1}) = (M \otimes \mathfrak{J}_n) / (\mathrm{Im}(M \otimes \mathfrak{J}_{n+1}) + \mathrm{Im}(\mathfrak{J}_1 M \otimes \mathfrak{J}_n)) \to \mathfrak{J}_n M/\mathfrak{J}_{n+1} M$$

provenant de l'homomorphisme canonique $M \otimes \mathfrak{J}_n \to \mathfrak{J}_n M$ par passage aux quotients. Le lemme se démontre par récurrence sur N, puisqu'il n'y a rien à démontrer pour $N = 0$. Les conditions sur M entraînent, en vertu de l'hypothèse de récurrence, que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}_N)$ est un $(A/\mathfrak{J}_N)$-module plat. Notons maintenant que l'on a $\mathfrak{J}_N^2 \subset \mathfrak{J}_{N+1} = 0$ si $N \geqslant 1$, et

$(M/\mathfrak{J}_1 M)\otimes(\mathfrak{J}_N/\mathfrak{J}_{N+1})=(M/\mathfrak{J}_N M)\otimes(\mathfrak{J}_N/\mathfrak{J}_{N+1})=(M/\mathfrak{J}_N M)\otimes\mathfrak{J}_N$; donc l'homomorphisme canonique

$$(M/\mathfrak{J}_N M)\otimes\mathfrak{J}_N\to\mathfrak{J}_N M=\mathfrak{J}_N M/\mathfrak{J}_N^2 M$$

est injectif. Appliquant Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1 à la filtration $\mathfrak{J}_N$-préadique, on en conclut bien que M est un A-module plat.

Pour appliquer ce lemme à (6.6.9), nous désignerons par $\mathfrak{J}_n$ l'idéal de A intersection des images réciproques $u_\lambda^{-1}(\mathfrak{J}^n B_\lambda)$: il est immédiat que l'on a $\mathfrak{J}_0=A$, $\mathfrak{J}_m\mathfrak{J}_n\subset\mathfrak{J}_{m+n}$ pour $m\geqslant 0, n\geqslant 0$; en outre, si $\mathfrak{J}^{N+1}=0$, on a aussi $\mathfrak{J}_{N+1}=0$ puisque l'intersection des noyaux des u_λ est réduite à 0.

Munissons A de la filtration $(\mathfrak{J}_n)$, M de la filtration $(\mathfrak{J}_n M)$, et, pour chaque λ, munissons B_λ et $N_\lambda=M\otimes_A B_\lambda$ des filtrations $\mathfrak{J}$-préadiques; considérons pour chaque λ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}^\circ(M)\otimes_{\mathrm{gr}^\circ(A)}\mathrm{gr}^\bullet(A) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^\bullet(M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_\lambda} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_\lambda} \\ \mathrm{gr}^\circ_{\mathfrak{J}}(N_\lambda)\otimes_{\mathrm{gr}^\circ_{\mathfrak{J}}(B_\lambda)}\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(B_\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(N_\lambda) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques (6.6.9.2) et les flèches verticales sont déduites des homomorphismes canoniques $A\to B_\lambda$ et $M\to N_\lambda$. L'hypothèse que N_λ est un B_λ-module plat entraîne que φ_λ est injective (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1), donc $\mathrm{Ker}(\varphi)\subset\mathrm{Ker}(f_\lambda)$. Posant $A_0=A/\mathfrak{J}_1$, $M_0=M\otimes_A A_0$, notons que

$$\mathrm{gr}^\circ_{\mathfrak{J}}(N_\lambda)=N_\lambda/\mathfrak{J}N_\lambda=(M/\mathfrak{J}M)\otimes_A B_\lambda=(M/\mathfrak{J}_1 M)\otimes_A(B_\lambda/\mathfrak{J}B_\lambda)$$

car ce dernier produit tensoriel est égal à

$$(M\otimes_A B_\lambda)/(\mathrm{Im}(M\otimes_A\mathfrak{J}B_\lambda)+\mathrm{Im}(\mathfrak{J}_1 M\otimes_A B_\lambda))$$

et l'on a $\mathrm{Im}(\mathfrak{J}_1 M\otimes_A B)=\mathrm{Im}(M\otimes_A\mathfrak{J}_1 B_\lambda)\subset\mathrm{Im}(M\otimes_A\mathfrak{J}B_\lambda)$ puisque $\mathfrak{J}_1 B_\lambda\subset\mathfrak{J}B_\lambda$ par définition; enfin, la relation $\mathfrak{J}_1 B_\lambda\subset\mathfrak{J}B_\lambda$ montre que l'on a aussi

$$(M/\mathfrak{J}_1 M)\otimes_A(B_\lambda/\mathfrak{J}B_\lambda)=(M/\mathfrak{J}_1 M)\otimes_{A/\mathfrak{J}_1}(B_\lambda/\mathfrak{J}B_\lambda)$$

si bien que finalement on a

$$\mathrm{gr}^\circ_{\mathfrak{J}}(N_\lambda)=M_0\otimes_{A_0}(B_\lambda/\mathfrak{J}B_\lambda)$$

et par suite

$$\mathrm{gr}^\circ_{\mathfrak{J}}(N_\lambda)\otimes_{\mathrm{gr}^\circ_{\mathfrak{J}}(B_\lambda)}\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(B_\lambda)=M_0\otimes_{A_0}\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(B_\lambda).$$

L'homomorphisme f_λ peut donc s'écrire

$$1 \otimes \mathrm{gr}(u_\lambda)\colon M_0 \otimes_{A_0} \mathrm{gr}^\bullet(A) \to M_0 \otimes_{A_0} \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(B_\lambda)$$

et comme M_0 est par hypothèse un A_0-module *plat*, le noyau de f_λ est égal à $M_0 \otimes_{A_0} R_\lambda$, où R_λ est le noyau de $\mathrm{gr}(u_\lambda)\colon \mathrm{gr}^\bullet(A) \to \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(B_\lambda)$. Tout revient donc à prouver que $\bigcap_{\lambda \in L} (M_0 \otimes_{A_0} R_\lambda) = 0$. Or, par définition des $\mathfrak{J}_n$, l'intersection des noyaux des homomorphismes

$$\mathfrak{J}_n A/\mathfrak{J}_{n+1} A \to \mathfrak{J}^n B_\lambda/\mathfrak{J}^{n+1} B_\lambda,$$

lorsque λ parcourt L, est réduite à 0, autrement dit $\bigcap_{\lambda \in L} R_\lambda = 0$. Cela étant, supposons d'abord que M_0 soit un A_0-module libre; prenant une base de M_0, on voit aussitôt que l'on a $M_0 \otimes_{A_0} \left(\bigcap_{\lambda \in L} R_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in L} (M_0 \otimes_{A_0} R_\lambda)$, d'où la proposition dans ce cas. Lorsque L est fini, la formule précédente est encore vraie sous la seule hypothèse que M_0 est un A_0-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 6, prop. 6), ce qui termine la démonstration.

Remarque **(6.6.10)** La conclusion de (6.6.9) peut être inexacte si L est infini et si l'on suppose seulement que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module plat. Par exemple, soient V un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, et soit $A = V[T]/(T^2)$ (T indéterminée); prenons pour $\mathfrak{J}$ l'image de (T) dans A, de sorte que $A/\mathfrak{J} = V$, et prenons $M = K$, qui est un $(A/\mathfrak{J})$-module, donc égal à $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$; en outre M est un $(A/\mathfrak{J})$-module plat, mais non un A-module plat; en effet, dans le cas contraire, puisque $\mathfrak{J}$ est nilpotent, il résulterait de la remarque faite après l'énoncé de (6.6.9) que M serait un A-module libre, ce qui est absurde puisque $\mathfrak{J}K = 0$. Considérons d'autre part l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de l'anneau local noethérien A; on a $\mathfrak{m}K = K$, donc $M \otimes_A (A/\mathfrak{m}^n) = 0$ quel que soit l'entier n; les $(A/\mathfrak{m}^n)$-modules $M \otimes_A (A/\mathfrak{m}^n)$ sont donc plats pour tout n, et l'intersection des $\mathfrak{m}^n$ est réduite à 0.

Corollaire (6.6.11) *Soient* A *un anneau semi-local dont le radical* $\mathfrak{J}$ *est nilpotent (par exemple un anneau artinien),* $u_\lambda\colon A \to B_\lambda$ $(\lambda \in L)$ *une famille d'homomorphismes d'anneaux telle que l'intersection des noyaux des* u_λ *soit réduite à* 0. *Pour qu'un* A*-module* M *soit plat, il faut et il suffit que pour tout* $\lambda \in L$, $M \otimes_A B_\lambda$ *soit un* B_λ*-module plat.*

Comme $A/\mathfrak{J}$ est composé direct d'un nombre fini de corps (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 5, prop. 16) et que $\mathfrak{J}$ est nilpotent, A est composé direct d'un nombre fini d'anneaux *locaux* A_i dont le radical est nilpotent (*loc. cit.*, § 4, n° 3, cor. 1 de la prop. 15) et M est par suite somme directe de A_i-modules M_i, chaque M_i étant annulé par les A_j

d'indice $j \neq i$; pour que M soit un A-module plat, il faut et il suffit que chacun des M_i soit un A_i-module plat; d'ailleurs l'intersection des noyaux des homomorphismes $A_i \longrightarrow A \xrightarrow{u_\lambda} B_\lambda$ est réduite à 0, et $M_i \otimes_{A_i} B_\lambda$ est facteur direct de $M \otimes_A B_\lambda$. On peut donc se borner au cas où A est en outre *local*. Alors $A/\mathfrak{J}$ est un corps, donc $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module libre, et il suffit de voir que pour tout λ, $M \otimes_A B_\lambda$ est un B_λ-module *libre*, en vertu de (6.6.9). Mais si l'on pose $\mathfrak{J}_\lambda = \mathfrak{J}B_\lambda$, $(M \otimes_A B_\lambda) \otimes_{B_\lambda} (B_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda) = (M \otimes_A (A/\mathfrak{J})) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (B_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda)$ est un $(B_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda)$-module libre, et $\mathfrak{J}_\lambda$ est nilpotent. La conclusion résulte donc de l'hypothèse que $M \otimes_A B_\lambda$ est un B_λ-module plat et de la remarque qui suit l'énoncé de (6.6.9).

Corollaire (6.6.12) *Soient* A *un anneau,* M *un* A*-module; on suppose qu'il existe un idéal nilpotent* $\mathfrak{J}$ *de* A *tel que* $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ *soit un* $(A/\mathfrak{J})$*-module libre. Alors l'ensemble des idéaux* $\mathfrak{K}$ *de* A *tels que* $M \otimes_A (A/\mathfrak{K})$ *soit un* $(A/\mathfrak{K})$*-module libre admet un plus petit élément* $\mathfrak{K}_0$ (qui est aussi le plus petit des idéaux $\mathfrak{K}$ tels que $M \otimes_A (A/\mathfrak{K})$ soit un $(A/\mathfrak{K})$-module *plat*). *Pour qu'un homomorphisme* $u: A \to A'$ *soit tel que* $M \otimes_A A'$ *soit un* A'*-module libre* (resp. *un* A'*-module plat*), *il faut et il suffit que u se factorise en* $A \to A/\mathfrak{K}_0 \to A'$ (ou encore que $\mathfrak{K}_0 A' = 0$).

Le fait que l'intersection $\mathfrak{K}_0$ des idéaux $\mathfrak{K}$ pour lesquels $M \otimes_A (A/\mathfrak{K})$ est un $(A/\mathfrak{K})$-module libre soit le plus petit de ces idéaux résulte de (6.6.9) appliqué à l'anneau $A/\mathfrak{K}_0$, à son idéal nilpotent $\mathfrak{J}/\mathfrak{K}_0$ et aux homomorphismes $A/\mathfrak{K}_0 \to A/\mathfrak{K}$, dont les noyaux ont 0 pour intersection. Si A' est une $(A/\mathfrak{K}_0)$-algèbre, on a $M \otimes_A A' = (M \otimes_A (A/\mathfrak{K}_0)) \otimes_{A/\mathfrak{K}_0} A'$, donc $M \otimes_A A'$ est un A'-module libre. Réciproquement, si A' est une A-algèbre telle que $M \otimes_A A'$ soit un A'-module libre, et si $\mathfrak{K}$ est le noyau de l'homomorphisme $A \to A'$, il résulte de (6.6.9) appliqué à l'anneau $A/\mathfrak{K}$, au $(A/\mathfrak{K})$-module $M \otimes_A (A/\mathfrak{K})$, à l'idéal nilpotent $\mathfrak{J}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ et à l'homomorphisme *injectif* $A/\mathfrak{K} \to A'$, que $M \otimes_A (A/\mathfrak{K})$ est un $(A/\mathfrak{K})$-module libre, donc que $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{K}_0$. Le fait que l'on puisse remplacer «libre» par «plat» dans ce qui précède (en conservant naturellement l'hypothèse que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module *libre*) résulte de la remarque faite au début de la démonstration de (6.6.9).

Proposition (6.6.13) *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, M *un* A*-module idéalement séparé* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 1) *pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique. Soit* $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *une famille finie d'idéaux premiers de* A *contenant* $\mathfrak{J}$; *pour tout entier* $n \geqslant 0$, *soit* $\mathfrak{p}_i^{(n)}$ *la puissance symbolique n-ième de* $\mathfrak{p}_i$ *(noyau de l'homomorphisme* $A \to A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^n A_{\mathfrak{p}_i}$*);* *posons* $\mathfrak{J}_n = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{(n)}$, *de sorte que* $\mathfrak{J}_n \supset \mathfrak{J}^n$, *et supposons que la topologie définie par la filtration* $(\mathfrak{J}_n)$ *soit identique à la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique (autrement dit que, pour tout n, il existe m tel que* $\mathfrak{J}^n \supset \mathfrak{J}_m$*). Pour que*

M *soit un* A*-module plat, il faut et il suffit que* $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ *soit un* $(A/\mathfrak{J})$*-module plat et que, pour tout* i, $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}_i} = M_{\mathfrak{p}_i}$ *soit un* $A_{\mathfrak{p}_i}$*-module plat.*

Comme M est idéalement séparé, il suffit, en vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1, de montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}^n)$ est un $(A/\mathfrak{J}^n)$-module plat; puisque tout $\mathfrak{J}^n$ contient un $\mathfrak{J}_m$, il revient au même de prouver que pour tout n, $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}_n)$ est un $(A/\mathfrak{J}_n)$-module plat. Or, comme $\mathfrak{J}_1 \supset \mathfrak{J}$, $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}_1)$ est un $(A/\mathfrak{J}_1)$-module plat; dans l'anneau $A/\mathfrak{J}_n$, l'idéal $\mathfrak{J}_1/\mathfrak{J}_n$ est nilpotent et enfin l'intersection des noyaux des homomorphismes $A/\mathfrak{J}_n \to A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^n A_{\mathfrak{p}_i}$ est nulle dans $A/\mathfrak{J}_n$, par définition de $\mathfrak{J}_n$. Il suffit donc, par (6.6.9), de vérifier que $M \otimes_A (A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^n A_{\mathfrak{p}_i})$ est un $(A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^n A_{\mathfrak{p}_i})$-module plat, ce qui résulte de l'hypothèse que $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}_i}$ est un $A_{\mathfrak{p}_i}$-module plat.

Remarque **(6.6.14)** L'hypothèse faite dans (6.6.13) sur la topologie définie par les $\mathfrak{J}_n$ est vérifiée si, pour tout n assez grand, $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{J}^n)$ *est contenu dans l'ensemble des* $\mathfrak{p}_i$. En effet, $\mathfrak{J}^n$ est alors intersection d'idéaux primaires pour les $\mathfrak{p}_i$, dont chacun contient une puissance symbolique de $\mathfrak{p}_i$, d'où la conclusion. En particulier:

Corollaire (6.6.15) *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal nilpotent de* A, M *un* A*-module. Pour que* M *soit un* A*-module plat* (resp. *libre*), *il faut et il suffit que* $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ *soit un* $(A/\mathfrak{J})$*-module plat* (resp. *libre*) *et que pour tout idéal premier* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$, $M_{\mathfrak{p}}$ *soit un* $A_{\mathfrak{p}}$*-module plat.*

L'assertion relative au cas où $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est libre se déduit encore de l'assertion relative au cas où $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est plat par la remarque suivant l'énoncé de (6.6.9).

Corollaire (6.6.16) *Soient* A *un anneau noetherien,* $\mathfrak{J}$ *un ideal de* A, M *un* A*-module. On suppose que* M *est idéalement séparé pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique et que* $\mathrm{gr}_{\mathfrak{J}}^{\bullet}(A)$ *est un* $(A/\mathfrak{J})$*-module plat. Pour que* M *soit un* A*-module plat, il faut et il suffit que* $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ *soit un* $(A/\mathfrak{J})$*-module plat et que pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{J})$, $M_{\mathfrak{p}}$ *soit un* $A_{\mathfrak{p}}$*-module plat.*

Compte tenu de (6.6.14), tout revient à montrer que $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{J}^n)$ est contenu dans $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{J})$ pour tout n. Or, si $a \in A$ n'appartient à aucun des $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{J})$, l'homothétie de rapport a est injective dans $A/\mathfrak{J}$; comme chacun des $\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1}$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module plat, a est aussi un élément $(\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1})$-régulier, donc a est $(A/\mathfrak{J}^n)$-régulier pour tout n (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 1 du th. 1), et par suite n'appartient à aucun idéal premier associé à $A/\mathfrak{J}^n$, d'où le corollaire (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2).

(6.6.17) On a souvent à considérer la situation suivante; $A \to B$ est un homomorphisme local d'anneaux locaux *noethériens*, M un B*-module* de type fini (mais *non* en général un A-module de type fini); si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, $k = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel, il s'agit de donner des

critères pour que M soit un A-*module plat*, à l'aide de propriétés de $M \otimes_A k = M/\mathfrak{m}M$ ou éventuellement des modules $M/\mathfrak{m}^k M$ pour $k \geqslant 1$. Le § 5 de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III est consacré à cette question; nous allons donner divers compléments aux résultats qui y sont exposés.

Proposition (6.6.18) *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal,* k *le corps résiduel de* A, $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local,* M, N *deux* B-*modules,* $u : M \to N$ *un homomorphisme de* B-*modules. On suppose que* M *est un* B-*module de type fini, et* N *un* A-*module plat. Considérons les conditions suivantes*:

a) u *est injectif.*

b) M *est un* A-*module plat.*

c) Coker(u) *est un* A-*module plat.*

d) $u \otimes 1_k : M \otimes_A k \to N \otimes_A k$ *est injectif.*

Alors:

(i) *La conjonction de* a) *et* c) *implique* d), *et inversement* d) *implique la conjonction de* a) *et* b).

(ii) *Si de plus* N *est un* B-*module de type fini,* d) *implique aussi* c), *donc* d) *équivaut à la conjonction de* a) *et* c) *et implique* b).

La première assertion n'utilise aucune des hypothèses du début sur A, B, M et est valable dès que N est plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 5, prop. 4).

Pour établir le reste de la proposition, notons, pour tout A-module R, $\varphi_R : \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}(A) \otimes \mathrm{gr}^\circ_{\mathfrak{m}}(R) \to \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}(R)$ l'application canonique, et posons $P = \mathrm{Coker}(u)$. Comme N est un A-module plat, φ_N est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1); l'hypothèse d) entraîne alors que φ_M et φ_P sont bijectifs et que $\mathrm{gr}(u) : \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}(M) \to \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}(N)$ est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, prop. 9). Comme $\mathfrak{m}B$ est contenu dans le radical de B, la filtration $\mathfrak{m}$-préadique sur M est séparée (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 3, prop. 6); le fait que gr(u) soit injectif entraîne donc qu'il en est de même de u (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 1 du th. 1); d'autre part, puisque M est de type fini, il est idéalement séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 1), donc le fait que φ_M soit bijectif entraîne que M est un A-module plat (*loc. cit.*, n° 2, th. 1). Ce dernier raisonnement s'applique pour P si N (et par suite P) est un B-module de type fini.

Proposition (6.6.19) *Soient* A, B, C *trois anneaux locaux noethériens,* $\rho : A \to B$, $\sigma : B \to C$ *deux homomorphismes locaux,* k *le corps résiduel de* A, M *un* C-*module* $\neq 0$ *de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) M *est un* A-*module plat et* $M \otimes_A k$ *est un* $(B \otimes_A k)$-*module plat.*

b) B *est un* A-*module plat et* M *est un* B-*module plat.

Nous établirons d'abord la proposition plus générale suivante:

Proposition (6.6.19.1) *Soient* A *un anneau commutatif*, B *une* A*-algèbre commutative*, $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, M *un* B*-module. On considère d'une part les conditions suivantes*:

(i) $\mathfrak{J}$ *est nilpotent.*

(ii) B *est noethérien, et* M *est idéalement séparé pour la topologie* $\mathfrak{J}$B*-préadique* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 1).

(iii) $\mathfrak{J}$B *est contenu dans le radical de* B.

On considère d'autre part les quatre propriétés:

a) M *est un* B*-module plat.*

b) B *est un* A*-module plat.*

c) M *est un* A*-module plat et* $M/\mathfrak{J}M$ *un* $(B/\mathfrak{J}B)$*-module plat.*

d) $B/\mathfrak{J}B$ *est un* $(A/\mathfrak{J})$*-module plat et pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{J}B$ *de* B, *on a* $\mathfrak{m}M \neq M$.

Alors:

1° *Si l'une des conditions* (i), (ii) *est vérifiée, la conjonction de* a) *et* b) *implique* c), *et* c) *implique* a).

2° *Si la condition* (i) *ou la conjonction de* (ii) *et* (iii) *est vérifiée, la conjonction de* c) *et* d) *implique la conjonction de* a) *et* b).

1° La première assertion est immédiate (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, cor. 2 et 3 de la prop. 8). Supposons donc c) vérifiée et prouvons a). Considérons les anneaux gradués $\mathrm{gr}_{\mathfrak{J}}^{\bullet}(A)$, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{J}}^{\bullet}(B)$ et le module gradué $\mathrm{gr}_{\mathfrak{J}}^{\bullet}(M)$ (à la fois sur $\mathrm{gr}_{\mathfrak{J}}^{\bullet}(A)$ et $\mathrm{gr}_{\mathfrak{J}}^{\bullet}(B)$) relatifs aux filtrations $\mathfrak{J}$-préadiques, ainsi que les applications canoniques surjectives

$$u\colon \mathrm{gr}^{\circ}(B) \otimes_{\mathrm{gr}^{\circ}(A)} \mathrm{gr}^{\bullet}(A) \to \mathrm{gr}^{\bullet}(B),$$
$$v\colon \mathrm{gr}^{\circ}(M) \otimes_{\mathrm{gr}^{\circ}(A)} \mathrm{gr}^{\bullet}(A) \to \mathrm{gr}^{\bullet}(M),$$
$$w\colon \mathrm{gr}^{\circ}(M) \otimes_{\mathrm{gr}^{\circ}(B)} \mathrm{gr}^{\bullet}(B) \to \mathrm{gr}^{\bullet}(M).$$

Il est clair qu'on a un diagramme commutatif

(6.6.19.2)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}^{\circ}(M) \otimes_{\mathrm{gr}^{\circ}(A)} \mathrm{gr}^{\bullet}(A) & \xrightarrow{\ v\ } & \mathrm{gr}^{\bullet}(M) \\ & {\scriptstyle 1\otimes u}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle w} & \\ & \mathrm{gr}^{\circ}(M) \otimes_{\mathrm{gr}^{\circ}(B)} \mathrm{gr}^{\bullet}(B) & \end{array}$$

L'hypothèse c) entraîne que v est bijective (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1); comme les deux autres applications du diagramme sont surjectives, elles sont aussi bijectives. Mais comme en vertu de c), $M/\mathfrak{J}M$ est un $(B/\mathfrak{J}B)$-module plat, il résulte de *loc. cit.* que M est un B-module plat.

2° L'une ou l'autre des conditions (i), (iii) implique que tout idéal maximal de B contient $\mathfrak{J}B$. Il résulte donc de 1° et de la conjonction de c) et d) que M est un B-module *fidèlement plat*, et par suite $\mathrm{gr}^\circ(M)$ est un $\mathrm{gr}^\circ(B)$-module fidèlement plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 3, prop. 5). On a vu dans 1° que l'hypothèse c) entraîne que les trois applications du diagramme (6.6.19.2) sont bijectives; le fait que $\mathrm{gr}^\circ(M)$ soit un $\mathrm{gr}^\circ(B)$-module fidèlement plat implique donc que u est aussi bijective (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 1, prop. 2). D'autre part, les conditions (ii) et (iii) entraînent que B est un A-module idéalement séparé pour la filtration $\mathfrak{J}$-préadique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 4, prop. 2); on déduit donc encore de *loc. cit.*, n° 2, th. 1 que si la condition (i), ou la conjonction de (ii) et (iii), est vérifiée, B est un A-module plat.

(6.6.19.3) Revenons à la démonstration de (6.6.19): il suffit d'appliquer (6.6.19.1) en prenant pour $\mathfrak{J}$ l'idéal maximal de A, et en remarquant qu'alors les conditions (ii) et (iii) de (6.6.19.1) sont satisfaites (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 4, prop. 2), et que la condition c) entraîne d) (6.6.1).

Proposition (6.6.20) *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local,* $\mathfrak{K}$ *un idéal de* B *contenu dans l'idéal maximal,* M *un* B*-module de type fini. Supposons que, pour tout* $n \geqslant 0$, $M_n = M/\mathfrak{K}^{n+1}M$ *soit un* A*-module plat. Alors* M *est un* A*-module plat.*

Il faut prouver que pour tout homomorphisme injectif $u : N' \to N$ de A-modules de type fini, $v = 1_M \otimes u : M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ est injectif. Or, $M \otimes_A N'$ et $M \otimes_A N$ sont des B-modules de type fini, donc séparés pour la topologie $\mathfrak{K}$-préadique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 3, prop. 6); il suffit donc de prouver que le prolongement continu $\hat{v} : (M \otimes_A N')\hat{} \to (M \otimes_A N)\hat{}$ de v aux complétés est injectif. Or, on a $\hat{v} = \varprojlim v_n$, où $v_n = 1_{M_n} \otimes u : M_n \otimes_A N' \to M_n \otimes_A N$; comme par hypothèse M_n est un A-module plat, v_n est injectif pour tout n, donc il en est de même de $\hat{v}$, le foncteur $\varprojlim$ étant exact à gauche.

Proposition (6.6.21) *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, M, N *deux* A*-modules séparés pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique* (7.1.9). *On suppose en outre que* M *est complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique et que* N *est un* A*-module plat. Soit* $u : M \to N$ *un homomorphisme; si*

$$u \otimes 1_{A/\mathfrak{J}} : M \otimes_A (A/\mathfrak{J}) \to N \otimes_A (A/\mathfrak{J})$$

est bijectif, alors u est bijectif.

Les modules gradués associés étant pris relatifs aux filtrations $\mathfrak{J}$-préadiques, il résulte des hypothèses sur M et N relativement aux topologies $\mathfrak{J}$-préadiques qu'il suffit de prouver que $\mathrm{gr}(u) : \mathrm{gr}^\bullet(M) \to \mathrm{gr}^\bullet(N)$ est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1). Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}^\circ(M)\otimes_{\mathrm{gr}^\circ(A)}\mathrm{gr}^\bullet(A) & \xrightarrow{\mathrm{gr}^\circ(u)\otimes 1} & \mathrm{gr}^\circ(N)\otimes_{\mathrm{gr}^\circ(A)}\mathrm{gr}^\bullet(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_N} \\ \mathrm{gr}^\bullet(M) & \xrightarrow[\mathrm{gr}(u)]{} & \mathrm{gr}^\bullet(N) \end{array}$$

avec $\mathrm{gr}^\circ(A)=A/\mathfrak{I}$, et où φ_M et φ_N sont les homomorphismes canoniques (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 3). Par hypothèse $\mathrm{gr}^\circ(u)$ est bijectif, ainsi que φ_N (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1); on en déduit d'abord que $\mathrm{gr}^\circ(u)\otimes 1$ est bijectif, donc φ_M est injectif; mais puisque φ_M est toujours surjectif, il est bijectif, donc $\mathrm{gr}(u)$ est bijectif.

Corollaire (6.6.22) *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{I}$ *un idéal* nilpotent *de* A, M *et* N *deux* A*-modules. On suppose que* N *est un* A*-module plat. Soit* $u:M\to N$ *un homomorphisme; si* $u\otimes 1_{A/\mathfrak{I}}:M\otimes_A(A/\mathfrak{I})\to N\otimes_A(A/\mathfrak{I})$ *est bijectif, alors u est bijectif.*

Corollaire (6.6.23) *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{I}$ *un idéal contenu dans le radical de* A, M *et* N *deux* A*-modules de type fini* (donc séparés pour la topologie $\mathfrak{I}$-préadique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 3, prop. 6)). *On suppose en outre que* N *est un* A*-module plat. Soit* $u:M\to N$ *un homomorphisme; si* $u\otimes 1_{A/\mathfrak{I}}:M\otimes_A(A/\mathfrak{I})\to N\otimes_A(A/\mathfrak{I})$ *est bijectif, alors u est bijectif.*

Soient $\hat{M}$ et $\hat{N}$ les complétés de M et N respectivement pour la topologie $\mathfrak{I}$-préadique, et soit $\hat{u}:\hat{M}\to\hat{N}$ l'homomorphisme déduit de u par prolongement continu; comme $\hat{M}=M\otimes_A\hat{A}$ et $\hat{N}=N\otimes_A\hat{A}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, th. 3), $\hat{u}=u\otimes 1_{\hat{A}}$, et $\hat{N}$ est un $\hat{A}$-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, cor. 2 de la prop. 8). Comme $u\otimes 1_{\hat{A}/\mathfrak{I}\hat{A}}=u\otimes 1_{A/\mathfrak{I}}$ est bijectif, on déduit de (6.6.21) que $\hat{u}$ est bijectif, donc u, restriction de $\hat{u}$ à M, est injectif. Comme N est de type fini et $\mathfrak{I}$ contenu dans le radical de A, le lemme de Nakayama (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 1 de la prop. 4) montre d'autre part que u est surjectif.

Indiquons enfin une intéressante caractérisation des modules plats (D. Lazard):

Proposition (6.6.24) *Soit* M *un* A*-module. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) M *est un* A*-module plat.*

b) *Pour tout* A*-module de présentation finie* P *et tout homomorphisme* $u:P\to M$, *il existe un* A*-module libre de type fini* L *et une factorisation* $P\xrightarrow{v}L\xrightarrow{w}M$ *de u.*

c) *Il existe un ensemble ordonné filtrant* I *et un système inductif* $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ *de* A*-modules libres de type fini tels que* M *soit isomorphe à* $\varinjlim M_\alpha$.

Il est clair que c) implique a) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 3, prop. 2). Prouvons d'abord que a) implique b). Par hypothèse, il existe un homomorphisme surjectif $h: A^n \to P$, et si $R = \mathrm{Ker}(h)$, un homomorphisme surjectif $g: A^m \to R$. Soient $a_i = h(e_i)$ les images des éléments de la base canonique de A^n $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et $(\beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj})$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ les images par g dans R des éléments de la base canonique de A^m, de sorte que l'on a $\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} a_i = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$, et par suite $\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} u(a_i) = 0$. Pour chaque $j \in [1, m]$, il existe donc une famille $(c_{jk})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ d'éléments de M et une famille $(\alpha_{ijk})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant p}$ d'éléments de A telles que l'on ait $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} \beta_{ij} = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et $u(a_i) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk} c_{jk}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 11, cor. 1 de la prop. 13). Considérons alors le A-module libre $L = A^{mp}$, dont nous désignerons par e_{jk} $(1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant p)$ les éléments de la base canonique. On définit un homomorphisme $v: P \to L$ en posant $v(a_i) = \sum_{j,k} \alpha_{ijk} e_{jk}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, car pour tout $j \in [1, m]$, on a $v\left(\sum_i \beta_{ij} a_i\right) = \sum_{i,k} \alpha_{ijk} \beta_{ij} e_{jk} = 0$ en raison du choix des α_{ijk}. Définissons d'autre part un homomorphisme $w: L \to M$ par les conditions $w(e_{1k}) = c_{1k}$ et $w(e_{jk}) = 0$ pour $j \geqslant 2$ et pour tout k; il est clair que w et v sont tels que $w(v(a_i)) = u(a_i)$ pour tout i, d'où notre assertion.

Montrons enfin que b) entraîne c). Notons pour cela que dans la démonstration de la prop. (6.3.1.4), on peut remplacer les parties finies L de M par celles de $M \times N$, $u_L: A^L \to M$ étant alors l'homomorphisme qui transforme chaque élément $e_{(m,n)}$ d'indice $(m, n) \in L \subset M \times N$ de la base canonique de A^L en l'élément $m \in M$. On va montrer que si M est plat, l'ensemble des couples $\gamma = (L, R_L)$ tels que $M_\gamma = A^L/N(R_L)$ soit *libre* est *cofinal* dans l'ensemble filtrant des indices $\alpha = (L, R_L)$. En effet, soit $\alpha = (L, R_L)$ un indice quelconque; en vertu de b), l'homomorphisme canonique $w_\alpha: A^L/N(R_L) \to M$ se factorise en

$$A^L/N(R_L) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M,$$

où E est un A-module libre de type fini. Soit a_λ l'image canonique dans $A^L/N(R_L)$ de l'élément e_λ d'indice $\lambda \in L$ de la base canonique de A^L, et posons $b_\lambda = f(a_\lambda) \in E$. D'autre part, si E a une base $(c_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de p éléments, considérons dans $M \times N$ un ensemble B de p éléments μ_j tels que $B \cap L = \emptyset$ et que pour chaque j, on ait $\mathrm{pr}_1 \mu_j = g(c_j) \in M$. Posons $C = B \cup L$, et soit $h: A^C \to E$ l'homomorphisme tel que $h(e_\lambda) = b_\lambda$ pour $\lambda \in L$ et $h(e_{\mu_j}) = c_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$; il est clair que h est surjectif et que son noyau $Q \subset A^C$ est un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8, lemme 9) qui contient $N(R_L)$

par construction; on peut donc l'écrire $N(R_C)$, où R_C est un ensemble fini contenant R_L. Il est clair que $u_C = goh$ par construction, et que l'on a $(L,R_L) \leqslant (C,R_C)$; comme $A^C/N(R_C) = E$ est libre de type fini, cela termine la démonstration.

Corollaire (6.6.25) *Soient* A, B *deux anneaux; si un foncteur de la catégorie des* A*-modules dans celle des* B*-modules commute aux limites inductives filtrantes et transforme tout module libre de type fini en un module plat, il transforme tout module plat en un module plat.*

6.7. Compléments sur les modules projectifs

(6.7.1) Lorsque, dans (6.6.18), on suppose que $B = A$, l'hypothèse qu'un A-module de type fini est *plat* équivaut à l'hypothèse qu'il est *projectif*, ou *libre* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5); d'autre part, dire que u est injectif et Coker (u) un A-module libre entraîne que u est *inversible à gauche.*

Mais en fait, le résultat qu'on obtient ainsi est *indépendant* des hypothèses noethériennes, et est un cas particulier des résultats qui suivent.

Proposition (6.7.2) *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, M *un* A*-module,* N *un* A*-module* projectif, $u: M \to N$ *un homomorphisme. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes*:

(i) $\mathfrak{J}$ *est nilpotent.*

(ii) $\mathfrak{J}$ *est contenu dans le radical de* A *et* M *est de type fini.*

Alors, pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit que l'homomorphisme $u_0 = u \otimes 1_{A/\mathfrak{J}}: M \otimes_A (A/\mathfrak{J}) \to N \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ *soit inversible à gauche.*

La condition étant évidemment nécessaire, prouvons qu'elle est suffisante. Soit v_0 un inverse à gauche de u_0; l'homomorphisme composé

$$N \longrightarrow N/\mathfrak{J}N \xrightarrow{v_0} M/\mathfrak{J}M$$

se factorise en

$$N \xrightarrow{v} M \longrightarrow M/\mathfrak{J}M$$

puisque N est projectif; alors $w = vou$ est un endomorphisme de M tel que l'endomorphisme w_0 de $M/\mathfrak{J}M$ déduit de w par passage aux quotients soit l'*identité;* il suffira de prouver que w lui-même est bijectif, car alors $w^{-1}ov$ sera un inverse à gauche de u. Distinguons maintenant les deux cas:

(i) Pour tout n, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (M/\mathfrak{J}M) & \longrightarrow & \mathfrak{J}^n M/\mathfrak{J}^{n+1} M \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \mathrm{gr}^0(w)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}^n(w)} \\ (\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (M/\mathfrak{J}M) & \longrightarrow & \mathfrak{J}^n M/\mathfrak{J}^{n+1} M \end{array}$$

où les flèches horizontales sont surjectives et identiques; comme $\mathrm{gr}^0(w) = w^0$ est l'identité, $\mathrm{gr}^n(w)$ est aussi l'identité, et *a fortiori* est bijectif. La filtration $\mathfrak{J}$-préadique sur M étant finie puisque $\mathfrak{J}$ est nilpotent, on en conclut que w est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1).

(ii) Il suffit de montrer que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'endomorphisme $w_{\mathfrak{m}} = w \otimes 1_{A_{\mathfrak{m}}}$ de $M_{\mathfrak{m}} = M \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1), et comme $\mathfrak{J}A_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ et $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{J}A_{\mathfrak{m}} = (A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{m}}$, on est ramené à prouver la proposition lorsque A est un anneau *local*. En outre, on peut supposer que $\mathfrak{J}$ est l'idéal *maximal* $\mathfrak{J}_0$ de A, car si u_0 est inversible à gauche, il en est de même de $u_{00} = u_0 \otimes 1_{A/\mathfrak{J}_0} : M/\mathfrak{J}_0 M \to N/\mathfrak{J}_0 N$. Supposons donc $\mathfrak{J}$ maximal, de sorte que $A/\mathfrak{J}$ est un corps. Il suffit évidemment de montrer que M est un A-module *libre* sous les conditions de l'énoncé: en effet, s'il en est ainsi, $\det(w_0)$ est alors l'image canonique de $\det(w)$ dans $A/\mathfrak{J}$, donc $\det(w)$ n'appartient pas à l'idéal $\mathfrak{J}$, par suite est inversible, et w est bien alors bijectif. Or, le $(A/\mathfrak{J})$-espace vectoriel $M/\mathfrak{J}M$ étant libre de type fini, il y a un A-module libre de type fini L et un A-homomorphisme $f : L \to M$ tels que l'homomorphisme $f_0 = f \otimes 1_{A/\mathfrak{J}} : L/\mathfrak{J}L \to M/\mathfrak{J}M$ soit bijectif. Comme M est de type fini, on en déduit tout d'abord que f est surjectif par le lemme de Nakayama; en outre, si $g = u \circ f$, l'homomorphisme $g_0 = g \otimes 1_{A/\mathfrak{J}} : L/\mathfrak{J}L \to N/\mathfrak{J}N$ est inversible à gauche, et puisqu'ici L est *libre*, on peut comme ci-dessus raisonner sur les déterminants de g et g_0, donc g est inversible à gauche; mais cela entraîne évidemment que f est injectif. CQFD.

Corollaire (6.7.3) *Soient* A *un anneau local, k son corps résiduel,* M *un* A*-module de type fini,* N *un* A*-module projectif,* $u : M \to N$ *un homomorphisme. Pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit qu'il existe un système générateur* $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ *de* M *tel que les images par* $u \otimes 1_k : M \otimes_A k \to N \otimes_A k$ *des* $x_i \otimes 1$ *soient linéairement indépendantes dans le k-espace vectoriel* $N \otimes_A k$*; les* x_i *forment alors une base de* M.

La condition est évidemment nécessaire, car si u est inversible à gauche, M est un A-module projectif de type fini, donc libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5). Inversement, si la condition est satisfaite, il est clair que les $x_i \otimes 1$ forment une base de $M \otimes_A k$ et que $u \otimes 1_k$ est inversible à gauche; il suffit donc d'appliquer (6.7.2) à l'idéal maximal $\mathfrak{J}$ de A.

Corollaire (6.7.4) *Soient* A *un anneau,* M *un* A*-module de type fini,* N *un* A*-module projectif,* $u : M \to N$ *un homomorphisme. Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$*, les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *L'homomorphisme* $u_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ *est inversible à gauche.*

b) *L'homomorphisme* $u \otimes 1_{\kappa(\mathfrak{p})} : M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \to N \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ (où $\kappa(\mathfrak{p})$ est le corps résiduel de $A_\mathfrak{p}$) *est injectif.*

c) *Il existe un système* fini $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ *d'éléments de* M *tels que les images dans* $M_\mathfrak{p}$ *des* x_i *engendrent* $M_\mathfrak{p}$, *et un système de m formes linéaires* y_i^* *sur* N $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *telles que* $\det(\langle y_i^*, x_j \rangle) \notin \mathfrak{p}$.

d) *Il existe* $f \in A - \mathfrak{p}$ *tel que l'homomorphisme* $u_f : M_f \to N_f$ (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 1) *soit inversible à gauche.*

En outre, l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ *vérifiant ces conditions est ouvert dans* Spec(A).

La dernière assertion est conséquence triviale de d) et de la définition de la topologie de Spec(A) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3). Comme N est projectif, il est facteur direct d'un A-module libre $A^{(I)}$; en outre, comme M est de type fini, $u(M)$ est contenu dans un sous-module de $A^{(I)}$ de la forme A^n pour n entier; comme chacun des énoncés a), b), c), d) est équivalent à l'énoncé correspondant où l'on remplace N par $N \otimes P$ (u étant toujours supposé appliquer M dans N), on est ramené au cas ou N est *libre de type fini.* Il est trivial que d) entraîne a), et a) et b) sont équivalentes en vertu de (6.7.3): d'ailleurs a) entraîne que $M_\mathfrak{p}$ est libre (6.7.3), donc a) entraîne c) en prenant pour (x_i) une famille d'éléments de M dont les images dans $M_\mathfrak{p}$ forment une base de ce $A_\mathfrak{p}$-module et en notant que puisque N est libre de type fini, toute forme linéaire sur le $A_\mathfrak{p}$-module $N_\mathfrak{p}$ s'écrit $z^* = y^*/f$, où $f \in A - \mathfrak{p}$ et où y^* est une forme linéaire sur le A-module N. Il est clair que c) entraîne b), et il reste donc à voir que a) entraîne d). Or, comme N est de présentation finie, $(\mathrm{Hom}_A(N,M))_\mathfrak{p}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 7, prop. 19). Si $w_\mathfrak{p}$ est inverse à gauche de $u_\mathfrak{p}$, il existe donc un homomorphisme $w : N \to M$ et un élément $f \in A - \mathfrak{p}$ tels que $w = w_\mathfrak{p} \otimes (1/f) 1_{A_\mathfrak{p}}$. La relation $w_\mathfrak{p} \circ u_\mathfrak{p} = 1_{M_\mathfrak{p}}$ s'écrit donc aussi $(w \circ u) \otimes 1_{A_\mathfrak{p}} = f \cdot 1_{M_\mathfrak{p}}$. Mais comme M est un A-module de type fini, il existe $g \in A - \mathfrak{p}$ tel que l'endomorphisme $g((w \circ u) - f \cdot 1_M)$ s'annule sur tous les générateurs de M, donc soit nul. Si on pose $h = gf$ et $u_h = u \otimes 1_{A_h}$, $w_h = w \otimes 1_{A_h}$, on a donc $w_h(u_h(z)) = (f/1)z$ pour tout $z \in M_h$; mais comme $h/1$ est inversible dans A_h, il en est de même de $f/1 = f'$ et $f'^{-1} w_h$ est donc inverse à gauche de u_h. CQFD.

Proposition (6.7.5) *Soient* A *un anneau,* M *un* A*-module de type fini,* N *un* A*-module projectif,* $u : M \to N$ *un homomorphisme.*

(i) *Pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, $u_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *soit inversible à gauche.*

(ii) *Soit* A′ *une* A*-algèbre qui soit un* A*-module fidèlement plat. Pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit que* $u \otimes 1_{A'} : M \otimes_A A' \to N \otimes_A A'$ *soit inversible à gauche.*

Comme dans (6.7.4), on peut se borner au cas où N est libre de type fini; dire que u est inversible à gauche signifie que u est injectif et que le module $P=\mathrm{Coker}(u)=N/u(M)$ est *projectif*, car $u(M)$ sera alors facteur direct de N. Notons en outre que puisque M est de type fini, P est de *présentation finie*. Cela étant:

(i) La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est satisfaite, on sait que u est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1) et comme $P_{\mathfrak{m}}=N_{\mathfrak{m}}/u_{\mathfrak{m}}(M_{\mathfrak{m}})$ est projectif pour tout $\mathfrak{m}$, on sait que cela entraîne que P est projectif (*loc. cit.*, § 5, n° 2, th. 1).

(ii) Ici encore, la condition est trivialement nécessaire. Inversement, si elle est remplie, on sait que u est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 1, prop. 2) et comme $P\otimes_A A'=\mathrm{Coker}(u\otimes 1_{A'})$ est projectif, donc plat, on en déduit que P est un A-module plat (*loc. cit.*, § 3, n° 3, prop. 6), donc projectif puisqu'il est de présentation finie (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1).

6.8. Existence d'extensions plates d'anneaux locaux

Proposition (6.8.1) *Soient* A *un anneau local,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $k=A/\mathfrak{m}$ *son corps résiduel. Pour toute extension finie* k_1 *de* k*, il existe un anneau local* A_1*, un homomorphisme local* $A\to A_1$ *faisant de* A_1 *un* A*-module libre de rang fini, et un* k*-isomorphisme* $u: A_1\otimes_A k\simeq k_1$.

On peut raisonner par récurrence sur le nombre de générateurs de k_1, et on est donc ramené au cas ou $k_1=k(t)=k[t]$, où t est algébrique sur k; soit $f\in k[T]$ le polynôme minimal de t; il existe un polynôme unitaire $F\in A[T]$ dont l'image canonique dans $k[T]$ soit f. Posons $B=A[T]$ et montrons que l'anneau quotient $A_1=B/(F)$ répond à la question. Il est clair que A_1 est un A-module libre, par division euclidienne. Posons $\mathfrak{J}=\mathfrak{m}B+(F)$; l'anneau $B/\mathfrak{J}$ est isomorphe à $(B/\mathfrak{m}B)/((\mathfrak{m}B+(F))/\mathfrak{m}B)=k[T]/(f)=k_1$, et l'image $\mathfrak{m}_1$ de $\mathfrak{J}$ dans A_1 est donc un idéal maximal égal à $\mathfrak{J}A_1$. Enfin, comme A_1 est une A-algèbre finie, les idéaux maximaux de A_1 sont ceux qui sont au-dessus de l'unique idéal maximal de A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1), donc A_1 est un anneau local.

Proposition (6.8.2) *Soient* A *un anneau local,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $k=A/\mathfrak{m}$ *son corps résiduel. Pour tout corps* K*, extension de* k*, il existe un anneau local* B *et un homomorphisme local de* A *dans* B*, tels que* $\mathfrak{m}B$ *soit l'idéal maximal de* B*, que* $B/\mathfrak{m}B$ *soit isomorphe à* K *et que* B *soit un* A*-module plat.*

La proposition résulte de (6.8.1) lorsque K est une extension *finie* de k. Prouvons-la en second lieu lorsque K est une extension *de type fini* de k. Il suffit encore de le faire lorsque $K=k(T)$, où T est une indéterminée. Considérons alors l'anneau de polynômes $C=A[T]$ et l'idéal

premier $\mathfrak{m}C=\mathfrak{n}$ formé des polynômes ayant leurs coefficients dans $\mathfrak{m}$; il est clair que $C/\mathfrak{n}$ est canoniquement isomorphe à $k[T]$. Montrons que l'anneau $B=C_{\mathfrak{n}}$ répond à la question; c'est évidemment un anneau local dont l'idéal maximal $\mathfrak{n}B=\mathfrak{m}B$, et $B/\mathfrak{m}B=(C/\mathfrak{n})_{\mathfrak{n}}=(k[T])_{\mathfrak{n}}$ est le corps des fractions K de $k[T]$. Enfin, B est un C-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 4, th. 1) et C un A-module libre, donc B est un A-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, cor. 3 de la prop. 8).

Passons au cas général. Il existe un ordinal γ et pour tout ordinal $\lambda\leqslant\gamma$ un sous-corps k_λ de K contenant k, tels que: 1° pour tout $\lambda<\gamma$, $k_{\lambda+1}$ soit une extension de k_λ engendrée par un seul élément; 2° pour tout ordinal μ sans prédécesseur, $k_\mu=\bigcup_{\lambda<\mu} k_\lambda$; 3° $K=k_\gamma$. Il suffit en effet de considérer une bijection $\xi\mapsto t_\xi$ de l'ensemble des ordinaux $\leqslant\beta$ (pour un β convenable) sur K, et de définir k_λ par induction transfinie (pour $\lambda\leqslant\beta$) comme la réunion des k_λ pour $\mu<\lambda$ si λ n'a pas de prédécesseur, et, si $\lambda=\nu+1$, comme $k_\nu(t_\xi)$, où ξ est le plus petit ordinal tel que $t_\xi\notin k_\nu$; γ est alors par définition le plus petit ordinal $\leqslant\beta$ tel que $k_\gamma=K$.

Cela étant, nous allons définir, par récurrence transfinie, une famille d'anneaux locaux A_λ pour $\lambda\leqslant\gamma$, et des homomorphismes locaux $f_{\mu\lambda}:A_\lambda\to A_\mu$ pour $\lambda\leqslant\mu$, vérifiant les conditions suivantes:

(i) $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ est un système inductif et $A_0=A$.

(ii) Pour tout λ, on a un isomorphisme $A_\lambda/\mathfrak{m}A_\lambda\simeq k_\lambda$.

(iii) Pour $\lambda\leqslant\mu$, A_μ est un A_λ-module plat.

Supposons donc les A_λ et les $f_{\mu\lambda}$ définis pour $\lambda\leqslant\mu<\xi$, et supposons en premier lieu que $\xi=\zeta+1$, de sorte que $k_\xi=k_\zeta(t)$. Si t est algébrique sur k_ζ et si h est son polynôme minimal dans $k_\zeta[T]$, on considère un polynôme unitaire H de $A_\zeta[T]$ dont l'image dans $k_\zeta[T]$ est h; on prend $A_\xi=A_\zeta[T]/(H)$ (6.8.1), $f_{\xi\xi}=1_{A_\xi}$, $f_{\xi\zeta}$ égal à l'homomorphisme canonique et $f_{\xi\lambda}=f_{\xi\zeta}\circ f_{\zeta\lambda}$ pour $\lambda<\zeta$. Si t est transcendant sur k, on définit A_ξ par le procédé du début de la démonstration, comme égal à $(A_\zeta[t])_{\mathfrak{m}A_\zeta[t]}$, et les $f_{\xi\lambda}$ comme précédemment.

Supposons maintenant que ξ n'ait pas de prédecesseur; on prend alors pour A_ξ la limite inductive du système inductif d'anneaux locaux $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ pour $\lambda<\xi$; $f_{\xi\lambda}$ est défini pour $\lambda<\xi$ comme l'homomorphisme canonique de A_λ dans sa limite inductive et $f_{\xi\xi}=1_{A_\xi}$. Comme k_ξ est la limite inductive des k_λ pour $\lambda<\xi$, il résulte de (6.1.4) que A_ξ est bien un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}A_\xi$ et de corps résiduel k_ξ et que les $f_{\xi\lambda}$ pour $\lambda<\xi$ sont des homomorphismes locaux formant un système inductif; enfin, pour $\lambda=\xi$, A_ξ est un A_λ-module plat en vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 3, prop. 2.

Cette construction faite, il est clair que $B=A_\gamma$ vérifie les conditions de l'énoncé (6.8.2).

Corollaire (6.8.3) *Si* A *est un anneau local noethérien, on peut, dans l'énoncé de* (6.8.2), *supposer en outre que* B *est noethérien et complet. Si de plus* A *est un anneau de valuation discrète, il en est de même de* B.

La seconde assertion découle aussitôt de la première, puisque l'idéal maximal $\mathfrak{m}B$ de B est alors principal (6.5.7). La première assertion résulte du lemme plus général suivant:

Lemme (6.8.3.1) *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* B *un anneau local,* $\rho: A \to B$ *un homomorphisme local faisant de* B *un* A*-module plat. Si* $B/\mathfrak{m}B$ *est un anneau noethérien, alors le séparé complété* $\hat{B}$ *de* B *pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique est un anneau local noethérien et un* A*-module plat, et* $\hat{B}/\mathfrak{m}^n\hat{B}$ *est isomorphe à* $B/\mathfrak{m}^nB$ *pour tout entier* $n > 0$.

On sait que $\hat{B}$ est la limite projective du système projectif $(B/\mathfrak{m}^nB)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 6); comme $\mathfrak{m}$ est un idéal de type fini dans A, $\mathfrak{m}B/\mathfrak{m}^2B$ est un $(B/\mathfrak{m}B)$-module de type fini, donc $\hat{B}$ est noethérien (*loc. cit.*, n° 11, cor. 2 de la prop. 14); en outre, pour tout n, $\mathfrak{m}^n\hat{B}$ est le séparé complété de $\mathfrak{m}^nB$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique (*loc. cit.*, n° 12, cor. 2 de la prop. 16) et $\hat{B}/\mathfrak{m}^n\hat{B}$ est isomorphe à $B/\mathfrak{m}^nB$. Comme B est un A-module plat, $B/\mathfrak{m}^nB$ est un $(A/\mathfrak{m}^n)$-module plat, donc il en est de même de $\hat{B}/\mathfrak{m}^n\hat{B}$; comme $\hat{B}$ est un anneau local (*loc. cit.*, n° 13, prop. 19) et noethérien, on en conclut que $\hat{B}$ est un A-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1).

§ 7. Compléments d'algèbre topologique

7.1. Anneaux admissibles

(7.1.1) Rappelons (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 4, n° 3) que dans un anneau topologique A (non nécessairement séparé), on dit qu'un élément x est *topologiquement nilpotent* si 0 est *une* limite de la suite $(x^n)_{n\geqslant 0}$. On dit qu'un anneau topologique A est *linéairement topologisé* s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans A formé d'*idéaux* (nécessairement *ouverts*). Tous les anneaux topologiques considérés sont supposés *commutatifs*, sauf mention expresse du contraire.

Si A et B sont deux anneaux topologiques, $\rho: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux définissant sur B une structure de A-algèbre, on dit que B est une A-*algèbre topologique* si ρ est *continu* pour les topologies envisagées.

Si A est un anneau linéairement topologisé, M un A-module topologique, on dit que M est *linéairement topologisé* s'il existe un système

fondamental de voisinages de 0 dans M formé de *sous-modules* de M; pour abréger, nous dirons «*système fondamental d'idéaux* (resp. *de sous-modules*) *ouverts*» au lieu de «système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux (resp. de sous-modules)».

Etants donnés un anneau linéairement topologisé A et un A-module M, les ensembles $\mathfrak{J}M$, où $\mathfrak{J}$ parcourt un système fondamental d'idéaux ouverts, forment un système fondamental de sous-modules ouverts pour une topologie sur M faisant de M un A-module topologique, et que l'on dit *déduite* de la topologie de A.

Soit M un A-module topologique dont la topologie est *moins fine* que la topologie déduite de celle de A; alors, si N est un sous-module *ouvert* de M, le A-module *discret* M/N est *annulé par un idéal ouvert de* A, car par hypothèse il existe un tel idéal $\mathfrak{R}$ tel que $\mathfrak{R}\cdot M \subset N$.

Si M et N sont deux A-modules topologiques dont les topologies sont toutes deux déduites de celle de A, alors *tout* A-homomorphisme $u: M \to N$ est *continu*, car pour tout voisinage V de 0 dans N, il existe par hypothèse un idéal ouvert $\mathfrak{J}$ de A tel que $\mathfrak{J}N \subset V$, donc $u(\mathfrak{J}M) \subset \mathfrak{J}N \subset V$.

Lorsque B est une A-algèbre topologique, linéairement topologisée, la topologie sur B *déduite* de celle de A est *plus fine* que la topologie donnée, car pour tout idéal ouvert $\mathfrak{R}$ de B, il y a par hypothèse un idéal ouvert $\mathfrak{J}$ de A tel que $\mathfrak{J}B \subset \mathfrak{R}$.

Définition (7.1.2) *Dans un anneau linéairement topologisé* A, *on dit qu'un idéal* $\mathfrak{J}$ *est un* idéal de définition *si* $\mathfrak{J}$ *est ouvert et si, pour tout voisinage* V *de* 0, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $\mathfrak{J}^n \subset V$ (ce qu'on exprime, par abus de langage, en disant que la suite $(\mathfrak{J}^n)$ *tend vers* 0). *On dit qu'un anneau linéairement topologisé* A *est* préadmissible *s'il existe dans* A *un idéal de définition*; *on dit que* A *est* admissible *s'il est préadmissible et si en outre il est séparé et complet.*

Il est clair que si $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition, $\mathfrak{L}$ un idéal ouvert de A, $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{L}$ est encore un idéal de définition; les idéaux de définition d'un anneau préadmissible A forment donc un *système fondamental d'idéaux ouverts* (mais on notera que les *puissances* $\mathfrak{J}^n$ d'un idéal de définition ne sont pas nécessairement des idéaux *ouverts*).

Lemme (7.1.3) *Soit* A *un anneau linéairement topologisé.*

(i) *Pour que* $x \in A$ *soit topologiquement nilpotent, il faut et il suffit que pour tout idéal ouvert* $\mathfrak{J}$ *de* A, *l'image canonique de* x *dans* $A/\mathfrak{J}$ *soit nilpotente. L'ensemble* $\mathfrak{T}$ *des éléments topologiquement nilpotents de* A *est un idéal.*

(ii) *Supposons en outre que* A *soit préadmissible, et soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A. *Pour que* $x \in A$ *soit topologiquement nilpotent, il faut et il suffit que son image canonique dans* $A/\mathfrak{J}$ *soit nilpotente; l'idéal* $\mathfrak{T}$ *est l'image réciproque du nilradical de* $A/\mathfrak{J}$ *et est donc ouvert.*

(i) découle immédiatement des définitions. Pour prouver (ii), il suffit de remarquer que pour tout voisinage V de 0 dans A, il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{J}^n \subset V$; si $x \in A$ est tel que $x^m \in \mathfrak{J}$, on a $x^{mq} \in V$ pour $q \geqslant n$, donc x est topologiquement nilpotent.

Proposition (7.1.4) *Soient* A *un anneau préadmissible,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A.

(i) *Pour qu'un idéal* $\mathfrak{J}'$ *de* A *soit contenu dans un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $\mathfrak{J}'^n \subset \mathfrak{J}$.

(ii) *Pour qu'un* $x \in A$ *soit contenu dans un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il soit topologiquement nilpotent.*

(i) Si $\mathfrak{J}'^n \subset \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}+\mathfrak{J}'$ est un idéal de définition, car il est ouvert et $(\mathfrak{J}+\mathfrak{J}')^n \subset \mathfrak{J}$.

(ii) La condition est évidemment nécessaire; elle est suffisante, car si elle est remplie, il existe n tel que $x^n \in \mathfrak{J}$, donc $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + Ax$ est un idéal de définition, puisqu'il est ouvert, et que $\mathfrak{J}'^n \subset \mathfrak{J}$.

Corollaire (7.1.5) *Dans un anneau préadmissible* A, *un idéal premier ouvert contient tous les idéaux de définition.*

Corollaire (7.1.6) *Les notations et hypothèses étant celles de* (7.1.4), *les propriétés suivantes d'un idéal* $\mathfrak{J}_0$ *de* A *sont équivalentes*:

a) $\mathfrak{J}_0$ *est le plus grand idéal de définition de* A;

b) $\mathfrak{J}_0$ *est un idéal de définition maximal*;

c) $\mathfrak{J}_0$ *est un idéal de définition tel que l'anneau* $A/\mathfrak{J}_0$ *soit réduit.*

Pour qu'il existe un idéal $\mathfrak{J}_0$ *ayant ces propriétés, il faut et il suffit que le nilradical de* $A/\mathfrak{J}$ *soit nilpotent;* $\mathfrak{J}_0$ *est alors égal à l'idéal* $\mathfrak{T}$ *des éléments topologiquement nilpotents de* A.

Il est clair que a) implique b), et b) implique c) en vertu de (7.1.4, (ii)) et (7.1.3, (ii)); pour la même raison, c) entraîne a). La dernière assertion résulte de (7.1.4, (i)) et (7.1.3, (ii)).

Lorsque $\mathfrak{T}/\mathfrak{J}$, nilradical de $A/\mathfrak{J}$, est nilpotent, on note A_{red} l'anneau quotient (réduit) $A/\mathfrak{T}$.

Corollaire (7.1.7) *Un anneau préadmissible noethérien admet un plus grand idéal de définition.*

Corollaire (7.1.8) *Si un anneau préadmissible* A *est tel que, pour un idéal de définition* $\mathfrak{J}$, *les puissances* $\mathfrak{J}^n$ $(n > 0)$ *forment un système fondamental de voisinages de* 0, *il en est de même des puissances* $\mathfrak{J}'^n$ *de tout idéal de définition* $\mathfrak{J}'$ *de* A.

Définition (7.1.9) *On dit qu'un anneau préadmissible* A *est* préadique *s'il existe un idéal de définition* $\mathfrak{J}$ *de* A *tel que les* $\mathfrak{J}^n$ *forment un système*

fondamental de voisinages de 0 *dans* A (ou, ce qui revient au même, tel que les $\mathfrak{J}^n$ soient *ouverts*). *On appelle anneau* adique *un anneau préadique séparé et complet* (1).

Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition d'un anneau préadique (resp. adique) A, on dit encore que A est un anneau $\mathfrak{J}$-*préadique* (resp. $\mathfrak{J}$-*adique*), et que sa topologie est la topologie $\mathfrak{J}$-*préadique* (resp. $\mathfrak{J}$-*adique*). Plus généralement, si M est un A-module, la topologie sur M ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les sous-modules $\mathfrak{J}^n$M est dite topologie $\mathfrak{J}$-*préadique* (resp. $\mathfrak{J}$-*adique*) et la filtration $(\mathfrak{J}^n\mathrm{M})$ est dite filtration $\mathfrak{J}$-*préadique* sur M.(1) En vertu de (7.1.8), ces topologies sont indépendantes du choix de l'idéal de définition $\mathfrak{J}$.

Proposition (7.1.10) *Soient* A *un anneau admissible,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A. *Alors* $\mathfrak{J}$ *est contenu dans le radical de* A.

Cet énoncé est équivalent à l'un quelconque des corollaires suivants:

Corollaire (7.1.11) *Pour tout* $x\in\mathfrak{J}$, $1+x$ *est inversible dans* A.

Corollaire (7.1.12) *Pour que* $f\in$A *soit inversible dans* A, *il faut et il suffit que son image canonique dans* $\mathrm{A}/\mathfrak{J}$ *soit inversible dans* $\mathrm{A}/\mathfrak{J}$.

Corollaire (7.1.13) *Pour tout* A-*module* M *de type fini, la relation* $\mathrm{M}=\mathfrak{J}\mathrm{M}$ (*équivalente à* $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})=0$) *entraine* $\mathrm{M}=0$.

Corollaire (7.1.14) *Soit* $u:\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ *un homomorphisme de* A-*modules,* N *étant de type fini; pour que u soit surjectif, il faut et il suffit que* $u\otimes 1:\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})\to\mathrm{N}\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})$ *le soit.*

En effet, l'équivalence de (7.1.10) et (7.1.11) résulte de Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 6, n° 3, th. 1, et celle de (7.1.10) et (7.1.13) de *loc. cit.*, th. 2; le fait que (7.1.10) entraîne (7.1.14) est le lemme de Nakayama (*loc. cit.*, cor. 4 de la prop. 6); d'autre part, (7.1.14) entraîne (7.1.13) en l'appliquant à l'homomorphisme nul. Enfin, (7.1.10) entraîne que si f est inversible dans $\mathrm{A}/\mathfrak{J}$, f n'est contenu dans aucun idéal maximal de A, donc f est inversible dans A, autrement dit (7.1.10) entraîne (7.1.12); et inversement, (7.1.12) entraîne (7.1.11).

Tout revient donc à démontrer (7.1.11). Or, comme A est séparé et complet et que la suite $(\mathfrak{J}^n)$ tend vers 0, il est immédiat que la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ est convergente dans A et que, si y est sa somme, on a $y(1+x)=1$.

(1) Nous nous écartons ici de la terminologie de Bourbaki.

7.2. Anneaux adiques et limites projectives

(7.2.1) Toute limite projective d'anneaux *discrets* est évidemment un anneau linéairement topologisé, séparé et complet. Inversement, soit A un anneau linéairement topologisé, et soit $(\mathfrak{J}_\lambda)$ un système fondamental d'idéaux ouverts dans A. Les applications canoniques $\varphi_\lambda : A \to A/\mathfrak{J}_\lambda$ forment un système projectif d'homomorphismes continus et définissent donc un homomorphisme continu $\varphi : A \to \varprojlim A/\mathfrak{J}_\lambda$; si A est *séparé*, φ est un isomorphisme topologique de A sur un sous-anneau partout dense de $\varprojlim A/\mathfrak{J}_\lambda$; si, en outre, A est *complet*, φ est un isomorphisme topologique de A *sur* $\varprojlim A/\mathfrak{J}_\lambda$.

Lemme (7.2.2) *Pour qu'un anneau linéairement topologisé soit admissible, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à une limite projective* $A = \varprojlim A_\lambda$, *où* $(A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ *est un système projectif d'anneaux discrets ayant pour ensemble d'indices un ensemble ordonné filtrant* L (*pour* $\leqslant$) *qui admet un plus petit élément noté* 0 *et satisfait aux conditions suivantes*: 1° *les* $u_\lambda : A \to A_\lambda$ *sont surjectifs*; 2° *le noyau* $\mathfrak{J}_\lambda$ *de* $u_{0\lambda} : A_\lambda \to A_0$ *est nilpotent. Lorsqu'il en est ainsi, le noyau* $\mathfrak{J}$ *de* $u_0 : A \to A_0$ *est égal à* $\varprojlim \mathfrak{J}_\lambda$.

La nécessité de la condition résulte de (7.2.1), en prenant pour $(\mathfrak{J}_\lambda)$ un système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux de définition contenus dans l'un d'eux $\mathfrak{J}_0$ et appliquant (7.1.4, (i)). La réciproque résulte de la définition d'une limite projective et de (7.1.2), et la dernière assertion est immédiate.

(7.2.3) Soient A un anneau topologique *admissible*, $\mathfrak{J}$ un idéal de A contenu dans un idéal de définition (autrement dit (7.1.4) tel que $(\mathfrak{J}^n)$ tende vers 0); on peut considérer sur A la topologie d'anneau ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les puissances $\mathfrak{J}^n$ $(n > 0)$; nous l'appellerons encore la topologie $\mathfrak{J}$-*préadique*. L'hypothèse que A est admissible entraîne que $\bigcap_n \mathfrak{J}^n = 0$, donc la topologie $\mathfrak{J}$-préadique sur A est *séparée*.

Proposition (7.2.4) *Si* A *est un anneau admissible et* $\mathfrak{J}$ *est un idéal contenu dans un idéal de définition de* A *et tel que les* $\mathfrak{J}^n$ *soient fermés dans* A, A *est séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique.*

Cela résulte de Bourbaki, *Top. gén.*, chap. III, 3e éd., § 3, n° 5, Cor. 1 de la prop. 9.

Corollaire (7.2.5) *Soient* A *un anneau admissible,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A *tel que les* $\mathfrak{J}^n$ *soient fermés dans* A. *Pour que* A *soit noethérien, il faut et il suffit que* $A/\mathfrak{J}$ *soit noethérien et que* $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ *soit un* $(A/\mathfrak{J})$*-module de type fini.*

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Inversement, supposons-les vérifiées; comme en vertu de (7.2.4) A est complet pour la

topologie $\mathfrak{J}$-préadique, le corollaire résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 10, cor. 5 du th. 2.

(7.2.6) Si A est un anneau adique, $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A, A est limite projective des anneaux $A_i = A/\mathfrak{J}^{i+1}$. Nous renvoyons à Bourbaki pour une *caractérisation* complète des systèmes projectifs (A_i, u_{ij}) qui sont du type précédent lorsque $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un A-module *de type fini* (*Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 11, prop. 14); dans les mêmes conditions, on peut aussi caractériser les systèmes projectifs de A_i-modules de la forme $M_i = M/\mathfrak{J}^{i+1}M$, où M est un A-module de type fini *(loc. cit.)*. En particulier:

Proposition (7.2.7) *Soient* B *un anneau,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* B *tel que* $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ *soit un* B*-module de type fini* (ou, ce qui revient au même, un $(B/\mathfrak{J})$-module de type fini).

(i) *L'anneau* $A = \varprojlim(B/\mathfrak{J}^{n+1})$ *est un anneau adique. Si* $\overline{\mathfrak{J}}$ *est l'adhérence dans* A *de l'image canonique de* $\mathfrak{J}$, $\overline{\mathfrak{J}}$ *est un idéal de définition de type fini de* A, $\overline{\mathfrak{J}}^n$ *est l'adhérence dans* A *de l'image canonique de* $\mathfrak{J}^n$ *(n entier* $\geqslant 1$*),* $A/\overline{\mathfrak{J}}^n$ *est isomorphe à* $B/\mathfrak{J}^n$ *et* $\overline{\mathfrak{J}}/\overline{\mathfrak{J}}^2$ *à* $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$*, et* $\overline{\mathfrak{J}}$ *est isomorphe à* $\varprojlim(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{n+1})$.

(ii) *Soit* N *un* B*-module tel que* $N/\mathfrak{J}N$ *soit un* B*-module de type fini. Alors* $M = \varprojlim(N/\mathfrak{J}^{n+1}N)$ *est un* A*-module de type fini, isomorphe au séparé complété de* N *pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique,* $\overline{\mathfrak{J}}^n M$ *est l'adhérence de l'image canonique de* $\mathfrak{J}^n N$*, et* $M/\overline{\mathfrak{J}}^n M$ *est isomorphe à* $N/\mathfrak{J}^n N$.

Il est immédiat en effet de vérifier que les systèmes projectifs considérés satisfont aux conditions de Bourbaki, *loc. cit.*

Lemme (7.2.8). *Soit*

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{u_n} F_n \xrightarrow{v_n} G_n \longrightarrow 0 \tag{7.2.8.1}$$

un système projectif de suites exactes de groupes commutatifs ayant pour ensemble d'indices N *et tel que les homomorphismes de transition* $E_{n+1} \to E_n$ *soient surjectifs. Alors, si l'on pose* $E = \varprojlim E_n$, $F = \varprojlim F_n$, $G = \varprojlim G_n$, $u = \varprojlim u_n$, $v = \varprojlim v_n$, *la suite*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \longrightarrow 0 \tag{7.2.8.2}$$

est exacte.

Comme le foncteur $\varprojlim$ est exact à gauche, tout revient à prouver que v est surjectif. Or, soit $z = (z_n)$ un élément de G, et posons $P_n = v_n^{-1}(z_n)$, ensemble non vide par hypothèse dans F_n; il est clair que les P_n forment un système projectif d'ensembles. En outre, montrons que l'homomorphisme de transition $P_{n+1} \to P_n$ est *surjectif*. Or a par hypothèse un diagramme commutatif

$$(7.2.8.3)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{u_n} & F_n & \xrightarrow{v_n} & G_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle f_n} & & \uparrow{\scriptstyle g_n} & & \uparrow{\scriptstyle h_n} & & \\ 0 & \longrightarrow & E_{n+1} & \xrightarrow[u_{n+1}]{} & F_{n+1} & \xrightarrow[v_{n+1}]{} & G_{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où f_n est surjectif. Si $y_n \in P_n$, on a $v_n(y_n) = z_n$; soit $y'_{n+1} \in P_{n+1}$, de sorte que $v_n(g_n(y'_{n+1})) = z_n$, donc $g_n(y'_{n+1}) - y_n \in u_n(E_n)$; puisque f_n est surjectif, il existe $x_{n+1} \in E_{n+1}$ tel que $g_n(y'_{n+1}) - y_n = u_n(f_n(x_{n+1})) = g_n(u_{n+1}(x_{n+1}))$, ou encore $y_n = g_n(y'_{n+1} - u_{n+1}(x_{n+1}))$, d'où notre assertion. On sait alors (Bourbaki, *Ens.*, chap. III, 2e éd., § 7, n° 4, prop. 5) que $P = \varprojlim P_n$ est non vide; si $t = (t_n)$ est un élément de P, on a $v_n(t_n) = z_n$ pour tout n par définition, donc $v(t) = z$, ce qui achève la démonstration.

On notera que la conclusion n'est plus valable lorsqu'on ne suppose pas que les homomorphismes de transition $E_{n+1} \to E_n$ sont surjectifs même si les homomorphismes $F_{n+1} \to F_n$ et $G_{n+1} \to G_n$ le sont (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. III, 3e éd., § 7, exerc. 1 c)).

Lemme (7.2.9) *Soient* (A_n) *un système projectif d'anneaux,* $A = \varprojlim A_n$. *Supposons donné un système projectif de suites exactes* (7.2.8.1), *où tous les homomorphismes de transition* $f_n : E_{n+1} \to E_n$ *soient surjectifs, et où* E_n, F_n, G_n *soient des* A_n*-modules, les homomorphismes de transition étant des di-homomorphismes (de* A_{n+1}*-modules dans des* A_n*-modules). Supposons enfin que pour tout* n, G_n *soit un* A_n*-module* projectif. *Alors, si les suites exactes de* A_n*-modules* (7.2.8.1) *sont scindées, la suite exacte* (7.2.8.2) *de* A*-modules est scindée.*

Par hypothèse, il existe pour chaque n un A_n-homomorphisme $s_n : G_n \to F_n$ tel que $v_n \circ s_n = 1_{G_n}$. Nous allons montrer qu'on peut, par récurrence sur n, définir un A_n-homomorphisme $s'_n : G_n \to F_n$ tel que $v_n \circ s'_n = 1_{G_n}$ et que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G_n & \xrightarrow{s'_n} & F_n \\ \uparrow{\scriptstyle h_n} & & \uparrow{\scriptstyle g_n} \\ G_{n+1} & \xrightarrow[s_{n+1}]{} & F_{n+1} \end{array}$$

soient commutatifs. En effet, $g_n \circ s_{n+1} - s'_n \circ h_n$ est un A_{n+1}-homomorphisme de G_{n+1} dans $u_n(E_n)$, qui est un *quotient* de $u_{n+1}(E_{n+1})$ puisque f_n est surjectif; comme G_{n+1} est un A_{n+1}-module projectif, cet homomorphisme se factorise en

$$G_{n+1} \xrightarrow{t_{n+1}} u_{n+1}(E_{n+1}) \xrightarrow{g_n} u_n(E_n)$$

d'où l'on conclut aussitôt que $s'_{n+1} = s_{n+1} - t_{n+1}$ répond à la question. Cela étant, puisque les s'_n forment un système projectif, leur limite projective $s' = \varprojlim s'_n : G \to F$ est un A-homomorphisme tel que $v \circ s' = 1_G$, et la suite (7.2.8.2) est donc scindée.

Proposition (7.2.10) *Soit* A *un anneau* $\mathfrak{J}$-adique.

(i) *Tout* A*-module projectif de type fini* M *est séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique, donc limite projective des* $(A/\mathfrak{J}_{n+1})$*-modules projectifs* $M/\mathfrak{J}^{n+1}M$.

(ii) *Inversement, posons* $A_n = A/\mathfrak{J}^{n+1}$, *et soit* (M_n) *un système projectif de* A_n*-modules, tel que pour tout* n *l'homomorphisme* $M_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_n \to M_n$ *déduit du di-homorphisme de transition* $M_{n+1} \to M_n$ *soit bijectif. Supposons en outre les* M_n *projectifs et* M_0 *de type fini. Alors* $M = \varprojlim M_n$ *est un* A*-module projectif de type fini tel que l'homomorphisme canonique* $M \otimes_A A_0 \to M_0$ *soit bijectif.*

(i) Il existe un A-module libre de type fini L tel que M soit isomorphe à un facteur direct de L; comme L est séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, il en est de même de tout sous-module N de L puisque $\mathfrak{J}^{n+1}N \subset \mathfrak{J}^{n+1}L$; en particulier M est séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, et comme l'homomorphisme surjectif $f : L \to M$ est continu pour les topologies $\mathfrak{J}$-préadiques, son noyau N est fermé pour la topologie induite par la topologie $\mathfrak{J}$-préadique de L; puisque L est complet et que f est un morphisme strict, on en conclut que M est complet (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. IX, 2e éd., § 3, n° 1, prop. 4).

(ii) Il résulte du lemme de Nakayama que si M_0 est engendré par une famille finie $(x_{i0})_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et si, pour tout n, x_{in} est un élément de M_n dont $x_{i,n-1}$ est l'image dans M_{n-1}, alors $(x_{in})_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est un système générateur de M_n (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 4).

Cela étant, pour tout n, posons $L_n = A_n^r$; si $(e_{in})_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est la base canonique de L_n, soit $u_n : L_n \to M_n$ l'application A_n-linéaire telle que $u_n(e_{in}) = x_{in}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Par hypothèse on a une suite exacte *scindée*

$$0 \longrightarrow N_n \xrightarrow{v_n} L_n \xrightarrow{u_n} M_n \longrightarrow 0$$

et comme $L_n = L_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_n$ et $M_n = M_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_n$, on a aussi $N_n = N_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_n$. Or on a $A^r = L = \varprojlim L_n$; si l'on pose $N = \varprojlim N_n$, $u = \varprojlim u_n$, $v = \varprojlim v_n$, il résulte de (7.2.9), puisque M_n est un A_n-module projectif, que la suite

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{v} L \xrightarrow{u} M \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée, d'où la proposition.

7.3. Anneaux préadiques noethériens

(7.3.1) Nous renvoyons à Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, pour une étude détaillée des topologies $\mathfrak{m}$-préadiques sur un anneau *noethérien* A. Rappelons les propriétés essentielles de ces topologies:

1° Si M est un A-module de type fini, N un sous-module de M, la topologie induite sur N par la topologie $\mathfrak{m}$-préadique de M est la topologie $\mathfrak{m}$-préadique de N (*loc. cit.*, n° 2, th. 2).

2° Le séparé complété $\hat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique est un anneau de Zariski (*loc. cit.*, n° 3, prop. 8) et un A-module plat, et pour tout A-module de type fini M, l'application canonique $M \otimes_A \hat{A} \to \hat{M}$ (séparé complété de M pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique) est bijective (*loc. cit.*, n° 4, th. 3).

3° Si A est un anneau de Zariski (autrement dit, si l'idéal de définition $\mathfrak{m}$ est contenu dans le *radical* de A), $\hat{A}$ est un A-module fidèlement plat, et tout A-module de type fini est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique (*loc. cit.*, n° 3, prop. 6 et n° 5, prop. 9).

Si A est un anneau noethérien *semi-local*, $\mathfrak{r}$ son radical, les idéaux de définition de la topologie $\mathfrak{r}$-préadique sont les idéaux $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{r}$ contenant une *puissance* de $\mathfrak{r}$; on peut aussi les définir comme ceux tels que A/q soit de *longueur finie*.

Lorsqu'on considérera un anneau semi-local noethérien A comme un anneau topologique, c'est toujours de la topologie $\mathfrak{r}$-préadique qu'il sera question, sauf mention expresse du contraire; on dira encore que cette topologie est la *topologie canonique* sur A.

Pour la commodité des références, notons deux conséquences de ces résultats:

Proposition (7.3.2) *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* A, $u : E \to F$ *un homomorphisme de* A*-modules de type fini. Pour tout* A*-module* M *de type fini, posons* $M_n = M \otimes_A (A/\mathfrak{m}^{n+1}) = M/\mathfrak{m}^{n+1}M$, $K(M) = \mathrm{Ker}(u \otimes 1_M)$, $C(M) = \mathrm{Coker}(u \otimes 1_M)$, $K(M_n) = \mathrm{Ker}(u \otimes 1_{M_n})$, $C(M_n) = \mathrm{Coker}(u \otimes 1_{M_n})$. *Alors les homomorphismes canoniques.*

$$(7.3.2.1) \qquad (K(M))\hat{} \to \varprojlim K(M_n), \qquad (C(M))\hat{} \to \varprojlim C(M_n)$$

sont bijectifs.

Comme $E \otimes_A M$ et $F \otimes_A M$ sont des A-modules de type fini, et que le foncteur $M \mapsto \hat{M}$ est exact dans la catégorie des A-modules de type fini (7.3.1), $(K(M))\hat{}$ et $(C(M))\hat{}$ sont respectivement le noyau et le conoyau de $(u \otimes 1_M)\hat{}: (E \otimes_A M)\hat{} \to (F \otimes_A M)\hat{}$. Comme $(u \otimes 1_M)\hat{}$ est la limite projective des $u \otimes 1_{M_n}$, l'exactitude à gauche du foncteur $\varprojlim$ montre que $(K(M))\hat{} = \varprojlim K(M_n)$; d'autre part, l'exactitude à droite du produit tensoriel montre que $C(M_n) = C(M) \otimes_A (A/\mathfrak{m}^{n+1})$, donc

$(C(M))\hat{} = \varprojlim C(M_n)$ par définition du séparé complété d'un module (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, 2, n° 6).

Proposition (7.3.3) *Soient* A *un anneau semi-local noethérien,* $\mathfrak{m}$ *un idéal de définition de* A, B *un anneau contenant* A *et qui est une* A*-algèbre finie. Alors* B *est un anneau noethérien semi-local,* $\mathfrak{m}B$ *est un idéal de définition de* B *(de sorte que la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique sur* B *est identique à sa topologie canonique), et la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique sur* B *induit sur* A *la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique.*

Ces propriétés sont démontrées dans Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9 et chap. III, § 3, n° 3, prop. 7.

7.4. Modules quasi-finis sur les anneaux locaux

Définition (7.4.1) *Etant donné un anneau local* A, *d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *on dit qu'un* A*-module* M *est quasi-fini (sur* A*) si* $M/\mathfrak{m}M$ *est de rang fini sur le corps résiduel* $k = A/\mathfrak{m}$.

Tout A-module de type fini est évidemment quasi-fini; la réciproque est inexacte, comme le montre l'exemple où A est un anneau local intègre, $M = K$ son corps des fractions, pour lequel $M/\mathfrak{m}M = 0$.

Proposition (7.4.2) *Soit* A *un anneau local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *et soit* M *un* A*-module quasi-fini; alors le séparé complété* $\hat{M}$ *de* M *pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique est un* $\hat{A}$*-module de type fini. Si on suppose de plus* A *complet et* M *séparé pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique,* M *est un* A*-module de type fini* (identique à son complété).

En effet, comme $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un A-module de type fini, la première assertion résulte de (7.2.7); la seconde s'en déduit, puisque lorsque M est séparé, il s'identifie à un sous-module de $\hat{M}$.

On notera que dans ce dernier résultat, on ne peut se dispenser de l'hypothèse que M est séparé, comme le montre le même exemple que dans (7.4.1).

(7.4.3) Soient A, B deux anneaux locaux, B étant supposé noethérien, $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{n}$) l'idéal maximal de A (resp. B), et soit $\rho : A \to B$ un homomorphisme *local*, de sorte que $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{n}$; dire que B est un A*-module quasi-fini* signifie que $B/\mathfrak{m}B$ est une $(A/\mathfrak{m})$-algèbre finie, ce qui équivaut à la conjonction des deux propriétés suivantes (7.3.1):

(i) $\mathfrak{m}B$ *est un idéal de définition de* B;

(ii) $B/\mathfrak{n}$ *est une extension de rang fini du corps* $A/\mathfrak{m}$.

Lorsqu'il en est ainsi, tout B-module de type fini est évidemment un A-module quasi-fini.

Proposition (7.4.4) *Soient* A, B *deux anneaux locaux*, $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{n}$) *l'idéal maximal de* A (resp. B), *et supposons* B *noethérien. Soient* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local*, M *un* B*-module de type fini, et supposons que* M *soit un* A*-module quasi-fini. Alors*:

(i) *Les topologies* $\mathfrak{m}$*-préadique et* $\mathfrak{n}$*-préadique sur* M *sont identiques, donc séparées.*

(ii) *Si* $\mathfrak{b}$ *est l'annulateur du* B*-module* M, B/$\mathfrak{b}$ *est un* A*-module quasi-fini.*

(iii) *Si en outre* A *est noethérien et complet pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique*, M *est un* A*-module de type fini.*

L'assertion (iii) résulte aussitôt de (i) et de (7.4.2). Pour prouver (i), remarquons que puisque $M/\mathfrak{m}M$ est de longueur finie en tant que A-module, il est *a fortiori* de longueur finie en tant que B-module, donc $\mathfrak{n}$ est le seul idéal premier appartenant au support du B-module $M/\mathfrak{m}M$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, prop. 7); par suite $\mathfrak{n}$ est aussi le seul idéal premier contenant l'annulateur de $M/\mathfrak{m}M$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 4, prop. 17), et ce dernier est égal à $\mathfrak{m}B+\mathfrak{b}$ (*loc. cit.*, cor. de la prop. 18); $\mathfrak{m}B+\mathfrak{b}$ est donc un idéal de définition de B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1) et par suite (7.3.1) il existe $k>0$ tel que $\mathfrak{n}^k \subset \mathfrak{m}B+\mathfrak{b} \subset \mathfrak{n}$; pour tout $h>0$, on a donc $\mathfrak{n}^{hk}M \subset (\mathfrak{m}B+\mathfrak{b})^h M = \mathfrak{m}^h M \subset \mathfrak{n}^h M$, ce qui prouve que les topologies $\mathfrak{m}$-préadique et $\mathfrak{n}$-préadique sur M sont les mêmes; la seconde est d'ailleurs séparée (7.3.1).

Pour démontrer (ii), on peut se borner au cas où $M \neq 0$. On peut considérer M comme un (B/$\mathfrak{b}$)-module de type fini; son annulateur étant alors réduit à 0, la démonstration de (i) montre que $\mathfrak{m}(B/\mathfrak{b})$ est un idéal de définition de B/$\mathfrak{b}$. Par ailleurs, $M/\mathfrak{n}M$, qui est un quotient de $M/\mathfrak{m}M$, est un espace vectoriel de rang fini sur $A/\mathfrak{m}$; comme $M \neq 0$, on a $M \neq \mathfrak{n}M$ en vertu du lemme de Nakayama; mais comme $M/\mathfrak{n}M$ est un espace vectoriel $\neq 0$ sur $B/\mathfrak{n}$, le fait qu'il est de rang fini sur $A/\mathfrak{m}$ implique que $B/\mathfrak{n}$ est aussi de rang fini sur $A/\mathfrak{m}$; la conclusion résulte donc de (7.4.3) appliqué à l'anneau B/$\mathfrak{b}$.

7.5. Anneaux de séries formelles restreintes

(7.5.1) Soit A un anneau topologique; nous renvoyons à Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 4, n° 2, pour la définition de l'anneau des séries formelles restreintes $A\{T_1, \ldots, T_r\}$, son identification à la limite projective $\varprojlim (A/\mathfrak{J}_\lambda)[T_1, \ldots, T_r]$ lorsque A est linéairement topologisé, séparé et complet et $(\mathfrak{J}_\lambda)$ un système fondamental d'idéaux ouverts de A, et enfin sa propriété universelle (*loc. cit.*, prop. 4).

Proposition (7.5.2) (i) *Si* A *est un anneau admissible, il en est de même de* $A' = A\{T_1, \ldots, T_r\}$.

(ii) *Soient* A *un anneau adique,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A *tel que* $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ *soit un* $(A/\mathfrak{J})$*-module de type fini. Si on pose* $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}A'$, A' *est alors un anneau* $\mathfrak{J}'$*-adique et* $\mathfrak{J}'/\mathfrak{J}'^2$ *est de type fini sur* $A'/\mathfrak{J}'$. *Si, en outre,* A *est noethérien, il en est de même de* A'.

(i) Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de A, $\mathfrak{J}'$ l'idéal de A' formé des $\sum_\alpha c_\alpha T^\alpha$ tels que $c_\alpha \in \mathfrak{J}$ pour tout α, alors $(\mathfrak{J}')^n \subset (\mathfrak{J}^n)'$; si $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition de A, $\mathfrak{J}'$ est donc un idéal de définition de A'.

(ii) Posons $A_i = A/\mathfrak{J}^{i+1}$, et pour $i \leqslant j$, soit u_{ij} l'homomorphisme canonique $A/\mathfrak{J}^{j+1} \to A/\mathfrak{J}^{i+1}$; posons $A'_i = A_i[T_1, \ldots, T_r]$, et soit u'_{ij} l'homomorphisme $A'_j \to A'_i$ $(i \leqslant j)$ obtenu en appliquant u_{ij} aux coefficients des polynômes de A'_j. Montrons que le système projectif (A'_i, u'_{ij}) vérifie les conditions de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 11, prop. 14; comme $\mathfrak{J}'$ est le noyau de $A' \to A'_0$, cela démontrera la première assertion de (ii). Or, il est clair que les u'_{ij} sont surjectifs; le noyau $\mathfrak{J}'_i$ de u_{0i} est l'ensemble des polynômes de $A_i[T_1, \ldots, T_r]$ dont les coefficients sont dans $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{i+1}$; en particulier, $\mathfrak{J}'_1$ est l'ensemble des polynômes de $A_1[T_1, \ldots, T_r]$ dont les coefficients sont dans $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. Comme $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est de type fini sur $A_1 = A/\mathfrak{J}^2$, on voit déjà que $\mathfrak{J}'_1/\mathfrak{J}'^2_1$ est un module de type fini sur A'_1 (ou, ce qui revient au même, sur $A'_0 = A'_1/\mathfrak{J}'_1$). Montrons que le noyau de u_{ij} est $\mathfrak{J}'^{i+1}_j$. Il est évident que $\mathfrak{J}'^{i+1}_j$ est contenu dans ce noyau. D'autre part, soient $a_1, \ldots, a_m$ des éléments de $\mathfrak{J}$ dont les classes $\bmod \mathfrak{J}^2$ engendrent $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$; on vérifie immédiatement que les classes $\bmod \mathfrak{J}^{j+1}$ des monômes de degré $\leqslant j$ en les a_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ engendrent $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{j+1}$, et les classes des monômes de degré $> i$ et $\leqslant j$ engendrent donc $\mathfrak{J}^{i+1}/\mathfrak{J}^{j+1}$; un monôme en les T_k ayant un tel élément comme coefficient est donc produit de $i+1$ éléments de $\mathfrak{J}'_j$, ce qui établit notre assertion. Enfin, si A est noethérien, il en est de même de $A'/\mathfrak{J}' = (A/\mathfrak{J})[T_1, \ldots, T_r]$, donc A' est noethérien (*loc. cit.*, cor. 2 de la prop. 14).

Proposition (7.5.3) *Soient* A *un anneau noethérien* $\mathfrak{J}$*-adique,* B *un anneau topologique admissible,* $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme continu, faisant de* B *une* A*-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) B *est noethérien et* $\mathfrak{J}$B*-adique, et* $B/\mathfrak{J}B$ *est une algèbre de type fini sur* $A/\mathfrak{J}$.

b) B *est topologiquement* A*-isomorphe à* $\varprojlim B_n$, *où* $B_n = B_m/\mathfrak{J}^{n+1}B_m$ *pour* $m \geqslant n$, *et* B_1 *est une algèbre de type fini sur* $A_1 = A/\mathfrak{J}^2$.

c) B *est topologiquement* A*-isomorphe à un quotient d'une algèbre de la forme* $A\{T_1, \ldots, T_r\}$ *par un idéal (nécessairement fermé en vertu de* (7.3.1) *et* (7.5.2(ii))).

Comme A est noethérien, il en est de même de $A' = A\{T_1, \ldots, T_r\}$ (7.5.2), donc c) implique que B est noethérien; comme $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}A'$ est un voisinage ouvert de 0 dans A' tel que les $\mathfrak{J}'^n$ forment un système fondamental de voisinages de 0, les images $\mathfrak{J}^n B$ des $\mathfrak{J}'^n$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans B, et comme on sait que B est séparé et complet, B est un anneau $\mathfrak{J}$B-adique. Enfin, $B/\mathfrak{J}B$ est une algèbre (sur $A/\mathfrak{J}$) quotient de $A'/\mathfrak{J}A' = (A/\mathfrak{J})[T_1, \ldots, T_r]$, donc est de type fini, ce qui achève de prouver que c) entraîne a).

Si B est $\mathfrak{J}$B-adique et noethérien, B est isomorphe à $\varprojlim B_n$, où $B_n = B/\mathfrak{J}^{n+1}B$ (7.2.6), et $\mathfrak{J}B/\mathfrak{J}^2B$ est un module de type fini sur $B/\mathfrak{J}B$. Soit $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$ un système de générateurs du $(B/\mathfrak{J}B)$-module $\mathfrak{J}B/\mathfrak{J}^2B$, et $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un système d'éléments de $B/\mathfrak{J}^2B$ dont les classes $\mathrm{mod}(\mathfrak{J}B/\mathfrak{J}^2B)$ forment un système de générateurs de la $(A/\mathfrak{J})$-algèbre $B/\mathfrak{J}B$; on voit aussitôt que les $c_i a_j$ forment un système de générateurs de la $(A/\mathfrak{J}^2)$-algèbre $B/\mathfrak{J}^2B$, donc a) implique b).

Reste à prouver que b) entraîne c). L'hypothèse entraîne que B_1 est un anneau noethérien, et comme $B_1 = B_2/\mathfrak{J}^2B_2$, on a $\mathfrak{J}^2B_1 = 0$, donc $\mathfrak{J}B_1 = \mathfrak{J}B_1/\mathfrak{J}^2B_1$ est un B_0-module de type fini. Les conditions de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 11, prop. 14 sont donc vérifiées par le système projectif (B_n) et B est un anneau $\mathfrak{J}$B-adique. Soit $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un système fini d'éléments de B dont les classes $\mathrm{mod}\,\mathfrak{J}B$ engendrent la $(A/\mathfrak{J})$-algèbre $B/\mathfrak{J}B$, et dont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathfrak{J}$ sont telles que leurs classes $\mathrm{mod}\,\mathfrak{J}^2B$ engendrent le B_0-module $\mathfrak{J}B/\mathfrak{J}^2B$. Il existe un A-homomorphisme continu u de $A' = A\{T_1, \ldots, T_r\}$ dans B qui se réduit à φ dans A et est tel que $u(T_i) = c_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 4, n° 2, prop. 4); si nous prouvons que u est *surjectif*, c) sera établi, car de $u(A') = B$ on déduira $u(\mathfrak{J}^n A') = \mathfrak{J}^n B$, autrement dit u sera un morphisme strict d'anneaux topologiques et B sera donc isomorphe à un quotient de A' par un idéal fermé. Or, comme B est séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$B-adique, il suffit (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 2 du th. 1) de montrer que l'homomorphisme $\mathrm{gr}^\bullet(A') \to \mathrm{gr}^\bullet(B)$ déduit canoniquement de u pour les filtrations $\mathfrak{J}$-adiques sur A' et B, est surjectif. Mais par définition, les homomorphismes $A'/\mathfrak{J}A' \to B/\mathfrak{J}B$ et $\mathfrak{J}A'/\mathfrak{J}^2A' \to \mathfrak{J}B/\mathfrak{J}^2B$ déduits de u sont surjectifs; par récurrence sur n, on en déduit aussitôt qu'il en est de même de $\mathfrak{J}A'/\mathfrak{J}^nA' \to \mathfrak{J}B/\mathfrak{J}^nB$, et *a fortiori* de $\mathfrak{J}^nA'/\mathfrak{J}^{n+1}A' \to \mathfrak{J}^nB/\mathfrak{J}^{n+1}B$, ce qui achève la démonstration.

7.6. Anneaux complets de fractions

(7.6.1) Soient A un anneau linéairement topologisé, $(\mathfrak{J}_\lambda)$ un système fondamental de voisinages de 0 dans A formé d'idéaux, S une partie multiplicative de A. Soit u_λ l'homomorphisme canonique $A \to A_\lambda = A/\mathfrak{J}_\lambda$,

et pour $\mathfrak{J}_\mu \subset \mathfrak{J}_\lambda$, soit $u_{\lambda\mu}$ l'homomorphisme canonique $A_\mu \to A_\lambda$. Posons $S_\lambda = u_\lambda(S)$, de sorte que $u_{\lambda\mu}(S_\mu) = S_\lambda$. Les $u_{\lambda\mu}$ donnent canoniquement des homomorphismes surjectifs $S_\mu^{-1}A_\mu \to S_\lambda^{-1}A_\lambda$, pour lesquels ces anneaux forment un système projectif; désignons par $A\{S^{-1}\}$ la limite projective de ce système. Cette définition ne dépend pas du système fondamental de voisinages $(\mathfrak{J}_\lambda)$ choisi:

Proposition (7.6.2) *L'anneau* $A\{S^{-1}\}$ *est topologiquement isomorphe au séparé complété de l'anneau* $S^{-1}A$ *pour la topologie dont un système fondamental de voisinages de* 0 *est formé des* $S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$.

En effet, si v_λ est l'homomorphisme canonique $S^{-1}A \to S_\lambda^{-1}A_\lambda$ déduit de u_λ, le noyau de v_λ est $S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$ et v_λ est surjectif, d'où la proposition (7.2.1).

Corollaire (7.6.3) *Si* S' *est l'image canonique de* S *dans le séparé complété* $\hat{A}$ *de* A, $A\{S^{-1}\}$ *s'identifie canoniquement à* $\hat{A}\{S'^{-1}\}$.

On notera que même si A est séparé et complet, il n'en est pas de même de $S^{-1}A$ pour la topologie définie par les $S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$, comme on le voit par exemple en prenant pour S l'ensemble des f^n $(n \geqslant 0)$, où f est topologiquement nilpotent et non nilpotent: en effet, $S^{-1}A$ n'est pas réduit à 0 et d'autre part, pour tout λ il existe n tel que $f^n \in \mathfrak{J}_\lambda$, donc $1 = f^n/f^n \in S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$ et $S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda = S^{-1}A$.

Corollaire (7.6.4) *Si, dans* A, 0 *n'est pas adhérent à* S, *l'anneau* $A\{S^{-1}\}$ *n'est pas réduit à* 0.

En effet, 0 n'est pas adhérent à $\{1\}$ dans l'anneau $S^{-1}A$; sinon, on aurait $1 \in S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$ pour tout idéal ouvert $\mathfrak{J}_\lambda$ de A, et il en résulterait que $\mathfrak{J}_\lambda \cap S \neq \emptyset$ pour tout λ, contrairement à l'hypothèse.

(7.6.5) Nous dirons que $A\{S^{-1}\}$ est l'*anneau complet des fractions* de A ayant leurs dénominateurs dans S. Avec les notations précédentes, il est clair que l'image réciproque de $S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$ dans A contient $\mathfrak{J}_\lambda$, donc l'application canonique $A \to S^{-1}A$ est continue, et si on la compose avec l'application canonique $S^{-1}A \to A\{S^{-1}\}$, on obtient un homomorphisme canonique continu $A \to A\{S^{-1}\}$, limite projective des homomorphismes $A \to S_\lambda^{-1}A_\lambda$.

(7.6.6) Le couple formé de $A\{S^{-1}\}$ et de l'application canonique $A \to A\{S^{-1}\}$ est caractérisé par la *propriété universelle* suivante: tout homomorphisme continu u de A dans un anneau linéairement topologisé B, séparé et complet, tel que $u(S)$ soit formé d'éléments inversibles dans B, se factorise d'une seule manière en

$$A \longrightarrow A\{S^{-1}\} \xrightarrow{u'} B,$$

où u' est continu. En effet, u se factorise d'une seule manière en

$$A \longrightarrow S^{-1}A \xrightarrow{v'} B;$$

comme pour tout idéal ouvert $\mathfrak{R}$ de B, $u^{-1}(\mathfrak{R})$ contient un $\mathfrak{J}_\lambda$, $v'^{-1}(\mathfrak{R})$ contient nécessairement $S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$, donc v' est continu; puisque B est séparé et complet, v' se factorise d'une seule manière en

$$S^{-1}A \longrightarrow A\{S^{-1}\} \xrightarrow{u'} B,$$

où u' est continu; d'où notre assertion.

(7.6.7) Soient B un second anneau linéairement topologisé, T une partie multiplicative de B, $\varphi : A \to B$ un homomorphisme continu tel que $\varphi(S) \subset T$. D'après ce qui précède, l'homomorphisme continu

$$A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow B\{T^{-1}\}$$

se factorise de façon unique en

$$A \longrightarrow A\{S^{-1}\} \xrightarrow{\varphi'} B\{T^{-1}\},$$

où φ' est continu. En particulier, si $B = A$ et si φ est l'identité, on voit que pour $S \subset T$ on a un homomorphisme continu $\rho^{T,S} : A\{S^{-1}\} \to A\{T^{-1}\}$ obtenu par passage aux séparés complétés à partir de $S^{-1}A \to T^{-1}A$; si U est une troisième partie multiplicative de A telle que $S \subset T \subset U$, on a $\rho^{U,S} = \rho^{U,T} \circ \rho^{T,S}$.

(7.6.8) Soient S_1, S_2 deux parties multiplicatives de A, et soit S_2' l'image canonique de S_2 dans $A\{S_1^{-1}\}$; on a alors un isomorphisme topologique canonique $A\{(S_1 S_2)^{-1}\} \simeq A\{S_1^{-1}\}\{S_2'^{-1}\}$, comme on le voit en partant de l'isomorphisme canonique $(S_1 S_2)^{-1}A \simeq S_2''^{-1}(S_1^{-1}A)$ (où S_2'' est l'image canonique de S_2 dans $S_1^{-1}A$), qui est bicontinu.

(7.6.9) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal *ouvert* de A; on peut supposer que $\mathfrak{J}_\lambda \subset \mathfrak{a}$ pour tout λ, et par suite $S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda \subset S^{-1}\mathfrak{a}$ dans l'anneau $S^{-1}A$, autrement dit, $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un idéal *ouvert* de $S^{-1}A$; nous désignerons par $\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ son séparé complété, égal à $\varprojlim(S^{-1}\mathfrak{a}/S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda)$, qui est un idéal *ouvert* de $A\{S^{-1}\}$, isomorphe à l'adhérence de l'image canonique de $S^{-1}\mathfrak{a}$. En outre, *l'anneau discret* $A\{S^{-1}\}/\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ *est canoniquement isomorphe à* $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}(A/\mathfrak{a})$. Inversement, si $\mathfrak{a}'$ est un idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$, $\mathfrak{a}'$ contient un idéal de la forme $\mathfrak{J}_\lambda\{S^{-1}\}$, donc est l'image réciproque d'un idéal de $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$, qui est nécessairement (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 4, prop. 10) de la forme $S^{-1}\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{J}_\lambda$. On en conclut que l'on a $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\{S^{-1}\}$. En particulier (*loc. cit.*, n° 5, prop. 11):

Proposition (7.6.10) *L'application* $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ *est une bijection croissante de l'ensemble des idéaux* premiers ouverts $\mathfrak{p}$ *de* A *tels que* $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ *sur l'ensemble des idéaux* premiers ouverts *de* $A\{S^{-1}\}$; *en outre, le corps des fractions de* $A\{S^{-1}\}/\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ *est canoniquement isomorphe à celui de* $A/\mathfrak{p}$.

Proposition (7.6.11) (i) *Si* A *est un anneau admissible, il en est de même de* $A' = A\{S^{-1}\}$, *et pour tout idéal de définition* $\mathfrak{J}$ *de* A, $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}\{S^{-1}\}$ *est un idéal de définition de* A'.

(ii) *Soient* A *un anneau adique,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A *tel que* $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ *soit de type fini sur* $A/\mathfrak{J}$; *alors* A' *est un anneau* $\mathfrak{J}'$*-adique et* $\mathfrak{J}'/\mathfrak{J}'^2$ *est de type fini sur* $A'/\mathfrak{J}'$. *Si en outre* A *est noethérien, il en est de même de* A'.

(i) Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition dans A, il est clair que $S^{-1}\mathfrak{J}$ est un idéal de définition dans l'anneau topologique $S^{-1}A$, car on a $(S^{-1}\mathfrak{J})^n = S^{-1}\mathfrak{J}^n$. Soit A'' l'anneau séparé associé à $S^{-1}A$, $\mathfrak{J}''$ l'image de $S^{-1}\mathfrak{J}$ dans A''; l'image de $S^{-1}\mathfrak{J}^n$ est $\mathfrak{J}''^n$, donc $\mathfrak{J}''^n$ tend vers 0 dans A''; comme $\mathfrak{J}'$ est l'adhérence de $\mathfrak{J}''$ dans A', $\mathfrak{J}'^n$ est contenu dans l'adhérence de $\mathfrak{J}''^n$, donc tend vers 0 dans A'.

(ii) Posons $A_i = A/\mathfrak{J}^{i+1}$, et pour $i \leqslant j$, soit u_{ij} l'homomorphisme canonique $A/\mathfrak{J}^{j+1} \to A/\mathfrak{J}^{i+1}$; soit S_i l'image canonique de S dans A_i, et posons $A'_i = S_i^{-1}A_i$; soit enfin $u'_{ij} : A'_j \to A'_i$ l'homomorphisme déduit canoniquement de u_{ij}. Montrons que le système projectif (A'_i, u'_{ij}) vérifie les conditions de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 11, prop. 14: il est clair que les u'_{ij} sont surjectifs; d'autre part, par platitude, le noyau de u'_{ij} est $S_j^{-1}(\mathfrak{J}^{i+1}/\mathfrak{J}^{j+1})$, égal à $\mathfrak{J}'^{i+1}_j$, où $\mathfrak{J}'_j = S_j^{-1}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{j+1})$; enfin, $\mathfrak{J}'_1/\mathfrak{J}'^2_1 = S_1^{-1}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$, et comme $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est de type fini sur $A/\mathfrak{J}^2$, $\mathfrak{J}'_1/\mathfrak{J}'^2_1$ est de type fini sur A'_1. Enfin, si A est noethérien, il en est de même de $A'_0 = S_0^{-1}(A/\mathfrak{J})$, ce qui achève de démontrer la proposition (*loc. cit.*, cor. 2 de la prop. 14).

Corollaire (7.6.12) *Sous les hypothèses de* (7.6.11, (ii)) *on a* $(\mathfrak{J}\{S^{-1}\})^n = \mathfrak{J}^n\{S^{-1}\}$.

Cela résulte en effet de Bourbaki, *loc. cit.*, et de la démonstration de (7.6.11).

Proposition (7.6.13) *Soient* A *un anneau adique noethérien,* S *une partie multiplicative de* A; *alors* $A\{S^{-1}\}$ *est un* A*-module plat.*

En effet, si $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition de A, $A\{S^{-1}\}$ est le séparé complété de l'anneau noethérien $S^{-1}A$ muni de la topologie $S^{-1}\mathfrak{J}$-préadique; par suite (7.3.1) $A\{S^{-1}\}$ est un $S^{-1}A$-module plat; comme $S^{-1}A$ est un A-module plat, la proposition résulte de la transitivité de la platitude.

Corollaire (7.6.14) *Sous les hypothèses de* (7.6.13), *soit* $S' \subset S$ *une seconde partie multiplicative de* A; *alors* $A\{S^{-1}\}$ *est un* $A\{S'^{-1}\}$*-module plat.*

En effet (7.6.8), $A\{S^{-1}\}$ s'identifie canoniquement à $A\{S'^{-1}\}\{S_0^{-1}\}$, où S_0 est l'image canonique de S dans $A\{S'^{-1}\}$, et $A\{S'^{-1}\}$ est noethérien (7.6.11).

(7.6.15) Pour tout élément f d'un anneau linéairement topologisé A, nous désignerons par $A_{\{f\}}$ l'anneau complet de fractions $A\{S_f^{-1}\}$, où S_f est l'ensemble multiplicatif des f^n $(n \geqslant 0)$; pour tout idéal ouvert $\mathfrak{a}$ de A, nous écrirons $\mathfrak{a}_{\{f\}}$ au lieu de $\mathfrak{a}\{S_f^{-1}\}$. Si g est un second élément de A, on a un homomorphisme canonique continu $A_{\{f\}} \to A_{\{fg\}}$ (7.6.7). Lorsque f parcourt une partie multiplicative S de A, les $A_{\{f\}}$ forment donc un système inductif filtrant d'anneaux pour les homomorphismes précédents; nous poserons $A_{\{S\}} = \varinjlim_{f \in S} A_{\{f\}}$. Pour tout $f \in S$, on a un homomorphisme $A_{\{f\}} \to A\{S^{-1}\}$ (7.6.7), et ces homomorphismes forment un système inductif; par passage à la limite inductive, ils définissent donc un homorphisme canonique $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$.

Proposition (7.6.16) *Si* A *est un anneau noethérien,* $A\{S^{-1}\}$ *est un module plat sur* $A_{\{S\}}$.

En effet (7.6.14), $A\{S^{-1}\}$ est plat sur chacun des anneaux $A_{\{f\}}$ pour $f \in S$, et la conclusion résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, prop. 9.

Proposition (7.6.17) *Soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier ouvert dans un anneau admissible* A, *et soit* $S = A - \mathfrak{p}$. *Alors les anneaux* $A\{S^{-1}\}$ *et* $A_{\{S\}}$ *sont des anneaux locaux, l'homomorphisme canonique* $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ *est local et les corps résiduels de* $A_{\{S\}}$ *et* $A\{S^{-1}\}$ *sont canoniquement isomorphes au corps des fractions de* $A/\mathfrak{p}$.

En effet, soit $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{p}$ un idéal de définition de A; on a $S^{-1}\mathfrak{J} \subset S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, donc $A_{\mathfrak{p}}/S^{-1}\mathfrak{J}$ est un anneau local; on conclut de (7.1.12), (7.6.9) et (7.6.11, (i)) que $A\{S^{-1}\}$ est un anneau local. Posons $\mathfrak{m} = \varinjlim_{f \in S} \mathfrak{p}_{\{f\}}$, qui est un idéal de $A_{\{S\}}$; nous allons voir que tout élément de $A_{\{S\}}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{m}$ est inversible. En effet, un tel élément est l'image dans $A_{\{S\}}$ d'un élément $z \in A_{\{f\}}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}_{\{f\}}$, pour un $f \in S$; son image canonique z_0 dans $A_{\{f\}}/\mathfrak{J}_{\{f\}} = S_f^{-1}(A/\mathfrak{J})$ n'appartient donc pas à $S_f^{-1}(\mathfrak{p}/\mathfrak{J})$ (7.6.9), ce qui signifie que $z_0 = \bar{x}/\bar{f}^k$, où $x \notin \mathfrak{p}$ et $\bar{x}, \bar{f}$ sont les classes de $x, f \bmod \mathfrak{J}$. Comme $x \in S$, on a $g = xf \in S$, et dans $S_g^{-1}A$, $y_0 = x^{k+1}/g^k$, image canonique de $x/f^k \in S_f^{-1}A$, admet un inverse $x^{k-1}f^{2k}/g^k$. Cela entraîne *a fortiori* que l'image de y_0 dans $S_g^{-1}A/S_g^{-1}\mathfrak{J}$ est inversible, donc (7.6.9 et 7.1.12) l'image canonique

y de z dans $A_{\{g\}}$ est inversible; l'image de z dans $A_{\{S\}}$ (égale à celle de y) est par suite inversible. On voit donc que $A_{\{S\}}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$; en outre, l'image de $\mathfrak{p}_{\{f\}}$ dans $A\{S^{-1}\}$ est contenue dans l'idéal maximal $\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ de cet anneau; *a fortiori*, l'image de $\mathfrak{m}$ dans $A\{S^{-1}\}$ est contenue dans $\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$, donc l'homomorphisme canonique $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ est local. Enfin, comme tout élément de $A\{S^{-1}\}/\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ est image d'un élément d'un anneau $S_f^{-1}A$ pour un $f \in S$ convenable, l'homomorphisme $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}/\mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ est surjectif, et donne donc par passage aux quotients un isomorphisme des corps résiduels.

Corollaire (7.6.18) *Sous les hypothèses de* (7.6.17), *si on suppose de plus que* A *est un anneau adique noethérien, les anneaux locaux* $A\{S^{-1}\}$ *et* $A_{\{S\}}$ *sont noethériens, et* $A\{S^{-1}\}$ *est un* $A_{\{S\}}$*-module fidèlement plat.*

On sait déjà (7.6.11, (ii)) que $A\{S^{-1}\}$ est noethérien et $A_{\{S\}}$-plat (7.6.16); comme l'homomorphisme $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ est local, on en conclut que $A\{S^{-1}\}$ est un $A_{\{S\}}$-module fidèlement plat (6.6.1), et par suite que $A_{\{S\}}$ est noethérien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, cor. de la prop. 8).

7.7. Produits tensoriels complétés

(7.7.1) Soient A un anneau linéairement topologisé, M, N deux A-modules linéairement topologisés. Soient $\mathfrak{J}$, V, W des voisinages ouverts de 0 dans A, M, N respectivement, qui soient des A-modules, et tels que $\mathfrak{J} \cdot M \subset V$, $\mathfrak{J} \cdot N \subset W$, de sorte que M/V et N/W peuvent être considérés comme des $(A/\mathfrak{J})$-modules. Lorsque $\mathfrak{J}$, V, W parcourent les systèmes de voisinages ouverts vérifiant les conditions précédentes, il est immédiat que les modules $(M/V) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (N/W)$ forment un système projectif de modules sur le système projectif d'anneaux $A/\mathfrak{J}$; par passage à la limite projective, on en déduit donc un module sur le séparé complété $\hat{A}$ de A, que l'on appelle le *produit tensoriel complété* de M et de N et que l'on note $(M \otimes_A N)\hat{}$. Si l'on remarque que M/V est canoniquement isomorphe à $\hat{M}/\bar{V}$, où $\hat{M}$ est le séparé complété de M et $\bar{V}$ l'adhérence dans $\hat{M}$ de l'image de V, on voit que le produit tensoriel complété $(M \otimes_A N)\hat{}$ s'identifie canoniquement à $(\hat{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{N})\hat{}$, que l'on note aussi $\hat{M} \hat{\otimes}_{\hat{A}} \hat{N}$.

(7.7.2) Avec les notations précédentes, les produits tensoriels $(M/V) \otimes_A (N/W)$ et $(M/V) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (N/W)$ s'identifient canoniquement; ils s'identifient donc aussi à $(M \otimes_A N)/(\mathrm{Im}(V \otimes_A N) + \mathrm{Im}(M \otimes_A W))$. On en conclut que $(M \otimes_A N)\hat{}$ est le *séparé complété du* A*-module* $M \otimes_A N$, *muni de la topologie pour laquelle les sous-modules*

$$\mathrm{Im}(V \otimes_A N) + \mathrm{Im}(M \otimes_A W)$$

forment un système fondamental de voisinages de 0 (V et W parcourant l'ensemble des sous-modules ouverts de M et N respectivement); nous dirons pour abréger que cette topologie est le *produit tensoriel* des topologies données sur M et N.

(7.7.3) Soient M′, N′ deux A-modules linéairement topologisés, $u : M \to M'$, $v : N \to N'$ deux homomorphismes continus; il est immédiat que $u \otimes v$ est continu pour les topologies produits tensoriels sur $M \otimes N$ et $M' \otimes N'$ respectivement; par passage au séparé complété, on en déduit un homomorphisme continu $(M \otimes N)\hat{} \to (M' \otimes N')\hat{}$, que nous désignerons par $u \hat{\otimes} v$; $(M \otimes_A N)\hat{}$ est donc un bifoncteur en M et N dans la catégorie des A-modules linéairement topologisés.

(7.7.4) On définit de même le produit tensoriel complété d'un nombre fini quelconque de A-modules linéairement topologisés; il est immédiat que ce produit possède les propriétés usuelles d'associativité et de commutativité.

(7.7.5) Si B, C sont deux A-algèbres topologiques linéairement topologisées, la topologie produit tensoriel sur $B \otimes_A C$ a pour système fondamental de voisinages de 0 les *idéaux* $\mathrm{Im}(\mathfrak{R} \otimes_A C) + \mathrm{Im}(B \otimes_A \mathfrak{L})$ de l'algèbre $B \otimes_A C$, $\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{L}$) parcourant l'ensemble des idéaux ouverts de B (resp. C). Par suite, $(B \otimes_A C)\hat{}$ est muni d'une structure de $\hat{A}$-*algèbre topologique*, limite projective du système projectif de $(A/\mathfrak{J})$-algèbres $(B/\mathfrak{R}) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (C/\mathfrak{L})$ ($\mathfrak{J}$ idéal ouvert de A tel que $\mathfrak{J} \cdot B \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{J} \cdot C \subset \mathfrak{L}$; il en existe toujours). On dit que cette algèbre est le *produit tensoriel complété* des algèbres B et C.

(7.7.6) Les homomorphismes de A-algèbres $b \mapsto b \otimes 1$, $c \mapsto 1 \otimes c$ de B et C dans $B \otimes_A C$ sont continus quand on munit cette dernière algèbre de la topologie produit tensoriel; par composition avec l'homomorphisme canonique de $B \otimes_A C$ dans son séparé complété, ils donnent donc des *homomorphismes canoniques* $\rho : B \to (B \otimes_A C)\hat{}$, $\sigma : C \to (B \otimes_A C)\hat{}$. L'algèbre $(B \otimes_A C)\hat{}$ et les homomorphismes ρ et σ possèdent en outre la *propriété universelle* suivante; pour toute A-algèbre linéairement topologisée, séparée et complète D, et tout couple de A-homomorphismes continus $u : B \to D$, $v : C \to D$, il existe un A-homomorphisme continu $w : (B \otimes_A C)\hat{} \to D$ et un seul tel que $u = w \circ \rho$ et $v = w \circ \sigma$. En effet, il existe déjà un A-homomorphisme unique $w_0 : B \otimes_A C \to D$ tel que $u(b) = w_0(b \otimes 1)$ et $v(c) = w_0(1 \otimes c)$, et tout revient à prouver que w_0 est *continu*, car il donnera alors un homomorphisme continu w par passage au séparé complété. Or, si $\mathfrak{M}$ est un idéal ouvert de D, il existe par hypothèse des idéaux ouverts $\mathfrak{R} \subset B$, $\mathfrak{L} \subset C$ tels que $u(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{M}$, $v(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{M}$; l'image par w_0 de $\mathrm{Im}(\mathfrak{R} \otimes C) + \mathrm{Im}(B \otimes \mathfrak{L})$ est encore contenue dans $\mathfrak{M}$, d'où notre assertion.

Proposition (7.7.7) *Si* B *et* C *sont deux* A*-algèbres préadmissibles,* $(B \otimes_A C)\hat{}$ *est admissible, et si* $\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{L}$) *est un idéal de définition de* B (resp. C), *l'adhérence dans* $(B \otimes_A C)\hat{}$ *de l'image canonique de* $\mathfrak{H} = \mathrm{Im}(\mathfrak{R} \otimes C) + \mathrm{Im}(B \otimes \mathfrak{L})$ *est un idéal de définition.*

Il suffit de montrer que $\mathfrak{H}^n$ tend vers 0 pour la topologie produit tensoriel, ce qui résulte immédiatement de l'inclusion

$$\mathfrak{H}^{2n} \subset \mathrm{Im}(\mathfrak{R}^n \otimes C) + \mathrm{Im}(B \otimes \mathfrak{L}^n).$$

Proposition (7.7.8) *Soient* B, C *deux* A*-algèbres topologiques linéairement topologisées,* M *un* B*-module topologique linéairement topologisé, dont la topologie est moins fine que celle déduite de la topologie de* B (7.1.1). *Alors l'isomorphisme canonique* $M \otimes_B (B \otimes_A C) \to M \otimes_A C$ *est un isomorphisme topologique lorsque les produits tensoriels des deux membres sont munis des topologies produits tensoriels de celles des facteurs. En particulier le séparé complété* $(M \otimes_B (B \otimes_A C)\hat{})\hat{}$ *est topologiquement isomorphe à* $(M \otimes_A C)\hat{}$.

Un voisinage de 0 pour la topologie produit tensoriel sur $M \oplus_B (B \oplus_A C)$ contient un voisinage de la forme

$$W = \mathrm{Im}(V \otimes_B (B \otimes_A C)) + \mathrm{Im}(M \otimes_B (\mathrm{Im}(\mathfrak{R} \otimes_A C) + \mathrm{Im}(B \otimes_A \mathfrak{L}))),$$

où V est un sous-module ouvert de M, $\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{L}$) un idéal ouvert de B (resp. C); ce sous-module s'écrit aussi

$$\mathrm{Im}(V \otimes_A C) + \mathrm{Im}(M \otimes_A \mathfrak{L}) + \mathrm{Im}(\mathfrak{R}M \otimes_A C)$$

et contient donc $W' = \mathrm{Im}(V \otimes_A C) + \mathrm{Im}(M \otimes_A \mathfrak{L})$, qui est un voisinage de 0 dans $M \otimes_A C$; mais inversement, si $\mathfrak{R}$ a été pris tel que $\mathfrak{R}M \subset V$, ce qui est possible par hypothèse, W est égal à W', d'où la première assertion. La seconde s'en déduit en remarquant (7.7.1) que

$$(M \otimes_B (B \otimes_A C)\hat{})\hat{} = \hat{M} \hat{\otimes}_{\hat{B}} (B \otimes_A C)\hat{} = (M \otimes_B (B \otimes_A C))\hat{}.$$

Proposition (7.7.9) *Soient* A *un anneau préadique,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, M *un* A*-module* de type fini, *muni de la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique. Pour toute* A*-algèbre topologique adique et noethérienne* B, $B \otimes_A M$ *s'identifie au produit tensoriel complété* $(B \otimes_A M)\hat{}$.

Si $\mathfrak{R}$ est un idéal de definition de B, il existe par hypothèse un entier m tel que $\mathfrak{J}^m B \subset \mathfrak{R}$, donc

$$\mathrm{Im}(B \otimes_A \mathfrak{J}^{mm} M) = \mathrm{Im}(\mathfrak{J}^{mm} B \otimes_A M) \subset \mathrm{Im}(\mathfrak{R}^n B \otimes_A M) = \mathfrak{R}^n (B \otimes_A M);$$

on en conclut que sur $B \otimes_A M$, le produit tensoriel des topologies de B et de M est la topologie $\mathfrak{R}$-adique. Comme $B \otimes_A M$ est un B-module de type fini, il est égal à son séparé complété pour la topologie $\mathfrak{R}$-adique, B étant un anneau de Zariski (7.3.1).

Proposition (7.7.10) *Soient* A *un anneau topologique,* B, C *deux* A*-algèbres topologiques qui sont des anneaux locaux noethériens d'idéaux maximaux respectifs* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, *et dont les topologies sont les topologies canoniques* (7.3.1). *On suppose en outre que* C *est complet et que le corps résiduel* $B/\mathfrak{m}$ *est un* A*-module de type fini. Soit* E *le produit tensoriel complété* $(B \otimes_A C)\hat{}$. *Alors*:

(i) E *est un anneau semi-local noethérien complet.*

(ii) *L'idéal* $\mathfrak{m}E$ *est contenu dans le radical de* E *et, pour tout* $h>0$, $E/\mathfrak{m}^h E$ *est isomorphe à* $(B/\mathfrak{m}^h)\otimes_A C$.

(iii) *Si* C *est un* A*-module plat,* E *est un* B*-module plat.*

Par definition, E est le séparé complété du produit tensoriel $B \otimes_A C$ pour la topologie définie par les idéaux $\mathrm{Im}(\mathfrak{m}^i \otimes_A C)+\mathrm{Im}(B \otimes_A \mathfrak{n}^j)$. Si l'on pose $\mathfrak{r}=\mathrm{Im}(\mathfrak{m} \otimes_A C)+\mathrm{Im}(B \otimes_A \mathfrak{n})$, on a

$$\mathfrak{r}^{2i} \subset \mathrm{Im}(\mathfrak{m}^i \otimes_A C)+\mathrm{Im}(B \otimes_A \mathfrak{n}^i) \subset \mathfrak{r}^i,$$

donc E est aussi le séparé complété de $B \otimes_A C$ pour la topologie $\mathfrak{r}$-préadique. Par hypothèse, $(B \otimes_A C)/\mathfrak{r}=(B/\mathfrak{m}) \otimes_A (C/\mathfrak{n})$ est un $(C/\mathfrak{n})$-module de type fini, donc un anneau artinien; en outre, $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$, étant un quotient de $((\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \otimes_A C) \otimes (B \otimes_A (\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2))$, est un $(B \otimes_A C)$-module de type fini. On en déduit que E est un anneau noethérien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 11, cor. 2 de la prop. 14), et $\mathfrak{r}E$ est contenu dans son radical; comme $E/\mathfrak{r}E$, isomorphe à $(B \otimes_A C)/\mathfrak{r}$, est artinien, E est *semi-local.* Pour tout $h>0$, $\mathfrak{m}^h E$, étant un idéal de E, est fermé dans E (7.3.1), donc complet; d'autre part, E étant isomorphe à

$$\varprojlim_{i,j} ((B/\mathfrak{m}^i) \otimes_A (C/\mathfrak{n}^j)),$$

$\mathfrak{m}^h E$ est dense dans

$$\varprojlim_{i,j} (\mathrm{Im}((\mathfrak{m}^h/\mathfrak{m}^i) \otimes_A (C/\mathfrak{n}^j))),$$

donc égal à cette limite projective puisqu'il est complet. Comme dans les systèmes projectifs considérés, les homomorphismes de transition sont *surjectifs*, on en conclut (7.2.8) que $E/\mathfrak{m}^h E$ est isomorphe à $\varprojlim_j ((B/\mathfrak{m}^h) \otimes_A (C/\mathfrak{n}^j))$, c'est-à-dire au séparé complété de $(B/\mathfrak{m}^h) \otimes_A C$; mais comme C est complet et $B/\mathfrak{m}^i$ un A-module de type fini (puisque $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^i$ est un $(B/\mathfrak{m})$-module de type fini), $(B/\mathfrak{m}^h) \otimes_A C$ est complet (7.3.1), donc isomorphe à $E/\mathfrak{m}^h E$. Comme $(B/\mathfrak{m}^h) \otimes_A C=(B \otimes_A C)/\mathrm{Im}(\mathfrak{m}^h \otimes_A C)$, et que, pour $h=1$, on a $\mathrm{Im}(\mathfrak{m} \otimes_A C) \subset \mathfrak{r}$, cela montre que $\mathfrak{m}E \subset \mathfrak{r}E$, donc $\mathfrak{m}E$ est contenu dans le radical de E. Enfin, l'hypothèse que C est un A-module plat entraîne que $E/\mathfrak{m}^h E=(B/\mathfrak{m}^h) \otimes_A C$ est un $(B/\mathfrak{m}^h)$-module plat pour tout $h>0$; comme B et E sont noethériens et que $\mathfrak{m}E$ est contenu dans le radical de E, on en conclut que E est un B-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 2, th. 1 et n° 4, prop. 2).

Corollaire (7.7.11) *Les hypothèses étant celles de* (7.7.10), *soit* M *un* B*-module de type fini, muni de la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique. Alors* $(M \otimes_A C)\hat{}$ *est isomorphe à* $M \otimes_B E$.

En effet, comme $\mathfrak{m}E \subset \mathfrak{r}E$, la topologie produit tensoriel sur $M \otimes_B E$ est la topologie $\mathfrak{r}$-préadique, et comme E est complet pour cette topologie, $M \otimes_B E$ l'est aussi (7.3.1); il suffit alors d'appliquer (7.7.8).

Corollaire (7.7.12) *Soient* k *un corps,* A, B *deux anneaux locaux noethériens contenant* k, *d'idéaux maximaux respectifs* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$. *On suppose que* B *est complet et que le corps résiduel* $A/\mathfrak{m}$ *est une extension finie de* k. *Soit* C *le produit tensoriel complété* $(A \otimes_k B)\hat{}$. *Alors*:

(i) C *est un anneau semi-local noethérien complet.*

(ii) C *est un* A*-module plat et un* B*-module plat.*

(iii) $\mathfrak{m}C$ *est contenu dans le radical de* C *et* $C/\mathfrak{m}C$ *est isomorphe à* $(A/\mathfrak{m}) \otimes_k B$.

(iv) *Les corps résiduels des composants locaux de* C *sont des extensions finies du corps résiduel de* B.

En outre, si A′ *est une* A*-algèbre finie contenant* A *qui est un anneau local, l'homomorphisme canonique* $(A \otimes_k B)\hat{} \to (A' \otimes_k B)\hat{}$ *est injectif.*

Les propriétés (i) et (iii) et la première assertion de (ii) sont des cas particuliers de (7.7.10). Pour prouver que C est un B-module plat, notons, qu'on a vu, dans la démonstration de (7.7.10), que $C/\mathfrak{m}^h C = (A/\mathfrak{m}^h) \otimes_k B$; comme k est un corps, on voit que $C/\mathfrak{m}^h C$ est un B-module plat; comme pour chacun des composants locaux C_i de C, $\mathfrak{m}C_i$ est contenu dans l'idéal maximal de C_i (puisque $\mathfrak{m}C$ est contenu dans le radical de C), on conclut de (6.6.20) que les C_i, et par suite C, sont des B-modules plats. Les corps résiduels des C_i sont ceux des composants locaux de l'anneau artinien $(A/\mathfrak{m}) \otimes_k (B/\mathfrak{n})$ qui, par hypothèse, sont des extensions finies de $B/\mathfrak{n}$. Enfin, la topologie canonique de A′ est aussi la topologie $\mathfrak{m}$-préadique (7.3.3) et en vertu de (7.7.11), $(A' \otimes_k B)\hat{}$ s'identifie à $A' \otimes_A E$; l'homomorphisme $A \to A' \otimes_A E$ est alors injectif par platitude.

7.8. Topologies sur les modules d'homomorphismes

Proposition (7.8.1) *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, M *et* N *des* A*-modules de type fini; pour tout entier* $i \geqslant 0$, *posons* $A_i = A/\mathfrak{J}^{i+1}$, $M_i = M/\mathfrak{J}^{i+1}M$, $N_i = N/\mathfrak{J}^{i+1}N$.

(i) *Les sous-modules* $\mathrm{Hom}_A(M, \mathfrak{J}^{i+1}N)$ *forment un système fondamental de voisinages de* 0 *dans* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique, et l'homomorphisme canonique* $\varphi : \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \varprojlim \mathrm{Hom}_{A_i}(M_i, N_i)$ *est un isomorphisme topologique de* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *sur un sous-module de* $\varprojlim \mathrm{Hom}_{A_i}(M_i, N_i)$.

(ii) *Si* $\mathfrak{J}$ *est contenu dans le radical de* A, *l'ensemble des homomorphismes injectifs* (resp. *surjectifs, bijectifs*) *de* M *dans* N *est une partie ouverte de* $\mathrm{Hom}_A(M,N)$.

(iii) *Si* A *est complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique,* φ *est bijectif.*

(i) On peut considérer M comme quotient d'un A-module libre L de rang fini, et par suite identifier $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ à un sous-module de $\mathrm{Hom}_A(L,M)$; dans cette identification, $\mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{J}^{i+1}N)$ est l'intersection de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ et de $\mathrm{Hom}_A(L,\mathfrak{J}^{i+1}N)$. Comme $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est un A-module de type fini, la topologie induite sur $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ par la topologie $\mathfrak{J}$-préadique de $\mathrm{Hom}_A(L,N)$ est la topologie $\mathfrak{J}$-préadique (7.3.1); on est donc ramené à démontrer la première assertion pour $M=L=A^m$; mais alors $\mathrm{Hom}_A(L,N)=N^m$, $\mathrm{Hom}_A(L,\mathfrak{J}^{i+1}N)=(\mathfrak{J}^{i+1}N)^m=\mathfrak{J}^{i+1}N^m$ et le résultat est évident. Pour établir la seconde assertion, notons que l'image de $\mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{J}^{i+1}N)$ dans $\mathrm{Hom}_{A_j}(M_j,N_j)$ est nulle pour $j\leqslant i$, donc φ est continu; inversement, le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_A(M,N)\to\mathrm{Hom}_{A_i}(M_i,N_i)$ est $\mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{J}^{i+1}N)$, donc φ est injectif et un isomorphisme topologique sur son image.

(ii) Pour que u soit surjectif, il faut et il suffit que l'homomorphisme correspondant $u_0=u\otimes 1_{A_0}: M_0\to N_0$ le soit, en vertu du lemme de Nakayama, puisque $\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de A; l'ensemble des homomorphismes surjectifs de M dans N est donc l'image réciproque par l'application continue $\mathrm{Hom}_A(M,N)\to\mathrm{Hom}_{A_0}(M_0,N_0)$ d'une partie d'un espace discret, donc est ouvert. Montrons maintenant que l'ensemble des homomorphismes injectifs de M dans N est ouvert. Soit v un tel homomorphisme et posons $M'=v(M)$; par le lemme d'Artin-Rees (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 1, cor. 1 du th. 1), il existe un entier $k>0$ tel que $M'\cap\mathfrak{J}^{m+k}N\subset\mathfrak{J}^mM'$ pour tout $m>0$; nous allons voir que pour $w\in\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{Hom}_A(M,N)$, $u=v+w$ est injectif, ce qui prouvera notre assertion. En effet, soit $x\in M$ tel que $u(x)=0$; prouvons que pour tout $i\geqslant 0$ la relation $x\in\mathfrak{J}^iM$ implique $x\in\mathfrak{J}^{i+1}M$; il en résultera bien $x\in\bigcap_{i\geqslant 0}\mathfrak{J}^iM=0$ (7.3.1). Or, on a alors $w(x)\in\mathfrak{J}^{i+k+1}N$, et par ailleurs $w(x)=-v(x)\in M'$, donc $v(x)\in M'\cap\mathfrak{J}^{i+k+1}N\subset\mathfrak{J}^{i+1}M'$, et comme v est injectif, $x\in\mathfrak{J}^{i+1}M$.

(iii) Les éléments de $\varprojlim\mathrm{Hom}_{A_i}(M_i,N_i)$ sont les systèmes projectifs d'homomorphismes $u_i: M_i\to N_i$, qui correspondent biunivoquement aux homomorphismes $\hat{M}\to\hat{N}$ des séparés complétés de M et N. Lorsque A est complet, il en est de même de M et N (7.3.1), d'où la conclusion.

(A suivre)

CHAPITRE I

Le langage des schémas

Sommaire

§ 1. Schémas affines.
§ 2. Schémas et morphismes de schémas.
§ 3. Produit et somme de schémas. Changement de base.
§ 4. Sous-schémas et morphismes d'immersion. Schémas réduits.
§ 5. Morphismes séparés. Critères valuatifs.
§ 6. Conditions de finitude relatives.
§ 7. Ensembles constructibles dans les schémas.
§ 8. Applications rationnelles.
§ 9. Foncteurs représentables élémentaires dans la théorie des schémas: Schémas relativement affines, fibrés vectoriels, fibrés projectifs et grassmanniennes.
§ 10. Schémas formels.

Appendice: Ultraschémas et espaces algébriques de Serre.

Les §§ 1 à 8 ne font guère que développer un langage, celui qui sera utilisé dans toute la suite.

Le § 9 donne des définitions et résultats sur les foncteurs représentables, dont certains ne se bornent plus à une traduction en langage «géométrique» de notions connues d'Algèbre commutative, mais sont déjà de nature globale; ils seront indispensables, dès les chapitres suivants, dans l'étude globale des morphismes. Enfin, le § 10 introduit une généralisation de la notion de schéma, qui nous servira d'intermédiaire au chapitre III pour formuler et démontrer de façon commode les résultats fondamentaux de l'étude cohomologique des morphismes propres; par ailleurs, signalons que la notion de schéma formel semble indispensable dans divers contextes, par example pour exprimer certains faits de la «théorie des modules» (problèmes de classification des variétés algébriques). Les résultats du § 10 ne seront pas utilisés avant le § 3 du chapitre III et il est recommandé d'en omettre la lecture jusque-là. De même, on peut se dispenser en première lecture d'étudier les §§ 7 et 8.

Dépendance logique des divers paragraphes:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \begin{cases} \Rightarrow 7 \\ \Rightarrow 8 \\ \Rightarrow 9 \\ \Rightarrow 10 \end{cases}$$

§ 1. Schémas affines

1.1. Le spectre d'un anneau

(1.1.1) *Notations*: Soient A un anneau (commutatif), M un A-module. Dans ce chapitre et les suivants, nous utiliserons constamment les notations suivantes:

Spec(A): *ensemble des idéaux premiers* de A, appelé aussi *spectre premier* de A; pour un $x \in X = \mathrm{Spec}(A)$, il sera souvent commode d'écrire $\mathfrak{j}_x$ au lieu de x. Pour que Spec(A) soit *vide*, il faut et il suffit que l'anneau A soit réduit à 0.

$A_x = A_{\mathfrak{j}_x}$ = *anneau (local) des fractions* $S^{-1}A$, où $S = A - \mathfrak{j}_x$.

$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{j}_x A_{\mathfrak{j}_x}$ = *idéal maximal de* A_x.

$\kappa(x) = A_x/\mathfrak{m}_x$ = *corps résiduel de* A_x, isomorphe canoniquement au corps des fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{j}_x$, auquel on l'identifie.

$f(x)$ = *classe de* $f \bmod \mathfrak{j}_x$, dans $A/\mathfrak{j}_x \subset \kappa(x)$, pour $f \in A$ et $x \in X$. On dit encore que $f(x)$ est la *valeur* de f au point $x \in \mathrm{Spec}(A)$; les relations $f(x) = 0$ et $f \in \mathfrak{j}_x$ sont *équivalentes*.

$M_x = M \otimes_A A_x$ = *module des fractions à dénominateurs dans* $A - \mathfrak{j}_x$.

$\mathfrak{r}(E)$ = *racine de l'idéal de* A *engendré par une partie* E *de* A.

$V(E)$ = *ensemble des* $x \in X$ *tels que* $E \subset \mathfrak{j}_x$ (ou encore ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $f \in E$), pour $E \subset A$. Si $\mathfrak{a}$ est l'idéal engendré par E, on a $V(E) = V(\mathfrak{a})$. On a

$$\mathfrak{r}(E) = \bigcap_{x \in V(E)} \mathfrak{j}_x. \tag{1.1.1.1}$$

$V(f) = V(\{f\})$ pour $f \in A$.

$D(f) = X - V(f)$ = *ensemble des* $x \in X$ *où* $f(x) \neq 0$, aussi noté X_f. On a

$$D(fg) = D(f) \cap D(g). \tag{1.1.1.2}$$

(1.1.2) Nous renvoyons à Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3 pour la définition et les propriétés de la *topologie spectrale* sur $X = \mathrm{Spec}(A)$; rappelons seulement que les ensembles fermés de cette topologie sont les $V(\mathfrak{a})$ pour tous les idéaux $\mathfrak{a}$ de A, et que les $D(f)$

pour $f \in A$ forment une *base* d'ouverts de la topologie et sont quasi-compacts. Nous supposons toujours par la suite que X est muni de la topologie spectrale.

Proposition (1.1.3) *Pour tout ensemble fini* $Z \subset X = \mathrm{Spec}(A)$ *et tout voisinage* U *de* Z, *il existe un élément* $f \in A$ *tel que* $D(f)$ *soit un voisinage de* Z *contenu dans* U.

En effet, l'ensemble fermé Y, complémentaire de U dans X, est de la forme $V(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A; d'autre part, les points de Z sont par définition des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ de A $(1 \leqslant i \leqslant m)$, et l'hypothèse signifie que $\mathfrak{a}$ n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{p}_i$. Il existe par suite un élément $f \in \mathfrak{a}$ qui n'appartient à aucun des $\mathfrak{p}_i$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2) et $D(f)$ répond à la question.

Proposition (1.1.4) *Pour qu'un ensemble ouvert* $U \subset X = \mathrm{Spec}(A)$ *soit quasi-compact, il faut et il suffit qu'il soit le complémentaire d'un ensemble fermé de la forme* $V(\mathfrak{J})$, *où* $\mathfrak{J}$ *est un idéal de type fini de* A.

En effet, si U est quasi-compact, il est réunion d'un nombre fini d'ouverts $D(f_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (1.1.2) et si $\mathfrak{J}$ est l'idéal de A engendré par les f_i, $V(\mathfrak{J}) = \bigcap_i V(f_i)$ est le complémentaire de U. Inversement, si $\mathfrak{J}$ est un idéal engendré par un nombre fini d'éléments f_i, on a $V(\mathfrak{J}) = \bigcap_i V(f_i)$ et $U = X - V(\mathfrak{J})$ est réunion des ensembles quasi-compacts $D(f_i)$, donc est quasi-compact.

Proposition (1.1.5) *L'espace* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est un espace de Kolmogoroff. L'application* $x \mapsto \overline{\{x\}}$ *est une bijection de* X *sur l'ensemble des parties fermées irréductibles de* X (autrement dit *toute partie fermée irréductible de* X *admet un point générique* (**0**, 2.1) *et un seul*).

Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ sont deux idéaux premiers distincts de A, l'un des deux au moins n'est pas contenu dans l'autre, autrement dit on a, soit $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{q})$, soit $\mathfrak{q} \notin V(\mathfrak{p})$, et il suffit de remarquer que $V(\mathfrak{p})$ est l'adhérence du point $\mathfrak{p}$ dans Spec(A) (Bourbaki, *loc. cit.*, cor. 6 de la prop. 11). On sait en outre que les $V(\mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p}$ parcourt Spec(A), sont les parties fermées irréductibles de X (*loc. cit.*, prop. 14), d'où la seconde assertion.

(1.1.5.1) En particulier, les points *maximaux* de X (**0**, 2.1) (c'est-à-dire ceux dont l'adhérence est maximale) sont les idéaux premiers *minimaux* de A; on peut encore dire que ce sont les points $x \in X$ tels que l'anneau local A_x n'ait qu'*un seul idéal premier.*

Proposition (1.1.6) *Si* $\mathfrak{J}$ *est un idéal de* A *contenu dans le radical, le seul voisinage de* $V(\mathfrak{J})$ *dans* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est l'espace* X *tout entier. En particulier, si* A *est un anneau local, le seul ouvert de* X *contenant l'unique point fermé de* X *est l'espace* X *tout entier.*

En effet, tout idéal maximal de A appartient par définition à $V(\mathfrak{J})$. Comme tout idéal $\mathfrak{a} \neq A$ dans A est contenu dans un idéal maximal, on a $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{J}) \neq \emptyset$, d'où la proposition.

1.2. Propriétés fonctorielles des spectres premiers d'anneaux.

(1.2.1) Soient A, A′ deux anneaux,

$$\varphi : A' \to A$$

un homomorphisme d'anneaux. Pour tout idéal premier $x = \mathfrak{j}_x \in \mathrm{Spec}(A) = X$, l'anneau $A'/\varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$ est canoniquement isomorphe à un sous-anneau de $A/\mathfrak{j}_x$, donc est intègre, autrement dit $\varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$ est un idéal premier de A′; nous le noterons ${}^a\varphi(x)$, et nous avons ainsi défini une application

$${}^a\varphi : X = \mathrm{Spec}(A) \to X' = \mathrm{Spec}(A')$$

(aussi notée $\mathrm{Spec}(\varphi)$) que nous appellerons l'application *associée* à l'homomorphisme φ. Nous désignerons par φ^x l'homomorphisme injectif de $A'/\varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$ dans $A/\mathfrak{j}_x$, déduit de φ par passage aux quotients, ainsi que son prolongement canonique en un monomorphisme de corps

$$\varphi^x : \kappa({}^a\varphi(x)) \to \kappa(x);$$

pour tout $f' \in A'$, on a donc par définition

$$\varphi^x\big(f'({}^a\varphi(x))\big) = (\varphi(f'))(x) \qquad (x \in X). \tag{1.2.1.1}$$

Proposition (1.2.2) (i) *Pour toute partie* E′ *de* A′, *on a*

$${}^a\varphi^{-1}(V(E')) = V(\varphi(E')) \tag{1.2.2.1}$$

et en particulier, pour tout $f' \in A'$,

$${}^a\varphi^{-1}(D(f')) = D(\varphi(f')). \tag{1.2.2.2}$$

(ii) *Pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A, *on a*

$$\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{a}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a})). \tag{1.2.2.3}$$

En effet, la relation ${}^a\varphi(x) \in V(E')$ est par définition équivalente à $E' \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$, donc à $\varphi(E') \subset \mathfrak{j}_x$, et finalement à $x \in V(\varphi(E'))$, d'où (i). Pour démontrer (ii), on peut supposer $\mathfrak{a}$ égal à sa racine, puisque $V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a})$ et $\varphi^{-1}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{r}(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$; si on pose $Y = V(\mathfrak{a})$, et $\mathfrak{a}' = \mathfrak{j}({}^a\varphi(Y))$ (où on rappelle que $\mathfrak{j}(Z)$ désigne l'intersection des idéaux premiers appartenant à Z) on a $\overline{{}^a\varphi(Y)} = V(\mathfrak{a}')$ (Bourbaki, *loc. cit.*, prop. 11); la relation $f' \in \mathfrak{a}'$ est par définition équivalente à $f'(x') = 0$ pour tout $x' \in {}^a\varphi(Y)$, donc, en vertu de la formule (1.2.1.1), elle est aussi équivalente à $\varphi(f')(x) = 0$ pour tout $x \in Y$, ou encore à $\varphi(f') \in \mathfrak{j}(Y) = \mathfrak{a}$, puisque $\mathfrak{a}$ est égal à sa racine; d'où (ii).

Corollaire (1.2.3) *L'application* ${}^a\varphi$ *est continue.*

Remarquons que si A'' est un troisième anneau, φ' un homomorphisme $A'' \to A'$, on a ${}^a(\varphi' \circ \varphi) = {}^a\varphi \circ {}^a\varphi'$; ce résultat et le cor. (1.2.3) signifient que Spec(A) est un *foncteur contravariant* en A, de la catégorie des anneaux dans celle des espaces topologiques.

Corollaire (1.2.4) *Supposons que* φ *soit tel que tout* $f \in A$ *s'écrive* $f = h\varphi(f')$, *où* h *est inversible dans* A (ce qui est en particulier le cas lorsque φ est *surjectif*). *Alors* ${}^a\varphi$ *est un homéomorphisme de* X *sur* ${}^a\varphi(X)$.

Montrons que pour toute partie $E \subset A$, il existe une partie E' de A' telle que $V(E) = V(\varphi(E'))$; en vertu de l'axiome (T_0) (1.1.5) et de la formule (1.2.2.1), cela entraînera d'abord que ${}^a\varphi$ est injective, puis, toujours en vertu de (1.2.2.1), que ${}^a\varphi$ est un homéomorphisme. Or, il suffit pour chaque $f \in E$ de prendre un $f' \in A'$ tel que $h\varphi(f') = f$ avec h inversible dans A; l'ensemble E' de ces éléments f' répond à la question.

(1.2.5) En particulier, lorsque φ est l'homomorphisme canonique de A sur un anneau quotient $A/\mathfrak{a}$, on retrouve le fait que $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ est homéomorphe à $V(\mathfrak{a})$ (Bourbaki, *loc. cit.*, *Remarque*), et ${}^a\varphi$ est l'*injection canonique* de $V(\mathfrak{a})$, identifié à $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$, dans $X = \mathrm{Spec}(A)$.

Corollaire (1.2.6) *Pour que* ${}^a\varphi(X)$ *soit partout dense dans* X', *il faut et il suffit que tout élément du noyau* $\mathrm{Ker}\,\varphi$ *soit nilpotent. En particulier, si* A' *est* réduit, *pour que* ${}^a\varphi$ *soit dominant* (**0**, 2.1.12), *il faut et il suffit que* φ *soit injectif.*

En effet, appliquant la formule (1.2.2.3) à l'idéal $\mathfrak{a} = (0)$, il vient $\overline{{}^a\varphi(X)} = V(\mathrm{Ker}\,\varphi)$, et pour que $V(\mathrm{Ker}\,\varphi) = X'$, il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ soit contenu dans tous les idéaux premiers de A', c'est-à-dire dans le nilradical $\mathfrak{N}'$ de A'.

1.3. Faisceau associé à un module

(1.3.1) Soient A un anneau commutatif, M un A-module, f un élément de A, S_f l'ensemble multiplicatif des f^n, où $n \geqslant 0$. Rappelons que nous posons $A_f = S_f^{-1}A$, $M_f = S_f^{-1}M$. Si S_f' est la partie multiplicative saturée de A formée des $g \in A$ qui divisent un élément de S_f, on sait que A_f et M_f s'identifient canoniquement à $S_f'^{-1}A$ et $S_f'^{-1}M$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 3, prop. 8).

Lemme (1.3.2) *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $g \in S_f'$; b) $S_g' \subset S_f'$; c) $f \in \mathfrak{r}(g)$;

d) $\mathfrak{r}(f) \subset \mathfrak{r}(g)$; e) $V(g) \subset V(f)$; f) $D(f) \subset D(g)$.

Cela résulte immédiatement des définitions et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, prop. 11.

(1.3.3) Si $D(f) = D(g)$, le lemme (1.3.2, b)) montre que $M_f = M_g$. Plus généralement, si $D(f) \supset D(g)$, donc $S_f' \subset S_g'$, on sait (Bourbaki,

Alg. comm., chap. II, § 2, n° 3) qu'il existe un homomorphisme canonique fonctoriel

$$\rho_{g,f}\colon M_f \to M_g,$$

et si $D(f) \supset D(g) \supset D(h)$, on a *(loc. cit.)*

$$\rho_{h,g} \circ \rho_{g,f} = \rho_{h,f}. \tag{1.3.3.1}$$

Lorsque f parcourt $A - \mathfrak{j}_x$ (pour un x donné dans $X = \mathrm{Spec}(A)$), les ensembles S'_f constituent un ensemble filtrant croissant de parties de $A - \mathfrak{j}_x$, car pour deux éléments f, g de $A - \mathfrak{j}_x$, S'_f et S'_g sont contenus dans S'_{fg}; comme la réunion des S'_f pour $f \in A - \mathfrak{j}_x$ est $A - \mathfrak{j}_x$, on en conclut (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 3, prop. 9) que le A_x-module M_x s'identifie canoniquement à la *limite inductive* $\varinjlim M_f$, relativement à la famille d'homomorphismes $(\rho_{g,f})$. Nous désignerons par

$$\rho_x^f\colon M_f \to M_x$$

l'homomorphisme canonique pour $f \in A - \mathfrak{j}_x$ (ou, ce qui revient au même, $x \in D(f)$).

Définition (1.3.4) *On appelle faisceau structural du spectre premier* $X = \mathrm{Spec}(A)$ (resp. *faisceau associé au* A*-module* M) *et on note* $\tilde{A}$ *ou* $\mathcal{O}_X$ (resp. $\tilde{M}$) *le faisceau d'anneaux* (resp. *le* $\tilde{A}$*-Module*) *associé au préfaisceau* $D(f) \mapsto A_f$ (resp. $D(f) \mapsto M_f$) *sur la base* $\mathfrak{B}$ *de* X *formée des* $D(f)$ *où* $f \in A$ ((1.1.2), (**0**, 3.2.1 et 3.5.6)).

On a vu (**0**, 3.2.4) que la fibre $\tilde{A}_x$ (resp. $\tilde{M}_x$) *s'identifie à l'anneau* A_x (resp. *au* A_x*-module* M_x); nous désignerons par

$$\theta_f\colon A_f \to \Gamma(D(f), \tilde{A})$$
$$(\text{resp. } \theta_f\colon M_f \to \Gamma(D(f), \tilde{M})),$$

l'application canonique, de sorte que pour tout $x \in D(f)$ et tout $\xi \in M_f$, on a

$$(\theta_f(\xi))_x = \rho_x^f(\xi). \tag{1.3.4.1}$$

Proposition (1.3.5) $M \mapsto \tilde{M}$ *est un foncteur exact, de la catégorie des* A*-modules dans la catégorie des* $\tilde{A}$*-Modules.*

En effet, soient M, N deux A-modules, u un homomorphisme $M \to N$; pour tout $f \in A$, il correspond canoniquement à u un homomorphisme u_f du A_f-module M_f dans le A_f-module N_f, et le diagramme (pour $D(g) \subset D(f)$)

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{u_f} & N_f \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{g,f}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{g,f}} \\ M_g & \xrightarrow[u_g]{} & N_g \end{array}$$

est commutatif (**0**, 1.4.1); ces homomorphismes définissent donc un homomorphisme de $\tilde{A}$-Modules $\tilde{u}: \tilde{M} \to \tilde{N}$ (**0**, 3.2.3). En outre, pour tout $x \in X$, $\tilde{u}_x$ est la limite inductive des u_f pour $x \in D(f)$ ($f \in A$), et par suite, si on identifie canoniquement $\tilde{M}_x$ et $\tilde{N}_x$ à M_x et N_x respectivement, $\tilde{u}_x$ s'identifie à l'homomorphisme u_x déduit canoniquement de u. Si P est un troisième A-module, v un homomorphisme $N \to P$ et $w = v \circ u$, il est immédiat que $w_x = v_x \circ u_x$, donc $\tilde{w} = \tilde{v} \circ \tilde{u}$. On a donc bien défini un *foncteur covariant* $M \mapsto \tilde{M}$, de la catégorie des A-modules dans celle des $\tilde{A}$-Modules. *Ce foncteur est exact*, car pour tout $x \in X$, M_x est un foncteur exact en M (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 4, th. 1); en outre, on a $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(\tilde{M})$ en vertu des définitions des deux membres (**0**, 3.1.6 et Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 4).

Proposition (1.3.6) *Pour tout* $f \in A$, *l'ensemble ouvert* $D(f) \subset X$ *s'identifie canoniquement au spectre premier* $\mathrm{Spec}(A_f)$, *et le faisceau* $\tilde{M}_f$ *associé au* A_f*-module* M_f *s'identifie canoniquement à la restriction* $\tilde{M}|D(f)$.

La première assertion est un cas particulier de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, cor. de la prop. 13. En outre, si $g \in A$ est tel que $D(g) \subset D(f)$, M_g s'identifie canoniquement au module des fractions de M_f dont les dénominateurs sont les puissances de l'image canonique de g dans A_f (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 3, prop. 7). L'identification canonique de $\tilde{M}_f$ à $\tilde{M}|D(f)$ résulte alors des définitions.

Théorème (1.3.7) *Pour tout* A*-module* M *et tout* $f \in A$, *l'homomorphisme*

$$\theta_f : M_f \to \Gamma(D(f), \tilde{M})$$

est bijectif (autrement dit, le préfaisceau $D(f) \mapsto M_f$ est un *faisceau*). *En particulier*, M *s'identifie par* θ_1 *à* $\Gamma(X, \tilde{M})$.

On notera que, si $M = A$, θ_f est un homomorphisme de structure d'anneau; le th. (1.3.7) entraînera donc que, si on identifie les anneaux A_f et $\Gamma(D(f), \tilde{A})$ au moyen de θ_f, l'homomorphisme $\theta_f : M_f \to \Gamma(D(f), \tilde{M})$ sera un isomorphisme de *modules*.

Montrons d'abord que θ_f est *injectif*. En effet, si $\xi \in M_f$ est tel que $\theta_f(\xi) = 0$, cela signifie que pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de A_f, il existe $h \notin \mathfrak{p}$ tel que $h\xi = 0$; comme l'annulateur de ξ n'est contenu dans aucun idéal premier de A_f, c'est A_f tout entier, donc $\xi = 0$.

Reste à montrer que θ_f est *surjectif*; on peut se ramener au cas où $f = 1$, le cas général s'en déduisant en «localisant» à l'aide de (1.3.6). Soit donc s une section de $\tilde{M}$ au-dessus de X; en vertu de (1.3.4) et de la quasi-compacité de X, il existe un recouvrement *fini* $(D(f_i))_{i \in I}$ de X (où $f_i \in A$) tel que, pour tout $i \in I$, la restriction $s_i = s|D(f_i)$ soit de la forme $\theta_{f_i}(\xi_i)$, où $\xi_i \in M_{f_i}$. Si i, j sont deux indices de I, en écrivant

que les restrictions de s_i et de s_j à $D(f_i)\cap D(f_j)=D(f_if_j)$ sont égales, il vient par définition de M

$$\rho_{f_if_j,f_i}(\xi_i)=\rho_{f_if_j,f_j}(\xi_j). \tag{1.3.7.1}$$

Par définition, on peut écrire, pour chaque $i\in I$, $\xi_i=z_i/f_i^{n_i}$, où $z_i\in M$, et comme I est fini, en multipliant chaque z_i par une puissance de f_i, on peut supposer tous les n_i égaux à un même n. Alors, par définition, (1.3.7.1) signifie qu'il existe un entier $m_{ij}\geqslant 0$ tel que $(f_if_j)^{m_{ij}}(f_j^n z_i-f_i^n z_j)=0$, et on peut encore supposer tous les m_{ij} égaux à un même entier m; remplaçant alors z_i par $f_i^m z_i$, on est ramené au cas où $m=0$, autrement dit au cas où l'on a

$$f_j^n z_i=f_i^n z_j \tag{1.3.7.2}$$

quels que soient i,j. Or, on a $D(f_i^n)=D(f_i)$, et comme les $D(f_i)$ forment un recouvrement de X, l'idéal engendré par les f_i^n est A; en d'autres termes, il existe des éléments $g_i\in A$ tels que $\sum_i g_i f_i^n=1$. Considérons alors l'élément $z=\sum_i g_i z_i$ de M; d'après (1.3.7.2), on a $f_i^n z=\sum_j g_j f_i^n z_j=\left(\sum_j g_j f_j^n\right)z_i=z_i$, d'où par définition $\xi_i=z/1$ dans M_{f_i}. On en conclut que s_i est la restriction à $D(f_i)$ de $\theta_1(z)$, ce qui prouve que $s=\theta_1(z)$ et achève la démonstration.

Corollaire (1.3.8) *Soient* M, N *deux* A*-modules; l'homomorphisme canonique* $u\mapsto\tilde{u}$ *de* $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N})$ *est bijectif. En particulier, les relations* $M=0$ *et* $\tilde{M}=0$ *sont équivalentes.*

Considérons en effet l'homomorphisme canonique $v\mapsto\Gamma(v)$ de $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N})$ dans $\mathrm{Hom}_{\Gamma(\tilde{A})}(\Gamma(\tilde{M}),\Gamma(\tilde{N}))$; ce dernier module s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ en vertu du th. (1.3.7). Il reste à vérifier que $u\mapsto\tilde{u}$ et $v\mapsto\Gamma(v)$ sont réciproques l'un de l'autre; or, il est évident que $\Gamma(\tilde{u})=u$ par définition de $\tilde{u}$; et d'autre part, si on pose $u=\Gamma(v)$ pour $v\in\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N})$, l'application $w:\Gamma(D(f),\tilde{M})\to\Gamma(D(f),\tilde{N})$ déduite canoniquement de v est telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ {\scriptstyle\rho_{f,1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho_{f,1}} \\ M_f & \xrightarrow[w]{} & N_f \end{array}$$

soit commutatif; on a donc nécessairement $w=u_f$ pour tout $f\in A$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 2, prop. 3), ce qui montre que $(\Gamma(v))^{\sim}=v$.

Corollaire (1.3.9) (i) *Soit u un homomorphisme d'un* A*-module* M *dans un* A*-module* N; *alors les faisceaux associés à* $\mathrm{Ker}u$, $\mathrm{Im}u$, $\mathrm{Coker}u$, *sont respectivement* $\mathrm{Ker}\tilde{u}$, $\mathrm{Im}\tilde{u}$, $\mathrm{Coker}\tilde{u}$. *En particulier, pour que $\tilde{u}$ soit injectif* (resp. *surjectif, bijectif*), *il faut et il suffit que u le soit.*

(ii) *Si* M *est une limite inductive* (*filtrante ou non*, en particulier une *somme directe*) *d'une famille de* A*-modules* (M_λ), $\tilde{M}$ *est limite inductive de la famille* $(\tilde{M}_\lambda)$, *à un isomorphisme canonique près.*

(i) Il suffit d'appliquer le fait que $\tilde{M}$ est un foncteur exact en M (1.3.5) aux deux suites exactes de A-modules

$$0 \to \mathrm{Ker}u \to M \to \mathrm{Im}u \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Im}u \to N \to \mathrm{Coker}u \to 0.$$

La seconde assertion résulte alors du th. (1.3.7).

(ii) Soit $(M_\lambda, g_{\mu\lambda})$ un système inductif de A-modules, de limite inductive M, et soit g_λ l'homomorphisme canonique $M_\lambda \to M$. Comme on a $\tilde{g}_{\nu\mu} \circ \tilde{g}_{\mu\lambda} = \tilde{g}_{\nu\lambda}$ et $\tilde{g}_\lambda = \tilde{g}_\mu \circ \tilde{g}_{\mu\lambda}$ pour $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$, $(\tilde{M}_\lambda, \tilde{g}_{\mu\lambda})$ est un système inductif de faisceaux sur X, et si on désigne par h_λ l'homomorphisme canonique $\tilde{M} \to \varinjlim \tilde{M}_\lambda$, il y a un homomorphisme unique $v : \varinjlim \tilde{M}_\lambda \to \tilde{M}$ tel que $v \circ h_\lambda = \tilde{g}_\lambda$. Pour voir que v est bijectif, il suffit de vérifier que, pour tout $x \in X$, v_x est une bijection de $(\varinjlim \tilde{M}_\lambda)_x$ sur $\tilde{M}_x$; mais $\tilde{M}_x = M_x$ et

$$(\varinjlim \tilde{M}_\lambda)_x = \varinjlim (\tilde{M}_\lambda)_x = \varinjlim (M_\lambda)_x = M_x$$

(Bourbaki, *loc. cit.*, § 2, n° 3, prop. 9). D'autre part, il résulte des définitions que $(\tilde{g}_\lambda)_x$ et $(h_\lambda)_x$ sont tous deux égaux à l'application canonique de $(M_\lambda)_x$ dans M_x; comme $(\tilde{g}_\lambda)_x = v_x \circ (h_\lambda)_x$, v_x est l'identité.

Enfin, si M est somme directe de deux A-modules N, P, il est immédiat que $\tilde{M} = \tilde{N} \oplus \tilde{P}$; toute somme directe étant limite inductive de sommes directes finies, les assertions de (ii) sont démontrées.

On notera que (1.3.8) prouve que les faisceaux isomorphes aux faisceaux associés aux A-modules forment une *catégorie abélienne* (T, 1, 1.4).

(1.3.10) Si N est un sous-module d'un A-module M, l'injection canonique $j : N \to M$ donne par (1.3.9) un monomorphisme $\tilde{N} \to \tilde{M}$, qui permet d'identifier canoniquement $\tilde{N}$ à un *sous-*$\tilde{A}$*-Module* de $\tilde{M}$; nous supposerons toujours faite cette identification. Si N et P sont deux sous-modules de M, on a alors

$$(N+P)^{\sim} = \tilde{N} + \tilde{P}, \tag{1.3.10.1}$$

$$(N \cap P)^{\sim} = \tilde{N} \cap \tilde{P} \tag{1.3.10.2}$$

car $N+P$ et $N \cap P$ sont respectivement l'image de l'homomorphisme canonique $N \oplus P \to M$, et le noyau de l'homomorphisme canonique $M \to (M/N) \oplus (M/P)$ et il suffit d'appliquer (1.3.9).

On conclut de (1.3.10.1) et (1.3.10.2) que si $\tilde{N} = \tilde{P}$, on a $N = P$.

Corollaire (1.3.11) *Dans la catégorie des faisceaux isomorphes aux faisceaux associés aux* A*-modules, le foncteur* Γ *est exact.*

En effet, soit $\tilde{M} \xrightarrow{\tilde{u}} \tilde{N} \xrightarrow{\tilde{v}} \tilde{P}$ une suite exacte correspondant à deux homomorphismes $u: M \to N$, $v: N \to P$ de A-modules. Si $Q = \operatorname{Im} u$ et $R = \operatorname{Ker} v$, on a $\tilde{Q} = \operatorname{Im} \tilde{u} = \operatorname{Ker} \tilde{v} = \tilde{R}$ (cor. (1.3.9)), donc $Q = R$.

Corollaire (1.3.12) *Soient* M, N *deux* A*-modules.*

(i) *Le faisceau associé à* $M \otimes_A N$ *s'identifie canoniquement à* $\tilde{M} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N}$.

(ii) *Si de plus* M *admet une présentation finie, le faisceau associé à* $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ *s'identifie canoniquement à* $\mathscr{H}om_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$.

(iii) *Si* M *admet une présentation finie, et si* $\mathfrak{J}$ *est son annulateur, l'annulateur de* $\tilde{M}$ *est l'Idéal* $\tilde{\mathfrak{J}}$ *de* $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$.

(i) Le faisceau $\mathscr{F} = \tilde{M} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N}$ est associé au préfaisceau

$$U \mapsto \mathscr{F}(U) = \Gamma(U, \tilde{M}) \otimes_{\Gamma(U, \tilde{A})} \Gamma(U, \tilde{N})$$

U parcourant la base d'ouverts de X formée des $D(f)$, où $f \in A$. Or, $\mathscr{F}(D(f))$ s'identifie canoniquement à $M_f \otimes_{A_f} N_f$ en vertu de (1.3.7) et (1.3.6). On sait par ailleurs que le A_f-module $M_f \otimes_{A_f} N_f$ est canoniquement isomorphe à $(M \otimes_A N)_f$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 7, prop. 18), qui lui-même est canoniquement isomorphe à $\Gamma(D(f), (M \otimes_A N)^{\sim})$ (1.3.7 et 1.3.6). En outre, on vérifie aussitôt que les isomorphismes canoniques

$$\mathscr{F}(D(f)) \simeq \Gamma(D(f), (M \otimes_A N)^{\sim})$$

ainsi obtenus vérifient les conditions de compatibilité avec les opérateurs de restriction, donc définissent un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\tilde{M} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N} \simeq (M \otimes_A N)^{\sim}.$$

(ii) Le faisceau $\mathscr{G} = \mathscr{H}om_A(\tilde{M}, \tilde{N})$ est associé au préfaisceau

$$U \mapsto \mathscr{G}(U) = \operatorname{Hom}_{\tilde{A}|U}(\tilde{M}|U, \tilde{N}|U)$$

U parcourant la base de X formée des $D(f)$. Or, $\mathscr{G}(D(f))$ s'identifie canoniquement à $\operatorname{Hom}_{A_f}(M_f, N_f)$ (1.3.6 et 1.3.8), qui lui-même, en vertu de l'hypothèse sur M, s'identifie canoniquement à $(\operatorname{Hom}_A(M, N))_f$ (Bourbaki, *loc. cit.*, prop. 19). Finalement, $(\operatorname{Hom}_A(M, N))_f$ s'identifie canoniquement à $\Gamma(D(f), (\operatorname{Hom}_A(M, N))^{\sim})$ (1.3.6 et 1.3.7), et les isomorphismes canoniques $\mathscr{G}(D(f)) \simeq \Gamma(D(f), (\operatorname{Hom}_A(M, N))^{\sim})$ ainsi

obtenus sont compatibles avec les opérateurs de restriction; ils définissent donc un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N}) \simeq (\mathrm{Hom}_A(M,N))\tilde{}.$$

(iii) L'annulateur $\mathfrak{J}$ de M est le noyau de l'homomorphisme canonique $w: A \to \mathrm{Hom}_A(M,M)$ qui à tout $s \in A$ fait correspondre la multiplication par s dans M. En vertu de (ii) et de (1.3.9), $\tilde{\mathfrak{J}}$ est le noyau de l'homomorphisme $\tilde{w}: \tilde{A} \to \mathscr{H}om_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{M})$, donc l'annulateur de $\tilde{M}$ (**0**, 5.3.10).

(1.3.13) Soit maintenant B une A-algèbre (commutative); cela peut s'interpréter en disant que B est un A-module et qu'on s'est donné un élément $e \in B$ et un A-homomorphisme $\varphi: B \otimes_A B \to B$, de sorte que: 1° Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B \otimes_A B & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & B \otimes_A B \\ {\scriptstyle 1 \otimes \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ B \otimes_A B & \xrightarrow[\varphi]{} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{\sigma} & B \otimes_A B \\ & {\scriptstyle \varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varphi} & \\ & B & \end{array}$$

(σ symétrie canonique) soient commutatifs; 2° $\varphi(e \otimes x) = \varphi(x \otimes e) = x$. En vertu de (1.3.12), l'homomorphisme $\tilde{\varphi}: \tilde{B} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B} \to \tilde{B}$ de $\tilde{A}$-Modules vérifie les conditions analogues, donc définit sur $\tilde{B}$ une structure de $\tilde{A}$-*Algèbre*. De la même manière, la donnée d'un B-module N revient à la donnée d'un A-module N et d'un A-homomorphisme $\psi: B \otimes_A N \to N$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B \otimes_A N & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & B \otimes_A N \\ {\scriptstyle 1 \otimes \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ B \otimes_A N & \xrightarrow[\psi]{} & N \end{array}$$

soit commutatif et $\psi(e \otimes n) = n$; l'homomorphisme $\tilde{\psi}: \tilde{B} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N} \to \tilde{N}$ vérifiera la condition analogue, et définit donc sur $\tilde{N}$ une structure de $\tilde{B}$-*Module*.

De la même façon, on voit que si $u: B \to B'$ (resp. $v: N \to N'$) est un homomorphisme de A-algèbres (resp. de B-modules), $\tilde{u}$ (resp. $\tilde{v}$) est un homomorphisme de $\tilde{A}$-Algèbres (resp. de $\tilde{B}$-Modules), $\mathrm{Ker}\,\tilde{u}$ un $\tilde{B}$-Idéal (resp. $\mathrm{Ker}\,\tilde{v}$, $\mathrm{Coker}\,\tilde{v}$ et $\mathrm{Im}\,\tilde{v}$ des $\tilde{B}$-Modules).

Si M, N sont deux B-modules, le $\tilde{B}$-Module $\tilde{M} \otimes_{\tilde{B}} \tilde{N}$ s'identifie canoniquement à $(M \otimes_B N)\tilde{}$; de même $\mathscr{H}om_{\tilde{B}}(\tilde{M},\tilde{N})$ s'identifie canoniquement à $(\mathrm{Hom}_B(M,N))\tilde{}$ lorsque M admet une présentation finie; les démonstrations sont les mêmes que dans (1.3.12).

Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de B, N un B-module, on a $(\mathfrak{J}N)^{\sim} = \tilde{\mathfrak{J}} \cdot \tilde{N}$.

Enfin, si B est une A-algèbre *graduée* par des sous-A-modules B_n ($n \in \mathbf{Z}$), la $\tilde{A}$-Algèbre $\tilde{B}$, somme directe des $\tilde{A}$-Modules $\tilde{B}_n$ (1.3.9) est graduée par ces sous-$\tilde{A}$-Modules, l'axiome de la graduation exprimant que l'image de l'homomorphisme $B_m \otimes B_n \to B$ est contenu dans B_{m+n}. De même, si M est un B-module gradué par des sous-modules M_n, $\tilde{M}$ est un $\tilde{B}$-Module gradué par les $\tilde{M}_n$.

(1.3.14) Si B est une A-algèbre, M un sous-module de B, la sous-$\tilde{A}$-Algèbre de $\tilde{B}$ engendrée par $\tilde{M}$ (**0**, 4.1.3) est la sous-$\tilde{A}$-Algèbre $\tilde{C}$, en désignant par C la sous-algèbre de B engendrée par M. En effet, C est la somme des sous-modules de B images des homomorphismes $\otimes^n M \to B$ ($n \geqslant 0$), et il suffit d'appliquer (1.3.9) et (1.3.12).

Remarque **(1.3.15)** Le résultat général (**0**, 4.1.11) sur la correspondance entre parties ouvertes et fermées d'un espace localement annelé X et idempotents de l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ redonne en particulier, pour un anneau (commutatif) quelconque A, la correspondance entre idempotents de A et ensembles ouverts et fermés de Spec(A) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, prop. 15).

Pour tout anneau A, soit Idem(A) l'ensemble des idempotents de A; il est clair que tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ donne par restriction une application canonique Idem(A) → Idem(B). Si en particulier $B = A/\mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est un *nilidéal* de A, l'application Idem(A) → Idem(A/$\mathfrak{J}$) correspondant à l'homomorphisme canonique $\varphi : A \to A/\mathfrak{J}$ est *bijective:* cela résulte de ce que ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un *homéomorphisme*, $\mathfrak{J}$ étant contenu dans tous les idéaux premiers de A (1.2.5).

Ce résultat entraîne le suivant:

(1.3.15.1) *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A *tel que* A *soit séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique. Alors l'application* Idem(A) → Idem(A/$\mathfrak{J}$) *correspondant à l'homomorphisme canonique* A → A/$\mathfrak{J}$ *est bijective.*

En effet, on a $A = \varprojlim A/\mathfrak{J}^{n+1}$, et l'application canonique Idem(A) → Idem(A/$\mathfrak{J}$) est limite projective du système projectif d'applications Idem(A/$\mathfrak{J}^n$) → Idem(A/$\mathfrak{J}$), qui sont bijectives d'après ce qui précède; d'où la conclusion.

(1.3.16) *Exemple de spectre.* Soient K un corps, X un espace *compact totalement discontinu*; si, pour tout ouvert U de X, on note $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des applications *localement constantes* de U dans K, il est clair que $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ est un *faisceau d'anneaux* $\mathcal{O}_X$ sur X, dont la fibre en chaque point est isomorphe au corps K. Nous allons voir que l'espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe au spectre premier $(\mathrm{Spec}(A), \tilde{A})$, où $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est l'anneau des applications localement constantes de X dans K.

En effet, la proposition est évidente lorsque X est un espace *fini* (donc discret), A étant alors isomorphe à un anneau produit K^n. Dans le cas général, considérons l'ensemble L des partitions $\lambda = (U_i)$ de X formées d'un nombre fini d'ensembles à la fois ouverts et fermés, et notons X_λ l'espace quotient de X obtenu en identifiant tous les points de chacun des U_i, de sorte que X_λ est un espace fini discret. L'ensemble L est ordonné filtrant croissant pour la relation «λ est moins fine que μ» entre λ et μ, et les espaces X_λ forment un *système projectif* d'espaces finis pour les applications canoniques (X_λ étant un espace quotient de X_μ pour $\lambda \leqslant \mu$). On

montre alors aisément que X est homéomorphe canoniquement à l'espace compact $\varprojlim X_\lambda$ (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. II, 4e éd., § 4, exerc. 22). D'autre part, si A_λ désigne l'anneau des applications de X dans K qui sont *constantes* dans chacun des ensembles U_i de la partition λ, $(X_\lambda, \mathscr{O}_{X_\lambda})$ s'identifie à $(\mathrm{Spec}(A_\lambda), \tilde{A}_\lambda)$. Or A_λ est un sous-anneau de A_μ pour $\lambda \leqslant \mu$, et il est immédiat que (A_λ) est un système inductif d'anneaux dont la limite inductive s'identifie canoniquement à A. Notre assertion résulte alors des propriétés générales des limites projectives de schémas (**IV***, 8.2.10 et 8.2.12).

On observera que tous les points de X sont fermés, donc tous les idéaux premiers de A sont maximaux, et tous les corps résiduels $\kappa(x)$ sont isomorphes au corps K.

1.4. Faisceaux quasi-cohérents sur un spectre premier

Théorème (1.4.1) *Soient* A *un anneau,* $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$-*Module. Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Il existe un* A-*module* M *tel que* $\mathscr{F}$ *soit isomorphe à* $\tilde{M}$.

b) *Le faisceau* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_X$-*Module quasi-cohérent* (**0**, 5.1.3).

c) *Les deux propriétés suivantes ont lieu:*

c1) *Pour tout* $f \in A$ *et toute section* $s \in \Gamma(D(f), \mathscr{F})$, *il existe un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* $f^n s$ *se prolonge en une section de* $\mathscr{F}$ *sur* X.

c2) *Pour tout* $f \in A$ *et toute section* $t \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ *telle que la restriction de* t *à* $D(f)$ *soit* 0, *il existe un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* $f^n t = 0$.

(Dans l'écriture des conditions c1) et c2), on a tacitement identifié A et $\Gamma(\tilde{A})$ en vertu de (1.3.7)).

Comme tout A-module est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $A^{(I)} \to A^{(J)}$, (1.3.9) montre que tout faisceau associé à un A-module est quasi-cohérent, autrement dit a) entraîne b).

Pour prouver que b) entraîne c1) et c2), supposons d'abord que $\mathscr{F} = \tilde{M}$, où M est un A-module. Alors $\Gamma(D(f), \tilde{M})$ et M_f s'identifient canoniquement (1.3.6 et 1.3.7), donc une section $s \in \Gamma(D(f), \tilde{M})$ s'identifie à un élément de la forme z/f^n, où $z \in M$; la section $f^n s$ s'identifie à l'élément $z/1$ de M_f et est par suite restriction à $D(f)$ de la section de $\tilde{M}$ sur X identifiée à l'élément $z \in M$; d'où c1) dans ce cas. De même, $t \in \Gamma(X, \tilde{M})$ est identifié à un élément $z' \in M$, la restriction de t à $D(f)$ est identifiée à l'image $z'/1$ de z' dans M_f, et dire que cette image est nulle signifie qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $f^n z' = 0$ dans M, ou, ce qui revient au même, $f^n t = 0$.

Si maintenant $\mathscr{F}$ est quasi-cohérent, il y a par définition, puisque X est quasi-compact, un nombre fini d'éléments $g_i \in A$ tels que X soit réunion des $D(g_i)$ et que $\mathscr{F}|D(g_i)$ soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\tilde{A}_{g_i}^{(I)} \to \tilde{A}_{g_i}^{(J)}$, donc au faisceau associé au A_{g_i}-module N_i, conoyau de l'homomorphisme correspondant $A_{g_i}^{(I)} \to A_{g_i}^{(J)}$ (1.3.8 et 1.3.9). D'après ce qui précède, $\mathscr{F}|D(g_i)$ vérifie les conditions c1) et c2). Pour achever de prouver que a) entraîne c1) et c2), notons en premier lieu que

les faisceaux $\mathscr{F}|(\mathrm{D}(g_i)\cap\mathrm{D}(g_l))=\mathscr{F}|\mathrm{D}(g_ig_j)$ vérifient aussi c1) et c2). Montrons d'abord que $\mathscr{F}$ vérifie c2): comme $\mathrm{D}(f)\cap\mathrm{D}(g_l)=\mathrm{D}(fg_l)$, il existe pour chaque i un entier n_i tel que la restriction de $(fg_l)^{n_i}t$ à $\mathrm{D}(g_l)$ soit nulle; comme l'image de g_i dans A_{g_i} est inversible, la restriction de $f^{n_i}t$ à $\mathrm{D}(g_i)$ est aussi nulle; prenant pour n le plus grand des n_i, on a c2). Pour prouver c1) pour $\mathscr{F}$, appliquons c1) au faisceau $\mathscr{F}|\mathrm{D}(g_l)$: il existe un entier $n_i\geqslant 0$ et une section s_i' de $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{D}(g_i)$ prolongeant la restriction de $(fg_i)^{n_i}s$ à $\mathrm{D}(fg_i)$; comme l'image de g_i dans A_{g_i} est inversible, il y a une section s_i de $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{D}(g_i)$ telle que $s_i'=g_i^{n_i}s_i$, et s_i prolonge la restriction de $f^{n_i}s$ à $\mathrm{D}(fg_i)$; on peut en outre supposer tous les n_i égaux à un même entier n. Par construction, la restriction de s_i-s_j à $\mathrm{D}(f)\cap\mathrm{D}(g_i)\cap\mathrm{D}(g_j)=\mathrm{D}(fg_ig_j)$ est nulle; d'après c2) appliqué au faisceau $\mathscr{F}|\mathrm{D}(g_ig_j)$, il existe un entier $m_{ij}\geqslant 0$ tel que la restriction à $\mathrm{D}(g_ig_j)$ de $(fg_ig_j)^{m_{ij}}(s_i-s_j)$ soit nulle; comme l'image de g_ig_j dans $\mathrm{A}_{g_ig_j}$ est inversible, la restriction de $f^{m_{ij}}(s_i-s_j)$ à $\mathrm{D}(g_ig_j)$ est nulle. On peut alors supposer tous les m_{ij} égaux à un même entier m, et il existe donc une section $s'\in\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{F})$ prolongeant les $f^m s_i$; cette section prolonge par suite $f^{m+n}s$, d'où c1).

Reste à prouver que c1) et c2) entraînent a).

Considérons le A-module $\mathrm{M}=\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{F})$ et définissons un homomorphisme de $\tilde{\mathrm{A}}$-Modules $u:\tilde{\mathrm{M}}\to\mathscr{F}$. Comme les $\mathrm{D}(f)$ forment une base de la topologie de X, il suffit, pour chaque $f\in\mathrm{A}$, de définir un homomorphisme $u_f:\mathrm{M}_f\to\Gamma(\mathrm{D}(f),\mathscr{F})$ avec les conditions de compatibilité usuelles (**0**, 3.2.5). Comme l'image canonique de f dans A_f est inversible, l'homomorphisme de restriction $\mathrm{M}=\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{F})\to\Gamma(\mathrm{D}(f),\mathscr{F})$ se factorise d'une seule manière en $\mathrm{M}\to\mathrm{M}_f\xrightarrow{u_f}\Gamma(\mathrm{D}(f),\mathscr{F})$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 2, prop. 3), et la vérification des conditions de compatibilité lorsque $\mathrm{D}(g)\subset\mathrm{D}(f)$ résulte de l'unicité de u_f.

Cela étant, montrons que la condition c1) (resp. c2)) entraîne que chacun des u_f est surjectif (resp. injectif), ce qui prouvera que u est *bijectif* et par suite que $\mathscr{F}$ est isomorphe à $\tilde{\mathrm{M}}$. Or, si $s\in\Gamma(\mathrm{D}(f),\mathscr{F})$, il existe, d'après c1), un entier $n\geqslant 0$ tel que $f^n s$ se prolonge en une section $z\in\mathrm{M}$; on a alors $u_f(z/f^n)=s$, donc u_f est surjectif. De même, si $z\in\mathrm{M}$ est tel que $u_f(z/1)=0$, cela signifie que la restriction à $\mathrm{D}(f)$ de la section z est nulle; d'après c2), il existe un entier $n\geqslant 0$ tel que $f^n z=0$, d'où $z/1=0$ dans M_f, et u_f est donc injectif. CQFD.

Corollaire (1.4.2) *Les foncteurs* $\mathrm{M}\mapsto\tilde{\mathrm{M}}$ *de la catégorie des* A*-modules dans celle des* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$*-Modules quasi-cohérents et* $\mathscr{F}\mapsto\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{F})$ *de la catégorie des* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$*-Modules quasi-cohérents dans celle des* A*-modules sont quasi-inverses l'un de l'autre et définissent donc une équivalence de ces catégories.*

Cela résulte de (1.4.1) et (1.3.8).

Corollaire (1.4.3) *Pour que* $\tilde{M}$ *soit un* $\mathcal{O}_X$*-Module de type fini* (**0**, 5.2.1) (resp. *de présentation finie* (**0**, 5.2.5)) *il faut et il suffit que* M *soit un* A*-module de type fini* (resp. *de présentation finie*).

En vertu de l'exactitude du foncteur $M \mapsto \tilde{M}$ (1.3.5), il est immédiat que si M est de type fini (resp. de présentation finie), $\tilde{M}$ est de type fini (resp. de présentation finie). Inversement, supposons que $\tilde{M}$ soit de type fini (resp. de présentation finie); puisque X est quasi-compact, il existe un nombre fini d'éléments $f_i \in A$ tels que les $D(f_i)$ recouvrent X et que pour chaque i, M_{f_i} soit un A_{f_i}-module de type fini (resp. de présentation finie); mais on sait alors que M est de type fini (resp. de présentation finie) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 1, cor. de la prop. 3).

Corollaire (1.4.4) *Pour qu'un* A*-module* M *soit tel que le* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\tilde{M}$ *soit localement libre de rang fini, il faut et il suffit que* M *soit un* A*-module projectif de type fini.*

Compte tenu de ce que X est quasi-compact, cela résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, th. 1.

(1.4.4.1) On notera par contre qu'il peut exister des A-modules M qui sont *projectifs* (non de type fini) mais tels que $\tilde{M}$ *ne soit pas localement libre*; l'exemple qui suit est dû à D. Lazard. On remarque d'abord que si $\mathfrak{J}$ est un *idéal* de A tel que $\tilde{\mathfrak{J}}$ soit un $\tilde{A}$-Module *localement libre*, alors $\tilde{\mathfrak{J}}$ est nécessairement *de rang* 1, et par suite $\mathfrak{J}$ est *de type fini* (1.4.4). En effet, en se restreignant à un ouvert affine assez petit, tout revient à voir que si $\mathfrak{J}$ est un A-module *libre*, il est nécessairement *monogène*: or, si $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une base de $\mathfrak{J}$, pour tout $\lambda \in L$, l'application $x \mapsto x a_\lambda$ de A sur $A a_\lambda$ est par hypothèse bijective, et en particulier l'annulateur de a_λ est réduit à 0; mais pour deux indices distincts λ, μ, on a $A a_\lambda \cap A a_\mu = 0$, donc $a_\lambda a_\mu = 0$, ce qui prouve que L ne peut avoir qu'un seul élément. Cela étant, considérons un corps K et un ensemble infini I, et prenons pour anneau le produit $A = K^I$; chacun des facteurs K_i pour $i \in I$ (isomorphe à K) est identifié à un idéal de A qui est un A-module projectif, puisque facteur direct de A (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2, prop. 4); donc l'idéal $\mathfrak{J} = K^{(I)}$, somme directe de A-modules projectifs, est *projectif*, et puisque I est infini, il est immédiat que $\mathfrak{J}$ ne peut être un A-module de type fini; on en conclut que $\tilde{\mathfrak{J}}$ *n'est pas localement libre.*

Nous ignorons s'il existe des A-modules M non projectifs et tels que $\tilde{M}$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre (non de type fini).

Corollaire (1.4.5) *Toute* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre quasi-cohérente sur* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est isomorphe à une* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre de la forme* $\tilde{B}$, *où* B *est une* A*-algèbre*; *tout* $\tilde{B}$*-Module quasi-cohérent est isomorphe à un* $\tilde{B}$*-Module de la forme* $\tilde{N}$, *où* N *est un* B*-module.*

En effet, une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, donc de la forme $\tilde{B}$, où B est un A-module (1.4.1); le fait que B soit une A-algèbre résulte de la caractérisation de la structure de $\mathcal{O}_X$-Algèbre à l'aide d'un homomorphisme $\tilde{B} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B} \to \tilde{B}$ de $\tilde{A}$-Modules, ainsi que de (1.3.12). Si $\mathscr{G}$ est un $\tilde{B}$-Module quasi-cohérent, il suffit de montrer

que $\mathscr{G}$ est aussi un $\tilde{A}$-Module quasi-cohérent pour conclure ensuite de la même façon; comme la question est locale sur X, on peut, en se restreignant à un ouvert de X de la forme $D(f)$, supposer que $\mathscr{G}$ est le conoyau d'un homomorphisme $\tilde{B}^{(I)} \to \tilde{B}^{(J)}$ de $\tilde{B}$-Modules (et *a fortiori* de $\tilde{A}$-Modules); la proposition résulte alors de (1.3.8) et (1.3.9).

Proposition (1.4.6) *Si* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *et si* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent, on a* $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$.

Cette proposition sera démontrée au chap. III, § 1 comme conséquence du théorème plus général que $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. Pour en donner une démonstration indépendante, observons que $H^1(X, \mathscr{F})$ s'identifie au module $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_X}(X; \mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ des classes d'extensions du $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{O}_X$ par le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ (T, 4.2.3); tout revient donc à prouver qu'une telle extension $\mathscr{G}$ est triviale. Or, pour tout $x \in X$, il y a un voisinage V de x dans X tel que $\mathscr{G}|V$ soit isomorphe à $\mathscr{F}|V \oplus \mathscr{O}_X|V$ (**0**, 5.4.7); on en conclut que $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module *quasi-cohérent.* On a donc (1.4.1) $\mathscr{F} = \tilde{M}$, $\mathscr{G} = \tilde{N}$, où M et N sont des A-modules, et par hypothèse N est une extension du A-module A par le A-module M (1.4.2). Comme cette extension est nécessairement triviale, cela démontre la proposition.

Corollaire (1.4.7) *Soit* $X = \mathrm{Spec}(A)$, *et soit* $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ *une suite exacte de* $\mathscr{O}_X$*-Modules; si deux d'entre eux sont quasi-cohérents, il en est de même du troisième.*

Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$) sont quasi-cohérents, il en est de même de $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{F}$) en vertu de (1.4.2) et (1.3.9). Supposons $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$ quasi-cohérents et montrons qu'il en est de même de $\mathscr{G}$. La suite exacte de cohomologie donne alors la suite exacte

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{G}) \to \Gamma(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \mathscr{F}) = 0$$

en vertu de (1.4.6). On a par suite un diagramme commutatif à lignes exactes (1.4.2)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Gamma(X, \mathscr{F})^{\sim} & \to & \Gamma(X, \mathscr{G})^{\sim} & \to & \Gamma(X, \mathscr{H})^{\sim} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{H} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes définis dans la preuve de (1.4.1), et qui peuvent être définis pour des $\mathscr{O}_X$-Modules *quelconques* (quasi-cohérents ou non). Par hypothèse, u et w sont bijectifs, donc il en est de même de v par le lemme des cinq.

1.5. Faisceaux cohérents sur un spectre premier

Théorème (1.5.1) *Soient* A *un anneau* noethérien, $X = \mathrm{Spec}(A)$ *son spectre premier,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $\mathscr{F}$ *est cohérent.*

b) $\mathscr{F}$ *est de type fini et quasi-cohérent.*

c) *Il existe un* A*-module* M *de type fini tel que* $\mathscr{F}$ *soit isomorphe à* $\tilde{M}$.

a) implique trivialement b), et b) implique c) par (1.4.1) et (1.4.3). Enfin, c) entraîne déjà que $\mathscr{F}$ est de type fini (1.4.3); en vertu de (1.4.2) et (1.4.3), tout revient à voir que le noyau d'un homomorphisme $A^n \to M$, où M est un A-module quelconque, est un A-module de type fini; mais comme ce noyau est un sous-module du A-module de type fini A^n, cela résulte de ce que A est noethérien.

Corollaire (1.5.2) *Si* A *est un anneau noethérien,* $\mathscr{O}_X = \tilde{A}$ *est un faisceau cohérent d'anneaux.*

Corollaire (1.5.3) *Si* A *est noethérien, tout* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *est limite inductive des sous-*$\mathscr{O}_X$*-Modules cohérents de* $\mathscr{F}$.

En effet, tout A-module est limite inductive de ses sous-A-modules de type fini.

1.6. Schémas affines et morphismes d'espaces localement annelés dans des schémas affines

Définition (1.6.1) *On dit qu'un espace localement annelé* $(X, \mathscr{O}_X)$ (**0**, 4.1.9) *est un* schéma affine *s'il est isomorphe à un espace localement annelé de la forme* $(\mathrm{Spec}(A), \tilde{A})$, *où* A *est un anneau*; *on dit alors que* $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, *qui s'identifie canoniquement à l'anneau* A (1.3.7), *est l'anneau du schéma affine* $(X, \mathscr{O}_X)$, *et on le note* $A(X)$ *quand aucune confusion n'en résulte.*

(1.6.2) Dans ce qui suit, si $(X, \mathscr{O}_X)$ et $(Y, \mathscr{O}_Y)$ sont deux *espaces annelés,* nous noterons $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes d'*espaces annelés* (**0**, 4.1.1) de X dans Y; si de plus X et Y sont des espaces *localement annelés* (**0**, 4.1.9), on notera $\mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}(X, Y)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(X, Y)$ formé des *morphismes d'espaces localement annelés* (**0**, 4.1.12).

Pour deux espaces annelés X, Y, on notera $\mathrm{Hom}(\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y), \Gamma(X, \mathscr{O}_X))$ l'ensemble des homomorphismes d'*anneaux* $\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y) \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Pour tout morphisme d'espaces annelés $(\psi, \theta) : X \to Y$, on déduit canoniquement de ce morphisme un homomorphisme d'anneaux

$\Gamma(\theta): \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y) \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ associant à toute section s de $\mathscr{O}_Y$ au-dessus de Y la section $\theta(s)$ de $\psi_*(\mathscr{O}_X)$ au-dessus de Y, qui par définition est une section de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de X (**0**, 3.4.1). On a ainsi défini une application canonique, évidemment fonctorielle

$$\rho: \mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y), \Gamma(X, \mathscr{O}_X)). \tag{1.6.2.1}$$

Proposition (1.6.3) *Soient* $(S, \mathscr{O}_S)$ *un schéma affine,* $(X, \mathscr{O}_X)$ *un espace localement annelé. Alors la restriction de l'application* (1.6.2.1) *à* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}(X, S)$:

$$\rho_{\mathrm{loc}}: \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}(X, S) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(S, \mathscr{O}_S), \Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \tag{1.6.3.1}$$

est bijective.

Posons $A = \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$, et considérons un homomorphisme d'anneaux $\varphi: A \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Pour tout $x \in X$, l'ensemble des $f \in A$ tels que $\varphi(f)(x) = 0$ (**0**, 4.1.9) est un *idéal premier* de A, puisque $\mathscr{O}_x/\mathfrak{m}_x = \kappa(x)$ est un corps; c'est donc un élément de $S = \mathrm{Spec}(A)$, que nous noterons encore ${}^a\varphi(x)$. En outre, pour tout $f \in A$, on a par définition (**0**, 4.1.13) ${}^a\varphi^{-1}(D(f)) = X_{\varphi(f)}$, ce qui prouve que ${}^a\varphi$ est une application *continue* de X dans S. Définissons ensuite un homomorphisme $\tilde{\varphi}: \mathscr{O}_S \to {}^a\varphi_*(\mathscr{O}_X)$ de $\mathscr{O}_S$-*Modules:* pour tout $f \in A$, on a $\Gamma(D(f), \mathscr{O}_S) = A_f$ (1.3.6); pour tout $s \in A$, on fera correspondre à $s/f \in A_f$ l'élément

$$(\varphi(s)|X_{\varphi(f)})\,(\varphi(f)|X_{\varphi(f)})^{-1}$$

de $\Gamma(X_{\varphi(f)}, \mathscr{O}_X) = \Gamma(D(f), {}^a\varphi_*(\mathscr{O}_X))$, et on vérifie aussitôt, par passage de $D(f)$ à $D(fg)$ pour tout $g \in A$, que cela définit un homomorphisme de $\mathscr{O}_S$-Modules; donc on a obtenu un morphisme $({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$ d'espaces annelés. En outre, avec les mêmes notations, et en posant $y = {}^a\varphi(x)$, on voit aussitôt (**0**, 3.7.1) que l'on a $\tilde{\varphi}_x^\#(s_y/f_y) = (\varphi(s)_x)\,(\varphi(f)_x)^{-1}$; comme la relation $s_y \in \mathfrak{m}_y$ est par définition équivalente à $\varphi(s)_x \in \mathfrak{m}_x$, on voit que $\tilde{\varphi}_x^\#$ est un homomorphisme *local* $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$, autrement dit $({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$ est un morphisme d'espaces *localement annelés.* On a ainsi défini une application canonique

$$\sigma: \mathrm{Hom}(\Gamma(S, \mathscr{O}_S), \Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}(X, S). \tag{1.6.3.2}$$

Il reste à prouver que ρ_{loc} et σ sont réciproques l'une de l'autre. Or, la définition donnée ci-dessus de $\tilde{\varphi}$ montre aussitôt que $\Gamma(\tilde{\varphi}) = \varphi$, et par suite $\rho_{\mathrm{loc}} \circ \sigma$ est l'identité. Pour voir que $\sigma \circ \rho_{\mathrm{loc}}$ est l'identité, partons d'un morphisme $(\psi, \theta): X \to S$ d'espaces localement annelés, et posons $\varphi = \Gamma(\theta)$; l'hypothèse que $\theta_x^\#$ est local permet de déduire de cet homomorphisme, par passage aux quotients, un monomorphisme de corps $\theta^x: \kappa(\psi(x)) \to \kappa(x)$ tel que, pour toute section $f \in A = \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$, on ait $\theta^x(f(\psi(x))) = \varphi(f)(x)$; la relation $f(\psi(x)) = 0$ est donc équivalente à $\varphi(f)(x) = 0$, ce qui prouve déjà que ${}^a\varphi = \psi$ en vertu de la

définition de ${}^a\varphi$. D'autre part les définitions entraînent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(X,\mathscr{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\psi(x)} & \xrightarrow[\theta_x^\#]{} & \mathscr{O}_x \end{array}$$

est commutatif, et il en est de même du diagramme analogue où $\theta_x^\#$ est remplacé par $\tilde{\varphi}_x^\#$, d'où $\tilde{\varphi}_x^\# = \theta_x^\#$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 1, prop. 1), ce qui entraîne $\tilde{\varphi} = \theta$.

Corollaire (1.6.4) *Soit* $(Y,\mathscr{O}_Y)$ *un espace localement annelé. Pour que* Y *soit un schéma affine, il faut et il suffit que, pour tout espace localement annelé* $(X,\mathscr{O}_X)$, *l'application*

$$\rho_{loc}\colon \mathrm{Hom}_{loc}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y),\Gamma(X,\mathscr{O}_X))$$

soit bijective.

La proposition (1.6.3) montre que la condition est nécessaire. Inversement, si on la suppose vérifiée et si l'on pose $A = \Gamma(Y,\mathscr{O}_Y)$, il résulte de l'hypothèse et de (1.6.3) que les foncteurs $X \mapsto \mathrm{Hom}_{loc}(X,Y)$ et $X \mapsto \mathrm{Hom}_{loc}(X,\mathrm{Spec}(A))$ de la catégorie des espaces localement annelés dans celle des ensembles, sont *isomorphes*. On sait que cela entraîne l'existence d'un isomorphisme canonique $Y \simeq \mathrm{Spec}(A)$ (**0**, 1.1.7).

(1.6.5) La *catégorie des schémas affines* est définie comme la sous-catégorie *pleine* de celle des espaces localement annelés dont les objets sont les schémas affines.

On a d'une part un foncteur contravariant $A \mapsto (\mathrm{Spec}(A),\tilde{A})$ de la catégorie des anneaux dans celle des schémas affines, qui à chaque homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ associe le morphisme $({}^a\varphi,\tilde{\varphi}) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$; d'autre part, un foncteur contravariant $(X,\mathscr{O}_X) \mapsto \Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ de la catégorie des schémas affines dans celle des anneaux, qui à tout morphisme (ψ,θ) de schémas affines associe l'homomorphisme d'anneaux $\Gamma(\theta)$; il résulte de (1.3.7) et (1.6.3) que ces deux foncteurs sont *quasi-inverses* l'un de l'autre et définissent donc une *équivalence de la catégorie des schémas affines sur la catégorie opposée de celle des anneaux.*

Désormais, lorsqu'on considérera un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$, le morphisme $({}^a\varphi,\tilde{\varphi}) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ de schémas affines qui lui est associé sera aussi noté $\mathrm{Spec}(\varphi)$, et on y réfèrera souvent sans notation spéciale en disant que c'est le morphisme *correspondant à* φ.

Remarque **(1.6.6)** Soient A un anneau, S une partie multiplicative de A, φ l'homomorphisme canonique $A \to S^{-1}A$; on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, cor. de la prop. 13) que ${}^a\varphi$ est un *homéomorphisme* de $Y = \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ sur le sous-espace de $X = \mathrm{Spec}(A)$ formé des x tels que $\mathfrak{j}_x \cap S = \emptyset$.

En outre, pour tout x appartenant à ce sous-espace, donc de la forme ${}^a\varphi(y)$ avec $y \in Y$, l'homomorphisme $\tilde{\varphi}_y^{\#} : \mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{Y,y}$ est *bijectif* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 5, prop. 11, (iii)); autrement dit, quand on identifie Y à un sous-espace de X, $\mathscr{O}_Y$ s'identifie canoniquement au faisceau *induit sur* Y *par* $\mathscr{O}_X$ (**0**, 3.1.4).

1.7. Images directes et images réciproques de faisceaux quasi-cohérents par des morphismes de schémas affines

(1.7.1) Dans ce qui suit, nous désignerons par P un espace réduit à un point, et, pour tout anneau A, par (P, A) l'espace annelé dont le faisceau structural (nécessairement simple) sur P est l'anneau A. Pour tout anneau A, soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ le schéma affine correspondant; désignons par $\pi : S \to P$ l'unique application (nécessairement continue) de S dans P; notons d'autre part que pour tout ouvert U de S, on a une application canonique $\Gamma(P, A) = \Gamma(S, \mathscr{O}_S) \to \Gamma(U, \mathscr{O}_S)$ qui définit donc un π-*morphisme* $\iota : A \to \mathscr{O}_S$ de faisceaux d'anneaux. On a donc défini ainsi canoniquement un *morphisme d'espaces annelés* $i = (\pi, \iota) : (S, \mathscr{O}_S) \to (P, A)$. Pour tout A-module M, nous noterons encore M le $\mathscr{O}_P$-Module M sur l'espace annelé (P, A); il est clair que l'on a $i_*(\tilde{M}) \cong M$ (1.3.7).

Proposition (1.7.2) *Avec les notations de* (1.7.1), *pour tout* A*-module* M, *le* $\mathscr{O}_S$*-homomorphisme canonique fonctoriel* (**0**, 4.4.3.3)

(1.7.2.1) $\sigma_M : i^*(i_*(\tilde{M})) \to \tilde{M}$ (*qui s'écrit aussi* $\mathscr{O}_X \otimes_A M \to \tilde{M}$)

est un isomorphisme.

Comme le foncteur $M \mapsto i_*(\tilde{M})$ est isomorphe au foncteur identique, les deux membres de (1.7.2.1) sont exacts à droite et commutent aux sommes directes ((**0**, 4.3.2) et (1.3.9)); en considérant M comme conoyau d'un homomorphisme $A^{(I)} \to A^{(J)}$, on se ramène à prouver la proposition lorsque $M = A$, mais c'est alors évident (**0**, 4.3.4).

Corollaire (1.7.3) *Soient* $(X, \mathscr{O}_X)$ *un espace annelé,* $u : X \to S = \mathrm{Spec}(A)$ *un morphisme d'espaces annelés. Pour tout* A*-module* M, *on a, avec les notations de* (1.7.1), *un isomorphisme canonique fonctoriel de* $\mathscr{O}_X$*-Modules*

(1.7.3.1) $u^*(\sigma_M^{-1}) : u^*(\tilde{M}) \xrightarrow{\sim} u^*(i^*(M))$.

Corollaire (1.7.4) *Sous les hypothèses de* (1.7.3), *on a, pour tout* A*-module* M *et tout* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$, *un isomorphisme canonique fonctoriel en* M *et* $\mathscr{F}$

$$\text{(1.7.4.1)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{M}, u_*(\mathscr{F})) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathscr{F})).$$

En effet, en vertu de (**0**, 4.4.3) et de (1.7.2), on a un isomorphisme canonique de bifoncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{M}, u_*(\mathscr{F})) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, i_*(u_*(\mathscr{F})))$$

et il est clair que $i_*(u_*(\mathscr{F}))$ n'est autre que $\Gamma(S, u_*(\mathscr{F})) = \Gamma(X, \mathscr{F})$. L'homomorphisme canonique (1.7.4.1) fait correspondre à tout $\mathcal{O}_S$-homomorphisme $h : \tilde{M} \to u_*(\mathscr{F})$ le A-homomorphisme $\Gamma(h) : M \to \Gamma(S, u_*(\mathscr{F})) = \Gamma(X, \mathscr{F})$.

(1.7.5) On a vu (**0**, 4.2.8) qu'on peut considérer les couples $(X, \mathscr{F})$ formés d'un espace localement annelé X et d'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ comme formant une catégorie, un *morphisme* $(X, \mathscr{F}) \to (Y, \mathscr{G})$ de cette catégorie étant un couple (u, h) formé d'un morphisme d'espaces localement annelés $u : X \to Y$ et d'un u-morphisme $h : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ de Modules (**0**, 3.5.1); l'ensemble de ces morphismes (pour $(X, \mathscr{F})$ et $(Y, \mathscr{G})$ fixés) sera noté $\mathrm{Hom}((X, \mathscr{F}), (Y, \mathscr{G}))$; l'application $(u, h) \mapsto (\rho_{loc}(u), \Gamma(h))$ est donc une application canonique

$$\text{(1.7.5.1)} \qquad (\rho_{loc}, \Gamma) : \mathrm{Hom}((X, \mathscr{F}), (Y, \mathscr{G})) \to \mathrm{Hom}((\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(Y, \mathscr{G})), (\Gamma(X, \mathcal{O}_X), \Gamma(X, \mathscr{F})))$$

fonctorielle en $(X, \mathscr{F})$ et $(Y, \mathscr{G})$, le second membre étant l'ensemble des *dihomomorphismes* correspondant aux anneaux et aux modules considérés.

Corollaire (1.7.6) *Soient* Y *un espace localement annelé,* $\mathscr{G}$ *un* $\mathcal{O}_Y$*-Module. Pour que* Y *soit un schéma affine et* $\mathscr{G}$ *un* $\mathcal{O}_Y$*-Module quasi-cohérent, il faut et il suffit que pour tout couple* $(X, \mathscr{F})$ *formé d'un espace localement annelé* X *et d'un* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$, *l'application canonique* (1.7.5.1) *soit bijective.*

Nous laissons au lecteur le soin de développer le raisonnement, calqué sur celui de (1.6.4) et utilisant (1.7.4).

Pour la commodité des références, nous explicitons les résultats de (1.7.3) et (1.7.4) lorsqu'il s'agit d'un morphisme de *schémas affines*:

Corollaire (1.7.7) *Soient* A, B *deux anneaux,* $S = \mathrm{Spec}(A), X = \mathrm{Spec}(B)$, $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux,* $u : X \to S$ *le morphisme de schémas affines correspondant.*

(i) *Pour tout* A*-module* M, *il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de* $\mathcal{O}_X$*-Modules*

$$\text{(1.7.7.1)} \qquad u^*(\tilde{M}) \simeq (M \otimes_A B)^{\sim}$$

qui s'explicite de la façon suivante: pour tout $g \in B$, *l'homomorphisme* (1.7.7.1), *restreint au* B_g*-module* $\Gamma(D(g), u^*(\tilde{M}))$, *est l'homomorphisme canonique* $M \otimes_A B_g \to (M \otimes_A B)_g$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 7, prop. 18).

(ii) *Pour tout* B*-module* N, *il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de* $\mathcal{O}_S$*-Modules*

$$(N_{[\varphi]})^{\sim} \simeq u_*(\tilde{N}) \tag{1.7.7.2}$$

qui, à tout élément de N, *considéré comme section de* $(N_{[\varphi]})^{\sim}$ *au-dessus de* S, *fait correspondre le même élément, considéré comme section de* $\tilde{N}$ *au-dessus de* X.

Corollaire (1.7.8) *Si* X *et* Y *sont des schémas* affines *et* $u: X \to Y$ *un morphisme de schémas affines, le foncteur* $\mathscr{F} \mapsto u_*(\mathscr{F})$ *est un foncteur exact de la catégorie des* $\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents dans la catégorie des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules quasi-cohérents.*

Remarques **(1.7.9)** (i) Si C (resp. D) est une A-algèbre (resp. une B-algèbre), l'isomorphisme canonique $u^*(\tilde{C}) \xrightarrow{\sim} (C \otimes_A B)^{\sim}$ (resp. $(D_{[\varphi]})^{\sim} \xrightarrow{\sim} u_*(\tilde{D})$) est un isomorphisme d'algèbres; si E (resp. F) est un C-module (resp. un D-module), l'isomorphisme canonique $u^*(\tilde{E}) \simeq (E \otimes_A B)^{\sim}$ (resp. $(F_{[\varphi]})^{\sim} \simeq u_*(\tilde{F})$) est un di-isomorphisme de Modules.

(ii) Avec les notations de (1.7.7.1), l'application canonique (**0**, 4.4.3.2) $\rho_{\tilde{M}}: \tilde{M} \to u_*(u^*\tilde{M}))$ n'est autre que l'homomorphisme $\tilde{j}$, où $j: M \to M \otimes_A B$ est l'homomorphisme canonique $z \mapsto z \otimes 1$. L'application canonique (**0**, 4.4.3.3) $\sigma_{\tilde{N}}: u^*(u_*(\tilde{N})) \to \tilde{N}$ est l'homomorphisme $\tilde{p}$, où $p: N_{[\varphi]} \otimes_A B \to N$ est l'homomorphisme canonique qui, à tout produit tensoriel $z \otimes b$ ($z \in N, b \in B$) fait correspondre bz.

On en conclut que si $v: M \to N_{[\varphi]}$ est un A-homomorphisme, on a $\tilde{v}^{\#} = (v \otimes 1_B)^{\sim}$.

(iii) Soit L un second A-module admettant une présentation finie; alors, en vertu de (1.3.12, (ii)) l'homomorphisme canonique (**0**, 4.4.6)

$$u^*(\mathscr{H}om_{\tilde{A}}(\tilde{L}, \tilde{M})) \simeq \mathscr{H}om_{\tilde{B}}(u^*(\tilde{L}), u^*(\tilde{M}))$$

n'est autre que $\tilde{\gamma}$, en désignant par γ l'homomorphisme canonique de B-modules $\mathrm{Hom}_A(L, M) \otimes_A B \to \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A B, M \otimes_A B)$.

(iv) Soient $\mathfrak{J}$ un idéal de A, N un B-module; comme par définition $\tilde{\mathfrak{J}}\tilde{N}$ est l'image de l'homomorphisme canonique $u^*(\tilde{\mathfrak{J}}) \otimes_{\tilde{B}} \tilde{N} \to \tilde{N}$, il résulte de (1.7.7) et (1.3.12, (i)) que $\tilde{\mathfrak{J}}\tilde{N}$ s'identifie canoniquement à $(\mathfrak{J}N)^{\sim}$; en particulier, $u^*(\tilde{\mathfrak{J}})\tilde{B}$ s'identifie à $(\mathfrak{J}B)^{\sim}$, et en tenant compte de l'exactitude à droite du foncteur u^*, la $\tilde{B}$-algèbre $u^*((A/\mathfrak{J})^{\sim})$ s'identifie à $(B/\mathfrak{J}B)^{\sim}$.

Proposition (1.7.10) *Soient* $\varphi: A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux,* $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $f: X \to S$ *le morphisme correspondant à* φ, M *un* B*-module. Pour que le* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\tilde{M}$ *soit f-plat* (**0**, 5.7.1), *il faut et il suffit que* M *soit un* A*-module plat. En particulier, pour que le morphisme f soit plat, il faut et il suffit que* B *soit un* A*-module plat.*

Cela résulte de la caractérisation locale de la platitude d'un module (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 4, prop. 13, 14 et 15) et de la définition des Modules *f*-plats (**0**, 5.7.1).

§ 2. Schémas et morphismes de schémas

2.1. Définition des schémas

(2.1.1) Etant donné un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$, on dit qu'une partie ouverte V de X est un *ouvert affine* si l'espace annelé $(V, \mathcal{O}_X|V)$ est un *schéma affine* (1.6.1).

Définition (2.1.2) *On appelle* schéma[1] *un espace annelé* $(X, \mathcal{O}_X)$ *tel que tout point de* X *admette un voisinage ouvert affine.*

Un schéma est donc un espace *localement annelé.*

Proposition (2.1.3) *Si* $(X, \mathcal{O}_X)$ *est un schéma, les ensembles ouverts affines forment une base de la topologie de* X.

En effet, si V est un voisinage ouvert quelconque de $x \in X$, il existe par hypothèse un voisinage ouvert W de x tel que $(W, \mathcal{O}_X|W)$ soit un schéma affine; désignons par A son anneau. Dans l'espace W, $V \cap W$ est un voisinage ouvert de x; donc il existe $f \in A$ tel que $D(f)$ soit un voisinage ouvert de x contenu dans $V \cap W$ (1.1.2). L'espace annelé $(D(f), \mathcal{O}_X|D(f))$ est alors un schéma affine d'anneau isomorphe à A_f (1.3.6), d'où la proposition.

Proposition (2.1.4) *L'espace sous-jacent d'un schéma est un espace de Kolmogoroff.*

En effet, si x, y sont deux points distincts d'un schéma X, il est évident qu'il existe un voisinage ouvert de l'un de ces points ne contenant pas l'autre si x, y ne sont pas dans un même ouvert affine; et s'ils sont dans un même ouvert affine, cela résulte de (1.1.4). Plus précisément encore:

---

[1] Nous rappelons que le sens de ce mot n'est pas le même que dans la première édition de ce chapitre (cf. Avant-propos).

Proposition (2.1.5) *Si* $(X, \mathcal{O}_X)$ *est un schéma, l'espace* X *est* sobre, *autrement dit* (**0**, 2.1.1), *toute partie fermée irréductible de* X *admet un point générique et un seul, et l'application* $x \mapsto \overline{\{x\}}$ *est donc une bijection de* X *sur l'ensemble de ses parties fermées irréductibles.*

En effet, si Y est une partie fermée irréductible de X et $y \in Y$, et si U est un voisinage ouvert affine de y dans X, $U \cap Y$ est partout dense dans Y et est irréductible (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 7); donc (1.1.4), $U \cap Y$ est l'adhérence dans U d'un point x, et par suite $Y \subset \bar{U}$ est l'adhérence de x dans X. L'unicité du point générique de X résulte de (2.1.4) et de (**0**, 2.1.2).

(2.1.6) Si Y est une partie fermée irréductible de X, y son point générique, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,y}$ se note aussi $\mathcal{O}_{X/Y}$ et s'appelle l'*anneau local de* X *le long de* Y, ou l'*anneau local de* Y *dans* X.

Si X lui-même est irréductible et si x est son point générique, on dit encore que $\mathcal{O}_x$ est l'*anneau des fonctions rationnelles sur* X (cf. § 8).

Proposition (2.1.7) *Si* $(X, \mathcal{O}_X)$ *est un schéma, pour toute partie ouverte* U *de* X, *l'espace annelé* $(U, \mathcal{O}_X|U)$ *est un schéma.*

Cela résulte aussitôt de la déf. (2.1.2) et de la prop. (2.1.3).

On dit que $(U, \mathcal{O}_X|U)$ est le schéma *induit* sur U par $(X, \mathcal{O}_X)$, ou la *restriction* de $(X, \mathcal{O}_X)$ à U. Sauf mention expresse du contraire, c'est toujours du schéma induit sur U qu'il s'agira quand on parlera de U comme d'un *schéma*.

(2.1.8) On dit qu'un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$ est *irréductible* (resp. *connexe*) si l'espace sous-jacent X est irréductible (resp. connexe). On dit qu'un schéma est *intègre* s'il est *irréductible et réduit* (**0**, 4.1.4). On dit qu'un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$ est *localement intègre* si tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que le schéma induit sur U par $(X, \mathcal{O}_X)$ soit intègre (cf. (4.5.5)).

Proposition (2.1.9) *Soient* X *un schéma, x un point de* X.

(i) *Pour que x n'appartienne qu'à une seule composante irréductible de* X, *il faut et il suffit que le nilradical de* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit premier* (autrement dit, que $\mathcal{O}_{X,x}$ n'ait *qu'un seul idéal premier minimal* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 6, prop. 13)).

(ii) *Lorsqu'il en est ainsi et que l'ensemble des composantes irréductibles de* X *est localement fini, il existe un voisinage ouvert* U *de x qui est irréductible.*

(iii) *Pour que* X *soit* somme *de ses composantes irréductibles, il faut et il suffit que l'ensemble des composantes irréductibles de* X *soit localement fini et que pour tout,* $x \in X$, *le nilradical de* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit premier.*

(i) Pour exprimer que x appartient à deux composantes irréductibles distinctes de X, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine

(Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 7); cela signifie alors que $\mathfrak{j}_x$ contient deux idéaux premiers minimaux distincts de A (*loc. cit.*, n° 3, cor. 2 de la prop. 14), et il revient au même de dire que $\mathfrak{j}_x\mathscr{O}_x = \mathfrak{j}A_{\mathfrak{j}_x}$ contient deux idéaux premiers minimaux distincts de $\mathscr{O}_x$ (*loc. cit.*, § 2, n° 5, prop. 11).

(ii) Comme l'ensemble des composantes irréductibles de X est localement fini, la réunion de celles de ces composantes qui ne contiennent pas x est fermée, donc le complémentaire U de cette réunion est ouvert et contenu dans l'unique composante irréductible de X contenant x, et par suite irréductible (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 3).

L'assertion (iii) résulte aussitôt de (ii) et de (**0**, 2.1.6).

2.2. Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma

Proposition (2.2.1) *Soit* X *un schéma. Pour qu'un* $\mathscr{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$ *soit quasi-cohérent* (**0**, 5.1.3), *il faut et il suffit que, pour tout ouvert affine* V *de* X, $\mathscr{F}|V$ *soit isomorphe à un faisceau associé à un* $\Gamma(V, \mathscr{O}_X)$*-module* (1.3.4).

En effet, comme la notion de $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent est locale, la proposition résulte aussitôt de (1.4.1).

Corollaire (2.2.2) *Soit* X *un schéma.*

(i) *Soit* $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ *une suite exacte de* $\mathscr{O}_X$*-Modules; si deux d'entre eux sont quasi-cohérents, il en est de même du troisième.*

(ii) *Les images, noyaux et conoyaux d'homomorphismes de* $\mathscr{O}_X$*-Modules quasi-cohérents sont quasi-cohérents.*

(iii) *Soit* $\mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to \mathscr{F}_4 \to \mathscr{F}_5$ *une suite exacte de* $\mathscr{O}_X$*-Modules. Si* $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_4, \mathscr{F}_5$ *sont quasi-cohérents, il en est de même de* $\mathscr{F}_3$.

(iv) *Toute limite inductive et toute somme directe de* $\mathscr{O}_X$*-Modules quasi-cohérents est un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent. Si* $\mathscr{G}$ *et* $\mathscr{H}$ *sont deux sous-*$\mathscr{O}_X$*-Modules quasi-cohérents d'un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G} + \mathscr{H}$ *et* $\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$ *sont quasi-cohérents.*

(v) *Si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *sont des* $\mathscr{O}_X$*-Modules quasi-cohérents,* $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ *est quasi-cohérent. En particulier, si* $\mathscr{J}$ *est un Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{J}\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent.*

(vi) *Soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent de présentation finie* (**0**, 5.2.5). *Alors pour tout* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ *est quasi-cohérent.*

(vii) *Si* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent de type fini, l'annulateur* $\mathscr{J}$ *de* $\mathscr{F}$ (**0**, 5.3.10) *est un Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X$.

Compte tenu de (2.2.1), les résultats de (i) à (vi) résultent de (1.4.7), (1.3.9) et (1.3.12). Pour prouver (vii), on peut encore se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, $\mathscr{F} = \tilde{M}$, où M est un A-module engendré par un nombre fini d'éléments t_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$; l'Idéal $\mathscr{J}$ est alors l'intersection des annulateurs des t_i. Mais l'annulateur de t_i est par définition le noyau de l'homomorphisme $\mathscr{O}_X \to \mathscr{F}$ correspondant à l'homomor-

phisme $s \mapsto st_i$ de A dans M; c'est donc bien un Idéal quasi-cohérent, et toute intersection finie de tels Idéaux est aussi un Idéal quasi-cohérent par (iv).

Corollaire (2.2.3) *Soient* X *un schéma,* $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ *une suite exacte de* $\mathscr{O}_X$*-Modules quasi-cohérents. Si* $\mathscr{H}$ *est de présentation finie et si* $\mathscr{G}$ *est de type fini, alors* $\mathscr{F}$ *est de type fini.*

Comme la question est locale, on peut supposer X affine, et la proposition résulte alors de (1.4.3) et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8, lemme 9.

Proposition (2.2.4) *Soient* X *un schéma,* $\mathscr{B}$ *une* $\mathscr{O}_X$*-Algèbre quasi-cohérente* (**0**, 5.1.3). *Pour qu'un* $\mathscr{B}$*-Module* $\mathscr{F}$ *soit quasi-cohérent (sur l'espace annelé* $(X, \mathscr{B})$*), il faut et il suffit que* $\mathscr{F}$ *soit un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent.*

Comme la question est locale, on peut supposer X affine d'anneau A, et alors on a $\mathscr{B} = \tilde{B}$, où B est une A-algèbre (1.4.5). Si $\mathscr{F}$ est quasi-cohérent sur l'espace annelé $(X, \mathscr{B})$, on peut aussi supposer que $\mathscr{F}$ est le conoyau d'un $\mathscr{B}$-homomorphisme $\mathscr{B}^{(I)} \to \mathscr{B}^{(J)}$; comme cet homomorphisme est aussi un $\mathscr{O}_X$-homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-Modules, et que $\mathscr{B}^{(I)}$ et $\mathscr{B}^{(J)}$ sont des $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents (1.3.9,(ii)), $\mathscr{F}$ est aussi un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent (2.2.2).

Inversement, si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent, on a $\mathscr{F} = \tilde{M}$, où M est un B-module (1.4.5); M est isomorphe au conoyau d'un B-homomorphisme $B^{(I)} \to B^{(J)}$, donc $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{B}$-Module isomorphe au conoyau de l'homomorphisme correspondant $\mathscr{B}^{(I)} \to \mathscr{B}^{(J)}$ (1.3.13), ce qui achève la démonstration.

En particulier, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux $\mathscr{B}$-Modules quasi-cohérents, $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{G}$ est un $\mathscr{B}$-Module quasi-cohérent; il en est de même de $\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ lorsqu'en outre $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{B}$-Module de présentation finie (1.3.13).

(2.2.5) Etant donné un schéma X, nous dirons qu'une $\mathscr{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$ est *de type fini* (resp. *de présentation finie*) si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert *affine* U de x tel que $\Gamma(U, \mathscr{B}) = B$ soit une algèbre de type fini (resp. de présentation finie (**0**, 6.3.5)) sur $\Gamma(U, \mathscr{O}_X) = A$. On a alors $\mathscr{B}|U = \tilde{B}$, et pour tout $f \in A$, la $(\mathscr{O}_X|D(f))$-Algèbre induite $\mathscr{B}|D(f)$ est de type fini (resp. de présentation finie), car elle est isomorphe à $(B \otimes_A A_f)^{\sim}$. Comme les $D(f)$ forment une base de la topologie de X, on en déduit que pour tout ouvert V de X, $\mathscr{B}|V$ est une $(\mathscr{O}_X|V)$-Algèbre de type fini (resp. de présentation finie).

Proposition (2.2.6) *Soient* X *un schéma,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module localement libre de rang fini* r, Z *une partie finie de* X *contenue dans un ouvert affine* V. *Il existe alors un voisinage ouvert* $U \subset V$ *de* Z *tel que* $\mathscr{E}|U$ *soit isomorphe à* $\mathscr{O}_U^r$.

Remplaçant X par V, on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine. Pour tout $z_i \in Z$ il existe dans l'adhérence $\overline{\{z_i\}}$ au moins un point fermé z_i' (**0**, 2.1.2); si Z' est l'ensemble des z_i', tout voisinage de Z' est un voisinage de Z, et on peut donc supposer les points de Z fermés dans X, donc Z discret et fermé dans X. Or, la partie Z de X est définie par un idéal $\mathfrak{J}$ de A; considérons le schéma $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J})$, qui a Z pour espace sous-jacent, et le morphisme $j : Z \to X$ correspondant à l'homomorphisme canonique $A \to A/\mathfrak{J}$, et dont l'application continue sous-jacente est l'injection canonique de Z dans X; alors $j^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z$ est localement libre de rang r sur le schéma discret Z, somme de schémas dont l'espace sous-jacent est réduit à un point; par suite $j^*(\mathscr{E})$ est isomorphe à $\mathscr{O}_Z^r$. Autrement dit, il existe r sections s_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z$ au-dessus de Z telles que l'homomorphisme $\mathscr{O}_Z^r \to \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z$

défini par ces sections (**0**, 5.1.1.1) soit bijectif. Or on a $\mathscr{E} = \tilde{M}$, où M est un A-module; les s_i sont des éléments de $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$, et sont donc images de r éléments $t_i \in M = \Gamma(X, \mathscr{E})$. Pour tout $z_j \in Z$, il y a alors un voisinage ouvert V_j de z_j dans X tel que les restrictions des t_i à V_j définissent un isomorphisme $\mathscr{O}_X^r | V_j \to \mathscr{E} | V_j$ (**0**, 5.5.7); l'ensemble U réunion des V_j répond donc à la question.

2.3. Morphismes de schémas

(2.3.1) Etant donnés deux schémas X, Y, on appelle *morphisme* (de schémas) de X dans Y tout morphisme $(\psi, \theta) : X \to Y$ d'espaces *localement annelés;* rappelons (**0**, 4.1.12) que cela signifie que (ψ, θ) est un morphisme d'espaces annelés, et que, pour tout $x \in X$, $\theta_x^\sharp : \mathscr{O}_{Y, \psi(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ est un homomorphisme *local.* Par passage aux quotients, cette application donne un monomorphisme $\theta^x : \kappa(\psi(x)) \to \kappa(x)$, qui permet de considérer $\kappa(x)$ comme une *extension* de $\kappa(\psi(x))$.

Avec cette définition, les schémas forment une *sous-catégorie pleine* ***Sch*** de la catégorie des espaces localement annelés, les schémas affines une sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas.

Proposition (2.3.2) *Soient* $(X, \mathscr{O}_X)$ *un schéma,* $(S, \mathscr{O}_S)$ *un schéma affine d'anneau* A. *Il existe une bijection canonique de l'ensemble des morphismes de* $(X, \mathscr{O}_X)$ *dans* $(S, \mathscr{O}_S)$, *sur l'ensemble des homomorphismes de l'anneau* A *dans* $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. *Soient* $\varphi : A \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ *un homomorphisme d'anneaux,* $f : (X, \mathscr{O}_X) \to (S, \mathscr{O}_S)$ *le morphisme correspondant,* $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{F}$) *un* $\mathscr{O}_X$*-Module* (resp. *un* $\mathscr{O}_S$*-Module*) *quasi-cohérent et soit* $M = \Gamma(S, \mathscr{F})$. *Il existe alors une bijection canonique de l'ensemble des f-morphismes* $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ (**0**, 4.4.1) *sur l'ensemble des* A*-homomorphismes* $M \to \Gamma(X, \mathscr{G})$.

Ce sont des cas particuliers de (1.6.3) et (1.7.4).

Sous les conditions de (2.3.2), pour tout idéal $\mathfrak{J}$ de A, on note $\mathfrak{J}\mathscr{F}$ le sous-$\mathscr{O}_X$-Module $\tilde{\mathfrak{J}}\mathscr{F}$ défini dans (**0**, 4.3.5).

(2.3.3) On dit qu'un morphisme de schémas (ψ, θ) est *surjectif* (resp. *injectif, ouvert, fermé, dominant*) si l'application continue ψ possède la propriété correspondante; ces propriétés purement topologiques ne font donc pas intervenir θ.

(2.3.4) Soient $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ deux schémas. On dit qu'un morphisme $f = (\psi, \theta) : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ est *birationnel* s'il vérifie les deux conditions suivantes:

1° La restriction de ψ à l'ensemble des points maximaux de X (**0**, 2.1.1) est une *bijection* de cet ensemble sur l'ensemble des points maximaux de Y.

2° Pour tout point maximal y de Y, $\psi^{-1}(y)$ est réduit à un seul point x (nécessairement maximal dans X) et l'homomorphisme $\theta_x^\sharp : \mathscr{O}_{Y,y} \to \mathscr{O}_{X,x}$ est *bijectif.*

Un morphisme birationnel est *dominant* puisque tout point de Y est adhérent à un point maximal. Lorsque l'ensemble des composantes irréductibles de Y (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des points maximaux de Y) est *localement fini,* il en est de même de l'ensemble des composantes irréductibles de X, en vertu de 1° et de la continuité de ψ.

Remarque* **(2.3.4.1) Pour que f soit birationnel, il suffit qu'il vérifie la condition 1° de (2.3.4) et en outre que pour tout point maximal x de X, l'homomorphisme $\theta^{\#}_x : \mathcal{O}_{Y,\psi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit bijectif. En effet, il suffit de montrer que pour tout point maximal $x \in X$, la fibre $f^{-1}(y)$, où $y = \psi(x)$, est réduite à un seul point. Or, en vertu de l'hypothèse et de (3.5.6), x est fermé dans $f^{-1}(y)$; mais comme x est l'unique point maximal de $f^{-1}(y)$ (**0**, 2.1.13), on a $f^{-1}(y) = \{x\}$. *

Proposition (2.3.5) *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un espace localement annelé,* $\mathscr{J}$ *un Idéal nilpotent quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_X$. *On suppose que l'espace localement annelé* $X_0 = (X, \mathcal{O}_X/\mathscr{J})$ *est un schéma et que les* $\mathcal{O}_X$*-Modules* $\mathscr{J}^k/\mathscr{J}^{k+1}$ *(qui sont des* $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$*-Modules) sont des* $\mathcal{O}_{X_0}$*-Modules quasi-cohérents. Alors, pour que* X *soit un schéma affine, il faut et il suffit que* X_0 *le soit.*

La nécessité de la condition est immédiate, car si $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{J} = \tilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal nilpotent de A, et comme tout idéal premier de A contient $\mathfrak{J}$, le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un homéomorphisme; par ailleurs on a $(A/\mathfrak{J})^{\sim} = \tilde{A}/\tilde{\mathfrak{J}}$ sur X, donc X_0 est le spectre premier de $A/\mathfrak{J}$.

Pour prouver que la condition est suffisante, notons que, puisqu'il existe un entier n tel que $\mathscr{J}^n \simeq 0$, il suffit de prouver, par récurrence sur k, que les espaces annelés $(X, \mathcal{O}_X/\mathscr{J}^{k+1})$ sont des schémas affines; on peut donc se borner au cas où $\mathscr{J}^2 = 0$. Posons $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $A_0 = \Gamma(X_0, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X/\mathscr{J})$. Par hypothèse, $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$. On a une suite exacte de cohomologie

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{J}) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X/\mathscr{J}) \to H^1(X, \mathscr{J}).$$

Mais $H^1(X, \mathscr{J}) = H^1(X_0, \mathscr{J})$ et par hypothèse $\mathscr{J}$ est un $\mathcal{O}_{X_0}$-Module quasi-cohérent; on a donc $H^1(X, \mathscr{J}) = 0$ puisque X_0 est affine (1.4.6). Si l'on pose $\mathfrak{N} = \Gamma(X, \mathscr{J})$, $\mathfrak{N}$ est donc un idéal de carré nul dans A, et $A_0 = A/\mathfrak{N}$; puisque $\mathfrak{N} = \Gamma(X_0, \mathscr{J})$, on a $\mathscr{J} = \tilde{\mathfrak{N}}$ en tant que $\mathcal{O}_{X_0}$-Module quasi-cohérent (1.4.1) et $\mathfrak{N}_x = \mathscr{J}_x$ pour tout $x \in X_0$. Cela étant, soit $X' = \mathrm{Spec}(A)$, et considérons le morphisme de schémas $f = (\psi, \theta) : X \to X'$ correspondant à l'homomorphisme identique $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ (2.3.2). Soit d'autre part $j = (1_X, \rho)$ le morphisme canonique $X_0 \to X$, où $\rho : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ est l'homomorphisme canonique; le morphisme de schémas

$$(\psi', \theta') : X_0 \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} X'$$

correspond à l'homomorphisme canonique $A \to A/\mathfrak{N} = A_0$; puisque $\mathfrak{N}$ est nilpotent, ψ' est un *homéomorphisme*, donc aussi $\psi = \psi'$. En outre, la relation $\mathfrak{N}_x = \mathscr{J}_x$ montre que la restriction de $\theta^{\#} : \psi^{-1}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_X$ est un *isomorphisme* $\psi^{-1}(\tilde{\mathfrak{N}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{J}$. D'autre part, par passage aux quotients, $\theta^{\#}$ donne un *isomorphisme* $\psi^{-1}(\mathcal{O}_X/\tilde{\mathfrak{N}}) \to \mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ en vertu de ce qui précède; on en conclut que $\theta^{\#}$ est un isomorphisme, donc f est un *isomorphisme* d'espaces localement annelés, et X est un schéma affine.

Remarque **(2.3.6)** Notons d'abord que les remarques de (**0**, 4.5.6) sont valables sans modification lorsqu'on y remplace partout la catégorie $\boldsymbol{Esp.\ ann}_{/S}$ par la catégorie $\boldsymbol{Sch}_{/S}$ des S-schémas (où S est un schéma quelconque), et en particulier par la catégorie ***Sch*** de tous les schémas. Considérons d'autre part la sous-catégorie pleine ***Aff*** de ***Sch***, formée des schémas *affines;* si $G : \boldsymbol{Aff}^{\circ} \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur contravariant de ***Aff*** dans ***Ens***, pour tout schéma *affine* X, on peut encore considérer l'application $U \mapsto G(U)$, où U parcourt l'ensemble des ouverts *affines* de X. Comme ces ouverts affines forment une *base* $\mathfrak{B}_X$ de la topologie de X (1.1.2), l'application $U \mapsto G(U)$ est un *préfaisceau sur* $\mathfrak{B}_X$ à valeurs dans ***Ens*** (**0**, 3.2.1); lorsque, pour *tout* schéma affine X, $U \mapsto G(U)$ est un *faisceau sur* $\mathfrak{B}_X$ au sens de (**0**, 3.2.2), nous dirons encore que G est un *faisceau sur la catégorie* ***Aff***; les foncteurs G ayant cette propriété forment encore une sous-catégorie pleine de la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{Aff}^{\circ}, \boldsymbol{Ens})$ que nous noterons $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Aff}}$. Cela étant, pour tout foncteur contravariant $F : \boldsymbol{Sch}^{\circ} \to \boldsymbol{Ens}$, on peut considérer sa restriction $F|\boldsymbol{Aff}^{\circ} : \boldsymbol{Aff}^{\circ} \to \boldsymbol{Ens}$, et il est clair que

$$F \mapsto F|\boldsymbol{Aff}^{\circ} \tag{2.3.6.1}$$

est un foncteur de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{Sch}^{\circ}, \boldsymbol{Ens})$ dans $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{Aff}^{\circ}, \boldsymbol{Ens})$. Nous allons voir que la *restriction* de ce foncteur à la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Sch}}$ (**0**, 4.5.6) de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{Sch}^{\circ}, \boldsymbol{Ens})$ définit en fait une *équivalence de catégories*

$$\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Sch}} \approx \boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Aff}}\ . \tag{2.3.6.2}$$

Il est clair en effet que l'image de $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Sch}}$ par (2.3.6.1) est une sous-catégorie de $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Aff}}$ en vertu de (**0**, 3.2.2); montrons d'abord que la restriction de (2.3.6.1) à $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Sch}}$ est *pleinement fidèle.* Cela résulte d'une part de ce que, si $F \in \boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Sch}}$ et si X est un schéma, la donnée des F(U) pour les U ouverts *affines* de X détermine entièrement les F(U) pour *tout* ouvert U de X par la formule $F(U) = \varprojlim F(U_\alpha)$, où (U_α) est l'ensemble ordonné des ouverts affines contenus dans U (**0**, 3.2.1); d'autre part, si $\varphi : F \to G$ est un morphisme fonctoriel (pour F, G dans $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Sch}}$), avec les mêmes notations, la donnée des applications $\varphi(U_\alpha) : F(U_\alpha) \to G(U_\alpha)$ détermine entièrement $\varphi(U) : F(U) \to G(U)$, cette application étant *limite projective* du système projectif d'applications $\varphi(U_\alpha)$ par définition d'un morphisme fonctoriel. Reste à voir que *tout* foncteur $G \in \boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Aff}}$ est de la forme $F|\boldsymbol{Aff}^{\circ}$ pour un $F \in \boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Sch}}$. Pour cela, définissons, pour tout schéma X, F(X) comme limite projective des $G(U_\alpha)$, où (U_α) est le système projectif des ouverts affines de X; pour obtenir un foncteur, il faut encore définir F(*u*) pour tout morphisme de schémas $u : X \to Y$; on prendra F(*u*) comme limite projective des applications $G(u_{\alpha\beta}) : G(V_\beta) \to G(U_\alpha)$, où (U_α) est défini comme ci-dessus, (V_β) est le système projectif des ouverts affines de Y, les couples (α, β)

sont seulement ceux tels que $u(U_\alpha) \subset V_\beta$, et $u_{\alpha\beta} : U_\alpha \to V_\beta$ est la restriction de u. La vérification du fait que F est un foncteur est immédiate. Enfin, le fait que F est un *faisceau* résulte du fait que les ouverts affines de X forment une *base* de la topologie de X (2.1.3) et de (**0**, 3.2.2).

On a vu (1.6.5) que la catégorie $\boldsymbol{Aff}^\circ$ est canoniquement *équivalente* à la catégorie ***Ann*** des anneaux; cette équivalence définit donc aussi une équivalence des catégories $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{Aff}^\circ, \boldsymbol{Ens})$ et $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{Ann}, \boldsymbol{Ens})$. Nous dirons par abus de langage qu'un foncteur (covariant) $\boldsymbol{Ann} \to \boldsymbol{Ens}$ est un *faisceau* si son image par l'équivalence précédente est un *faisceau sur* ***Aff***; notons $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Ann}}$ la catégorie de ces foncteurs. Compte tenu de ce que, pour tout anneau A, les ensembles ouverts affines $D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$ forment une base de la topologie de Spec(A), on peut encore, en vertu de (**0**, 3.2.2), exprimer que le foncteur $F : \boldsymbol{Ann} \to \boldsymbol{Ens}$ appartient à $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Ann}}$ en disant que, pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de A telle que $\sum_i A f_i = A$, le diagramme d'ensembles

$$F(A) \to \prod_i F(A_{f_i}) \rightrightarrows \prod F(A_{f_i f_j})$$

est *exact* (**0**, 1.4.1); on peut d'ailleurs dans cet énoncé se borner aux familles $(f_i)_{i\in I}$ *finies* engendrant A. On a ainsi caractérisé la catégorie $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Ann}}$ sans utiliser la notion de schéma.

Rappelons maintenant que la donnée d'un schéma X définit canoniquement un foncteur contravariant $\mathbf{h}_X : Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$ de ***Sch*** dans ***Ens*** (**0**, 1.1.1) et on a remarqué (**0**, 4.5.6) que ce foncteur est un *faisceau* sur ***Sch***; on sait en outre (**0**, 1.1.8) que $\mathbf{h} : X \mapsto \mathbf{h}_X$ est un foncteur *pleinement fidèle* de ***Sch*** dans $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Sch}}$. En vertu de l'équivalence (2.3.6.2) et de la définition de $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Ann}}$, on voit donc qu'on peut identifier canoniquement la catégorie ***Sch*** à une *sous-catégorie pleine de la catégorie* $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Ann}}$, un schéma X étant identifié au faisceau $A \mapsto \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A), X)$ sur ***Ann***. On aura soin de noter qu'il y a des foncteurs de $\boldsymbol{Fais}_{/\boldsymbol{Ann}}$ qui ne sont pas isomorphes à des faisceaux provenant de schémas.

2.4. Recollement de schémas

(2.4.1) Il résulte de la définition (2.1.2) que tout espace annelé obtenu par *recollement* de schémas (**0**, 4.1.7) est encore un schéma. En particulier, puisque tout schéma admet par définition un recouvrement formé d'ensembles ouverts affines, on voit que tout schéma peut s'obtenir par *recollement de schémas affines.*

Exemple **(2.4.2)** Soient K un corps, $B = K[s]$, $C = K[t]$ deux anneaux de polynômes à une indéterminée sur K, et soient $X_1 = \mathrm{Spec}(B)$, $X_2 = \mathrm{Spec}(C)$, qui sont deux schémas affines isomorphes. Dans X_1 (resp. X_2), soit U_{12} (resp. U_{21}) l'ouvert affine $D(s)$ (resp. $D(t)$) dont l'anneau B_s (resp. C_t) est formé des fractions rationnelles de la forme $f(s)/s^m$ (resp. $g(t)/t^n$) avec $f \in B$ (resp. $g \in C$). Soit u_{12}

l'isomorphisme de schémas $U_{21} \to U_{12}$ correspondant (2.2.4) à l'isomorphisme de B_s sur C_t qui, à $f(s)/s^m$, fait correspondre la fraction rationnelle $f(1/t)/(1/t^m)$. On peut recoller X_1 et X_2 le long de U_{12} et U_{21} au moyen de u_{12}, car il n'y a évidemment pas de condition de recollement. Nous retrouverons plus tard le schéma X ainsi obtenu comme cas particulier d'une méthode de construction générale (**II**, 2.4.3). Montrons seulement ici que X *n'est pas un schéma affine;* cela résultera de ce que l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est *isomorphe à* K, donc a un spectre réduit à un point. En effet, une section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X a une restriction au-dessus de X_1 (resp. X_2), identifié à un ouvert affine de X, qui est un polynôme $f(s)$ (resp. $g(t)$), et il résulte des définitions que l'on doit avoir $g(t) = f(1/t)$, ce qui n'est possible que si $f = g \in K$.

(2.4.3) Tous les résultats de la section (**0**, 4.5) sur les foncteurs représentables par des immersions ouvertes sont valables sans changement dans la catégorie des schémas.

2.5. Schémas locaux

(2.5.1) On appelle *schéma local* un schéma affine dont l'anneau A est local; il existe alors dans $X = \mathrm{Spec}(A)$ un seul *point fermé a*, et pour tout autre point $b \in X$, on a $a \in \overline{\{b\}}$ (1.1.7). On dit aussi que *a* est le *centre* du schéma local X. Lorsque A est un anneau local *complet*, on dira (par abus de langage) que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est un *schéma local complet*. On appelle *schéma semi-local* (resp. *schéma semi-local complet*) un schéma affine $X = \mathrm{Spec}(A)$ dont l'anneau A est semi-local (resp. semi-local complet); il n'a qu'un *nombre fini de points fermés.*

Pour tout schéma Y et tout point $y \in Y$, le schéma local $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$ est appelé le *schéma local de* Y *au point y*. Soient V un ouvert affine de Y contenant *y*, B l'anneau du schéma affine V; $\mathcal{O}_y$ s'identifie canoniquement à B_y (1.3.4), et l'homomorphisme canonique $B \to B_y$ correspond par suite (1.6.3) à un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y) \to V$. Si on compose ce morphisme avec l'injection canonique $V \to Y$, on obtient donc un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y) \to Y$, qui est *indépendant* de l'ouvert affine V (contenant *y*) choisi: en effet, si V′ est un second ouvert affine contenant *y*, il existe un troisième ouvert affine W contenant *y* et tel que $W \subset V \cap V'$ (2.1.3); on peut donc se limiter au cas où $V \subset V'$, et si B′ est l'anneau de V′, tout revient à remarquer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B' & \longrightarrow & B \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{O}_y & \end{array}$$

est commutatif. Le morphisme

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y) \to Y$$

ainsi défini est dit *canonique.*

Proposition (2.5.2) *Soit* $(Y, \mathscr{O}_Y)$ *un schéma; pour tout* $y \in Y$, *soit* (ψ, θ) *le morphisme canonique* $(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y), \tilde{\mathscr{O}}_y) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$. *Alors* ψ *est un homéomorphisme de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y)$ *sur le sous-espace* S_y *de* Y *formé des* z *tels que* $y \in \overline{\{z\}}$ (autrement dit, des *générisations* de y (**0**, 2.1.1)); *en outre, si* $z = \psi(\mathfrak{p})$, $\theta_z^\sharp : \mathscr{O} \to (\mathscr{O}_y)_\mathfrak{p}$ *est un isomorphisme*; (ψ, θ) *est donc un monomorphisme d'espaces annelés.*

Comme l'unique point fermé a de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y)$ est adhérent à tout point de cet espace, et que $\psi(a) = y$, l'image de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y)$ par l'application continue ψ est contenue dans S_y. Comme S_y est contenu dans tout ouvert affine contenant y, on peut se ramener au cas où Y est un schéma affine; mais dans ce cas la proposition résulte de (1.6.6).

On voit donc (2.1.5) *qu'il y a correspondance biunivoque entre* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y)$ *et l'ensemble des parties fermées irréductibles de* Y *contenant* y (ou l'ensemble des *générisations de* y). On notera que $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y)$, identifié à S_y, est aussi l'*intersection des voisinages de* y *dans* Y.

Proposition (2.5.3) *Soient* $(X, \mathscr{O}_X)$ *un schéma local d'anneau* A, *a son unique point fermé,* $(Y, \mathscr{O}_Y)$ *un schéma. Tout morphisme*

$$u = (\psi, \theta) : (X, \mathscr{O}_X) \to (X, \mathscr{O}_Y)$$

se factorise de façon unique en

$$X \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\psi(a)}) \to Y,$$

où la seconde flèche désigne le morphisme canonique, et la première correspond à un homomorphisme local $\mathscr{O}_{\psi(a)} \to A$. *Cela établit une correspondance biunivoque canonique entre l'ensemble des morphismes* $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ *et l'ensemble des homomorphismes locaux* $\mathscr{O}_y \to A$ $(y \in Y)$.

En effet, pour tout $x \in X$, on a $a \in \overline{\{x\}}$, donc $\psi(a) \in \overline{\{\psi(x)\}}$, ce qui prouve que $\psi(X)$ est contenu dans tout ouvert affine contenant $\psi(a)$. On peut donc se ramener au cas où $(Y, \mathscr{O}_Y)$ est un schéma affine d'anneau B, et on a alors $u = ({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$, où $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, A)$ (1.6.2). En outre, on a $\varphi^{-1}(j_a) = j_{\psi(a)}$, et par suite l'image par φ de tout élément de $B - j_{\psi(a)}$ est inversible dans l'anneau local A; la factorisation de l'énoncé résulte donc de la propriété universelle des anneaux de fractions (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 1, prop. 1).

Inversement, à tout homomorphisme local $\mathscr{O}_y \to A$ correspond un morphisme unique $(\psi, \theta) : X \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y)$ tel que $\psi(a) = y$ (1.6.2), et en le composant avec le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y) \to Y$, on obtient un morphisme $X \to Y$, ce qui achève de démontrer la proposition.

(2.5.4) Les schémas affines dont l'anneau est un *corps* K ont un espace sous-jacent réduit à un point. Si A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, tout homomorphisme local $A \to K$ a un noyau égal à $\mathfrak{m}$, donc se factorise en $A \to A/\mathfrak{m} \to K$, où la seconde flèche est un monomorphisme. Les morphismes $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(A)$ correspondent donc biunivoquement aux monomorphismes de corps $A/\mathfrak{m} \to K$.

Soit $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un schéma; pour tout $y \in Y$ et tout idéal $\mathfrak{a}_y$ de $\mathcal{O}_y$, l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_y/\mathfrak{a}_y$ définit un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{a}_y) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$; si on le compose avec le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y) \to Y$, on obtient un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{a}_y) \to Y$, dit encore *canonique*. Pour $\mathfrak{a}_y = \mathfrak{m}_y$, c'est-à-dire $\mathcal{O}_y/\mathfrak{a}_y = \kappa(y)$, la prop. (2.5.3) entraîne donc:

Corollaire (2.5.5) *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un schéma local dont l'anneau est un corps* K, ξ *l'unique point de* X, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *un schéma. Tout morphisme* $u : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *se factorise de façon unique en* $X \to \mathrm{Spec}(\kappa(u(\xi))) \to Y$, *où la seconde flèche désigne le morphisme canonique, et la première correspond à un monomorphisme* $\kappa(u(\xi)) \to K$. *Cela établit une correspondance biunivoque canonique entre l'ensemble des morphismes* $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *et l'ensemble des monomorphismes* $\kappa(y) \to K$ $(y \in Y)$.

Pour tout point y d'un schéma Y, on écrira souvent $\{y\}$ (ou simplement y) au lieu de $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$, par abus de notation, et on notera $\{y\} \to Y$ (ou simplement $y \to Y$) le morphisme canonique.

Corollaire (2.5.6) *Pour tout* $y \in Y$, *tout morphisme canonique* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{a}_y) \to Y$ *est un monomorphisme d'espaces annelés.*

On l'a déjà vu lorsque $\mathfrak{a}_y = 0$ (2.5.2), et il suffit d'appliquer (1.6.5).

Remarque **(2.5.7)** Soient X un schéma local, a son unique point fermé. Comme tout ouvert affine contenant a est nécessairement X tout entier (1.1.5), tout $\mathcal{O}_X$-Module *inversible* (**0**, 5.5.1) est nécessairement *isomorphe à* $\mathcal{O}_X$ (ou, comme on dit encore, est *trivial*). Cette propriété n'a pas lieu en général pour un schéma affine quelconque $X = \mathrm{Spec}(A)$; on verra au chap. IV que si A est un anneau normal, tout $\mathcal{O}_X$-Module inversible est trivial lorsque A est *factoriel* (**IV***, 21.6.10 et Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 4, cor. du th. 2 et § 3, n° 2, th. 1).

(2.5.8) Soient X un schéma, x un point de X; comme $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$ est réduit à un point, les Modules quasi-cohérents sur ce schéma ne sont autres que les $\kappa(x)$-espaces vectoriels. Si $j : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ est le morphisme canonique (2.5.4), pour tout $\kappa(x)$-espace vectoriel E, il résulte des définitions (**0**, 3.4.1) que le $\mathcal{O}_X$-Module $j_*(E)$ a pour support $\overline{\{x\}}$ et qu'il induit sur cet ensemble fermé irréductible un faisceau simple égal au préfaisceau constant E. D'autre part, si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, $j^*(\mathscr{F})$ est le $\kappa(x)$-module $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x) = \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ (**0**, 4.3.1).

(2.5.9) Soient S un schéma, A un anneau local linéairement topologisé dont nous désignerons par $(\mathfrak{J}_\lambda)$ un système fondamental d'idéaux ouverts (il n'est pas supposé que cette topologie soit celle pour laquelle les puissances de l'idéal maximal forment un système fondamental d'idéaux ouverts); nous supposerons que A est *séparé et complet* pour cette topologie, et nous poserons $Y = \mathrm{Spec}(A)$; nous supposerons en outre que Y est un S-schéma. Pour tout λ, posons $Y_\lambda = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}_\lambda)$.

Si X est un S-schéma quelconque, les applications canoniques $A/\mathfrak{J}_\mu \to A/\mathfrak{J}_\lambda$ pour $\mathfrak{J}_\mu \subset \mathfrak{J}_\lambda$ définissent des applications canoniques

$$\varphi_{\lambda\mu} : \mathrm{Hom}_S(Y_\mu, X) \to \mathrm{Hom}_S(Y_\lambda, X) \tag{2.5.9.1}$$

(composé d'un S-morphisme $Y_\mu \to X$ avec le S-morphisme canonique $Y_\lambda \to Y_\mu$), qui définissent un système projectif filtrant $(\mathrm{Hom}_S(Y_\lambda, X))$. De même les applications canoniques $A \to A/\mathfrak{J}_\lambda$ définissent des applications canoniques

$$\psi_\lambda : \mathrm{Hom}_S(Y, X) \to \mathrm{Hom}_S(Y_\lambda, X) \tag{2.5.9.2}$$

qui forment un système projectif d'applications. On en déduit une application canonique par passage à la limite projective:

$$\psi : \mathrm{Hom}_S(Y, X) \to \varprojlim_\lambda \mathrm{Hom}_S(Y_\lambda, X). \tag{2.5.9.3}$$

Proposition (2.5.10) *L'application canonique* (2.5.9.3) *est bijective.*

En effet, on peut identifier le point fermé de chaque Y_λ au point fermé a de Y (1.2.5); si la famille $(f_\lambda) \in \prod_\lambda \mathrm{Hom}_S(Y_\lambda, X)$ est telle que $\varphi_{\lambda\mu}(f_\mu) = f_\lambda$ pour $\mathfrak{J}_\mu \subset \mathfrak{J}_\lambda$, tous les points $f_\lambda(a)$ sont égaux à un même point $x \in X$; de même, si $f \in \mathrm{Hom}_S(Y, X)$ et si $f_\lambda = \psi_\lambda(f)$, tous les $f_\lambda(a)$ sont égaux à $f(a)$. On peut donc, pour prouver (2.5.10), se borner au cas où tous les morphismes considérés transforment a en un même point $x \in X$. Mais alors la proposition résulte de (2.5.3) et du fait que, si les $u_\lambda : \mathscr{O}_{X,x} \to A/\mathfrak{J}_\lambda$ forment un système projectif d'homomorphismes locaux, $u = (u_\lambda)$ est un homomorphisme de $\mathscr{O}_{X,x}$ dans l'anneau produit $\prod_\lambda (A/\mathfrak{J}_\lambda)$, et comme A est séparé et complet, il est fermé dans $\prod_\lambda (A/\mathfrak{J}_\lambda)$, et par suite u prend ses valeurs dans A.

2.6. Schémas au-dessus d'un schéma

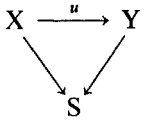
Comme dans toute catégorie, pour un schéma S, on peut définir la catégorie $\boldsymbol{Sch}_{/S}$ des S-objets dans la catégorie des schémas. Nous rappellerons ici les définitions générales (**0**, 1.1.11) avec une terminologie appropriée.

Définition (2.6.1) *Etant donné un schéma* S, *on dit que la donnée d'un schéma* X *et d'un morphisme de schémas* $\varphi : X \to S$ *définit un* schéma X au-dessus du schéma S, *ou un* S-schéma; *on dit que* S *est le schéma de base du* S-*schéma* X *et* φ *est appelé le morphisme structural du* S-*schéma* X. *Lorsque* S *est un schéma affine d'anneau* A, *on dit aussi que* X *muni de* φ *est un* schéma au-dessus de l'anneau A (*ou un* A-schéma).

Il résulte de (2.3.3) que la donnée d'un schéma au-dessus d'un anneau A équivaut à la donnée d'un schéma $(X, \mathscr{O}_X)$ dont le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ est un faisceau de A-*algèbres. Un schéma quelconque peut donc toujours être considéré de façon unique comme un* **Z**-*schéma.* En d'autres termes, Spec(**Z**) est un *objet final* de la catégorie des *schémas* (et même de la catégorie des espaces localement annelés) (**0**, 1.1.10).

Si $\varphi : X \to S$ est le morphisme structural d'un S-schéma X, on dit qu'un point $x \in X$ est *au-dessus d'un point* $s \in S$ si $\varphi(x) = s$. On dit que X *domine* S si φ est un morphisme dominant (2.3.4).

(2.6.2) Soient X, Y deux S-schémas; on dit qu'un morphisme de schémas $u : X \to Y$ est un *morphisme de schémas au-dessus de* S (ou un S-*morphisme*) si le diagramme



(où les flèches obliques sont les morphismes structuraux) est commutatif: cela entraîne que pour tout $s \in S$ et tout $x \in X$ au-dessus de s, $u(x)$ doit aussi être au-dessus de s.

Cette définition montre aussitôt que le composé de deux S-morphismes est un S-morphisme; les S-schémas forment donc une *catégorie* (cf. (**0**, 1.1.11)).

On notera $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ l'ensemble des S-morphismes d'un S-schéma X dans un S-schéma Y; le morphisme identique d'un S-schéma X sera désigné par 1_X ou id_X.

Lorsque S est un schéma affine d'anneau A, on dira aussi A-*morphisme* au lieu de S-morphisme.

(2.6.3) Si X est un S-schéma, $v : X' \to X$ un morphisme de schémas, le morphisme composé

$$X' \xrightarrow{v} X \longrightarrow S$$

définit X' comme S-schéma; en particulier, tout schéma induit sur un ouvert U de X peut être considéré comme un S-schéma au moyen de l'injection canonique.

Si $u : X \to Y$ est un S-morphisme de S-schémas, la restriction de u à tout schéma induit sur un ouvert U de X est donc un S-morphisme $U \to Y$. Inversement, soit (U_α) un recouvrement ouvert de X et pour chaque α, soit $u_\alpha : U_\alpha \to Y$ un S-morphisme; si, pour tout couple d'indices (α, β), les restrictions de u_α et de u_β à $U_\alpha \cap U_\beta$ coïncident, il existe un S-morphisme $X \to Y$ et un seul dont la restriction à chaque U_α soit u_α.

Si $u : X \to Y$ est un S-morphisme tel que $u(X) \subset V$, où V est une partie ouverte de Y, alors u, considéré comme morphisme de X dans V, est encore un S-morphisme.

(2.6.4) Soit $S' \to S$ un morphisme de schémas; pour tout S'-schéma X, le morphisme composé $X \to S' \to S$ définit X comme S-schéma. Inversement, supposons que S' soit le schéma induit sur un ouvert de S; soit X

un S-schéma et supposons que le morphisme structural $f : X \to S$ soit tel que l'on ait $f(X) \subset S'$; alors on peut considérer X comme un S'-schéma. Dans ce dernier cas, si Y est un S-schéma dont le morphisme structural applique aussi l'espace sous-jacent dans S', tout S-morphisme de X dans Y est aussi un S'-morphisme.

(2.6.5) Si X est un S-schéma, $\varphi : X \to S$ le morphisme structural, on appelle S-*section de* X un S-morphisme de S dans X, c'est-à-dire un morphisme de schémas $\psi : S \to X$ tel que $\varphi \circ \psi$ soit l'identité de S. On désigne par $\Gamma(X/S)$ l'ensemble des S-sections de X.

2.7. Schémas noethériens et schémas localement noethériens

Définition (2.7.1) *On dit qu'un schéma* X *est noethérien* (resp. *localement noethérien*) *s'il est réunion finie* (resp. *réunion*) *d'ouverts affines* V_α *tels que l'anneau de chacun des schémas induits sur les* V_α *soit noethérien.*

L'espace sous-jacent à un schéma noethérien (resp. localement noethérien) est donc un espace noethérien (resp. localement noethérien) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, cor. 7 de la prop. 11 et n° 2, prop. 8). En outre, si X est localement noethérien, le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ est *cohérent* (1.5.2), tout $\mathcal{O}_X$-Module *quasi-cohérent de type fini* est *cohérent* (1.5.1), et tout anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est *noethérien*, les questions étant locales. Tout *sous-*$\mathcal{O}_X$*-Module* (resp. *tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quotient*) *quasi-cohérent* d'un $\mathcal{O}_X$-Module *cohérent* $\mathscr{F}$ est alors *cohérent*, car la question est de nouveau locale, et il suffit d'appliquer (1.5.1), (1.4.1) et (1.3.10), joints au fait qu'un sous-module (resp. module quotient) d'un module de type fini sur un anneau noethérien est de type fini. Plus particulièrement, tout *Idéal quasi-cohérent* de $\mathcal{O}_X$ est *cohérent*.

Si un schéma X est réunion finie (resp. réunion) d'ouverts W_λ tels que les schémas induits sur les W_λ soient noethériens (resp. localement noethériens), il est clair que X est noethérien (resp. localement noethérien).

Proposition (2.7.2) *Pour qu'un schéma* X *soit noethérien, il faut et il suffit qu'il soit localement noethérien et que son espace sous-jacent soit quasi-compact.*

La proposition découle aussitôt des définitions, un espace noethérien étant quasi-compact.

Proposition (2.7.3) *Soit* X *un schéma affine d'anneau* A. *Les conditions suivantes sont équivalentes*: a) X *est noethérien*; b) X *est localement noethérien*; c) A *est noethérien.*

L'équivalence de a) et b) résulte de (2.7.2) et de ce que tout schéma affine a un espace sous-jacent quasi-compact; il est clair en outre que c)

entraîne a). Pour voir que a) entraîne c), remarquons qu'il y a un recouvrement fini (V_i) de X par des ouverts affines tels que l'anneau A_i du schéma induit sur V_i soit noethérien. Soit alors $(\mathfrak{a}_n)$ une suite croissante d'idéaux de A; il lui correspond canoniquement de façon biunivoque (1.3.7) une suite croissante $(\tilde{\mathfrak{a}}_n)$ d'Idéaux dans $\tilde{A}=\mathscr{O}_X$; pour voir que la suite $(\mathfrak{a}_n)$ est stationnaire, il suffit de prouver que la suite $(\tilde{\mathfrak{a}}_n)$ l'est. Or, la restriction $\tilde{\mathfrak{a}}_n|V_i$ est un Idéal quasi-cohérent dans $\mathscr{O}_X|V_i$; $\tilde{\mathfrak{a}}_n|V_i$ est donc de la forme $\tilde{\mathfrak{a}}_{ni}$, où $\mathfrak{a}_{ni}$ est un idéal de A_i (1.3.7). Comme A_i est noethérien, la suite $(\mathfrak{a}_{ni})$ est stationnaire pour tout i, d'où la proposition.

On notera que le raisonnement précédent prouve aussi que *si* X *est un schéma noethérien, toute suite croissante d'Idéaux cohérents de* $\mathscr{O}_X$ *est stationnaire.*

Proposition (2.7.4) *Soit* X *un schéma localement noethérien. Toute* $\mathscr{O}_X$*-Algèbre quasi-cohérente de type fini* $\mathscr{B}$ *est un faisceau cohérent d'anneaux et une* $\mathscr{O}_X$*-Algèbre de présentation finie* (2.2.5).

On peut se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine, A étant un anneau noethérien, et $\mathscr{B}=\tilde{B}$, où B est une A-algèbre de type fini; on sait donc déjà que B est une A-algèbre de présentation finie (**0**, 6.3.5), donc $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_X$-Algèbre de présentation finie. Pour montrer que $\mathscr{B}$ est un faisceau d'anneaux cohérent, il faut prouver que le noyau $\mathscr{N}$ d'un $\mathscr{B}$-homomorphisme $\mathscr{B}^m\to\mathscr{B}$ est un $\mathscr{B}$-Module de type fini; or il est de la forme $\tilde{N}$, où N est le noyau de l'homomorphisme correspondant de B-modules $B^m\to B$ (1.3.13). Comme B est noethérien, N est un B-module de type fini. Il existe donc un B-homomorphisme surjectif $B^p\to N$, donc un homomorphisme surjectif $\mathscr{B}^p\to\mathscr{N}$ (1.3.5), ce qui prouve notre assertion.

Corollaire (2.7.5) *Sous les hypothèses de* (2.7.4), *pour qu'un* $\mathscr{B}$*-Module* $\mathscr{F}$ *soit cohérent, il faut et il suffit que* $\mathscr{F}$ *soit un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent et un* $\mathscr{B}$*-Module de type fini. S'il en est ainsi, et si* $\mathscr{G}$ *est un sous-*$\mathscr{B}$*-Module ou un* $\mathscr{B}$*-Module quotient de* $\mathscr{F}$, *pour que* $\mathscr{G}$ *soit un* $\mathscr{B}$*-Module cohérent, il faut et il suffit que* $\mathscr{G}$ *soit un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent.*

Compte tenu de (2.2.4), les conditions sur $\mathscr{F}$ sont évidemment nécessaires; prouvons qu'elles sont suffisantes. On peut se limiter au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$, A étant noethérien, $\mathscr{B}=\tilde{B}$, où B est une A-algèbre de type fini et $\mathscr{F}=\tilde{M}$, où M est un B-module, et où il existe un B-homomorphisme surjectif $\mathscr{B}^m\to\mathscr{F}$. On a alors un homomorphisme surjectif correspondant $B^m\to M$, donc M est un B-module de type fini; en outre le noyau P de cet homomorphisme est un B-module de type fini puisque B est noethérien. On en conclut (1.3.13) que $\mathscr{F}$ est le conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{B}^n\to\mathscr{B}^m$, donc est cohérent puisque $\mathscr{B}$ est un faisceau cohérent d'anneaux (**0**, 5.3.9) et (**0**, 5.3.4)). Le même raisonnement montre qu'un sous-$\mathscr{B}$-Module (resp. un $\mathscr{B}$-Module quotient) quasi-cohérent de $\mathscr{F}$ est de type fini, d'où la seconde partie du corollaire.

Proposition (2.7.6) *Soient* X *un schéma localement noethérien,* E *une partie de* X. *Tout point* $x\in E$ *admet alors dans* E *une générisation maximale* y (i.e. telle que y n'admette aucune générisation $\neq y$ dans E). *En particulier, si* $E\neq\emptyset$, *il existe* $y\in E$ *n'admettant dans* E *aucune générisation autre que* y (cf. (4.6.1.1)).

Les générisations de x dans X étant les points de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ (2.5.2), on peut donc se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$, $\mathscr{O}_{X,x}$ étant un anneau local noe-

thérien; on sait alors que les chaînes d'idéaux premiers dans cet anneau sont de longueur *bornée* par $\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ ($\mathbf{0}_{IV}^{*}$, 16.2.3), et il suffit de considérer une chaîne d'idéaux premiers *appartenant à* E et ayant la plus grande longueur possible, pour prouver la proposition.

2.8. Schémas artiniens

Définition (2.8.1) *On dit qu'un schéma est artinien s'il est affine et si son anneau est artinien.*

Proposition (2.8.2) *Étant donné un schéma* X, *les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) X *est un schéma artinien*;

b) X *est noethérien et son espace sous-jacent est discret*;

c) X *est noethérien et les points de son espace sous-jacent sont fermés* (condition T_1).

Lorsqu'il en est ainsi, l'espace sous-jacent à X *est fini, et l'anneau* A *de* X *est composé direct des anneaux locaux (artiniens) des points de* X.

On sait que a) entraîne la dernière assertion (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 1 de la prop. 9); tout idéal premier de A est alors maximal et est l'image réciproque de l'idéal maximal de l'un des composants locaux de A, donc l'espace X est fini et discret; a) entraîne donc b), et b) entraîne évidemment c). Pour voir que c) entraîne a), montrons d'abord que X est alors fini; on peut en effet se ramener au cas où X est affine, et on sait qu'un anneau noethérien dont tous les idéaux premiers sont maximaux est artinien (*loc. cit.*, prop. 9), d'où notre assertion. L'espace sous-jacent X est alors discret, somme topologique d'un nombre fini de points x_i, et les anneaux locaux $\mathcal{O}_{x_i} = A_i$ sont artiniens; il est clair que X est isomorphe au schéma affine spectre premier de l'anneau A composé direct des A_i.

On notera qu'un schéma noethérien peut avoir un espace sous-jacent *fini* sans être artinien, comme le montre l'exemple d'un spectre d'anneau de valuation discrète.

§ 3. Produit et somme de schémas. Changement de base

3.1. Somme de schémas

Soit (X_α) une famille quelconque de schémas; soit X un espace topologique *somme* des espaces sous-jacents X_α; X est alors réunion de

sous-espaces ouverts deux à deux disjoints X'_α, et pour chaque α il y a un homéomorphisme ψ_α de X_α sur X'_α. Si l'on munit chacun des X'_α du faisceau $(\psi_\alpha)_*(\mathcal{O}_{X_\alpha})$, il est clair que X devient un *schéma*, qu'on appelle *somme* de la famille de schémas (X_α) et que l'on note $\coprod_\alpha X_\alpha$.

Si Y est un schéma, l'application $f \mapsto (f \circ \psi_\alpha)$ est une bijection fonctorielle en Y

$$\mathrm{Hom}\Big(\coprod_\alpha X_\alpha, Y\Big) \simeq \prod_\alpha \mathrm{Hom}(X_\alpha, Y).$$

Autrement dit, $\coprod_\alpha X_\alpha$ *représente* le foncteur covariant $Y \mapsto \prod_\alpha \mathrm{Hom}(X_\alpha, Y)$ de la catégorie des schémas dans celle des ensembles (**0**, 1.1.11). En particulier, si les X_α sont des S-schémas (2.6), de morphismes structuraux g_α, X est un S-schéma pour l'unique morphisme $g : \coprod_\alpha X_\alpha \to S$ tel que $g \circ \psi_\alpha = g_\alpha$ pour tout α. La somme d'un nombre fini de schémas $X_1, \ldots, X_n$ se note aussi $X_1 \amalg X_2 \amalg \cdots \amalg X_n$; si les $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ sont affines, il en est de même de $X_1 \amalg X_2 \amalg \cdots \amalg X_n$, qui s'identifie à $\mathrm{Spec}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$.

3.2. Produit de schémas

Nous nous proposons dans ce n° de démontrer le théorème suivant:

Théorème (3.2.1) *Quels que soient le schéma* S *et les* S*-schémas* X, Y, *le produit fibré* $X \times_S Y$ (**0**, 1.2.2) *existe dans la catégorie des espaces localement annelés et est un schéma.*

Rappelons *(loc. cit.)* que l'objet $X \times_S Y$ représente par définition le foncteur

$$T \mapsto F(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y) \tag{3.2.1.1}$$

de la catégorie des S-espaces localement annelés dans celle des ensembles.

Pour prouver (3.2.1), nous allons utiliser les méthodes décrites dans (**0**, 4.5).

Vérifions en premier lieu la condition (ii) de (**0**, 4.5.4), c'est-à-dire montrons que F est un *faisceau* sur la catégorie ***Sch*** ((**0**, 4.5.6) et (2.3.6)): c'est évident puisqu'il en est ainsi de $T \mapsto \mathrm{Hom}_S(T, X)$ et de $T \mapsto \mathrm{Hom}_S(T, Y)$ (2.3.6) et qu'une limite projective de faisceaux sur ***Sch*** est un faisceau sur ***Sch*** (**0**, 4.5.6).

Cela permet déjà de se ramener, pour prouver (3.2.1), au cas où le schéma S est *affine*. En effet, soit (S_α) un recouvrement de S formé d'ouverts affines. En vertu de ce qui précède et de (**0**, 4.5.5), il suffit de montrer que chacun des foncteurs $F \times_{\mathbf{h}_S} \mathbf{h}_{S_\alpha}$ est représentable. Cela revient (**0**, 1.7.9) à établir que $T \mapsto F(T)$ est représentable quand on le restreint à la sous-catégorie des S_α-espaces localement annelés. Or, si $\varphi : X \to S$ et $\psi : Y \to S$ sont les morphismes structuraux, il est immédiat,

lorsque T est un S_α-espace localement annelé, que $\mathrm{Hom}_S(T,X)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{S_\alpha}(T,\varphi^{-1}(S_\alpha))$, et de même $\mathrm{Hom}_S(T,Y)$ à $\mathrm{Hom}_{S_\alpha}(T,\psi^{-1}(S_\alpha))$. Cela établit notre assertion.

Supposons donc désormais S affine, et considérons un recouvrement (X_λ) (resp. (Y_μ)) de X (resp. Y) par des ouverts affines. Nous allons voir que les sous-foncteurs $F_{\lambda\mu}: T \mapsto \mathrm{Hom}_S(T,X_\lambda) \times \mathrm{Hom}_S(T,Y_\mu)$ de F vérifient les conditions (i) et (iii) de (**0**, 4.5.4). Donnons-nous donc un S-espace localement annelé Z, et un élément (p,q) de F(Z), où $p: Z \to X$ et $q: Z \to Y$ sont des S-morphismes; cela détermine (**0**, 1.1.8) un morphisme fonctoriel $u: \mathbf{h}_Z \to F$, tel que, pour tout S-espace localement annelé T, $u(T)$ soit l'application $g \mapsto (p\circ g, q\circ g)$ de $\mathrm{Hom}_S(T,Z)$ dans F(T). Cela étant, montrons que le foncteur

(3.2.1.2) $$T \mapsto F_{\lambda\mu}(T) \times_{F(T)} \mathrm{Hom}_S(T,Z)$$

est *représentable* par un S-espace localement annelé induit sur un ouvert de Z. En effet, un élément du second membre de (3.2.1.2) est un triplet (v_λ, w_μ, g), où $g: T \to Z$, $v_\lambda: T \to X_\lambda$ et $w_\mu: T \to Y_\mu$ sont des S-morphismes tels que $v_\lambda = p\circ g$ et $w_\mu = q\circ g$. Or ces relations entraînent que $g(T) \subset Z_{\lambda\mu} = p^{-1}(X_\lambda) \cap q^{-1}(Y_\mu)$, et inversement, à tout S-morphisme $g: T \to Z$ vérifiant la condition précédente correspond un unique triplet $(p\circ g, q\circ g, g)$ élément du second membre de (3.2.1.2), puisque $p\circ g$ (resp. $q\circ g$) peut alors être identifié à un morphisme de Z dans X_λ (resp. Y_μ). En d'autres termes, le second membre de (3.2.1.2) s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_S(T,Z_{\lambda\mu})$, et le foncteur (3.2.1.2) est donc représenté par le couple $(Z_{\lambda\mu}, ((p|Z_{\lambda\mu}), (q|Z_{\lambda\mu}), j_{\lambda\mu}))$, où $j_{\lambda\mu}$ est l'injection canonique de $Z_{\lambda\mu}$ dans Z. Comme de plus les $Z_{\lambda\mu}$ forment un recouvrement de Z, cela prouve à la fois les conditions (i) et (iii) de (**0**, 4.5.4).

Il reste à prouver que les foncteurs $F_{\lambda\mu}$ sont représentables, autrement dit, on est ramené à prouver (3.2.1) lorsque S, X et Y sont *tous trois des schémas affines*, ce qui résulte de la proposition suivante:

Proposition (3.2.1.3) *Soient* A *un anneau*, B, C *deux* A*-algèbres*, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(C)$. *Posons* $Z = \mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$, *et soient p, q les* S*-morphismes correspondant* (2.3.3) *aux* A*-homomorphismes canoniques* $\beta: b \mapsto b\otimes 1$ *et* $\gamma: c \mapsto 1\otimes c$ *de* B *et* C *dans* $B\otimes_A C$; *alors le couple formé de* Z *et du couple* (p,q) *représente le foncteur* (3.2.1.1) *dans la catégorie des* S*-espaces localement annelés.*

En effet, dans cette catégorie, les foncteurs $T \mapsto \mathrm{Hom}_S(T,X)$, $T \to \mathrm{Hom}_S(T,Y)$ et $T \to \mathrm{Hom}_S(T,Z)$ sont isomorphes respectivement à

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, \Gamma(T,\mathscr{O}_T)), \quad T \mapsto \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(C, \Gamma(T,\mathscr{O}_T)),$$
$$T \to \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B\otimes_A C, \Gamma(T,\mathscr{O}_T)) \quad (1.6.3);$$

or, ce dernier est isomorphe à

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, \Gamma(T,\mathscr{O}_T)) \times \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(C, \Gamma(T,\mathscr{O}_T)),$$

d'où la conclusion.

(3.2.2) On déduit de (3.2.1) que *tous les produits fibrés existent* dans la catégorie des schémas. Conformément aux notations générales (**0**, 1.2.2), on notera $X \times_S Y$ le produit de deux S-schémas X, Y; lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine, on écrit aussi $X \times_A Y$. Lorsque $Y = \mathrm{Spec}(B)$ est un schéma affine, au lieu d'écrire $X \times_S Y$, on écrit aussi $X \otimes_S B$, et lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$ est en outre affine, on écrit $X \otimes_A B$.

Nous utiliserons pour les produits de schémas toutes les notations et tous les résultats généraux relatifs aux produits fibrés dans une catégorie (**0**, 1.2). En particulier, si $p_1 : X \times_S Y \to X$, $p_2 : X \times_S Y \to Y$ sont les projections canoniques, et $g : T \to X$, $h : T \to Y$ deux S-morphismes, on désigne par $(g,h)_S$ l'unique S-morphisme $f : T \to X \times_S Y$ tel que $p_1 \circ f = g$, $p_2 \circ f = h$. Lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(C)$, $T = \mathrm{Spec}(D)$ sont affines, et que g et h correspondent à des homomorphismes de A-algèbres $\rho : B \to D$, $\sigma : C \to D$, alors $(g,h)_S$ correspond à l'homomorphisme $\tau : B \otimes_A C \to D$ tel que $\tau(b \otimes c) = \rho(b)\sigma(c)$.

Lorsque S seul est un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$, on écrit $(g,h)_A$ au lieu de $(g,h)_S$ et $u \times_A v$ au lieu de $u \times_S v$ pour un produit de morphismes (**0**, 1.2.5).

Corollaire (3.2.3) *Soient* $Z = X \times_S Y$ *le produit de deux* S*-schémas,* $p : Z \to X$, $q : Z \to Y$ *les projections canoniques,* φ (resp. ψ) *le morphisme structural de* X (resp. Y). *Soient* U *une partie ouverte de* S, V (resp. W) *une partie ouverte de* X (resp. Y) *contenue dans* $\varphi^{-1}(U)$ (resp. $\psi^{-1}(U)$). *Alors le produit* $V \times_U W$ *s'identifie canoniquement au schéma induit par* Z *sur l'ouvert* $p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W)$ *(considéré comme* U*-schéma). En outre, si* $g : T \to X$, $h : T \to Y$ *sont des* S*-morphismes tels que* $g(T) \subset V$, $h(T) \subset W$, *le* U*-morphisme* $(g,h)_U$ *s'identifie à* $(g,h)_S$, *considéré comme morphisme de* T *dans* $p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W)$ (2.6.4).

Cela a été prouvé au cours de la démonstration de (3.2.1).

Corollaire (3.2.4) *Soient* (X_λ), (Y_μ) *deux familles de* S*-schémas,* X (resp. Y) *le* S*-schéma somme de la famille* (X_λ) (resp. (Y_μ)) (3.1). *Alors* $X \times_S Y$ *s'identifie à la somme de la famille* $(X_\lambda \times_S Y_\mu)$.

En effet, avec les notations de (3.2.3), l'espace sous-jacent à $X \times_S Y$ est somme des ouverts $p^{-1}(X_\lambda) \cap q^{-1}(Y_\mu)$, et il suffit d'appliquer (3.2.3).

Remarque **(3.2.5)** Le produit de deux S-schémas *noethériens n'est pas nécessairement noethérien*, même s'il s'agit de spectres de corps. Par exemple, si k est un corps non parfait de caractéristique $p > 0$, le produit tensoriel $A = k^{p^{-\infty}} \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ n'est pas un anneau noethérien: en effet, pour tout entier $n > 0$, il existe un $x_n \in k^{p^{-\infty}}$ tel que $x_n^{p^n} \in k$ et $x_n^{p^{n-1}} \notin k$. Si alors on considère l'élément $z_n = 1 \otimes x_n - x_n \otimes 1$ de A, on a $z_n^{p^n} = 0$, mais $z_n^{p^{n-1}} \neq 0$, puisque 1 et $x_n^{p^{n-1}}$ sont linéairement indépendants sur k.

On en conclut que le nilradical de A n'est pas nilpotent, donc A n'est pas noethérien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, n°6, cor de la prop. 15).

(3.2.6) Bien entendu, l'ensemble sous-jacent à un produit fibré $X \times_S Y$ de schémas *n'est pas du tout* le produit fibré des ensembles sous-jacents à X et Y (pour les applications structurales $X \to S$ et $Y \to S$). Les propositions qui suivent donnent plus de précisions sur ce point.

Proposition (3.2.7) *Soient* $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une famille de* S*-schémas, et pour chaque* i, *soit* $f_i = (\psi_i, \theta_i) : X'_i \to X_i$ *un* S*-morphisme de* S*-schémas. On suppose que* ψ_i *est un homéomorphisme de l'espace* X'_i *sur le sous-espace* $f_i(X'_i)$ *de* X_i, *et que pour tout point* $x'_i \in X'_i$, *l'homomorphisme* $\theta^{\#}_{x_i} : \mathcal{O}_{X_i, f_i(x'_i)} \to \mathcal{O}_{X'_i, x'_i}$ *est surjectif. Soient alors*

$$X = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n}{}_S\, X_i, \qquad X' = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n}{}_S\, X'_i,$$

$p_i : X \to X_i$, $p'_i : X' \to X'_i$ *les projections canoniques* $(1 \leqslant i \leqslant n)$,

$$f = f_1 \times_S f_2 \times_S \cdots \times_S f_n$$

le S*-morphisme produit* $X' \to X$. *Si l'on pose* $f = (\psi, \theta)$, *on a les propriétés suivantes*:

(i) ψ *est un homéomorphisme de l'espace* X' *sur le sous-espace* $f(X')$ *de* X.

(ii) $f(X') = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i^{-1}(f_i(X'_i))$.

(iii) *Pour tout point* $x' \in X'$, *si l'on pose* $x'_i = p'_i(x')$, *et si* $\mathfrak{a}_i$ *est le noyau de l'homomorphisme surjectif* $\theta^{\#}_{x_i} : \mathcal{O}_{X_i, f_i(x'_i)} \to \mathcal{O}_{X'_i, x'_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, *et* $\mathfrak{b}_i$ *son image par l'homomorphisme* $\mathcal{O}_{X_i, f_i(x'_i)} \to \mathcal{O}_{X, f(x)}$ *correspondant à la projection* p_i, *alors l'homomorphisme* $\theta^{\#}_x : \mathcal{O}_{X, f(x')} \to \mathcal{O}_{X', x'}$ *est surjectif et son noyau est l'idéal* $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathfrak{b}_i \mathcal{O}_{X, f(x')}$.

Il est clair que les questions sont locales sur S et sur les X_i; on peut donc supposer $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ affines. Le S-morphisme f_i correspond alors à un A-homomorphisme $\varphi_i : B_i \to \Gamma(X'_i, \mathcal{O}_{X'_i})$ (2.3.2); si $\mathfrak{n}_i$ est le noyau de cet homomorphisme, φ_i se factorise en $B_i \to B_i/\mathfrak{n}_i \to \Gamma(X'_i, \mathcal{O}_{X'_i})$, et par suite f_i se factorise en

$$X'_i \xrightarrow{g_i} Y_i \xrightarrow{u_i} X_i$$

où $Y_i = \mathrm{Spec}(B_i/\mathfrak{n}_i)$ et g_i correspond à un homomorphisme injectif $B_i/\mathfrak{n}_i \to \Gamma(X'_i, \mathcal{O}_{X'_i})$. Comme l'application continue sous-jacente à u_i est un homéomorphisme de Y_i sur un sous-espace fermé de X_i (1.2.5), on en conclut que l'application continue sous-jacente à g_i est un homéomorphisme de X'_i sur le sous-espace $g_i(X'_i)$ de Y_i. D'autre part, si $y_i \in Y_i$ et $x_i = u_i(y_i)$, on a $\mathcal{O}_{X_i, x_i} = (B_i)_{x_i}$ et $\mathcal{O}_{Y_i, y_i} = \mathcal{O}_{X_i, x_i}/(\mathfrak{n}_i)_{x_i}$. On voit donc, vu la transitivité du produit de morphismes (**0**, 1.2.5.2), que pour prouver la proposition, il suffit de le faire lorsque les f_i sont remplacés par les u_i et lorsque les f_i sont remplacés par les g_i.

En ce qui concerne les u_i, si l'on pose $B = B_1 \otimes_A B_2 \otimes_A \cdots \otimes_A B_n$, on a $X = \mathrm{Spec}(B)$, et le produit $Y = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} {}_S Y_i$ est égal à $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{n})$, où $\mathfrak{n}$ est la somme des idéaux $\mathrm{Im}(B_1 \otimes \cdots \otimes B_{i-1} \otimes \mathfrak{n}_i \otimes B_{i+1} \otimes \cdots \otimes B_n) = \mathfrak{q}_i$ (3.2.1.3); $u = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n : Y \to X$ correspond à l'homomorphisme canonique $B \to B/\mathfrak{n}$, et est par suite un homéomorphisme de Y sur le sous-espace fermé $u(Y)$ de X. En outre, si $y \in Y$, si y_i est la projection de y dans Y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $x = u(y)$, $x_i = u_i(y_i)$, le noyau de l'homomorphisme surjectif $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{Y,y}$ est l'idéal $\mathfrak{n}_x$, somme des $(\mathfrak{q}_i)_x$; mais $(\mathfrak{q}_i)_x$ est égal à $(\mathfrak{n}_i)_x \mathscr{O}_{X,x}$. Ceci prouve les assertions (i) et (iii) pour les u_i (voir plus loin pour l'assertion (ii)).

Prouvons maintenant (i) et (iii) pour les g_i; ou encore, en revenant aux notations initiales, supposons les homomorphismes

$$\theta^{\#}_{x_i'} : \mathscr{O}_{X_i, f_i(x_i)} \to \mathscr{O}_{X_i', x_i'}$$

bijectifs. Alors on peut identifier le schéma X_i' à l'espace localement annelé $(f_i(X_i'), \mathscr{O}_{X_i} | f_i(X_i'))$, où le faisceau structural est *induit* sur $f_i(X_i')$ par $\mathscr{O}_{X_i}$ (**0**, 3.7.1 et 4.3.1). Nous allons voir que le S-espace localement annelé $(f(X'), \mathscr{O}_X | f(X'))$, où le faisceau structural est induit par $\mathscr{O}_X$ sur le sous-espace $f(X')$ de X, est un *produit fibré* des X_i' sur S (dans la catégorie des S-espaces localement annelés), ce qui prouvera (i) et (iii) dans ce cas (3.2.1).

Considérons en effet un S-espace localement annelé T et des S-morphismes $v_i : T \to X_i'$; comme X' est le produit fibré des X_i' dans la catégorie des espaces localement annelés (3.2.1), le S-morphisme $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)_S$ est défini; après les identifications des X_i' à des espaces localement annelés induits sur les $f_i(X_i')$, on a $p_i' = p_i \circ f$, donc $p_i \circ (f \circ v) = v_i$ pour tout i. L'application sous-jacente à $f \circ v$ est une application continue de T dans le sous-espace $f(X')$ de X. D'autre part, pour tout $t \in T$, si $x' = v(t)$, $x = f(v(t))$, le composé

$$\mathscr{O}_{X,x} \xrightarrow{\theta^{\#}_{x'}} \mathscr{O}_{X',x'} \longrightarrow \mathscr{O}_{T,t}$$

est un homomorphisme local, donc $f \circ v$ est un S-morphisme de T dans le S-espace localement annelé $(f(X'), \mathscr{O}_X | f(X'))$, ce qui établit notre assertion.

Pour prouver (ii), nous le déduirons du corollaire suivant de (i) et (iii):

Corollaire (3.2.7.1) *Soient* X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *des* S*-schémas, et pour chaque indice* i, *soit* x_i *un point de* X_i. *Soit* $X = X_1 \times_S X_2 \times_S \cdots \times_S X_n$, *et pour chaque* i, *soit* $p_i : X \to X_i$ *la projection canonique. Soit* $g_i : \mathrm{Spec}(\kappa(x_i)) \to X_i$ *le* S*-morphisme canonique pour* $1 \leqslant i \leqslant n$ (2.5.4).

(i) *Pour qu'il existe un point* $x \in X$ *tel que* $p_i(x) = x_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$, *il faut et il suffit que les* x_i *soient tous au-dessus d'un même point* s *de* S.

(ii) *Lorsque cette condition est vérifiée, le* S*-morphisme canonique*

$$g = g_1 \times_S g_2 \times_S \cdots \times_S g_n : \quad Z = \mathrm{Spec}(\kappa(x_1) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(x_2) \cdots \otimes_{\kappa(s)} \kappa(x_n)) \to X \tag{3.2.7.2}$$

est un monomorphisme dont l'image $g(Z)$ *est l'ensemble* $\bigcap_i p_i^{-1}(x_i)$, *et* g *est un homéomorphisme de l'espace* Z *sur le sous-espace* $g(Z)$ *de* X.

En outre, pour tout point $x \in \bigcap_i p_i^{-1}(x_i)$, *l'homomorphisme canonique* $\mathcal{O}_{X_i, x_i} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *est surjectif pour tout* i.

La nécessité de la condition (i) est évidente, et sa suffisance résulte de (ii), puisque l'anneau $\kappa(x_1) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(x_2) \ldots \otimes_{\kappa(s)} \kappa(x_n)$ n'est pas réduit à 0 et a donc un spectre Z non vide. Il n'y a donc qu'à prouver (ii).

Comme les g_i sont des monomorphismes, il en est de même de g (**0**, 1.2.12); le fait que g soit un homéomorphisme de Z sur $g(Z)$ et la dernière assertion de l'énoncé résultent de (3.2.7, (i) et (iii)). Enfin, supposons que $x \in X$ soit tel que $p_i(x) = x_i$ pour tout i. On a alors un S-morphisme $q_i : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to \mathrm{Spec}(\kappa(x_i))$ pour tout i avec des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\kappa(x)) & \xrightarrow{q_i} & \mathrm{Spec}(\kappa(x_i)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_i} \\ X & \xrightarrow[p_i]{} & X_i \end{array}$$

où j est le morphisme canonique. Compte tenu du fait que Z s'identifie au produit des S-*schémas* $\mathrm{Spec}(\kappa(x_i))$, puisque $\mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to S$ est un monomorphisme (**0**, 1.2.14), il résulte de (**0**, 1.2.15) que j se factorise en

$$\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{g} X,$$

ce qui achève de prouver (3.2.7.1).

Remarquons qu'en général le produit tensoriel des $\kappa(x_i)$ a plusieurs idéaux premiers distincts (et peut en avoir une infinité); on voit donc qu'il peut y avoir *plusieurs points distincts dans* $X_1 \times_S X_2 \cdots \times_S X_n$ *ayant tous les mêmes projections* x_i *dans les* X_i.

(3.2.7.3) Pour prouver maintenant (3.2.7, (ii)), considérons, pour chaque i, un point $x_i \in f_i(X_i')$; par hypothèse. il existe un point $x_i' \in X_i'$ et un seul tel que $f_i(x_i') = x_i$. Si les x_i ne sont pas tous au-dessus d'un même point de S, on a $\bigcap_i p_i^{-1}(x_i) = \emptyset$. Dans le cas contraire, comme l'homomorphisme canonique $\kappa(x_i) \to \kappa(x_i')$ est *bijectif* en vertu de l'hypothèse, le sous-ensemble $\bigcap_i p_i'^{-1}(x_i')$, qui s'identifie à

$$\mathrm{Spec}(\kappa(x_1') \otimes_{\kappa(s)} \kappa(x_2') \otimes \cdots \otimes_{\kappa(s)} \kappa(x_n')),$$

est mis en correspondance biunivoque par f avec

$$\mathrm{Spec}(\kappa(x_1)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(x_2)\otimes\cdots\otimes_{\kappa(s)}\kappa(x_n)),$$

qui s'identifie à $\bigcap_i p_i^{-1}(x_i)$, ce qui achève de prouver que ce dernier ensemble est contenu dans $f(X')$.

Corollaire (3.2.8) *Soient* X, X' *deux schémas,* $p: X' \to X$ *un morphisme; considérons le schéma* $X'' = X' \times_X X'$, *et soient* $p_1: X'' \to X'$, $p_2: X'' \to X'$ *la première et la seconde projection* (**0**, 1.2.2). *Pour qu'une partie* M′ *de* X′ *soit de la forme* $p^{-1}(M)$, *où* M *est une partie de* X, *il faut et il suffit que l'on ait* $p_1^{-1}(M') = p_2^{-1}(M')$.

Le morphisme structural $q: X'' \to X$ étant égal à $p \circ p_1$ et à $p \circ p_2$ par définition, la relation est nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée; soient x' un point de M′, y' un point de $p^{-1}(p(x'))$; comme $p(y') = p(x')$, il existe, en vertu de (3.2.7.1), un point $x'' \in X''$ tel que $p_1(x'') = x'$, $p_2(x'') = y'$; comme $x'' \in p_1^{-1}(M') = p_2^{-1}(M')$ par hypothèse, on a $y' \in M'$, ce qui prouve le corollaire.

Corollaire (3.2.9) *Soient* X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *des* S-*schémas, et pour chaque* i, *soit* x_i *un point de* X_i *et soit* $X_i' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X_i, x_i})$; *soit* $f_i: X_i' \to X_i$ *le* S-*morphisme canonique* (2.5.1). *Soit* $X = X_1 \times_S X_2 \cdots \times_S X_n$ *le produit des* X_i *et, pour chaque* i, *soit* $p_i: X \to X_i$ *la projection canonique. Si* $X' = X_1' \times_S X_2' \cdots \times_S X_n'$, *et si* $f = (\psi, \theta)$ *est le morphisme produit* $f_1 \times_S f_2 \cdots \times_S f_n$ *de* X′ *dans* X, ψ *est un homéomorphisme de l'espace* X′ *sur le sous-espace* $\bigcap_i p_i^{-1}(X_i')$ *de* X, *et pour chaque* $x' \in X'$, $\theta^{\sharp}_{\psi(x')}$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{O}_{X, \psi(x')}$ *sur* $\mathscr{O}_{X', x'}$.

C'est une conséquence immédiate de (3.2.7), vu (2.5.2).

Le plus souvent, dans la situation de (3.2.9), on identifiera X′ au sous-espace $\bigcap_i p_i^{-1}(X_i')$ de X, et le faisceau $\mathscr{O}_{X'}$ au faisceau *induit* par $\mathscr{O}_X$ sur ce sous-espace (**0**, 3.1.4).

3.3. Produit tensoriel de Modules quasi-cohérents sur un produit de schémas

Définition (3.3.1) *Soient* S *un schéma,* X, Y *deux* S-*schémas,* $Z = X \times_S Y$, p, q *les projections de* Z *dans* X *et* Y *respectivement,* $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) *un* $\mathscr{O}_X$-*Module* (resp. *un* $\mathscr{O}_Y$-*Module*). *On appelle produit tensoriel de* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *sur* $\mathscr{O}_S$ (ou *sur* S) *et on note* $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{G}$ (ou $\mathscr{F} \otimes_S \mathscr{G}$) *le produit tensoriel* $p^*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_Z} q^*(\mathscr{G})$ *sur* Z.

Si X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des S-schémas, $\mathscr{F}_i$ un $\mathscr{O}_{X_i}$-Module $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on définit de la même manière le produit tensoriel $\mathscr{F}_1 \otimes_S \mathscr{F}_2 \otimes_S \cdots \otimes_S \mathscr{F}_n$ sur le schéma $Z = X_1 \times_S X_2 \cdots \times_S X_n$; c'est un $\mathscr{O}_Z$-module *quasi-cohérent* si les $\mathscr{F}_i$ le sont en vertu de (2.2.2, (v)) et de (**0**, 5.1.4); il est *cohérent* si les $\mathscr{F}_i$ le sont et si Z est *localement noethérien* en vertu de (**0**, 5.3.14) et (2.7.1).

On notera que si on prend $X=Y=S$, la définition (3.3.1) redonne le produit tensoriel de $\mathcal{O}_S$-Modules. En outre, comme $q^*(\mathcal{O}_Y)=\mathcal{O}_{X\times_S Y}$ (**0**, 4.3.4), le produit $\mathscr{F}\otimes_S\mathcal{O}_Y$ s'identifie canoniquement à $p^*(\mathscr{F})$, et de même $\mathcal{O}_X\otimes_S\mathscr{G}$ s'identifie canoniquement à $q^*(\mathscr{G})$. Plus particulièrement, si on prend $Y=S$ et qu'on désigne par f le morphisme structural $X\to Y$, on a $\mathcal{O}_X\otimes_Y\mathscr{G}=f^*(\mathscr{G})$: le produit tensoriel ordinaire et l'image réciproque apparaissent donc comme des cas particuliers du produit tensoriel général.

La déf. (3.3.1) entraîne immédiatement que, pour X et Y fixés, $\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G}$ est un *bifoncteur covariant additif et exact à droite* en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

Proposition (3.3.2) *Soient* S, X, Y *trois schémas affines d'anneaux respectifs* A, B, C, B *et* C *étant des* A*-algèbres. Soit* M (resp. N) *un* B*-module* (resp. C*-module*), $\mathscr{F}=\tilde{M}$ (resp. $\mathscr{G}=\tilde{N}$) *le faisceau quasi-cohérent associé; alors* $\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G}$ *est canoniquement isomorphe au faisceau associé au* $(B\otimes_A C)$*-module* $M\otimes_A N$.

En effet, en vertu de (1.7.7), $\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G}$ est canoniquement isomorphe au faisceau associé au $(B\otimes_A C)$-module

$$(M\otimes_B(B\otimes_A C))\otimes_{B\otimes_A C}((B\otimes_A C)\otimes_C N)$$

et en raison des isomorphismes canoniques entre produits tensoriels, ce dernier est isomorphe à $M\otimes_B(B\otimes_A C)\otimes_C N=(M\otimes_B B)\otimes_A(C\otimes_C N)=M\otimes_A N$.

Proposition (3.3.3) *Soient* $f: T\to X$, $g: T\to Y$ *deux* S*-morphismes,* $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) *un* $\mathcal{O}_X$*-Module* (resp. $\mathcal{O}_Y$*-Module*). *On a alors* $(f,g)_S^*(\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G})=f^*(\mathscr{F})\otimes_{\mathcal{O}_T}g^*(\mathscr{G})$.

Si p, q sont les projections de $X\times_S Y$, la formule résulte en effet des relations $(f,g)_S^*\circ p^*=f^*$ et $(f,g)_S^*\circ q^*=g^*$ (**0**, 3.5.5), et du fait qu'une image réciproque d'un produit tensoriel de faisceaux de modules est le produit tensoriel de leurs images réciproques (**0**, 4.3.3).

Corollaire (3.3.4) *Soient* $f: X\to X'$, $g: Y\to Y'$ *deux* S*-morphismes,* $\mathscr{F}'$ (resp. $\mathscr{G}'$) *un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module* (resp. $\mathcal{O}_{Y'}$*-Module*). *On a alors*

$$(f\otimes_S g)^*(\mathscr{F}'\otimes_S\mathscr{G}')=f^*(\mathscr{F}')\otimes_S g^*(\mathscr{G}').$$

Cela résulte de (3.3.3) et du fait que $f\times_S g=(f\circ p,g\circ q)_S$, p et q étant les projections de $X\times_S Y$.

Corollaire (3.3.5) *Soient* X, Y, Z *trois* S*-schémas,* $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$) *un* $\mathcal{O}_X$*-Module* (resp. $\mathcal{O}_Y$*-Module,* $\mathcal{O}_Z$*-Module*); *le faisceau* $\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G}\otimes_S\mathscr{H}$ *est l'image réciproque de* $(\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G})\otimes_S\mathscr{H}$ *par l'isomorphisme canonique de* $X\times_S Y\times_S Z$ *sur* $(X\times_S Y)\times_S Z$.

En effet, cet isomorphisme s'écrit $(p_1,p_2)_S\times_S p_3$, en désignant par p_1, p_2, p_3 les projections de $X\times_S Y\times_S Z$ (**0**, 1.2.13).

De même, l'image réciproque de $\mathscr{G}\otimes_S\mathscr{F}$ par l'isomorphisme canonique de $X\times_S Y$ sur $Y\times_S X$ est $\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G}$.

Corollaire (3.3.6) *Si* X *est un* S*-schéma, tout* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$ *est l'image réciproque de* $\mathscr{F}\otimes_S\mathcal{O}_S$ *par l'isomorphisme canonique de* X *sur* $X\times_S S$ (**0**, 1.2.7).

En effet, cet isomorphisme est $(1_X,\varphi)_S$, où φ est le morphisme structural $X\to S$, et le corollaire résulte de (3.3.3) et du fait que $\varphi^*(\mathcal{O}_S)=\mathcal{O}_X$.

(3.3.7) Soient X un S-schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module, $\varphi: S'\to S$ un morphisme; on désigne par $\mathscr{F}_{(\varphi)}$ ou $\mathscr{F}_{(S')}$ le faisceau $\mathscr{F}\otimes_S\mathcal{O}_{S'}$ sur $X\times_S S'=X_{(\varphi)}=X_{(S')}$; donc $\mathscr{F}_{(S')}=p^*(\mathscr{F})$, où p est la projection $X_{(S')}\to X$.

Proposition (3.3.8) *Soit* $\varphi': S''\to S'$ *un morphisme. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$ *sur le* S*-schéma* X, $(\mathscr{F}_{(\varphi)})_{(\varphi')}$ *est l'image réciproque de* $\mathscr{F}_{(\varphi\cdot\varphi')}$ *par l'isomorphisme canonique* $(X_{(\varphi)})_{(\varphi')}\simeq X_{(\varphi\cdot\varphi')}$ (**0**, 1.3.2).

Cela résulte aussitôt des définitions et de (**0**, 1.3.2), et s'écrit encore

$$(\mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}) \otimes_{S'} \mathscr{O}_{S''} = \mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S''}. \tag{3.3.8.1}$$

Proposition (3.3.9) *Soient* Y *un* S*-schéma,* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme. Pour tout* $\mathscr{O}_Y$*-Module* $\mathscr{G}$ *et tout morphisme* $S' \to S$, *on a* $(f_{(S')})^*(\mathscr{G}_{(S')}) = (f^*(\mathscr{G}))_{(S')}$.

Cela résulte aussitôt de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{(S')} & \xrightarrow{f_{(S')}} & Y_{(S')} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

Corollaire (3.3.10) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) *un* $\mathscr{O}_X$*-Module* (resp. $\mathscr{O}_Y$*-Module*). *L'image réciproque du faisceau* $(\mathscr{F}_{(S')}) \otimes_{S'} (\mathscr{G}_{(S')})$ *par l'isomorphisme canonique* $(X \times_S Y)_{(S')} \simeq (X_{(S')}) \times_{S'} (Y_{(S')})$ (**0**, 1.3.3) *est égale à* $(\mathscr{F} \otimes_S \mathscr{G})_{(S')}$.

Si p, q sont les projections de $X \times_S Y$, l'isomorphisme en question n'est autre que $(p_{(S')}, q_{(S')})_{S'}$; le corollaire résulte des prop. (3.3.3) et (3.3.9).

Proposition (3.3.11) *Avec les notations de* (3.3.1), *soient* z *un point de* $X \times_S Y$, $x = p(z)$, $y = q(z)$; *la fibre* $(\mathscr{F} \otimes_S \mathscr{G})_z$ *est isomorphe à* $(\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \mathscr{O}_z) \otimes_{\mathscr{O}_z} (\mathscr{G}_y \otimes_{\mathscr{O}_y} \mathscr{O}_z) = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \mathscr{O}_z \otimes_{\mathscr{O}_y} \mathscr{G}_y$.

Comme on peut se ramener au cas affine, la proposition résulte de (1.7.7).

Nous laissons au lecteur le soin d'étendre à un produit d'un nombre quelconque de facteurs les résultats démontrés dans ce numéro pour deux facteurs.

3.4. Changement de base; fibres

(3.4.1) Nous ne reprendrons pas ici les propriétés générales du produit fibré dans une catégorie, ni les définitions et propriétés des notions qui s'y rattachent, *changement de base*, *diagonale* et *noyaux*, qui ont été vues en détail dans les sections (**0**, 1.2), (**0**, 1.3), (**0**, 1.4). Nous nous bornerons à indiquer, dans ce paragraphe et les §§ 4 et 5, les propriétés spéciales relatives à ces notions appliquées à la catégorie des schémas.

(3.4.2) Un schéma X peut toujours être considéré comme un **Z**-schéma; il résulte de (**0**, 1.3.7) que les X*-sections de* $X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T]$ (où T est une indéterminée) correspondent biunivoquement aux *morphismes* $X \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T])$. Montrons que ces X-sections correspondent biunivoquement aussi aux *sections du faisceau structural* $\mathscr{O}_X$ *au-dessus de* X.

En effet, on sait que les morphismes $X \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T])$ correspondent biunivoquement aux homomorphismes d'anneaux $\mathbf{Z}[T] \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ (1.6.3). Or, ces derniers à leur tour sont entièrement déterminés par la donnée de l'image de T, qui est un élément arbitraire de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, d'où notre assertion.

(3.4.3) La notion de *changement de base* sera *fondamentale* dans cet ouvrage, étant à la source d'une foule de notions et de techniques variées.

Nous nous attacherons en particulier à l'étude de morphismes $f: X \to S$ possédant une certaine propriété $\boldsymbol{P}$ et qui, en outre, pour *tout* changement de base $S' \to S$, sont tels que le morphisme $f_{(S')}: X_{(S')} \to S'$ déduit de f possède aussi la propriété $\boldsymbol{P}$; nous dirons dans ce cas que *f possède la propriété $\boldsymbol{P}$ universelle.*

Très souvent, dans les applications, le morphisme de changement de base $S' \to S$ correspondra à un *schéma local* $S' = \mathrm{Spec}(A)$, et par suite (2.5.3) *se factorisera* à travers un morphisme $S' \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_s)$; l'anneau local A sera choisi suivant les circonstances, en relation avec l'anneau local $\mathscr{O}_s$ et en fonction des propriétés que l'on veut établir; ce pourra être un corps, ou un anneau local plus simple à étudier que $\mathscr{O}_s$ (par exemple un anneau local complet, ou un anneau hensélien (**IV***, 18.5), ou un anneau de valuation (cf. (4.7.5) et (8.6))). Pour le moment, nous allons nous limiter au cas où A est égal à $\mathscr{O}_s$ ou à un de ses anneaux quotients.

Proposition (3.4.4) *Soit $f: X \to S$ un morphisme.*

(i) *Supposons $S = \mathrm{Spec}(A)$ affine, et soit $S' = \mathrm{Spec}(R^{-1}A)$, où R est une partie multiplicative de A, de sorte que l'espace topologique sous-jacent à S' est canoniquement identifié à un sous-espace de S (1.6.6); soit $g: S' \to S$ le morphisme canonique. Alors, si l'on pose $X' = X \times_S S'$ et si $p = (\psi, \theta): X' \to X$ est la projection canonique, ψ est un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à X' sur le sous-espace $f^{-1}(S')$ de l'espace sous-jacent à X; en outre, pour tout $x' \in X'$, $\theta^{\#}_{\psi(x')}$ est un isomorphisme de $\mathscr{O}_{X,\psi(x')}$ sur $\mathscr{O}_{X',x'}$.*

(ii) *Sans hypothèse sur S, soient s un point de S, $S' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s})$ (dont l'espace sous-jacent est identifié à un sous-espace de l'espace sous-jacent à S); soit $g: S' \to S$ le morphisme canonique. Alors, si $X' = X \times_S S'$ et si $p = (\psi, \theta): X' \to X$ est la projection canonique, ψ et θ ont les mêmes propriétés que dans* (i).

Compte tenu de (1.6.6) et (2.5.2), c'est une conséquence de (3.2.7).

Proposition (3.4.5) *Soient $f: X \to Y$ un S-morphisme, $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ le S'-morphisme déduit de f par une extension $S' \to S$ du schéma de base S. Soit p* (resp. *q*) *la projection canonique $X_{(S')} \to X$* (resp. $Y_{(S')} \to Y$); *pour toute partie M de X, on a*

$$q^{-1}(f(M)) = f_{(S')}(p^{-1}(M)). \tag{3.4.5.1}$$

En effet, on a le carré cartésien (**0**, 1.3.4)

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\ p\ } & X_{(S')} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{(S')}} \\ Y & \xleftarrow[\ q\ ]{} & Y_{(S')} \end{array}$$

En vertu de (3.2.7.1), la relation $q(y')=f(x)$ pour $x\in M$, $y'\in Y_{(S')}$, équivaut à l'existence d'un $x'\in X_{(S')}$ tel que $p(x')=x$ et $f_{(S')}(x')=y'$; d'où le corollaire.

Proposition (3.4.6) *Soient* $f: X\to S$ *un morphisme de schémas, s un point de* S, $\mathfrak{a}_s$ *un idéal de* $\mathscr{O}_{S,s}$ *contenant une puissance de* $\mathfrak{m}_s$ (autrement dit, un idéal *ouvert* pour la topologie $\mathfrak{m}_s$-préadique). *Posons* $S'=\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}/\mathfrak{a}_s)$, $X'=X\times_S S'$, *et soit* $p=(\psi,\theta): X'\to X$ *la projection canonique; alors* ψ *est un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à* X' *sur le sous-espace* $f^{-1}(s)$ *de l'espace sous-jacent à* X; *en outre, pour tout* $x'\in X'$, *si l'on pose* $x=\psi(x')$, $\theta^{\sharp}_{x'}: \mathscr{O}_{X,x}\to\mathscr{O}_{X',x'}$ *est surjectif et a pour noyau* $\mathfrak{a}_s\mathscr{O}_{X,x}$, *de sorte que* $\mathscr{O}_{X',x'}$ *est isomorphe à* $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{a}_s\mathscr{O}_{X,x}$.

C'est une conséquence de (3.2.7), compte tenu de (2.5.2).

(3.4.7) Dans la suite de ce Traité, nous utiliserons surtout la prop. (3.4.6) lorsque $\mathfrak{a}_s$ est l'idéal maximal $\mathfrak{m}_s$ de $\mathscr{O}_{S,s}$; lorsqu'aucune confusion n'en résultera, nous noterons X_s *le* $\kappa(s)$*-schéma obtenu en transportant la structure de schéma de* $X'=X\otimes_S\kappa(s)$ *par la projection canonique p*, et c'est toujours de ce schéma qu'il s'agira lorsque nous parlerons de la *fibre* $f^{-1}(s)$ du morphisme f comme d'un schéma.

(3.4.8) Soient X, Y deux S-schémas, $h: X\to S$, $g: Y\to S$ les morphismes structuraux, $f: X\to Y$ un S-morphisme, de sorte que $h=g\circ f$. Par transitivité des changements de base, on a, à isomorphisme canonique près

$$X_s = X\times_Y Y_s \tag{3.4.8.1}$$

pour tout $s\in S$; le morphisme $f_s: X_s\to Y_s$ déduit de f par le changement de base $Y_s\to Y$ est tel que, pour tout $y\in Y_s=g^{-1}(s)$, la fibre $f_s^{-1}(y)$ *s'identifie en tant que* $\kappa(y)$*-schéma à* $f^{-1}(y)$, car le corps résiduel de Y_s au point y est le même que celui de Y en ce point, en vertu de (3.4.6).

Corollaire (3.4.9) *Soient* $f: X\to S$, $g: S'\to S$ *deux morphismes; posons* $X'=X_{(S')}=X\times_S S'$ *et* $f'=f_{(S')}: X'\to S'$; *soient s' un point de* S', $s=g(s')$. *Alors le* $\kappa(s')$*-schéma* $X'_{s'}=f'^{-1}(s')$ *est canoniquement isomorphe à* $X_s\otimes_{\kappa(s)}\kappa(s')$ («transitivité des fibres»).

En effet, par la transitivité des changements de base (**0**, 1.3.2), on a des isomorphismes canoniques de $(X\otimes_S\kappa(s))\otimes_{\kappa(s)}\kappa(s')$ et de

$$(X\times_S S')\otimes_{S'}\kappa(s')$$

sur $X\times_S\mathrm{Spec}(\kappa(s'))$.

La considération des fibres d'un morphisme permet souvent de ramener son étude à celle de ses fibres, donc au cas d'un morphisme dans le *spectre d'un corps*; nous en verrons de nombreux exemples, et nous n'en donnerons ici que le suivant:

Proposition (3.4.10) *Soient* B *un anneau,* $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ *un système inductif filtrant de* B*-algèbres, et soit* $A=\varinjlim A_\alpha$; *posons* $Y=\mathrm{Spec}(B)$, $X=\mathrm{Spec}(A_\alpha)$, $X=\mathrm{Spec}(A)$ *et soient* $u: X\to Y$, $u_\alpha: X_\alpha\to X$ *les morphismes structuraux. Alors:*

(i) *Pour que* $X=\emptyset$, *il faut et il suffit qu'il existe* $\gamma\in I$ *tel que* $X_\gamma=\emptyset$, *et l'on a alors* $X_\alpha=\emptyset$ *pour* $\alpha\geqslant\gamma$.

(ii) *On a*

$$u(X)=\bigcap_{\alpha\in I} u_\alpha(X_\alpha)\,. \tag{3.4.10.1}$$

L'assertion (i) n'est autre que la traduction de (**0**, 6.1.1). Pour prouver (ii), notons que, puisque u se factorise en

$$X \longrightarrow X_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} Y\,,$$

le premier membre de (3.4.10.1) est contenu dans le second. Inversement, soit $y\in Y-u(X)$; on a $u^{-1}(y)=\emptyset$ et $u^{-1}(y)$ est l'espace sous-jacent au $\kappa(y)$-schéma $\mathrm{Spec}(A\otimes_B\kappa(y))$ (3.4.6); comme dans la catégorie des B-modules le foncteur $\varinjlim$ commute au produit tensoriel, $A\otimes_B\kappa(y)$ est limite inductive du système inductif de $\kappa(y)$-algèbres $A_\alpha\otimes_B\kappa(y)$; en vertu de (**0**, 6.1.1) il existe α tel que $A_\alpha\otimes_B\kappa(y)=0$, donc $u_\alpha^{-1}(y)=\emptyset$ et $y\notin u_\alpha(X_\alpha)$. CQFD.

3.5. Points d'un schéma à valeurs dans un schéma; points géométriques

(3.5.1) Soit X un schéma; pour tout schéma T, on note encore X(T) l'ensemble $\mathrm{Hom}(T,X)$ des *morphismes de* T *dans* X, et les éléments de cet ensemble sont aussi appelés *points de* X *à valeurs dans* T (cf. (3.5.5)); $T\mapsto X(T)$ est donc un foncteur contravariant de la catégorie des schémas dans celle des ensembles (**0**, 1.1.1). On a vu (**0**, 1.2.3) que le produit de deux S-schémas X, Y est défini par l'isomorphisme canonique de foncteurs

$$(X\times_S Y)(T)\simeq X(T)\times_{S(T)} Y(T)\,. \tag{3.5.1.1}$$

(3.5.2) Si l'on fixe un schéma S et que l'on ne considère que les S-schémas et les S-morphismes, on notera $X(T)_S$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_S(T,X)$ des S-morphismes de T dans X, en se permettant de supprimer l'indice S lorsqu'aucune confusion n'est à craindre; on dit encore que les éléments de $X(T)_S$ sont les *points* (ou S-*points* lorsqu'il y a à craindre des confusions) *du* S-*schéma* X *à valeurs dans le* S-*schéma* T. En particulier une S-*section* de X (**0**, 1.1.10) n'est autre qu'un *point de* X *à valeurs dans* S. La formule (3.5.1.1) s'écrit aussi

$$(X\times_S Y)(T)_S = X(T)_S\times Y(T)_S\,; \tag{3.5.2.1}$$

plus généralement, si Z est un S-schéma, X, Y, T des Z-schémas (donc *ipso facto* des S-schémas), on a

$$(X\times_Z Y)(T)_S = X(T)_S\times_{Z(T)_S} Y(T)_S\,. \tag{3.5.2.2}$$

On rappelle que pour tout morphisme $S' \to S$, l'ensemble $X(S')_S = \mathrm{Hom}_S(S', X)$ s'identifie aussi à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{S'}(S', X')$, où $X' = X \times_S S'$, autrement dit à l'ensemble des S'-*sections de* X' (**0**, 1.3.7).

(3.5.3) Lorsque dans ce qui précède, T (resp. S) est un schéma affine d'anneau B (resp. A), on remplace T (resp. S) par B (resp. A) dans les notations, et on parle alors de *points de* X *à valeurs dans l'anneau* B, ou de *points du* A-*schéma* X *à valeurs dans la* A-*algèbre* B pour les éléments de X(B) et de $X(B)_A$ respectivement; $B \mapsto X(B)$ et $B \mapsto X(B)_A$ sont maintenant des foncteurs *covariants* en B. On écrira de même $X(T)_A$ pour l'ensemble des points du A-schéma X à valeurs dans le A-schéma T.

(3.5.4) Considérons en particulier le cas où T est de la forme Spec(A), où A est un anneau *local*; les éléments de X(A) correspondent alors biunivoquement aux homomorphismes *locaux* $\mathcal{O}_{X,x} \to A$ pour $x \in X$ (2.5.3); on dit que le point x de l'espace topologique sous-jacent à X est la *localité* du point de X à valeurs dans A auquel il correspond (bien entendu, plusieurs points distincts de X à valeurs dans A peuvent avoir la même localité), ou que le point de X à valeurs dans A qui correspond à x est *localisé en* x.

Plus particulièrement, un point de X à valeurs dans un *corps* K correspond biunivoquement à la donnée d'un point $x \in X$ et d'un homomorphisme $\kappa(x) \to K$ (de sorte que K doit être une *extension* de $\kappa(x)$). Lorsque X est un S-schéma, dire que $S' = \mathrm{Spec}(K)$ est un S-schéma signifie que K est une *extension d'un corps résiduel* $\kappa(s)$ pour un $s \in S$; un élément de $X(K)_S$, ou, comme on dit encore, un *point de* X *au-dessus de* s *à valeurs dans* K, consiste en la donnée d'un $\kappa(s)$-homomorphisme $\kappa(x) \to K$, où x est un point de l'espace topologique X *au-dessus de* s (donc $\kappa(x)$ une extension de $\kappa(s)$).

On appelle *points géométriques* d'un schéma X les points de X à valeurs dans un *corps algébriquement clos* K; si X est un S-schéma, s un point de S, un *point géométrique de* X *au-dessus de* s est un point géométrique de X localisé en un point de la fibre X_s de s dans X.[1]

(3.5.5) Soit $S = \mathrm{Spec}(k)$ le spectre d'un corps k; si X est un S-schéma, les S-*points de* X *à valeurs dans* k s'identifient aux S-sections de X, ou encore aux points x de l'espace X tels que l'homomorphisme canonique $k \to \kappa(x)$ soit *bijectif* puisqu'en un tel point il doit exister

[1] On utilise aussi parfois cette terminologie lorsque K est seulement *séparablement clos* (i.e. sa clôture algébrique est *radicielle* sur K). Nous mentionnerons explicitement au fur et à mesure les parties de notre traité où c'est cette deuxième convention qui est utilisée.

un monomorphisme $\kappa(x) \to k$ tel que le composé $k \to \kappa(x) \to k$ soit l'identité. On dit que ces points sont les points *rationnels sur* k du k-schéma X.

L'exemple $X = \mathrm{Spec}(K)$, K étant une extension de k distincte de k, montre qu'il n'existe pas nécessairement dans X de points rationnels sur k, même si $X \neq \emptyset$.

En supposant toujours que X soit un k-schéma, les points de x à valeurs dans une *extension* K de k correspondent biunivoquement aux *points rationnels de* $X_{(K)}$ (3.5.2). Pour un point *quelconque* $x \in X$, il y a toujours des extensions K de k pour lesquelles il y a un point x' de $X' = X_{(K)}$ *rationnel sur* K et dont l'image par la projection canonique $X' \to X$ soit x; il suffit en effet de prendre pour K une *extension de* $\kappa(x)$, le k-monomorphisme $\kappa(x) \to K$ donnant le point x' cherché. Quand on passe ainsi d'un point x à un point $x' \in X'$ rationnel sur K et au-dessus de x, on dit que l'on «*rend x rationnel*».

Proposition (3.5.6) *Soient* $S = \mathrm{Spec}(k)$ *le spectre d'un corps* k, X *un* S*-schéma; alors les points de* X *rationnels sur* k *sont fermés dans* X.

En effet, il suffit de voir qu'un tel point x est fermé dans tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ contenant x; or, par hypothèse l'homomorphisme composé $k \to A \to \kappa(x)$ est bijectif, donc $A/\mathfrak{j}_x$, isomorphe à l'image de A dans $\kappa(x)$, est égal à $\kappa(x)$, et $\mathfrak{j}_x$ est donc un idéal *maximal* de A.

3.6. Morphismes surjectifs

Dans la catégorie des schémas, les morphismes surjectifs sont *universellement surjectifs* (3.4.3); de façon précise:

Proposition (3.6.1) (i) *Si* $f: X \to X'$, $g: Y \to Y'$ *sont des* S*-morphismes surjectifs,* $f \times_S g$ *est surjectif.*

(ii) *Si* $f: X \to Y$ *est un* S*-morphisme surjectif,* $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *est surjectif pour tout changement de base* $S' \to S$.

Comme l'identité est un morphisme surjectif, et que le composé de deux surjections est une surjection, il suffit, par (**0**, 1.3.9), de prouver (ii); mais cette proposition résulte aussitôt de (3.4.5) appliqué à $M = X$.

Proposition (3.6.2) *Pour qu'un morphisme de schémas* $f: X \to Y$ *soit surjectif, il faut et il suffit que pour tout corps* K *et tout morphisme* $\mathrm{Spec}(K) \to Y$, *il existe une extension* K' *de* K *et un morphisme* $\mathrm{Spec}(K') \to X$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \leftarrow & \mathrm{Spec}(K') \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \leftarrow & \mathrm{Spec}(K) \end{array}$$

La condition est suffisante, car pour tout $y \in Y$, il suffit de l'appliquer au morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to Y$ (2.5.4). Inversement, supposons f surjectif, et soit $y \in Y$ l'image de l'unique point de $\mathrm{Spec}(K)$; il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Considérons alors le monomorphisme $\kappa(y) \to \kappa(x)$ correspondant à f (2.3.1), et prenons une extension K' de $\kappa(y)$ telle qu'il existe des $\kappa(y)$-monomorphismes de $\kappa(x)$ et de K dans K' (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 4, prop. 2); le morphisme $\mathrm{Spec}(K') \to X$ correspondant au monomorphisme $\kappa(x) \to K'$ (2.5.5) répond à la question.

Avec le langage introduit dans (3.5.3), on peut exprimer la condition obtenue dans (3.6.2) en disant que *tout point de* Y *à valeurs dans* K *provient d'un point de* X *à valeurs dans une extension de* K.

Corollaire (3.6.3) *Pour qu'un morphisme* $f = (\psi, \theta) : X \to Y$ *soit surjectif, il faut et il suffit que, pour tout corps* K, *il existe une extension algébriquement close* K' *de* K *telle que l'application* $X(K') \to Y(K')$ *correspondant à* f (3.5.1) *soit surjective.*

En vertu de (3.6.2), la condition est évidemment suffisante. Inversement, supposons f surjectif et montrons l'existence de l'extension K' cherchée pour tout corps K. Si p est la caractéristique de K, prenons pour K' une extension algébriquement close de K ayant sur le corps premier P une base de transcendance de cardinal strictement supérieur aux cardinaux de toutes les bases de transcendance sur P des corps résiduels de X et de Y ayant pour caractéristique p. Il s'agit alors de voir, avec les mêmes notations que dans (3.6.2), que tout monomorphisme $u : \kappa(y) \to K'$ se factorise en $\kappa(y) \xrightarrow{w} \kappa(x) \xrightarrow{v} K'$, où $w = \theta^{\mathrm{x}}$. Or, soit L une extension transcendante pure de P contenue dans $\kappa(y)$ et sur laquelle $\kappa(y)$ soit algébrique; si B est une base de transcendance de L sur P, on peut compléter $w(B)$ en une base de transcendance B' de $\kappa(x)$ sur P, puis (en raison de l'hypothèse faite sur les bases de trancendance de K') définir un monomorphisme v_1 de $P(B')$ dans K' tel que $v_1 \circ (w|L)$ coïncide avec $u|L$. Il existe d'autre part un isomorphisme $v_2 = u \circ w^{-1}$ de $w(\kappa(y))$ sur $u(\kappa(y))$ tel que v_2 et v_1 coïncident dans $w(L)$; comme $w(\kappa(y))$ et $P(B' - w(B))$ sont linéairement disjoints sur $w(L)$, on peut prolonger d'une seule manière v_1 et v_2 en un monomorphisme v_0 de $M = P(B')(w(\kappa(y)))$ dans K'; comme K' est algébriquement clos et $\kappa(x)$ algébrique sur M, on peut enfin prolonger v_0 en le monomorphisme $v : \kappa(x) \to K'$ cherché.

Proposition (3.6.4) *Soient* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme de* S*-schémas,* $g : S' \to S$ *un changement de base* surjectif, $X' = X_{(S')}$, $Y' = Y_{(S')}$, $f' = f_{(S')} : X' \to Y'$. *Considérons, pour un morphisme, la propriété d'être*:

(i) *surjectif*;
(ii) *injectif*;
(iii) *bijectif*;
(iv) *dominant*;
(v) *à fibres finies* (en tant qu'*ensembles*).

Alors, si **P** *désigne une des propriétés précédentes et si* f' *possède la propriété* **P**, *il en est de même de* f.

Comme le morphisme projection $Y' \to Y$ est lui aussi surjectif (3.6.1), on peut, en vertu de (**0**, 1.3.4), se borner au cas où $Y = S$, $Y' = S'$. Pour tout $y' \in Y'$, soit $y = g(y')$; on a entre les fibres $X_y, X'_{y'}$, la relation $X'_{y'} \cong X_y \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y')$ (3.4.9). Comme le morphisme $\mathrm{Spec}(\kappa(y')) \to \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ est surjectif, il en est de même de la projection $X'_{y'} \to X_y$ (3.6.1); donc si $X'_{y'}$ est non vide (resp. a au plus un point, resp. est un ensemble fini), il en est de même de X_y. Comme g est surjectif, cela prouve (i), (ii), (iii) et (v). D'autre part, la projection canonique $g' : X' \to X$ est aussi un morphisme surjectif (3.6.1), et l'on a $f \circ g' = g \circ f'$. Si f' est dominant, il en est de même de $g \circ f' = f \circ g'$; mais comme g' est surjectif, cela entraîne que f est dominant.

3.7. Morphismes radiciels

Proposition (3.7.1) *Soit* $f = (\psi, \theta) : X \to Y$ *un morphisme de schémas. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) f *est universellement injectif* (3.4.3).

b) *L'application* ψ *est injective et pour tout* $x \in X$, *le monomorphisme* $\theta^x : \kappa(\psi(x)) \to \kappa(x)$ (2.3.1) *fait de* $\kappa(x)$ *une extension radicielle de* $\kappa(\psi(x))$.

c) *Pour tout corps* K, *l'application* $X(K) \to Y(K)$ *correspondant à* f (3.5.1) *est injective.*

c') *Pour tout corps* K, *il existe une extension algébriquement close* K' *de* K *telle que l'application* $X(K') \to Y(K')$ *correspondant à* f *soit injective.*

c'') *Le morphisme diagonal* $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ (**0**, 1.4.3) *est surjectif.*

Montrons d'abord que a) entraîne b). Il est clair que a) implique que ψ est injectif; d'autre part, si $\kappa(x)$ n'est pas une extension radicielle de $\kappa(\psi(x))$, il existe deux $\kappa(\psi(x))$-monomorphismes distincts $\kappa(x) \to K$ dans une extension algébriquement close K de $\kappa(\psi(x))$; donc on aurait deux morphismes distincts g_1, g_2 de $\mathrm{Spec}(K)$ dans X, dont les composés $f \circ g_1$, $f \circ g_2$ seraient égaux au même morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to Y$. Mais alors, en posant $\mathrm{Spec}(K) = Y'$, il y aurait deux Y'-sections distinctes de $X_{(Y')}$ (**0**, 1.3.7); puisque K est un corps, les Y'-sections de $X_{(Y')}$ correspondent biunivoquement à leurs images (les points de $X_{(Y')}$ rationnels sur K (3.5.5)), donc $f_{(Y')} : X_{(Y')} \to Y'$ ne serait pas injectif, contrairement à l'hypothèse.

Pour voir que b) entraîne c), notons qu'en vertu de (2.5.5), c) signifie que pour un $y \in Y$ et un monomorphisme $\kappa(y) \to K$ dans un corps K, il ne peut exister deux $\kappa(y)$-monomorphismes distincts $\kappa(x_1) \to K$, $\kappa(x_2) \to K$, où x_1 et x_2 sont au-dessus de y. Or, b) entraîne d'abord que si on a deux tels monomorphismes, ils proviennent du même point x puisque ψ est injectif; en outre, puisque $\kappa(x)$ est extension radicielle de $\kappa(y)$, les deux monomorphismes $\kappa(x) \to K$ sont nécessairement égaux.

Il est clair que c) entraîne c'). Inversement, supposons c') vérifié; soient K un corps quelconque, K' une extension algébriquement close de K; alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(K) & \xrightarrow{\alpha} & Y(K) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} \\ X(K') & \xrightarrow[\alpha']{} & Y(K') \end{array}$$

est commutatif, φ et φ' provenant du morphisme $\mathrm{Spec}(K') \to \mathrm{Spec}(K)$, α et α' de f. Comme l'homomorphisme $K \to K'$ est injectif, φ est injectif par (2.5.5), et par hypothèse on peut choisir K' tel qu'il en soit de même de α'; donc α est injectif.

Pour voir que c') et c'') sont équivalentes, notons que pour que Δ_f soit surjectif, il faut et il suffit, en vertu de (3.6.3), que pour tout corps K, il existe une extension algébriquement close K' de K telle que l'application diagonale $X(K') \to (X \times_Y X)(K') = X(K') \times_{Y(K')} X(K')$ correspondant à Δ_f (3.5.1.1) soit surjective; mais par définition du produit fibré d'ensembles, cela signifie que l'application $X(K') \to Y(K')$ est injective; d'où la conclusion.

Enfin, pour prouver que c) entraîne a), notons que si c) est vérifiée, alors pour tout changement de base $Y' \to Y$, l'application

$$(X \times_Y Y')(K) \to Y'(K)$$

est encore injective, comme on le vérifie aussitôt en notant que $(X \times_Y Y')(K) = X(K) \times_{Y(K)} Y'(K)$. Il suffit donc de prouver que f est injectif; or, si x_1 et x_2 sont deux points de X tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$, il existe un corps K, extension de $\kappa(y)$, et des $\kappa(y)$-monomorphismes $\kappa(x_1) \to K$, $\kappa(x_2) \to K$ (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 4, prop. 2); les morphismes correspondants u_1, u_2 de Spec(K) dans X sont donc tels que $f \circ u_1 = f \circ u_2$, et par hypothèse cela entraîne $u_1 = u_2$, donc $x_1 = x_2$. CQFD.

On obtient donc facilement des exemples de morphismes injectifs (et même bijectifs) mais non universellement injectifs: il suffit de prendre un morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$, où K est une extension *séparable* de k distincte de k.

Définition (3.7.2) *On dit qu'un morphisme est* radiciel *s'il vérifie les conditions équivalentes de* (3.7.1).

Proposition (3.7.3) *Un monomorphisme de schémas* $f: X \to Y$ *est radiciel; de façon plus précise, pour tout* $y \in Y$, *la fibre* $X_y = f^{-1}(y)$ (3.4.7) *est un* $\kappa(y)$*-schéma qui est vide ou* $\kappa(y)$*-isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$.

La première assertion résulte de (3.7.1, c)). Donc (3.7.1, b)) X_y est vide ou réduit à un point, et en tout cas affine; en outre le morphisme $X_y \to \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ déduit de f par changement de base est un monomorphisme (**0**, 1.3.6). Mais, si A est l'anneau de X_y, cela signifie ((**0**, 1.4.11) et (3.2.1.2)) que l'homomorphisme canonique $A \otimes_{\kappa(y)} A \to A$ qui, à tout produit tensoriel $a' \otimes a''$ fait correspondre $a'a''$, est *bijectif*. Cela entraîne évidemment que $A = \kappa(y)$, sans quoi il y aurait un élément $a \in A$ non dans $\kappa(y)$ et les images de $a \otimes 1$ et $1 \otimes a$ dans A seraient égales, alors que $a \otimes 1 \neq 1 \otimes a$ puisque 1 et a forment un système libre sur $\kappa(y)$.

(3.7.4) La caractérisation (3.7.1, b)) des morphismes radiciels montre qu'elle ne fait intervenir que les *fibres* du morphisme. Cela conduit à définir un morphisme $f: X \to Y$ *radiciel en un point* $y \in Y$, par la condition que la *fibre* X_y de f au point y est *vide ou réduite à un point* x, et que dans le second cas $\kappa(x)$ est une extension *radicielle* de $\kappa(y)$. Il revient au même de dire que le morphisme $X_y \to \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ déduit de f par changement de base est *radiciel*. Pour que f soit *radiciel*, il faut et il suffit que f soit *radiciel en chaque point* $y \in Y$.

Proposition (3.7.5) (i) *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *deux morphismes. Si* f *est radiciel en un point* y, *et* g *radiciel au point* $z = g(y)$, *alors* $g \circ f$ *est radiciel au point* z. *Inversement, si* $g \circ f$ *est radiciel au point* z, f *est radiciel au point* y; *si de plus* f *est surjectif,* g *est radiciel au point* z.

(ii) *Soient* $f: X \to Y$, $h: Y' \to Y$ *deux morphismes, et soit* $f' = f_{(Y')}: X' = X \times_Y Y' \to Y'$. *Soient* $y' \in Y'$ *et* $y = h(y')$; *pour que* f *soit radiciel au point* y, *il faut et il suffit que* f' *soit radiciel au point* y'.

(i) Si f est radiciel au point y et g radiciel au point z, $g^{-1}(z)$ est réduit au point y et $f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y)$ est vide ou réduit à un seul point x; en outre $\kappa(x)$ est extension radicielle de $\kappa(y)$ et $\kappa(y)$ extension radicielle de $\kappa(z)$, donc $\kappa(x)$ est extension radicielle de $\kappa(z)$. Inversement, si $g \circ f$ est radiciel au point z, $f^{-1}(y)$ ne peut contenir deux points distincts, sans quoi ces deux points appartiendraient à $f^{-1}(g^{-1}(z))$; en outre, si $f^{-1}(y)$ n'est pas vide, et par suite est réduit à un seul point x, on a $\kappa(z) \subset \kappa(y) \subset \kappa(x)$, et comme $\kappa(x)$ est radiciel sur $\kappa(z)$, il est aussi radiciel sur $\kappa(y)$. Si de plus f est surjectif, $g^{-1}(z)$ ne peut avoir de point autre que y, sans quoi $f^{-1}(g^{-1}(z))$ aurait au moins deux points distincts; par ailleurs, $\kappa(y)$, étant contenu dans $\kappa(x)$, est radiciel sur $\kappa(z)$.

(ii) Comme on a $X'_{y'} = X_y \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y')$ (3.4.9), on peut se borner au cas ou $Y = \mathrm{Spec}(\kappa(y))$, $Y' = \mathrm{Spec}(\kappa(y'))$. Il est clair que si f est uni-

versellement injectif, il en est de même de f' par définition et transitivité des changements de base. Inversement, supposons f' universellement injectif et prouvons qu'il en est de même de f. Soient $Y_1 \to Y$ un changement de base quelconque, $X_1 = X \times_Y Y_1$, $f_1 = f_{(Y_1)}$. Posons d'autre part $Y'_1 = Y_1 \times_Y Y'$, $X'_1 = X' \times_{Y'} Y'_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1$, $f'_1 = f'_{(Y'_1)} = (f_1)_{(Y'_1)} : X'_1 \to Y'_1$; comme f' est universellement injectif, il en est de même de f'_1. Mais puisque $h : Y' \to Y$ est surjectif, il en est de même de $h_1 : Y'_1 \to Y_1$ et de $h'_1 : X'_1 \to X_1$ (3.6.1); tout point $y_1 \in Y_1$ est donc de la forme $h_1(y'_1)$ et $f_1^{-1}(y_1)$ est l'image par h'_1 de $f_1'^{-1}(y'_1)$; cette dernière étant vide ou réduite à un point, il en est de même de $f_1^{-1}(y_1)$. CQFD.

Corollaire (3.7.6) (i) *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes. Si* f *et* g *sont radiciels, il en est de même de* $g \circ f$. *Inversement, si* $g \circ f$ *est radiciel,* f *est radiciel; si de plus* f *est surjectif,* g *est radiciel.*

(ii) *Si les* S*-morphismes* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *sont radiciels, il en est de même de* $f \times_S g$.

(iii) *Si le* S*-morphisme* $f : X \to Y$ *est radiciel, il en est de même de* $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *pour tout changement de base* $g : S' \to S$. *Inversement, si* g *est surjectif et* $f_{(S')}$ *radiciel,* f *est radiciel.*

Les assertions (i) et (iii) résultent directement de (3.7.5), et (ii) se déduit de (i) et (iii) (**0**, 1.3.9).

3.8. Morphismes universellement ouverts, universellement fermés, universellement bicontinus

Définition (3.8.1) *On dit qu'un morphisme de schémas* $f : X \to Y$ *est universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*) *si, pour tout changement de base* $Y' \to Y$, *le morphisme* $f_{(Y')} : X_{(Y')} \to Y'$ *est ouvert* (resp. *fermé*, resp. *un homéomorphisme sur son image*, resp. *un homéomorphisme sur* Y').

Proposition (3.8.2) (i) *Le composé de deux morphismes universellement ouverts* (resp. *universellement fermés*, resp. *universellement bicontinus*, resp. *deux homéomorphismes universels*) *l'est aussi.*

(ii) *Si* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes universellement ouverts* (resp. *universellement fermés*, resp. *universellement bicontinus*, resp. *deux homéomorphismes universels*), *il en est de même de* $f \times_S g$.

(iii) *Si* $f : X \to Y$ *est un* S*-morphisme universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*), *il en est de même de* $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *pour tout changement de base* $S' \to S$.

(iv) *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes tels que* f *soit surjectif; si* $g \circ f$ *est universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*), *il en est de même de* g.

(v) *Soit* (U_α) *un recouvrement ouvert de* Y. *Pour que* $f : X \to Y$ *soit universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*), *il faut et il suffit que, pout tout* α, *sa restriction* $f^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ *le soit.*

*(vi) *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *deux morphismes; si* $g \circ f$ *est universellement bicontinu, il en est de même de* f; *si* $g \circ f$ *est universellement fermé et si de plus* g *est séparé,* f *est universellement fermé.**

L'assertion (i) résulte aussitôt des définitions, et il en est de même de (iii), en se ramenant au cas où $Y = S$, $Y' = S'$ (**0**, 1.3.4); on sait que (ii) découle de (i) et (iii) (**0**, 1.3.9). Pour prouver (iv), notons que pour tout morphisme $Z' \to Z$, $f_{(Z')}: X_{(Z')} \to Y_{(Z')}$ est surjectif (3.6.1); on peut donc se borner à prouver que si $g \circ f$ est ouvert (resp. fermé, resp. un homéomorphisme sur son image, resp. un homéomorphisme bijectif), il en est de même de g, et il s'agit donc d'une question purement topologique. Pour le cas ou $g \circ f$ est ouvert (resp. fermé), le fait que g est alors ouvert (resp. fermé) résulte de Bourbaki, *Top. gén*, chap. I, 4e éd., § 5, n° 1, prop. 1; pour les deux autres cas, on peut se borner au cas où $g(f(X)) = g(Y) = Z$, autrement dit au cas où $g \circ f$ est un homéomorphisme de X sur Z; comme f est surjectif, g est nécessairement bijectif, et comme g est une application continue ouverte d'après ce qui précède, g est bien un homéomorphisme de Y zur Z.

Enfin, la nécessité de (v) résulte de (iii) et de (3.2.3). Inversement, supposons remplie la condition (v) et soit $g: Y' \to Y$ un morphisme; alors les $g^{-1}(U_\alpha) = U'_\alpha$ forment un recouvrement ouvert de Y' et si l'on note f_α la restriction $f^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ de f, et f' le morphisme $f_{(Y')}$, la restriction $f'^{-1}(U'_\alpha) \to U'_\alpha$ de f' n'est autre que $(f_\alpha)_{(U')}$ (3.2.3). On peut donc se borner à prouver que l'hypothèse entraîne que f est ouvert (resp. fermé, resp. un homéomorphisme sur son image, resp. un homéomorphisme sur Y), ce qui est immédiat.

Pour la démonstration des assertions de (vi), voir (5.1.8) et (5.2.8). *On notera qu'il n'y a pas de propriété analogue pour les morphismes universellement ouverts: cela résulte aussitôt par exemple de (7.3.13).*

Proposition (3.8.3) *Un morphisme universellement bicontinu* $f: X \to Y$ *est radiciel.*

En effet, il est universellement injectif (3.7.1).

Remarque **(3.8.4)** Un monomorphisme (même surjectif) $f: X \to Y$ n'est pas nécessairement un homéomorphisme sur son image. On le voit par exemple en prenant pour Y un spectre d'un anneau de valuation discrète A, de corps résiduel k et de corps des fractions K, pour X le spectre de $B = K \times k$, somme des spectres de k et de K, et pour morphisme f celui qui correspond à l'homomorphisme $(\rho_1, \rho_2): A \to K \times k$, où $\rho_1: A \to K$ et $\rho_2: A \to k$ sont les homomorphismes canoniques.

Comme celle d'application ouverte (**0**, 2.8), la notion de morphisme universellement ouvert se *localise*:

Définition (3.8.5) *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme de schémas, x un point de* X. *On dit que* f *est universellement ouvert au point x si, pour tout changement de base* $Y' \to Y$, *en posant* $X' = X \times_Y Y'$ *et* $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$, *le morphisme* f' *est ouvert en tout point* x' *de* X' *au-dessus de x.*

Proposition (3.8.6) (i) *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *deux morphismes, x un point de* X, $y = f(x)$. *Si* f *est universellement ouvert au point x et g universellement ouvert au point y, alors* $g \circ f$ *est universellement ouvert au point x. Inversement, si* $g \circ f$ *est universellement ouvert au point x, g est universellement ouvert au point y.*

(ii) *Si* $f: X \to Y$ *est un S-morphisme universellement ouvert en un point* $x \in X$, *alors, pour tout changement de base* $S' \to S$, $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *est universellement ouvert en tout point de* $X_{(S')}$ *au-dessus de x.*

En effet, (ii) est conséquence immédiate de la définition (3.8.4) et de la transitivité des changements de base. Il résulte aussi de la définition (3.8.5) et de (3.4.5) que, pour prouver (i), il suffit de la faire lorsqu'on y supprime partout le mot «universellement», et alors cela résulte de (**0**, 2.8.2).

***Proposition (3.8.7)** *Soient* X, Y *deux schémas,* $f: X \to Y$ *un morphisme,* x *un point de* X. *Soit* (Y_i) *une famille localement finie de sous-schémas fermés telle que l'espace* Y *soit réunion des* Y_i, *et supposons que pour tout* i *tel que* $f(x) \in Y_i$, *la restriction* $f_i: f^{-1}(Y_i) \to Y_i$ *de* f *soit un morphisme ouvert* (resp. *universellement ouvert*) *au point* x; *alors* f *est ouvert* (resp. *universellement ouvert*) *au point* x.

La proposition relative aux morphismes ouverts n'est donnée que pour mémoire, ayant déjà été prouvée (**0**, 2.10.2, (ii)). Pour le cas des morphismes universellement ouverts, considérons un morphisme $g: Y' \to Y$ et dans Y' les sous-schémas fermés $Y'_i = g^{-1}(Y_i)$ (4.3.1), dont les espaces sous-jacents forment un recouvrement localement fini de Y'; si $f' = f_{(Y')}: X_{(Y')} \to Y'$, la restriction $f'_i: f'^{-1}(Y'_i) \to Y'_i$ de f' est égale à $(f_i)_{(Y_i)}$. On est alors ramené à (**0**, 2.10.2, (ii)) appliqué à f'.*

***Proposition (3.8.8)** *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme de schémas,* $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$) *une famille finie de sous-schémas fermés de* X (resp. Y), $j_i: X_i \to X$ (resp. $h_i: Y_i \to Y$) *l'injection canonique. Supposons que l'espace sous-jacent à* X *soit réunion des* X_i, *et que pour tout* i, *il y ait un morphisme* $f_i: X_i \to Y_i$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ {\scriptstyle j_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_i} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

Alors, pour que f *soit fermé* (resp. *universellement fermé*), *il faut et il suffit que chacun des* f_i *le soit.*

Si f est fermé, il en est évidemment de même de chacun des f_i (les Y_i étant fermés dans Y); inversement, si chacun des f_i est fermé, pour toute partie fermée F de X, $f_i(F \cap X_i) = f(F \cap X_i)$ est fermé dans Y_i, donc dans Y, et comme $f(F)$ est réunion des $f(F \cap X_i)$, il est fermé dans Y.

Passons au cas des morphismes universellement fermés. La condition est nécessaire, car j_i est une immersion fermée, donc un morphisme universellement fermé (4.3.7), et si f est universellement fermé, il en est de même de $f \circ j_i = h_i \circ f_i$. Mais comme h_i est une immersion fermée, donc un morphisme séparé (5.3.1), f_i est universellement fermé (5.2.8).

Inversement, supposons que chaque f_i soit universellement fermé, et considérons le schéma Z *somme* des X_i (3.1); soit $u: Z \to X$ le morphisme qui se réduit à j_i dans chacun des X_i. La restriction de $f \circ u$ à chaque X_i est égale à $f \circ j_i = h_i \circ f_i$, donc est universellement fermée puisqu'il en est ainsi de h_i et de f_i ((3.8.2) et (4.3.7)); on en déduit aussitôt par (3.2.4) que $f \circ u$ est universellement fermé. Mais comme u est surjectif par hypothèse, on conclut que f est universellement fermé par (3.8.2, (iv)).*

***(3.8.9)** Si X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, on déduit de (3.8.8) que, pour vérifier qu'un morphisme $f: X \to Y$ est fermé (resp. universellement fermé), on peut se ramener à le faire pour des morphismes *dominants* de schémas *intègres*. En effet, soient X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les sous-schémas réduits de X ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de X (4.6.1), qui sont donc *intègres*. Soit d'autre part Y_i l'unique sous-schéma fermé réduit de Y ayant l'espace irréductible $\overline{f(X_i)}$ comme espace sous-jacent (4.6.1). Si $g_i: X_i \to X$ (resp. $h_i: Y_i \to Y$)

est le morphisme d'injection canonique, il existe un morphisme dominant $f_i : X_i \to Y_i$ tel que $f \circ g_i = h_i \circ f_i$ (4.6.2); on est alors dans les conditions d'application de (3.8.7), et pour que f soit fermé (resp. universellement fermé), il faut et il suffit que les f_i le soient. *

***Proposition (3.8.10)** *Soient* X, Y *deux* S-*schémas*, $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme. Pour que* f *soit universellement fermé, il suffit que, pour tout changement de base* $S' \to S$ *où* $S' = S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[(T_\lambda)_{\lambda \in L}]$ (noté $S[(T_\lambda)_{\lambda \in L}]$, où les T_λ sont des indéterminées), *le morphisme* $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *soit fermé.*

Notons d'abord que si (S_α) est un recouvrement ouvert de S, Y_α l'image réciproque de S_α dans Y, il suffit de prouver que chacun des morphismes $f_\alpha : f^{-1}(Y_\alpha) \to Y_\alpha$ restriction de f est universellement fermé (3.8.2, (v)); or l'image réciproque de S_α dans S' est $S_\alpha[(T_\lambda)_{\lambda \in L}] = S'_\alpha$ et $(f_\alpha)_{(S')}$ est la restriction $f_{(S')}^{-1}(Y'_\alpha) \to Y'_\alpha$ de $f_{(S')}$, où Y'_α est l'image réciproque de S'_α dans $Y_{(S')}$; si la proposition est prouvée pour S_α et f_α, elle le sera pour S et f. On peut donc déjà se borner au cas où S est *affine*.

Soit maintenant (U_β) un recouvrement ouvert de Y; pour que f soit universellement fermé, il suffit encore de prouver que chacun des morphismes $f_\beta : f^{-1}(U_\beta) \to U_\beta$ restriction de f est universellement fermé (3.8.2, (v)); ici encore $(f_\beta)_{(S')}$ est la restriction $f_{(S')}^{-1}(U'_\beta) \to U'_\beta$ de $f_{(S')}$, où $U'_\beta = U_\beta \times_S S'$ est l'image réciproque de U_β dans $Y_{(S')}$; si la proposition est prouvée pour les U_β et f_β, elle le sera pour Y et f. On peut donc aussi supposer que Y est *affine*.

Montrons d'abord qu'il suffit que pour un changement de base *arbitraire* $S' \to S$, $f_{(S')}$ soit fermé. En effet, considérons un Y-schéma quelconque Y'; Y' peut alors être considéré comme un S-schéma, et comme le morphisme $Y \to S$ est séparé (5.2.2), $X \times_Y Y'$ (resp. $Y \times_Y Y' = Y'$) s'identifie à un sous-schéma *fermé* de $X \times_S Y'$ (resp. $Y \times_S Y'$) (5.2.3). Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{f \times 1_{Y'}} & Y \times_Y Y' = Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times_S Y' & \xrightarrow[f_{(Y')}]{} & Y \times_S Y' \end{array}$$

les flèches verticales sont des immersions fermées; il en résulte aussitôt que si $f_{(Y')}$ est un morphisme fermé, il en est de même de $f \times 1_{Y'}$.

Il reste à montrer qu'on peut se borner à vérifier que $f_{(S')}$ est fermé pour les S' de la forme $S[(T_\lambda)]$. Or, par hypothèse S est affine, et si (S'_γ) est un recouvrement ouvert de S', on voit comme plus haut que pour que $f_{(S')}$ soit fermé il suffit que les $f_{(S'_\gamma)}$ le soient; on peut donc aussi supposer S' *affine*. Si alors $S = \mathrm{Spec}(A)$, on a $S' = \mathrm{Spec}(A')$, où A' est une A-algèbre; soit $(t_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système générateur de cette algèbre, de sorte qu'on a un A-homomorphisme surjectif $A[(T_\lambda)] \to A'$ identifiant A' à $A[(T_\lambda)]/\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal. Si $S'' = \mathrm{Spec}(A[(T_\lambda)])$, S' est donc un *sous-schéma fermé* de S''; $X_{(S')}$ (resp. $Y_{(S')}$) s'identifie donc à un sous-schéma fermé de $X_{(S'')}$ (resp. $Y_{(S'')}$), image réciproque de S' (4.3.1) et $f_{(S')}$ à la restriction de $f_{(S'')}$ à $X_{(S')}$; si $f_{(S'')}$ est un morphisme fermé, il en est donc de même de $f_{(S')}$. CQFD. *

3.9. Morphismes génériants

Proposition (3.9.1) *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de schémas,* x *un point de* X, $y = f(x)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Pour toute générisation* y' *de* y *dans* Y, *il existe une générisation* x' *de* x *dans* X *telle que* $f(x') = y'$.

a') *L'image par f de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ (2.5.2) *est* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$.

b) *Pour toute partie fermée irréductible* Y' *de* Y *contenant* y, *il existe une composante irréductible de* $X'=f^{-1}(Y')$ *contenant* x *et dominant* Y'.

Il est clair que a') entraîne a) et par ailleurs, par définition d'une générisation, l'image par f de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ est toujours contenue dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$; donc a) et a') sont équivalentes. Il est immédiat que b) entraîne a), car si y' est une générisation de y, $Y'=\overline{\{y'\}}$ est une partie fermée irréductible de Y contenant y; si x' est le point générique d'une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ qui contient x et domine Y', on a $f(x')=y'$ (**0**, 2.1.12) et x' est une générisation de x. Inversement, a) entraîne b): en effet, soit y' le point générique de Y' et soit x' une générisation de x telle que $f(x')=y'$; soit Z' une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ contenant x' (donc x); comme $f(x')$ est déjà dense dans Y', il en est ainsi *a fortiori* de $f(Z')$.

Définition (3.9.2) *On dit qu'un morphisme* $f: X\to Y$ *est générisant en un point* $x\in X$ *s'il vérifie les conditions équivalentes de* (3.9.1). *On dit que* f *est universellement générisant au point* x, *si, pour tout changement de base* $Y_1\to Y$, *le morphisme* $f_{(Y_1)}: X_{(Y_1)}\to Y_1$ *est générisant en tout point de* $X_{(Y_1)}$ *au-dessus de* x. *On dit que* f *est générisant* (resp. *universellement générisant*) *s'il l'est en tout point de* X.

Il est clair que si $f: X\to Y$ est générisant (resp. universellement générisant) en $x\in X$, et $g: Y\to Z$ générisant (resp. universellement générisant) au point $y=f(x)$, alors $g\circ f$ est générisant (resp. universellement générisant) au point x.

Si $f: X\to X'$ et $g: Y\to Y'$ sont deux S-morphismes universellement générisants, il en est de même de $f\times_S g$ en vertu de (**0**, 1.3.9).

Remarques **(3.9.2.1)** (i) En vertu de (3.9.1), dire que le morphisme $f: X\to Y$ est générisant équivaut encore à la propriété suivante: *pour toute partie fermée irréductible de* Y', *toute composante irréductible de* $f^{-1}(Y')$ *domine* Y' (on notera que cela n'exclut pas que $f^{-1}(Y')$ soit vide).

*(ii) Supposons que le morphisme $f: X\to Y$ soit générisant au point x; soient Y_1 un sous-schéma de Y, $X_1=f^{-1}(Y_1)$ son image réciproque (4.3.1), et $f_1: X_1\to Y_1$ la restriction de f à X_1; alors f_1 est générisant au point x. En effet, puisque la question ne fait intervenir que des générisations de y dans Y_1 (donc dans Y) qui sont contenues dans tout voisinage de y dans Y, on peut, en remplaçant Y par un voisinage de y et X par son image réciproque, se borner au cas où Y_1 est un sous-schéma *fermé* de Y. L'assertion résulte alors aussitôt de la propriété b) de (3.9.1).*

Proposition (3.9.3) *Soient* $f: X\to Y$ *un morphisme,* x *un point de* X.

(i) *Si* f *est ouvert* (resp. *universellement ouvert* (3.8.4)) *au point* x, f *est générisant* (resp. *universellement générisant*) *au point* x.

(ii) *S'il existe un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *de type fini tel que* $\mathscr{F}_x\neq 0$ *et qui est* f*-plat au point* x (**0**, 5.7.1) (en particulier si f est *plat au point* x), f *est universellement générisant au point* x.

(i) On peut se borner au cas où f est ouvert au point x; en outre, la question étant locale sur X et Y, on peut supposer que $Y=\mathrm{Spec}(A)$ et $X=\mathrm{Spec}(B)$ sont affines, x étant un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B, de sorte que $\mathscr{O}_{X,x}=B_{\mathfrak{q}}=\varinjlim B_t$, où t parcourt $B-\mathfrak{q}$. On a donc (3.4.10) $f(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}))=\bigcap_t f(\mathrm{Spec}(B_t))=\bigcap_t f(D(t))$. Mais par hypothèse, pour tout $t\in B-\mathfrak{q}$, y est intérieur à $f(D(t))$, donc $f(D(t))$ contient $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$; d'où $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})\subset f(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}))$.

(ii) On peut se borner à prouver que f est générisant au point x; en effet, les questions de platitude ne faisant intervenir que les schémas locaux (**0**, 5.7.1), on

peut, en vertu de (3.4.6), se borner au cas où $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $X=\mathrm{Spec}(B)$ avec $A=\mathcal{O}_{Y,y}$ et $B=\mathcal{O}_{X,x}$; on peut aussi se borner au cas où on ne considère que des changements de base $Y'\to Y$ tels que $Y'=\mathrm{Spec}(A')$ soit affine. L'hypothèse que $\mathscr{F}_x\neq 0$ entraîne alors que le support de $\mathscr{F}'=\mathscr{F}\otimes_Y Y'$ contient tous les points de $X'=X\times_Y Y'$ au-dessus de x (**0**, 5.2.4.1). D'autre part, on a $\mathscr{F}=\tilde{M}$, où M est un B-module de type fini qui est un A-module plat (1.7.9); $M'=M\otimes_A A'$ est donc un B'-module de type fini qui est un A'-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, cor. 2 de la prop. 8); on en conclut que $\mathscr{F}'$ est $f_{(Y')}$-plat aux points de X' au-dessus de x, d'où notre assertion. Mais le fait que f est générisant au point x résulte aussitôt de (**0**, 6.6.1).

Remarque **(3.9.3.1)** Nous verrons plus loin (7.3.10) qu'inversement, si f est générisant au point x, et *en outre* localement de présentation finie, alors f est *ouvert* au point x.

Corollaire (3.9.4) (i) *Si f est ouvert* (resp. *universellement ouvert*), *f est générisant* (resp. *universellement générisant*).

(ii) *S'il existe un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{F}$, de support* X, *et qui est f-plat* (en particulier si f est *plat*), *f est universellement générisant.*

Proposition (3.9.5) *Soit $f: X\to Y$ un morphisme générisant.*

(i) *Soient Z_1, Z_2 deux parties fermées irréductibles de* Y *telles que $Z_1\subset Z_2$, et soit T_1 une composante irréductible de $f^{-1}(Z_1)$; alors il existe une composante irréductible T_2 de $f^{-1}(Z_2)$ contenant T_1 (et dominant Z_2).*

(ii) *Pour toute composante irréductible* T *de* X, *$f(T)$ est une composante irréductible de* Y (autrement dit, l'image par f de tout point *maximal* de X est un point *maximal* de Y).

(iii) *Supposons* Y *irréductible, et si y est son point générique, supposons que $f^{-1}(y)$ soit irréductible. Alors* X *est irréductible.*

Pour prouver (i), on applique (3.9.1, a)), en prenant pour x le point générique de T_1 ($y=f(x)$ étant alors le point générique de Z_1) et pour y' le point générique de Z_2. L'assertion (ii) résulte de ce que $\overline{f(T)}$ est irréductible, et, en vertu de (i), ne peut être strictement contenu dans une partie fermée irréductible de Y. Enfin, pour prouver (iii), notons qu'en vertu de (ii), toute composante irréductible de X domine Y, donc rencontre $f^{-1}(y)$; la conclusion résulte alors de (**0**, 2.1.13).

Proposition (3.9.6) *Soit* Y *un schéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini* (ce qui est le cas si l'espace sous-jacent à Y est localement noethérien (**0**, 2.2.2)).

(i) *Si $f: X\to Y$ est un morphisme générisant et fermé, l'image par f de toute composante connexe* C *de* X *est une composante connexe de* Y.

(ii) *Soit $f: X\to Y$ un morphisme générisant, et supposons que pour tout point maximal y de* Y, *l'ensemble des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ soit localement fini. Alors l'ensemble des composantes irréductibles de* X *est localement fini.*

(i) Comme C est fermé dans X, $f(C)$ est fermé dans Y. Comme C est stable par générisation, l'hypothèse sur f entraîne que $f(C)$ est stable par générisation; en vertu de (**0**, 2.1.5), $f(C)$ est donc ouvert et fermé dans Y, et comme il est connexe, c'est une composante connexe de Y.

(ii) Soit $x\in X$; par hypothèse, il y a un voisinage ouvert U de $y=f(x)$ dans Y ne rencontrant qu'un nombre fini de composantes irréductibles Y_i de Y ($1\leqslant i\leqslant n$); soit y_i le point générique de Y_i ($1\leqslant i\leqslant n$). Pour toute composante irréductible Z de X rencontrant $f^{-1}(U)$, le point générique de Z est nécessairement dans l'un des ensembles $f^{-1}(y_i)$ (3.9.1) et est un point maximal de $f^{-1}(y_i)$; comme pour

chaque i, l'ensemble de ces points maximaux est localement fini dans X, il en est de même de leur réunion, d'où (ii).

Proposition (3.9.7) *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme,* $g: Y' \to Y$ *un morphisme universellement générisant,* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$. *Si toute composante irréductible de* X *domine une composante irréductible de* Y, *alors toute composante irréductible de* X' *domine une composante irréductible de* Y'.

Désignons par $g': X' \to X$ la projection canonique, qui est un morphisme générisant par hypothèse. Soient x' un point maximal de X', $x = g'(x')$; x est point maximal de X (3.9.5), et par hypothèse $y = f(x)$ est point maximal de Y. Posons $y' = f'(x')$, de sorte que $g(y') = y$; il s'agit de voir que y' est point maximal de Y'. Comme y est point maximal de Y, il suffit de voir que y' est point maximal de la *fibre* $Y'_1 = g^{-1}(y)$ (**0**, 2.1.13).

Posons $Y_1 = \mathrm{Spec}(\kappa(y))$, de sorte que $Y'_1 = Y_1 \times_Y Y'$; si $X_1 = X \times_Y Y_1$, X_1 s'identifie à la fibre $f^{-1}(y)$ (3.4.6), et x est point maximal de X_1; de même, si $X'_1 = X' \times_X Y_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1$, X'_1 s'identifie à la fibre $h^{-1}(y)$, où $h: X' \to Y$ est le morphisme structural, et x' est donc point maximal de X'_1. Si l'on pose $f_1 = f_{(Y_1)}$, $f'_1 = f'_{(Y'_1)}$, on a donc $f'_1 = (f_1)_{(Y'_1)}$ et $f'_1(x') = y'$. Or, puisque ici $\mathcal{O}_{Y_1, y} = \kappa(y)$ est un corps, f_1 est un morphisme *plat*; il en est donc de même de f'_1 (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, cor. 2 de la prop. 8), et f'_1 est donc générisant (3.9.4); la conclusion résulte donc de (3.9.5).

Corollaire (3.9.8) (Zariski) *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *leurs idéaux maximaux respectifs,* $\varphi: A \to B$ *un homomorphisme local. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes*:

1° B *est une* A*-algèbre essentiellement de type fini* (**0**, 6.3.14).

2° *Le complété* $\hat{A}$ *de* A *pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-préadique est intègre.*

3° φ *est injectif.*

Alors la topologie $\mathfrak{m}$*-préadique de* A *est induite par la topologie* $\mathfrak{n}$*-préadique de* B.

Posons $B' = B \otimes_A \hat{A}$; l'hypothèse 1° entraîne que B' est de la forme $S^{-1}(C \otimes_A \hat{A})$, où C est une A-algèbre de type fini et S une partie multiplicative de C, donc B' est un anneau *noethérien*. Comme A s'identifie à un sous-anneau de $\hat{A}$, A est intègre en vertu de l'hypothèse 2°. L'hypothèse 3° entraîne qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B induisant sur A l'idéal 0 (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 6, prop. 16), et par suite l'homomorphisme local $A \to B/\mathfrak{q}$ est injectif. On peut donc se borner à prouver la conclusion de (3.9.8) en ajoutant l'hypothèse que B est un anneau local *intègre*. Appliquons (3.9.7) à $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y' = \mathrm{Spec}(\hat{A})$ et $X' = \mathrm{Spec}(B')$; comme le morphisme $Y' \to Y$ est plat (donc universellement générisant (3.9.4)) et que X (qui est intègre) domine le schéma intègre Y (1.2.6), toute composante irréductible de X' domine le schéma (intègre par hypothèse) Y'. Si x, y, y' sont les points fermés de X, Y et Y' respectivement, il y a un point $x' \in X'$ (d'ailleurs unique) au-dessus de x et de y' (3.2.7.1), et $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X', x'})$ domine donc $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y', y'})$. On a donc un diagramme commutatif d'homomorphismes *locaux* d'anneaux locaux noethériens

$$\begin{array}{ccc} B = \mathcal{O}_{X,x} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X',x'} \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle v} \\ A = \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow[u]{} & \mathcal{O}_{Y',y'} = \hat{A} \end{array}$$

tel que u et v soient injectifs (1.2.6). Identifiant A et $\hat{A}$ à des sous-anneaux de $\mathcal{O}_{X',x'}$, et désignant par $\mathfrak{r}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X',x'}$, l'intersection des idéaux $\mathfrak{r}^k \cap \hat{A}$ est

donc nulle (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 3, prop. 6); comme $\hat{A}$ est *complet*, et que ces idéaux sont ouverts dans $\hat{A}$, puisque $\mathfrak{r}^k \cap \hat{A} \supset \mathfrak{m}^k A$, cela entraîne (Bourbaki, *loc. cit.*, § 2, n° 7, prop. 8) que la topologie de $\hat{A}$ est *induite* par la topologie r-préadique de $\mathcal{O}_{X',x'}$; *a fortiori* il en est de même de celle de A. Mais on a $\mathfrak{n}^k \cap A \subset \mathfrak{r}^k \cap A$, donc la topologie n-préadique induit sur A une topologie *plus fine* que la topologie m-préadique; mais comme $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{n}^k \cap A$, ces deux topologies sont identiques. CQFD.

***Proposition (3.9.9.)** *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme,* $g: Y' \to Y$ *un morphisme universellement générisant,* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$. *Si* f_{red} *est birationnel, il en est de même de* f'_{red}.

En effet, si y' est un point maximal de Y', on sait (3.9.5, (ii)) que $y = g(y')$ est un point maximal de Y; il existe un seul point x de X dans $f^{-1}(y)$ par hypothèse (2.3.4) et de plus x est maximal dans X et on a $\kappa(x) = \kappa(y)$. Il résulte donc de (3.4.9) que $f'^{-1}(y')$ est réduit à un seul point x' et que l'on a $\kappa(x') = \kappa(y')$. On conclut le raisonnement en remarquant que, d'après (3.9.7), toute composante irréductible de X' domine une composante irréductible de Y'. ∎

3.10. Morphismes submersifs et universellement submersifs

Définition (3.10.1) *On dit qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *est submersif s'il est surjectif, et si la topologie de* Y *est égale au quotient de celle de* X *par la relation d'équivalence définie par* f. *On dit que* f *est universellement submersif si, pour tout changement de base* $Y_1 \to Y$, *le morphisme* $f_{(Y_1)}: X_{(Y_1)} \to Y_1$ *est submersif.*

Tout morphisme surjectif et *ouvert* (resp. *universellement ouvert*) ou *fermé* (resp. *universellement fermé*) est submersif (resp. universellement submersif), en vertu de (3.6.1, (ii)) et de Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I, 3e éd., § 5, n° 2, prop. 3.

Nous verrons plus loin (7.3.5) qu'il en est de même lorsque f est un morphisme générisant (resp. universellement générisant), surjectif et *quasi-compact.*

(3.10.2) Etant donné un morphisme $f: X \to Y$, on dit qu'un sous-ensemble Z de X est *submersif sur* $f(X)$ si la topologie du sous-espace $f(Z)$ de Y est quotient de la topologie du sous-espace Z de X par la relation d'équivalence définie par $f|Z$. On dit que Z est *universellement submersif sur* $f(X)$ si, pour tout changement de base $g: Y' \to Y$ l'image réciproque $Z' = p^{-1}(Z)$ par la projection $p: X \times_Y Y' \to X$ est un ensemble submersif sur $f_{(Y')}(Z') = g^{-1}(f(Z))$ (3.4.5).

Lorsque le morphisme f admet une Y-*section* $h: Y \to X$, *tout ensemble* Z *contenant* $h(Y)$ *est universellement submersif sur* Y: en effet, comme pour tout changement de base $Y' \to Y$, $h_{(Y')}$ est une Y'-section de $f_{(Y')}$, il suffit de prouver que Z est submersif sur Y, ce qui résulte de Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I, 3e éd., § 3, n° 5, prop. 9.

Proposition (3.10.3) *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme,* $g: Y' \to Y$ *un morphisme universellement submersif. Posons* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$. *Alors, si* f' *est submersif* (resp. *universellement submersif*), *il en est de même de* f.

On peut se borner au cas où f' est submersif. En effet, supposons la proposition prouvée dans ce cas, et montrons que si f' est universellement submersif, il en est de même de f. Soit donc $Y_1 \to Y$ un morphisme quelconque et posons $Y'_1 = Y' \times_Y Y_1$; si $X'_1 = X' \times_{Y'} Y'_1$ et $f'_1 = (f')_{(Y_1)}: X'_1 \to Y'_1$, f'_1 est submersif par hypothèse; de plus le morphisme $g_1: Y'_1 \to Y_1$ est universellement submersif. Donc, si l'on pose $X_1 = X \times_Y Y_1$, $f_1 = f_{(Y_1)}$, il résulte de l'hypothèse et du fait que $X'_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1$, que f_1 est submersif, donc f universellement submersif.

Supposons donc seulement que f' soit submersif. Il est clair tout d'abord que f est surjectif. Soit E une partie de Y telle que $f^{-1}(E)$ soit fermé dans X; alors, si $p: X' \to X$ est la projection canonique, $p^{-1}(f^{-1}(E)) = f'^{-1}(g^{-1}(E))$ est fermé dans X', donc, puisque f' est submersif, $g^{-1}(E)$ est fermé dans Y'; mais comme g est universellement submersif, E est fermé dans Y, ce qui prouve la proposition.

§ 4. Sous-schémas et morphismes d'immersion. Schémas réduits

4.1. Sous-schémas

Proposition (4.1.1) *Soient* X *un schéma,* $\mathscr{I}$ *un Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X$. *Le support* Y *du faisceau d'anneaux* $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$ (**0**,3.1.5) *est alors fermé, et si* $\mathscr{O}_Y$ *est le faisceau induit sur* Y *par* $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ *est un schéma.*

Il suffit évidemment (2.1.3) de considérer le cas où X est un schéma affine, et de montrer que dans ce cas Y est fermé dans X et $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un *schéma affine.* En effet, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on a $\mathscr{O}_X = \tilde{A}$ et $\mathscr{I} = \tilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de A (1.4.1); Y est alors égal à la partie fermée $V(\mathfrak{J})$ de X et s'identifie au spectre premier de l'anneau $B = A/\mathfrak{J}$ (1.2.5); de plus, si $\varphi: A \to B = A/\mathfrak{J}$ est l'homomorphisme canonique, l'image directe ${}^a\varphi_*(\tilde{B})$ s'identifie canoniquement au faisceau $\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{J}} = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$ ((1.7.7) et (1.3.9)), ce qui achève la démonstration.

Nous dirons que $(Y, \mathscr{O}_Y)$ est le *sous-schéma de* $(X, \mathscr{O}_X)$ *défini par l'Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{I}$; c'est un cas particulier de la notion générale de *sous-schéma:*

Définition (4.1.2) *On dit qu'un espace annelé* $(Y, \mathscr{O}_Y)$ *est un sous-schéma d'un schéma* $(X, \mathscr{O}_X)$ *si:*

1° Y *est un sous-espace localement fermé de* X;

2° *si* U *désigne le plus grand ouvert de* X *contenant* Y *et tel que* Y *soit fermé dans* U (autrement dit, *le complémentaire dans* X *de* $\bar{Y} - Y$, donc $U = (X - \bar{Y}) \cup Y$), $(Y, \mathscr{O}_Y)$ *est un sous-schéma de* $(U, \mathscr{O}_X|U)$ *défini par un Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X|U$.

On dit que le sous-schéma $(Y, \mathscr{O}_Y)$ *de* $(X, \mathscr{O}_X)$ *est fermé si* Y *est fermé dans* X (auquel cas $U = X$).

Il résulte de cette définition et de (4.1.1) que les sous-schémas fermés de X sont en *correspondance biunivoque* avec les Idéaux quasi-cohérents $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_X$, car le fait que deux tels Idéaux $\mathscr{I}, \mathscr{I}'$ aient même support (fermé) Y et soient tels que les faisceaux induits par $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$ et $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}'$ sur Y soient identiques, entraîne aussitôt que $\mathscr{I}' = \mathscr{I}$.

(4.1.3) Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ un sous-schéma de X, U le plus grand ouvert de X contenant Y et dans lequel Y soit fermé, V un ouvert de X contenu

dans U; alors $V \cap Y$ est fermé dans V. En outre, si Y est défini par l'Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X|U$, $\mathscr{J}|V$ est un Idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X|V$, et il est immédiat que le schéma induit par Y sur $Y \cap V$ est le sous-schéma fermé de V défini par l'Idéal $\mathscr{J}|V$.

En particulier, le schéma induit par X sur un *ouvert* de X est un sous-schéma de X. On aura soin de noter qu'un sous-schéma de X peut avoir pour espace sous-jacent un *ouvert* U de X *sans être induit* sur cet ouvert par X; il n'est induit sur U que s'il est défini par *l'Idéal* 0 de $\mathscr{O}_X|U$, et il y a en général des Idéaux quasi-cohérents $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X|U$ tels que $(\mathscr{O}_X|U)/\mathscr{J}$ ait U pour support et qui sont $\neq 0$ (4.5).

(4.1.4) Soit Y un sous-schéma d'un schéma X, et désignons par ψ l'injection canonique $Y \to X$ des *espaces sous-jacents*; on sait que l'*image réciproque* $\psi^{-1}(\mathscr{O}_X)$ est le faisceau induit $\mathscr{O}_X|Y$ (**0**,3.7.1). Si, pour tout $y \in Y$, on désigne par ω_y l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{X,y} \to \mathscr{O}_{Y,y}$, ces homomorphismes sont les restrictions aux fibres de $\mathscr{O}_X$ aux points de Y, d'un homomorphisme *surjectif* de faisceaux d'anneaux $\omega: \mathscr{O}_X|Y \to \mathscr{O}_Y$: il suffit en effet de le vérifier localement sur Y, c'est-à-dire que l'on peut supposer X affine et le sous-schéma Y fermé; si dans ce cas $\mathscr{J}$ est l'Idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$ qui définit Y, les ω_y ne sont autres que les restrictions aux fibres de l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_X|Y \to (\mathscr{O}_X/\mathscr{J})|Y$. Nous avons donc défini un *monomorphisme d'espaces localement annelés* ((**0**, 4.1.1) et (**0**, 4.1.12)), $j_Y = (\psi, \omega^\flat)$, qui est évidemment un morphisme de *schémas* $Y \to X$ (2.3.1); nous dirons que c'est le *morphisme d'injection canonique*. Lorsque Y est induit sur un ouvert de X, on retrouve la définition de (**0**, 4.1.2).

Si $f: X \to Z$ est un morphisme, nous dirons encore que le morphisme composé

$$Y \xrightarrow{j_Y} X \xrightarrow{f} Z$$

est la *restriction de f au sous-schéma* Y *de* X.

Un sous-schéma Y d'un schéma X est toujours considéré comme X-*schéma* au moyen de l'injection canonique $j_Y: Y \to X$. Deux sous-schémas Y, Y′ de X qui sont X-*isomorphes* sont nécessairement *identiques*. En effet, si $u: Y \to Y'$ est un X-isomorphisme, la relation $j_Y = j_{Y'} \circ u$ montre d'abord que les sous-espaces sous-jacents à Y et Y′ sont identiques. En outre si $U \supset Y$ est un ouvert de X tel que $Y = Y'$ soit fermé dans U, et $\mathscr{J}$ et $\mathscr{J}'$ les Idéaux de U définissant respectivement Y et Y′, on doit avoir pour tout $x \in Y$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_x/\mathscr{J}'_x & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{O}_x/\mathscr{J}_x \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \mathscr{O}_x & \end{array}$$

où la flèche horizontale correspond à u, les deux autres à $j_{Y'}$ et j_Y; ces dernières sont donc les homomorphismes canoniques, et comme φ est bijectif, la commutativité de ce diagramme entraîne que $\mathscr{J}_x = \mathscr{J}'_x$, donc $Y = Y'$ et $u = 1_Y$.

(4.1.5) Conformément aux définitions générales (T,I,1.1), nous dirons qu'un morphisme de schémas $f: Z \to X$ est *majoré* par le morphisme d'injection canonique $j_Y: Y \to X$ d'un sous-schéma Y de X, si f se factorise en

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{j_Y} X,$$

où g est un morphisme de schémas; puisque j_Y est un monomorphisme, le morphisme g est nécessairement *unique.*

Proposition (4.1.6) *Soient* Y *un sous-schéma d'un schéma* X, $j: Y \to X$ *l'injection canonique. Pour qu'un morphisme* $f: Z \to X$ *soit majoré par* j, *il faut et il suffit que* $f(Z) \subset Y$ *et que, pour tout* $z \in Z$, *si l'on pose* $y = f(z)$, *l'homomorphisme* $\mathscr{O}_{X,y} \to \mathscr{O}_{Z,z}$ *correspondant à* f *se factorise en* $\mathscr{O}_{X,y} \to \mathscr{O}_{Y,y} \to \mathscr{O}_{Z,z}$ (ou, ce qui revient au même, que *le noyau de* $\mathscr{O}_{X,y} \to \mathscr{O}_{Z,z}$ *contienne celui de* $\mathscr{O}_{X,y} \to \mathscr{O}_{Y,y}$).

Les conditions sont évidemment nécessaires. Pour voir qu'elles sont suffisantes, on peut se ramener au cas où Y est un sous-schéma *fermé* de X, en remplaçant au besoin X par un ouvert U tel que Y soit fermé dans U (4.1.2); Y est alors défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$. Posons $f = (\psi, \theta)$, et soit $\mathscr{J}$ l'Idéal de $\psi^{-1}(\mathscr{O}_X)$, noyau de $\theta^\sharp: \psi^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_Z$. Compte tenu des propriétés du foncteur ψ^{-1} (**0**, 3.7.2), l'hypothèse entraîne que pour tout $z \in Z$, on a $(\psi^{-1}(\mathscr{J}))_z \subset \mathscr{J}_z$, et par suite $\psi^{-1}(\mathscr{J}) \subset \mathscr{J}$. Par suite, $\theta^\sharp$ se factorise en

$$\psi^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \psi^{-1}(\mathscr{O}_X)/\psi^{-1}(\mathscr{J}) = \psi^{-1}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}) \xrightarrow{\omega} \mathscr{O}_Z$$

la première flèche étant l'homomorphisme canonique. Soit ψ' l'application continue de Z dans Y coïncidant avec ψ; il est clair que l'on a $\psi'^{-1}(\mathscr{O}_Y) = \psi^{-1}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J})$; d'autre part, pour tout $z \in Z$, ω_z est évidemment un homomorphisme local, donc $g = (\psi', \omega^\flat): Z \to Y$ est un morphisme de schémas (2.3.1), qui, en vertu de ce qui précède, est tel que $f = j \circ g$, d'où la proposition.

Proposition (4.1.7) *Tout sous-schéma d'un schéma noethérien* (resp. *localement noethérien*, resp. *artinien*) X *est noethérien* (resp. *localement noethérien*, resp. *artinien*).

Tout sous-espace d'un espace noethérien étant noethérien, donc quasi-compact (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 2, prop. 8 et 9), il suffit, en vertu de (2.7.2) et (2.8.2), de prouver la proposition concernant les schémas localement noethériens; en vertu de (4.1.3), on est ramené

au cas où X est un schéma affine d'anneau noethérien A (2.7.3), et à prouver que dans ce cas tout sous-schéma Y de X est localement noethérien. Supposons d'abord que Y soit induit sur un ouvert de X; comme l'espace Y est quasi-compact, il est réunion finie d'ouverts $D(f_i)$, où $f_i \in A$. Mais $D(f_i)$ est un schéma affine dont l'anneau est isomorphe à A_{f_i} (1.3.6), donc est noethérien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 4, cor. 2 de la prop. 10); donc Y est localement noethérien. Si maintenant Z est un sous-schéma quelconque de X, c'est un sous-schéma fermé d'un schéma induit sur un ouvert de X (4.2.1), et d'après ce qui précède on peut donc se borner au cas où X est affine d'anneau noethérien A et Z est fermé dans X; mais alors $Z = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J})$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de A (1.4.1), et comme A est noethérien il en est de même de $A/\mathfrak{J}$, donc de Z.

4.2. Morphismes d'immersion

Définition (4.2.1) *On dit qu'un morphisme de schémas* $f: Y \to X$ *est une immersion* (resp. *une immersion fermée*, resp. *une immersion ouverte*) *s'il se factorise en*

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X,$$

où g est un isomorphisme, Z *un sous-schéma de* X (resp. *un sous-schéma fermé*, resp. *un sous-schéma induit sur un ouvert*) *et j le morphisme d'injection canonique.*

Le sous-schéma Z et l'isomorphisme g sont alors déterminés de façon *unique* puisque deux sous-schémas X-isomorphes de X sont identiques (4.1.4). On dit que $f = j \circ g$ est la *factorisation canonique* de l'immersion f; le sous-schéma Z et l'isomorphisme g sont dits *associés à f.*

Il est clair qu'une immersion est un *monomorphisme* de schémas (4.1.4), et *a fortiori* un morphisme *radiciel* (3.7.3).

On aura soin de noter qu'une immersion telle que $f(Y)$ soit une partie ouverte de X, autrement dit qui est un *morphisme ouvert, n'est pas nécessairement une immersion ouverte* (4.1.3).

Remarque **(4.2.1.1)** Soit X un schéma affine. Il résulte des définitions (4.2.1) et (4.1.1), ainsi que de (1.6.3), que pour qu'un morphisme $f = (\psi, \theta): Y \to X$ soit une immersion fermée, il faut et il suffit que Y soit un schéma affine et que l'homomorphisme $\Gamma(\theta): \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ soit surjectif.

Proposition (4.2.2) (i) *Pour qu'un morphisme* $f = (\psi, \theta): Y \to X$ *soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que* ψ *soit un homéomorphisme de* Y *sur une partie ouverte de* X, *et que, pour tout* $y \in Y$, *l'homomorphisme* $\theta^{\#}_y : \mathscr{O}_{X, \psi(y)} \to \mathscr{O}_{Y, y}$ *soit bijectif.*

(ii) *Pour qu'un morphisme* $f=(\psi,\theta):Y\to X$ *soit une immersion* (resp. *une immersion fermée*), *il faut et il suffit que* ψ *soit un homéomorphisme de* Y *sur une partie localement fermée* (resp. *fermée*) *de* X, *et que, pour tout* $y\in Y$, *l'homomorphisme* $\theta_y^{\#}:\mathscr{O}_{X,\psi(y)}\to\mathscr{O}_{Y,y}$ *soit surjectif.*

Dans les deux cas, les conditions sont évidemment nécessaires (4.1.4); il reste à voir qu'elles sont suffisantes.

(i) Si les conditions de (i) sont remplies, il est clair que $\theta^{\#}$ est un isomorphisme de $\mathscr{O}_Y$ sur $\psi^{-1}(\mathscr{O}_X)$, et $\psi^{-1}(\mathscr{O}_X)$ est le faisceau déduit par transport de structure au moyen de ψ^{-1} à partir du faisceau induit $\mathscr{O}_X|\psi(Y)$; d'où la conclusion.

(ii) Supposons remplies les conditions de (ii). Soit U_0 le plus grand ouvert de X tel que $\psi(Y)$ soit fermé dans U_0; en remplaçant X par le sous-schéma induit par X sur l'ouvert U_0, on peut se borner au cas où $Z=\psi(Y)$ est *fermé* dans X (4.1.2). Nous allons voir que $f_*(\mathscr{O}_Y)=\psi_*(\mathscr{O}_Y)$ est un $\mathscr{O}_X$-Module *quasi-cohérent*; cela résultera immédiatement des deux lemmes suivants:

Lemme (4.2.2.1) *Soit* $f:Y\to X$ *un morphisme de schémas tel que* $f(Y)$ *soit une partie fermée de* X *et que* f *soit un homéomorphisme de* Y *sur* $f(Y)$. *Alors, pour tout point* $x\in X$, *il existe un voisinage ouvert affine* U *de* x *tel que* $f^{-1}(U)$ *soit un ouvert affine de* Y.

Lemme (4.2.2.2) *Soit* $f:Y\to X$ *un morphisme de schémas,* (X_λ) *un recouvrement de* X *formé d'ouverts affines, tels que pour tout* λ, $f^{-1}(X_\lambda)$ *soit un ouvert affine de* Y (cf. (9.1.1)). *Alors, pour tout* $\mathscr{O}_Y$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, $f_*(\mathscr{F})$ *est un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent.*

(4.2.2.3) *Preuve de* (4.2.2.1). Comme $f(Y)$ est fermé dans X, le lemme est trivial pour $x\notin f(Y)$, puisqu'il suffit de prendre pour U un voisinage ouvert de x ne rencontrant pas $f(Y)$. Si $x\in f(Y)$, il existe un $y\in Y$ et un seul tel que $f(y)=x$. Soient W un voisinage ouvert affine de x dans X, V un voisinage ouvert affine de y dans Y tel que $f(V)\subset W$; par hypothèse $f(V)$ est un voisinage ouvert de x dans $f(Y)$, donc il existe un voisinage ouvert $U'\subset W$ de x tel qur $U'\cap f(Y)=f(V)$. Prenons alors pour U un voisinage de x contenu dans U', de la forme $D(s)$, où $s\in A=\Gamma(W,\mathscr{O}_X)$; en vertu de (1.2.2), $f^{-1}(U)\subset V$ est de la forme $D(s')$, où s' est l'image de s dans $B=\Gamma(V,\mathscr{O}_Y)$, ce qui prouve (4.2.2.1).

(4.2.2.4) *Preuve de* (4.2.2.2). Pour tout λ, posons $Y_\lambda=f^{-1}(X_\lambda)$, et soit $f_\lambda:Y_\lambda\to X_\lambda$ le morphisme coïncidant avec f dans Y_λ. Il résulte des définitions (**0**, 3.4.1) que la restriction de $f_*(\mathscr{F})$ à X_λ est $(f_\lambda)_*(\mathscr{F}_\lambda)$, où $\mathscr{F}_\lambda=\mathscr{F}|Y_\lambda$. Mais comme X_λ et Y_λ sont affines, $(f_\lambda)_*(\mathscr{F}_\lambda)$ est quasi-cohérent en vertu de (1.7.7).

(4.2.2.5) *Fin de la démonstration de* (4.2.2, (ii)). Supposons toujours $Z=f(Y)$ fermé dans X. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\theta} \psi_*(\mathscr{O}_Y) \longrightarrow 0$$

dont deux des trois termes sont des $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents; on en déduit (2.2.2, (i)) que $\mathscr{I}$ est un Idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$, et θ se factorise en

$$\mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X/\mathscr{I} \xrightarrow{\omega} \psi_*(\mathscr{O}_Y),$$

où la première flèche est l'homomorphisme canonique et ω est un isomorphisme. Si $\mathscr{O}_Z=(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})|Z$, $(Z,\mathscr{O}_Z)$ est un sous-schéma fermé de $(X,\mathscr{O}_X)$ et f se factorise en l'injection canonique de ce sous-schéma et l'isomorphisme (ψ_0,ω_0), où ψ_0 est l'application ψ considérée comme homéomorphisme de Y sur Z et ω_0 la restriction de ω à $\mathscr{O}_Z$.

Remarque **(4.2.3)** Il peut se faire que $f=(\psi,\theta): Y\to X$ soit une immersion fermée et que pour tout $y\in Y$, $\theta_y^\#$ soit *bijectif*, *sans* que f soit une immersion ouverte (autrement dit, $f(Y)$ *n'est pas nécessairement ouvert* dans X). Par exemple, considérons le schéma affine X décrit dans (1.3.16) et soit a un point non isolé de X; considérons l'idéal maximal $\mathfrak{m}_a$ de A formé des fonctions $f\in A$ telles que $f(a)=0$; pour chacune de ces fonctions f, il existe un voisinage ouvert W_f de a dans X tel que f soit nulle dans W_f; si $g\in A$ est nulle dans $X-W_f$ et $\neq 0$ au point a, on a $g\notin\mathfrak{m}_a$ mais $gf=0$ dans A; ceci prouve que l'Idéal quasi-cohérent $\tilde{\mathfrak{m}}_a$ correspondant à $\mathfrak{m}_a$ dans $\mathscr{O}_X=\tilde{A}$ est un faisceau dont la fibre au point a est *réduite à* 0, tandis qu'aux autres points de X sa fibre est $\mathscr{O}_{X,x}$. Si $Y=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}_a)$, l'injection canonique $Y\to X$ a la propriété voulue, puisque le sous-espace $Y=\{a\}$ n'est pas ouvert dans X.

Pour des conditions supplémentaires assurant que lorsque f est une immersion fermée et $\theta_y^\#$ est bijectif pour tout $y\in Y$, f est une immersion ouverte, voir (4.4.7) et (6.6.4, (ii)).

Corollaire (4.2.4) (i) *Soient* $f: Y\to X$ *un morphisme de schémas,* (V_λ) *un recouvrement de* $f(Y)$ *par des ouverts de* X. *Pour que* f *soit une immersion* (resp. *une immersion ouverte*), *il faut et il suffit que pour chaque* λ, *la restriction* $f^{-1}(V_\lambda)\to V_\lambda$ *de* f *soit une immersion* (resp. *une immersion ouverte*).

(ii) *Soient* $f: Y\to X$ *un morphisme de schémas,* (U_λ) *un recouvrement ouvert de* X. *Pour que* f *soit une immersion fermée, il faut et il suffit que pour chaque* λ, *la restriction* $f^{-1}(U_\lambda)\to U_\lambda$ *de* f *soit une immersion fermée.*

Soit $f=(\psi,\theta)$: il suffit évidemment, en vertu de (4.2.2), de montrer que dans le cas (i), ψ est un homéomorphisme de Y sur une partie localement fermée (resp. ouverte) de X, et dans le cas (ii), un homéomor-

phisme de Y sur une partie fermée de X. Or les hypothèses entraînent que ψ est injectif et transforme tout voisinage d'un point $y \in Y$ en un voisinage de $\psi(y)$ dans le sous-espace $\psi(Y)$; dans le cas (i), $\psi(Y) \cap V_\lambda$ est localement fermé (resp. ouvert) dans V_λ, donc $\psi(Y)$ est localement fermé (resp. ouvert) dans la réunion des V_λ et *a fortiori* dans X; dans le cas (ii), $\psi(Y) \cap U_\lambda$ est fermé dans U_λ, donc $\psi(Y)$ est fermé dans X puisque $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$.

Remarque **(4.2.5)** On peut généraliser la notion de sous-schéma aux espaces annelés quelconques. On appellera *sous-espace annelé* d'un espace annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé de la forme $(Y, (\mathscr{O}_U/\mathscr{I})|Y)$, où U est un ouvert de X, $\mathscr{I}$ un Idéal (quelconque) de $\mathscr{O}_U$ et Y le support du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_U/\mathscr{I}$ (support qui n'est plus nécessairement fermé dans U). On définit alors comme dans (4.1.4) le morphisme d'injection canonique $Y \to X$, et les définitions et résultats de (4.1.5) et (4.1.6) sont valables sans modification. On définit ensuite comme dans (4.2.1) la notion d'*immersion* (resp. d'*immersion fermée*) d'un espace annelé dans un autre (la notion d'immersion ouverte a déjà été définie (**0**, 4.5.1)). Les caractérisations des immersions ouvertes (resp. fermées) données dans (4.2.2) sont encore valables (en observant que si $f(Y)$ est fermé dans X, $f_*(\mathscr{O}_Y)$ a pour support $f(Y)$). Le résultat de (4.2.2) peut donc encore s'énoncer en disant que si un *schéma* Y est *un sous-espace annelé* d'un *schéma* X, alors Y est un *sous-schéma* de X.

4.3. Image réciproque d'un sous-schéma

Proposition (4.3.1) *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme,* Y′ *un sous-schéma* (resp. *un sous-schéma fermé*, resp. *un schéma induit sur un ouvert*) *de* Y, $j: Y' \to Y$ *l'injection canonique.*

(i) *La projection* $p: X \times_Y Y' \to X$ *est une immersion* (resp. *une immersion fermée*, resp. *une immersion ouverte*), *et le sous-schéma de* X *associé à p* (*dit* image réciproque de Y′ par f) *a pour espace sous-jacent* $f^{-1}(Y')$.

(ii) *Si* Y′ *est un sous-schéma fermé de* Y *défini par un Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{K}$ *de* $\mathscr{O}_Y$, *le sous-schéma de* X *image réciproque de* Y′ *par f est défini par l'Idéal quasi-cohérent* $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X$.

Ces assertions ne sont que des cas particuliers de celles de (3.2.7), lorsqu'on identifie p à $1_X \times j: X \times_Y Y' \to X \times_Y Y$, compte tenu de (4.2.2).

Lorsque nous parlerons désormais de $f^{-1}(Y')$ comme d'un sous-schéma de X, c'est toujours de l'*image réciproque* de Y′ par f qu'il s'agira. On dira que le morphisme $f \times 1_{Y'}: f^{-1}(Y') \to Y'$ est la *restriction* de f à $f^{-1}(Y')$.

Lorsque les schémas $f^{-1}(Y')$ et X sont identiques, $j' : f^{-1}(Y') \to X$ est l'identité et tout morphisme $h : Z \to X$ est donc majoré par j', donc *le morphisme* $f : X \to Y$ *se factorise alors en*

$$X \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{j} Y.$$

Lorsque y est un point *fermé* de Y et $Y' = \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ le plus petit sous-préschéma fermé de Y ayant $\{y\}$ comme espace sous-jacent (4.3.8), le sous-schéma fermé $f^{-1}(Y')$ est canoniquement isomorphe à la *fibre* $f^{-1}(y)$ définie en (3.4.7), à laquelle on l'identifiera.

Corollaire (4.3.2) *Sous les hypothèses de* (4.3.1, (ii)), *soient* X' *un sous-schéma fermé de* X *défini par un Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de* $\mathscr{O}_X$, *i l'injection* $X' \to X$; *pour que la restriction* $f \circ i$ *de* f *à* X' *soit majorée par l'injection* $j : Y' \to Y$ (autrement dit se factorise en $j \circ g$, où $g : X' \to Y'$ est un morphisme), *il faut et il suffit que* $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}$.

Cela résulte de la définition des produits, en tenant compte de (4.3.1, (ii)).

Corollaire (4.3.3) *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes,* $h = g \circ f$ *leur composé. Pour tout sous-schéma* Z' *de* Z, *les sous-schémas* $f^{-1}(g^{-1}(Z'))$ *et* $h^{-1}(Z')$ *de* X *sont identiques.*

Cela résulte de l'existence de l'isomorphisme canonique

$$X \times_Y (Y \times_Z Z') \simeq X \times_Z Z' \quad (\mathbf{0}, 1.3.2.1).$$

Corollaire (4.3.4) *Soient* X', X'' *deux sous-schémas de* X, $j' : X' \to X$, $j'' : X'' \to X$ *les morphismes d'injection; alors,* $j'^{-1}(X'')$ *et* $j''^{-1}(X')$ *sont tous deux égaux à la borne inférieure* $\inf(X', X'')$ *de* X' *et* X'' *pour la relation d'ordre entre sous-schémas* (4.3.8), *et canoniquement isomorphes à* $X' \times_X X''$.

Cela résulte aussitôt de (4.3.1).

Corollaire (4.3.5) *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme,* Y', Y'' *deux sous-schémas de* Y; *on a* $f^{-1}(\inf(Y', Y'')) = \inf(f^{-1}(Y'), f^{-1}(Y''))$.

Cela résulte de l'existence de l'isomorphisme canonique entre $(X \times_Y Y') \times_X (X \times_Y Y'')$ et $X \times_Y (Y' \times_Y Y'')$ (**0**, 1.3.2.1).

Proposition (4.3.6) (i) *Le composé de deux immersions* (resp. *de deux immersions ouvertes,* resp. *de deux immersions fermées*) *est une immersion* (resp. *une immersion ouverte,* resp. *une immersion fermée*).

(ii) *Si* $f : X \to Y$ *est un* S-*morphisme qui est une immersion* (resp. *une immersion ouverte,* resp. *une immersion fermée*), *alors, pour toute extension* $S' \to S$ *du schéma de base,* $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *est une immersion* (resp. *une immersion ouverte,* resp. *une immersion fermée*).

(iii) *Soient* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *deux* S-*morphismes; si* f *et* g *sont des immersions* (resp. *des immersions ouvertes,* resp. *des immersions fermées*),

il en est de même de $f \times_S g$. *En outre, si* X″ (resp. Y″) *est le sous-schéma de* X′ (resp. Y′) *associé à* f (resp. g), *le sous-schéma de* $X' \times_S Y'$ *associé à* $f \times_S g$ *a pour espace sous-jacent* $p^{-1}(X'') \cap q^{-1}(Y'')$, *en désignant par* p *et* q *les projections canoniques de* $X' \times_S Y'$ *dans* X′ *et* Y′ *respectivement.*

*(iv) *Si* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *sont deux morphismes tels que* $g \circ f : X \to Z$ *soit une immersion* (resp. *une immersion fermée*), *alors* f *est une immersion* (resp. *une immersion fermée si* g *est séparé*).*

L'assertion (i) résulte trivialement de (4.2.2).

Pour prouver (ii), on peut, par transitivité (1.2.9), se borner au cas où f est une immersion ouverte ou une immersion fermée et en outre (**0**, 1.3.4) on peut supposer que $S = Y$; mais alors l'assertion n'est autre que (4.3.1, (i)), où les rôles de X et de Y′ sont échangés.

Enfin la première assertion de (iii) résulte de (**0**, 1.3.9) et la seconde de (3.2.7, (ii)).

Pour la démonstration de (iv), voir (5.1.8) et (5.2.8).

Corollaire (4.3.7) *Une immersion* (resp. *une immersion fermée*, resp. *une immersion ouverte*) *est un morphisme universellement bicontinu* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement ouvert*).

Cela résulte aussitôt de la définition (4.2.1) et de (4.3.6, (ii)).

Remarque **(4.3.8)** Soit Y un sous-schéma d'un schéma X, et soit $j_Y : Y \to X$ l'injection canonique. Pour tout sous-schéma Z de Y, le morphisme composé $j_Y \circ j_Z : Z \to X$ est une immersion, qui se factorise donc en

$$Z \xrightarrow{g} Z' \xrightarrow{j_{Z'}} X,$$

où g est un isomorphisme et Z′ un sous-schéma de X; l'injection canonique $j_{Z'} = (j_Y \circ j_Z) \circ g^{-1}$ est donc *majorée* par l'injection j_Y. Inversement, supposons que Z′ soit un sous-schéma de X dont l'injection $j_{Z'}$ est majorée par j_Y, donc se factorise en

$$Z' \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{j_Y} X;$$

il résulte aussitôt de (4.2.2) que h est une immersion (cela est aussi une conséquence de (4.3.6, (iv)), qui se factorise donc en

$$Z' \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{j_Z} Y$$

où f est un isomorphisme et Z un sous-schéma de Y. Les isomorphismes g et f étant déterminés de façon unique, on voit qu'il y a correspondance biunivoque canonique entre les *sous-schémas de* Y et les *sous-schémas de* X dont l'injection canonique est *majorée* par j_Y (on dit encore qu'un tel sous-schéma Z est *majoré par* Y et on écrit $Z \leqslant Y$).

4.4. Immersions locales et isomorphismes locaux

Définition (4.4.1) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme de schémas. On dit que* f *est une immersion locale en un point* $x \in X$ *s'il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *et un voisinage ouvert* V *de* $f(x)$ *dans* Y *tels que la restriction de* f *au schéma induit* U *soit une immersion fermée de* U *dans le schéma induit* V. *On dit que* f *est une immersion locale si* f *est une immersion locale en tout point de* X.

Définition (4.4.2) *On dit qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *est un isomorphisme local en un point* $x \in X$ *s'il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *tel que la restriction de* f *au schéma induit* U *soit une immersion ouverte de* U *dans* Y. *On dit que* f *est un isomorphisme local si* f *est un isomorphisme local en tout point de* X.

(4.4.3) Une immersion (resp. une immersion fermée) $f: X \to Y$ peut donc se caractériser comme une immersion locale telle que f soit un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à X sur une partie (resp. une partie fermée) de Y. Une immersion ouverte f peut se caractériser comme un isomorphisme local *injectif*.

Proposition (4.4.4) *Soient* X *un schéma irréductible,* $f: X \to Y$ *un morphisme dominant. Si* f *est une immersion locale,* f *est un homéomorphisme local et* $f(X)$ *est ouvert dans* Y.

En effet, soit $x \in X$ et soient U un voisinage ouvert de x, V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y tels que la restriction de f à U soit une immersion fermée dans V; comme U est dense dans X, $f(U)$ est dense dans Y par hypothèse, donc $f(U) = V$ et f est un homéomorphisme de U sur V.

Proposition (4.4.5) (i) *Le composé de deux immersions locales* (resp. *de deux isomorphismes locaux*) *est une immersion locale* (resp. *un isomorphisme local*).

(ii) *Soient* $f: X \to X'$, $g: Y \to Y'$ *deux* S*-morphismes. Si* f *et* g *sont des immersions locales* (resp. *des isomorphismes locaux*), *il en est de même de* $f \times_S g$.

(iii) *Si un* S*-morphisme* f *est une immersion locale* (resp. *un isomorphisme local*), *il en est de même de* $f_{(S')}$ *pour toute extension* $S' \to S$ *du préschéma de base.*

D'après (**0**, 1.3.9), il suffit de prouver (i) et (ii). (i) résulte aussitôt de la transitivité des immersions fermées (resp. ouvertes) (4.3.6) et du fait que si f est un homéomorphisme de X sur une partie fermée de Y, pour tout ouvert $U \subset X$, $f(U)$ est ouvert dans $f(X)$, donc il existe une partie ouverte V de Y telle que $f(U) = V \cap f(X)$, et $f(U)$ est par suite fermé dans V.

Pour démontrer (ii), soient p, q les projections de $X \times_S Y$, p', q' celles de $X' \times_S Y'$. Il existe par hypothèse des voisinages ouverts U, U', V, V' de $x = p(z)$, $x' = p'(z')$, $y = q(z)$, $y' = q'(z')$ respectivement, tels que les restrictions de f et g à U et V respectivement soient des immersions fermées (resp. ouvertes) dans U' et V' respectivement. Comme l'espace sous-jacent de $U \times_S V$ et celui de $U' \times_S V'$ s'identifient aux voisinages ouverts $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ et $p'^{-1}(U') \cap q'^{-1}(V')$ de z et z' respectivement (3.2.3), la proposition résulte de (4.3.6).

(4.4.5.1) Un isomorphisme local est évidemment un morphisme *plat* et *universellement ouvert*, donc *universellement générisant* (3.9.4).

Proposition (4.4.6) *Soient* X *un schéma irréductible,* Y *un schéma intègre* (2.1.8), $f = (\psi, \theta): X \to Y$ *un morphisme.*

(i) *Si* f *est un morphisme dominant, alors, pour tout* $x \in X$, *l'homomorphisme* $\theta_x^{\#}: \mathcal{O}_{Y, \psi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *est injectif.*

(ii) *Si* f *est une immersion locale dominante,* f *est un isomorphisme local* (et par suite X est *intègre*).

(i) Soient ξ et η les points génériques de X et Y respectivement; par hypothèse on a $\psi(\xi)=\eta$; en outre $\mathscr{O}_{Y,\eta}$ est un corps puisque Y est réduit, donc $\theta^{\#}_{\xi}: \mathscr{O}_{Y,\eta}\to\mathscr{O}_{X,\xi}$ est nécessairement un monomorphisme. Pour tout $x\in X$, et tout voisinage ouvert affine U de $y=\psi(x)$, il y a un voisinage ouvert affine V de x contenu dans $\psi^{-1}(U)$; U (resp. V) contient η (resp. ξ), l'anneau $\Gamma(U,\mathscr{O}_Y)$ est intègre et a pour corps des fractions $\mathscr{O}_{Y,\eta}$, et $\mathscr{O}_{X,\xi}$ est un anneau local de $\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$; si $\varphi:\Gamma(U,\mathscr{O}_Y)\to\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$ est l'homomorphisme correspondant à f, le composé

$$\Gamma(U,\mathscr{O}_Y) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(V,\mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathscr{O}_{X,\xi}$$

(où la seconde flèche est l'homomorphisme canonique) est la restriction à $\Gamma(U,\mathscr{O}_Y)$ de $\theta^{\#}_{\xi}$, donc on voit que φ est *injectif*. On va en déduire que $\theta^{\#}_{x}$ est aussi *injectif*: en effet l'hypothèse que X est irréductible entraîne que $\Gamma(V,\mathscr{O}_X)$ a un seul idéal *premier minimal* $\mathfrak{n}$, qui est son nilradical; l'homomorphisme $\theta^{\#}_{x}$ fait correspondre à un élément u/s avec u, s dans $\Gamma(U,\mathscr{O}_Y)$, $s\neq 0$, l'élément $\varphi(u)/\varphi(s)\in\mathscr{O}_{X,x}$; cet élément ne peut être nul que si, pour un $t\notin\mathfrak{j}_x$, on a $t\varphi(u)=0\in\mathfrak{n}$; mais comme $t\notin\mathfrak{n}$, cela entraîne $\varphi(u)\in\mathfrak{n}$, et comme $\varphi(u)$ est nilpotent et φ est injectif, il existe m tel que $u^m=0$, d'où finalement $u=0$ puisque $\Gamma(U,\mathscr{O}_Y)$ est intègre.

(ii) Si f est une immersion locale dominante, on sait déjà que $\psi(X)$ est ouvert dans Y (4.4.4). D'autre part, pour tout $x\in X$, $\theta^{\#}_{x}$ est *surjectif* (4.2.2, (ii)); comme $\theta^{\#}_{x}$ est *injectif* en vertu de (i), il est bijectif et la conclusion résulte de (4.2.2, (i)).

Proposition (4.4.7) *Soient* Y *un schéma réduit dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini,* $j: X\to Y$ *une immersion. Pour que j soit un isomorphisme local en un point* $x\in X$, *il faut et il suffit que j soit un morphisme plat au point x, ou encore que l'homomorphisme* $\mathscr{O}_{Y,j(x)}\to\mathscr{O}_{X,x}$ *soit bijectif.*

La question est locale sur Y, donc on peut remplacer Y par un voisinage ouvert affine de $j(x)$, et supposer que j est une immersion fermée et que toutes les composantes irréductibles de Y contiennent $j(x)$ (et sont donc en nombre fini). Si $Y=\mathrm{Spec}(B)$, et si p est l'idéal premier de B correspondant au point $j(x)$, le morphisme $\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{p}})\to\mathrm{Spec}(B)$ est donc dominant, puisque p contient tous les idéaux premiers minimaux de B; comme B est réduit, l'homomorphisme $B\to B_{\mathfrak{p}}$ est par suite *injectif* (1.2.7). Si $\mathscr{J}$ est l'idéal de $\mathscr{O}_Y$ définissant le sous-schéma fermé de Y associé à j, on a $\mathscr{J}=\tilde{\mathfrak{J}}$, où l'idéal $\mathfrak{J}$ de B s'identifie à une partie de $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$; l'hypothèse de platitude entraîne $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}=0$, car $\mathscr{O}_{X,x}$ est un $\mathscr{O}_{Y,j(x)}$-module plat, donc fidèlement plat, et notre assertion résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, prop. 8. Comme $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, on a $\mathfrak{J}=0$, ce qui achève la démonstration.

***Proposition (4.4.8)** *Soient* X *un schéma irréductible,* $f: X\to Y$ *un morphisme* séparé *qui est une immersion locale* (resp. *un isomorphisme local*). *Alors f est une immersion* (resp. *une immersion ouverte*).

Soit $f=(\psi,\theta)$; il suffit, dans les deux cas, de prouver que ψ est un *homéomorphisme* de X sur $\psi(X)$ (4.4.3). On peut remplacer f par f_{red} en vertu de (4.5.16) et de (5.3.1, (vi)), donc supposer X et Y *réduits*. Si Y′ est le sous-schéma fermé réduit de Y ayant pour espace sous-jacent $\psi(X)$ (qui est donc intègre) (4.6.1), f se factorise alors en

$$X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{j} Y$$

où j est l'injection canonique (4.6.2). Alors f' est séparé (5.3.1, (v)) et une immersion locale (5.1.8, (iii)); d'ailleurs Y′ et X étant intègres et f' dominant, f' est en fait un isomorphisme local dominant (4.4.6, (ii)).

On peut donc se borner au cas où X et Y sont *intègres*, et f un *isomorphisme local dominant et séparé*, et tout revient à prouver que dans ces conditions ψ est *injectif*. Pour cela, nous allons montrer que $X\times_Y X$ est *irréductible* et son unique

point générique ζ est sur la diagonale $\Delta_X(X)$. En effet, comme le morphisme f est dominant et universellement générisant (4.4.5.1), on en déduit que chacune des projections de $X \times_Y X$ sur X est un morphisme pour lequel toute composante irréductible de $X \times_Y X$ domine X (3.9.7); si ξ et η sont les points génériques de X et Y, les points maximaux de $X \times_Y X$ ont leurs deux projections égales à ξ, donc sont dans $\mathrm{Spec}(\kappa(\xi) \otimes_{\kappa(\eta)} \kappa(\xi))$ (3.2.7.1), ensemble réduit à un seul point puisque $\kappa(\eta) = \mathscr{O}_{Y,\eta}$ et $\kappa(\xi) = \mathscr{O}_{X,\xi}$ sont par hypothèse canoniquement isomorphes. Cet unique point est nécessairement égal à $\Delta_X(\xi)$, donc dans $\Delta_X(X)$. Comme f est séparé, $\Delta_X(X)$ est un ensemble fermé, donc *égal à* $X \times_Y X$ puisqu'il contient ζ. On en conclut donc (3.7.1, c")) que f est *radiciel* et *a fortiori* injectif. CQFD.*

Remarque* **(4.4.9) Les exemples de (5.3.11), qui sont des isomorphismes locaux dominants de schémas intègres, montrent que dans (4.4.8), on ne peut supprimer l'hypothèse que f est *séparé*.*

4.5. Nilradical. Schémas réduits

Proposition (4.5.1) *Soient* $(X, \mathscr{O}_X)$ *un schéma,* $\mathscr{B}$ *une* $\mathscr{O}_X$*-Algèbre quasi-cohérente. Il existe un Idéal quasi-cohérent et un seul* $\mathscr{N}$ *de* $\mathscr{B}$ *dont la fibre* $\mathscr{N}_x$ *en tout point* $x \in X$ *soit le nilradical de l'anneau* $\mathscr{B}_x$. *Lorsque* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est affine, et par suite* $\mathscr{B} = \tilde{B}$, *où* B *est une* A*-algèbre, on a* $\mathscr{N} = \tilde{\mathfrak{N}}$, *où* $\mathfrak{N}$ *est le nilradical de* B.

La question étant locale, on est ramené à démontrer la dernière assertion. On sait que $\tilde{\mathfrak{N}}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent (1.4.1) et que sa fibre au point $x \in X$ est l'idéal $\mathfrak{N}_x$ de l'anneau de fractions B_x; tout revient à prouver que le nilradical de B_x est contenu dans $\mathfrak{N}_x$, l'inclusion opposée étant évidente. Or, soit z/s un élément du nilradical de B_x, avec $z \in B$, $s \notin \mathfrak{j}_x$; par hypothèse, il existe un entier k tel que $(z/s)^k = 0$, ce qui signifie qu'il existe $t \notin \mathfrak{j}_x$ tel que $tz^k = 0$. On en conclut $(tz)^k = 0$, et par suite $z/s = (tz)/(ts)$ appartient à $\mathfrak{N}_x$.

Nous dirons que l'Idéal quasi-cohérent $\mathscr{N}$ ainsi défini est le *Nilradical* de la $\mathscr{O}_X$-Algèbre $\mathscr{B}$; nous noterons en particulier $\mathscr{N}_X$ le Nilradical de $\mathscr{O}_X$.

Corollaire (4.5.2) *Soit* X *un schéma; le sous-schéma fermé de* X *défini par l'Idéal* $\mathscr{N}_X$ *est le seul sous-schéma réduit* (**0**,4.1.4) *de* X *ayant* X *pour espace sous-jacent; c'est aussi le plus petit sous-schéma de* X *ayant* X *pour espace sous-jacent.*

Comme le faisceau structural du sous-schéma fermé Y défini par $\mathscr{N}_X$ est $\mathscr{O}_X/\mathscr{N}_X$, il est immédiat que Y est réduit et a X pour espace sous-jacent, puisque $\mathscr{N}_x \neq \mathscr{O}_x$ pour tout $x \in X$. Pour démontrer les autres assertions, remarquons qu'un sous-schéma Z de X ayant X pour espace sous-jacent est défini par un Idéal $\mathscr{I}$ (4.1.2) tel que $\mathscr{I}_x \neq \mathscr{O}_x$ pour tout $x \in X$. On peut se borner au cas où X est affine, soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathscr{I} = \tilde{\mathfrak{I}}$, où $\mathfrak{I}$ est un idéal de A; alors, pour tout $x \in X$, on a $\mathfrak{I}_x \subset \mathfrak{j}_x$, donc $\mathfrak{I}$ est contenu dans tous les idéaux premiers de A, c'est-à-dire dans leur intersection $\mathfrak{N}$, nilradical de A. Cela prouve que Y est le plus petit sous-

schéma de X ayant X comme espace sous-jacent (4.3.8); en outre, si Z est distinct de Y, on a nécessairement $\mathscr{I}_x \neq \mathscr{N}_x$ pour un $x \in X$ au moins, et par suite (4.5.1) Z n'est pas réduit.

Définition (4.5.3) *On appelle schéma réduit associé à un schéma* X *et on note* X_{red} *l'unique sous-schéma réduit de* X *ayant* X *pour espace sous-jacent.*

Dire qu'un schéma X est réduit signifie donc que $X = X_{red}$.

Il est clair que l'injection canonique $X_{red} \to X$ est un *homéomorphisme universel* (4.3.7).

Proposition (4.5.4) *Pour que le spectre premier d'un anneau* A *soit un schéma réduit* (resp. *intègre*) (2.1.8), *il faut et il suffit que* A *soit un anneau réduit* (resp. *intègre*).

En effet, il résulte aussitôt de (4.5.1) que la condition $\mathscr{N} = (0)$ est nécessaire et suffisante pour que $X = \mathrm{Spec}(A)$ soit réduit; l'assertion relative aux anneaux intègres est alors une conséquence de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, cor. 1 de la prop. 14.

Proposition (4.5.5) *Pour qu'un schéma* X *soit localement intègre* (2.1.8), *il faut et il suffit que l'ensemble de ses composantes irréductibles soit localement fini et que pour tout* $x \in X$, *l'anneau local* $\mathscr{O}_{X,x}$ *soit intègre*; X *est alors* somme *de ses composantes irréductibles, qui sont des schémas intègres.*

Par définition (2.1.8), si X est localement intègre, l'ensemble de ses composantes irréductibles est localement fini puisque tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert irréductible; en outre, les composantes irréductibles de X sont alors ouvertes, donc (**0**,2.1.6) X est *somme* de ces composantes. En vertu de (2.1.9), l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ n'a alors qu'un seul idéal premier minimal, et comme il est réduit par hypothèse, il est intègre. Inversement, si les conditions de l'énoncé sont remplies, X est somme de ses composantes irréductibles en vertu de (2.1.9), et le schéma induit sur chacun de ces ensembles ouverts est irréductible et réduit, donc intègre.

Corollaire (4.5.6) *Soit* X *un schéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini* (par exemple *un schéma localement noethérien*). *Pour que* X *soit intègre, il faut et il suffit qu'il soit connexe et que pour tout* $x \in X$, *l'anneau local* $\mathscr{O}_{X,x}$ *soit intègre. En particulier, un schéma connexe et localement intègre est intègre.*

Proposition (4.5.7) *Soit* X *un schéma localement noethérien, et soit* $x \in X$ *un point tel que le nilradical* $\mathscr{N}_x$ *de* $\mathscr{O}_{X,x}$ *soit premier* (resp. *tel que* $\mathscr{O}_{X,x}$ *soit réduit*, resp. *tel que* $\mathscr{O}_{X,x}$ *soit intègre*); *alors il existe un voisinage ouvert* U *de* x *qui est irréductible* (resp. *réduit*, resp. *intègre*).

Il suffit de considérer les deux cas où $\mathscr{N}_x$ est premier et où $\mathscr{N}_x=0$, la troisième hypothèse étant conjonction des deux premières. Lorsque $\mathscr{N}_x$ est premier, la conclusion résulte de (2.1.9). Si $\mathscr{N}_x=0$, on a aussi $\mathscr{N}_y=0$ pour tout y dans un voisinage de x, car $\mathscr{N}$ est quasi-cohérent (4.5.1), donc cohérent puisque X est localement noethérien (2.7.1), et la conclusion résulte de (**0**,5.2.2).

Proposition (4.5.8) *Si* X *est un schéma noethérien, le nilradical* $\mathscr{N}_X$ *de* $\mathscr{O}_X$ *est nilpotent.*

On peut en effet recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines U_i, et il suffit de prouver qu'il existe des entiers n_i tels que $(\mathscr{N}_X|U_i)^{n_i}=0$; si n est le plus grand des n_i, on aura $\mathscr{N}_X^n=0$. On est donc ramené au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, A étant un anneau noethérien; en vertu de (4.5.1) et de (1.3.13), il suffit d'observer que le nilradical de A est nilpotent (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 7, cor. de la prop. 15).

Corollaire (4.5.9) *Pour qu'un schéma noethérien* X *soit affine, il faut et il suffit que* X_{red} *le soit.*

Cela résulte de (4.5.8) et de (2.3.6).

Proposition (4.5.10) *Pour tout morphisme de schémas* $f:X\to Y$, *il existe un morphisme et un seul* $f_{red}:X_{red}\to Y_{red}$ *rendant commutatif le diagramme*

(4.5.10.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\ i\ } & X_{red} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{red}} \\ Y & \xleftarrow[\ j\ ]{} & Y_{red} \end{array}$$

où i *et* j *sont les injections canoniques.*

Le sous-schéma X_{red} (resp. Y_{red}) de X (resp. Y) est défini par l'Idéal quasi-cohérent $\mathscr{N}_X$ (resp. $\mathscr{N}_Y$) et il est clair que l'on a $f^*(\mathscr{N}_Y)\mathscr{O}_X\subset\mathscr{N}_X$, les fibres de $f^*(\mathscr{N}_Y)\mathscr{O}_X$ étant des nilidéaux des fibres de $\mathscr{O}_X$. On déduit donc de (4.3.2) que $f\circ i$ se factorise en $j\circ f_{red}$, et comme j est un monomorphisme, cette factorisation est unique.

On voit en particulier que si X est *réduit*, le morphisme f se factorise en

$$X \xrightarrow{f_{red}} Y_{red} \xrightarrow{\ j\ } Y,$$

en d'autres termes, f est *majoré* par l'injection canonique j.

Pour deux morphismes $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, il résulte de la propriété d'unicité dans (4.5.10) que l'on a

$$(g\circ f)_{red}=g_{red}\circ f_{red}; \tag{4.5.10.2}$$

on peut donc encore dire que $X\mapsto X_{red}$ est un *foncteur covariant* dans la catégorie des schémas.

On aura soin de noter qu'en général le diagramme (4.5.10.1) *n'est pas un carré cartésien* (comme le montre le cas où $Y_{red} = Y$) (cf. (4.5.13)).

Proposition (4.5.11) *Si* X, Y *sont deux* S-*schémas, les schémas* $X_{red} \times_{S_{red}} Y_{red}$ *et* $X_{red} \times_S Y_{red}$ *sont identiques, et s'identifient canoniquement à un sous-schéma de* $X \times_S Y$ *ayant même espace sous-jacent que ce produit.*

Le fait que $X_{red} \times_S Y_{red}$ s'identifie à un sous-schéma de $X \times_S Y$ est un cas particulier du fait que si $f: X' \to X$ et $g: Y' \to Y$ sont des S-immersions surjectives, alors $f \times_S g: X' \times_S Y' \to X \times_S Y$ est une immersion surjective par (4.3.6,(iii)) et (3.6.1,(i)). D'autre part, si $\varphi: X_{red} \to S$, $\psi: Y_{red} \to S$ sont les morphismes structuraux, ils se factorisent à travers S_{red} (4.5.10), et comme $S_{red} \to S$ est un monomorphisme, la première assertion résulte de (**0**,1.2.14).

Corollaire (4.5.12) *Les schémas* $(X \times_S Y)_{red}$ *et* $(X_{red} \times_{S_{red}} Y_{red})_{red}$ *s'identifient canoniquement.*

Cela résulte aussitôt de (4.5.2) et (4.5.11).

On notera que si X et Y sont des S-schémas réduits, *il n'en est pas nécessairement de même de* $X \times_S Y$, car le produit tensoriel de deux algèbres réduites (même de deux corps) peut avoir des éléments nilpotents.

Corollaire (4.5.13) *Pour tout morphisme* $f: X \to Y$, *le diagramme* (4.5.10.1) *se factorise en*

(4.5.13.1)
$$\begin{array}{ccc} & & X_{red} = (X \times_Y Y_{red})_{red} \\ & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & X \times_Y Y_{red} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & Y_{red} \end{array}$$

où le carré est cartésien.

On a en effet $(X \times_Y Y_{red})_{red} = (X_{red} \times_{Y_{red}} Y_{red})_{red} = X_{red}$.

Proposition (4.5.14) *Soient* X, Y *deux schémas,* x *un point de* X. *Considérons, pour un morphisme* $f: X \to Y$, *la propriété d'être*:

(i) *surjectif*;
(ii) *injectif*;
(iii) *ouvert en un point* x (resp. *ouvert*);
(iv) *fermé*;
(v) *un homéomorphisme sur son image*;
(vi) *universellement ouvert en un point* x (resp. *universellement ouvert*);

(vii) *universellement fermé*;
(viii) *universellement bicontinu*;
(ix) *un homéomorphisme universel*;
(x) *radiciel*;
(xi) *générisant en un point x* (resp. *générisant*);
(xii) *universellement générisant en un point x* (resp. *universellement générisant*).

Alors, si **P** *désigne l'une des propriétés précédentes, pour que f possède la propriété* **P**, *il faut et il suffit que* f_{red} *la possède.*

La proposition est évidente pour les propriétés (i), (ii), (iii), (iv), (v), (xi) qui ne dépendent que de l'application des espaces sous-jacents correspondant à f; pour (x), la proposition résulte de ce que les fibres de f et de f_{red} en un point $y \in Y$ ont les mêmes espaces sous-jacents et que le corps résiduel en un point de X (resp. Y) est le même que pour X_{red} (resp. Y_{red}). Pour les propriétés (vi), (vii), (viii), (ix) et (xii), si f possède cette propriété, il en est de même de f_{red}, en raison de (4.5.13.1) et de ce que le morphisme $X_{\mathrm{red}} \to X \times_Y Y_{\mathrm{red}}$ est un homéomorphisme universel (4.5.3). Inversement, si f_{red} possède l'une de ces propriétés, il suffit de noter que pour tout morphisme $Y' \to Y$ on a $(X_{\mathrm{red}} \times_{Y_{\mathrm{red}}} Y'_{\mathrm{red}})_{\mathrm{red}} = (X \times_Y Y')_{\mathrm{red}}$ (4.5.12) pour voir que le morphisme

$$(f_{(Y')})_{\mathrm{red}} : (X \times_Y Y')_{\mathrm{red}} \to Y'_{\mathrm{red}}$$

possède la propriété correspondante où l'on a supprimé le mot «universellement» ou «universel»; d'après ce qu'on a vu plus haut, $f_{(Y')}$ a alors cette dernière propriété. CQFD.

Proposition (4.5.15) *Soient* X, Y *deux schémas, x un point de* X. *Considérons, pour un morphisme* $f : X \to Y$, *la propriété d'être*:
(i) *un monomorphisme*;
(ii) *une immersion*;
(iii) *une immersion ouverte*;
(iv) *une immersion fermée*;
(v) *une immersion locale au point x*;
(vi) *un isomorphisme local au point x*;
(vii) *birationnel* (2.3.4).

Alors, si f possède l'une de ces propriétés, f_{red} *la possède également.*

Pour les propriétés (ii) à (vii) cela résulte de ce que si $f = (\psi, \theta)$, on a $f_{\mathrm{red}} = (\psi, \theta')$ et de ce qui si $\theta_x^{\#} : \mathscr{O}_{Y,\psi(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ est surjectif (resp. bijectif), il en est de même de $\theta_x'^{\#} : \mathscr{O}_{Y,\psi(x)}/\mathscr{N}_{Y,\psi(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{N}_{X,x}$ ((4.2.2) et (2.3.4)). Pour (i) il suffit d'utiliser le fait qu'un monomorphisme est universel (**0**, 1.3.6), le diagramme (4.5.13.1) et le fait que $X_{\mathrm{red}} \to X \times_Y Y_{\mathrm{red}}$ est une immersion fermée, donc un monomorphisme.

On notera que si f_{red} est une immersion, il n'en est pas nécessairement de même de f. Prenons en effet $Y = \mathrm{Spec}(k)$ où k est un corps, $X = \mathrm{Spec}(A)$,

où $A = k \oplus k$, avec la loi de multiplication $(a,b)(a',b') = (aa', ab' + ba')$, et soit $\varphi : k \to A$ l'injection canonique $a \mapsto (a,0)$. Le morphisme $f : X \to Y$ correspondant n'est pas une immersion, bien que $A_{red} = k$ et par suite f_{red} est un isomorphisme.

(4.5.16) Dire qu'une *immersion* $f : Y \to X$ est *surjective* signifie qu'elle est fermée et que le sous-schéma de X associé à f est défini par un *Nilidéal* $\mathscr{J}$; on dit encore alors que f est une *nilimmersion*; f est alors un *homéomorphisme* de Y sur X, et f_{red} un isomorphisme de Y_{red} sur X_{red}. On dit que la nilimmersion f est *nilpotente* (resp. *localement nilpotente*) si l'Idéal $\mathscr{J}$ est nilpotent (resp. localement nilpotent, c'est-à-dire que tout $x \in X$ a un voisinage ouvert U tel que $\mathscr{J}|U$ soit nilpotent); on dit que f est *nilpotente d'ordre n* lorsque $\mathscr{J}^{n+1} = 0$. Lorsque Y est un sous-schéma de X et f l'injection canonique, on dit que X est un *voisinage infinitésimal* (resp. *voisinage infinitésimal d'ordre n*) de Y lorsque f est nilpotente (resp. nilpotente d'ordre n).

4.6. Existence d'un sous-schéma d'espace sous-jacent donné

Proposition (4.6.1) *Pour tout sous-espace localement fermé* Y *de l'espace sous-jacent à un schéma* X, *il existe un sous-schéma réduit et un seul de* X *ayant* Y *pour espace sous-jacent.*

L'unicité résultant de (4.5.2), il reste à prouver l'existence du sous-schéma en question.

Si X est affine d'anneau A, et Y fermé dans X, la proposition est immédiate: $\mathfrak{j}(Y)$ est le plus grand idéal $\mathfrak{a} \subset A$ tel que $V(\mathfrak{a}) = Y$, et il est égal à sa racine (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, §4, n°3, prop. 1), donc $A/\mathfrak{j}(Y)$ est un anneau réduit.

Dans le cas général, pour tout ouvert affine $U \subset X$ tel que $U \cap Y$ soit fermé dans U, considérons le sous-schéma fermé Y_U de U défini par l'Idéal quasi-cohérent associé à l'idéal $\mathfrak{j}(U \cap Y)$ de $A(U)$, qui est réduit. Montrons que, si V est un ouvert affine de X contenu dans U, Y_V est *induit* par Y_U sur $V \cap Y$; or, ce schéma induit est un sous-schéma fermé de V qui est réduit et a $V \cap Y$ comme espace sous-jacent; l'unicité de Y_V entraîne donc notre assertion.

Corollaire (4.6.1.1) *Soient* X *un schéma,* E *une partie localement fermée de* X. *Tout point* $x \in E$ *admet alors dans* E *une générisation maximale* y (i.e. telle que y n'admette aucune générisation $\neq y$ dans E). *En particulier, si* $E \neq \emptyset$, *il existe* $y \in E$ *n'admettant dans* E *aucune générisation autre que* y (cf. (2.7.6)).

Il suffit de considérer un sous-schéma Y de X ayant E pour espace sous-jacent et le point générique d'une des composantes irréductibles de Y contenant x (2.1.5).

Proposition (4.6.2) *Soient* X *un schéma réduit,* $f: X \to Y$ *un morphisme,* Z *un sous-schéma fermé de* Y *tel que* $f(X) \subset Z$; *alors* f *se factorise en*

$$X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} Y,$$

où j *est le morphisme d'injection.*

Il résulte de l'hypothèse que le sous-schéma fermé $f^{-1}(Z)$ de X a pour espace sous-jacent X tout entier (4.3.1); comme X est réduit, ce sous-schéma fermé coincide avec X (4.5.2), et la proposition résulte donc de (4.3.1).

Corollaire (4.6.3) *Soit* X *un sous-schéma réduit d'un schéma* Y; *si* Z *est le sous-schéma fermé réduit de* Y *ayant pour espace sous-jacent* $\bar{X}$, X *est un sous-schéma induit sur un ouvert de* Z.

Il y a en effet un ouvert U de Y tel que $X = U \cap \bar{X}$; comme X est un sous-schéma réduit de Z en vertu de (4.6.2), le sous-schéma X est induit par Z sur le sous-espace ouvert X en vertu de l'unicité (4.6.1).

Corollaire (4.6.4) *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme,* X′ (resp. Y′) *un sous-schéma fermé de* X (resp. Y) *défini par un Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) *de* $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_Y$). *Supposons que* X′ *soit réduit et que* $f(X') \subset Y'$. *Alors on a* $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}$.

Comme la restriction de f à X′ se factorise en $X' \to Y' \to Y$ d'après (4.6.2), il suffit d'appliquer (4.3.1, (ii)).

§ 5. Morphismes séparés. Critères valuatifs

5.1. Diagonale d'un S-schéma

Rappelons (**0**, 1.4.3) que pour tout morphisme de schémas $\varphi: X \to S$, on a défini le morphisme diagonal $\Delta_X: X \to X \times_S X$ (aussi noté $\Delta_{X/S}$ ou Δ_φ); nous ne reviendrons pas sur ses propriétés générales (**0**, 1.4).

Proposition (5.1.1) *Soit* $f: X \to Y$ *un* S*-morphisme radiciel. Alors l'image de* $\Delta_X(X)$ *par* $f \times_S f$ *est l'ensemble* $\Delta_Y(Y) \cap p_1^{-1}(f(X)) = \Delta_Y(Y) \cap p_2^{-1}(f(X))$, *où* p_1 *et* p_2 *sont les projections canoniques de* $Y \times_S Y$.

Appliquons le diagramme commutatif (**0**, 1.4.5.1); on sait que $f \times_S f$ est radiciel et que l'image de $X \times_S X$ par ce morphisme est $p_1^{-1}(f(X)) \cap p_2^{-1}(f(X))$ (3.7.9); en outre, si $z \in \Delta_Y(Y) \cap p_1^{-1}(f(X))$, on a $z = \Delta_Y(y)$ pour un $y \in Y$ et $y = p_1(z) \in f(X)$, donc $y = f(x)$ pour un $x \in X$, et $z = \Delta_Y(f(x))$ appartient à $(f \times_S f)(\Delta_X(X))$ en vertu de la commutativité du diagramme (**0**, 1.4.5.1).

On appliquera en particulier (5.1.1) lorsque X est un *sous-schéma* de Y et f l'injection canonique, ce qui permet d'identifier l'ensemble $\Delta_X(X)$ à une partie de $\Delta_Y(Y)$.

Proposition (5.1.2) *Le morphisme diagonal* $\Delta_{X/S}$ *est une immersion de* X *dans* $X \times_S X$.

Appliquons (4.2.4, (i)): pour tout $x \in X$ et tout voisinage ouvert affine U de x dans X, $U \times_S U$ est un voisinage ouvert affine de $\Delta_X(x)$, les deux projections de ce dernier point étant x (3.2.3). Compte tenu de (5.1.1), on est ramené à démontrer (5.1.2) lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont des schémas affines; la définition de Δ_X (**0**, 1.4.3), jointe à (1.6.5), montre que Δ_X correspond à l'homomorphisme canonique $\pi : B \otimes_A B \to B$ qui, à tout produit tensoriel $b \otimes b'$, fait correspondre bb'. Comme cet homomorphisme est surjectif, on voit que Δ_X est même alors une immersion *fermée* (4.2.1.1), ce qui achève la démonstration.

On dit que le sous-schéma de $X \times_S X$ associé à l'immersion Δ_X (4.2.1) est *la diagonale* de $X \times_S X$. Le raisonnement de (5.1.1) montre que, si X est un sous-schéma d'un S-schéma Y, la diagonale de $X \times_S X$ s'identifie canoniquement à un *sous-schéma* de la diagonale de $Y \times_S Y$.

Corollaire (5.1.3) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $\psi : S \to T$ *un morphisme faisant de* X *et* Y *des* T*-schémas. Soient* p_1, p_2 *les projections canonique de* $X \times_S Y$; *alors le morphisme* $(p_1, p_2)_T : X \times_S Y \to X \times_T Y$ *est une immersion.*

Cela résulte du carré cartésien (**0**, 1.4.8.1) et de (4.3.6, (ii)).

Sous les hypothèses de (5.1.3), on dit que $(p_1, p_2)_T$ est l'*immersion canonique* de $X \times_S Y$ dans $X \times_T Y$.

Corollaire (5.1.4) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme; alors le morphisme graphe* $\Gamma_f = (1_X, f)_S : X \to X \times_S Y$ *de* f (**0**, 1.4.9) *est une immersion.*

C'est le cas particulier de (5.1.3) où l'on remplace S par Y et T par S.

Le sous-schéma de $X \times_S Y$ associé à l'immersion Γ_f (4.2.1) est appelé le *graphe* du morphisme f. Les sous-schémas de $X \times_S Y$ qui sont des graphes de S-morphismes $X \to Y$ se caractérisent par le fait que la restriction à un tel sous-schéma G de la projection $p_1 : X \times_S Y \to X$ est un *isomorphisme* g de G sur X: en effet, lorsqu'il en est ainsi, G est le graphe du morphisme $p_2 \circ g^{-1}$, où $p_2 : X \times_S Y \to Y$ est la seconde projection $X \times_S Y \to Y$.

Lorsqu'on prend en particulier $X = S$, les S-morphismes $S \to Y$, c'est-à-dire les S-*sections* de Y (2.6.5) sont égaux à leurs morphismes graphes; les sous-schémas G de Y qui sont des graphes de S-sections (autrement dit tels que la restriction à G du morphisme structural

$Y \to S$ soit un isomorphisme) s'appellent encore les *images* de ces sections, ou, par abus de langage, les S-*sections* de Y.

La formation du *noyau* de deux S-morphismes (**0**, 1.4.10) se simplifie ici de la façon suivante, compte tenu de (4.3.1):

Proposition (5.1.5) *Soient* $u_1 : X \to Y$, $u_2 : X \to Y$ *deux* S-*morphismes. Alors le noyau* $\mathrm{Ker}(u_1, u_2)$ *est canoniquement isomorphe au sous-schéma de* X *image réciproque* (4.3.1) *de la diagonale* $\Delta_Y(Y)$ *par le morphisme* $(u_1, u_2)_S : X \to Y \times_S Y$.

On dit encore que le sous-schéma $\mathrm{Ker}(u_1, u_2)$ est le *schéma des coïncidences de* u_1 *et* u_2.

Corollaire (5.1.6.) *Pour qu'un point* $x \in X$ *appartienne à* $\mathrm{Ker}(u_1, u_2)$, *il faut et il suffit que* $u_1(x) = u_2(x)$ *et que, si* y *est la valeur commune de ces deux points, les homomorphismes* $\kappa(y) \xrightarrow{\omega_i} \kappa(x)$ *correspondant à* u_i *pour* $i = 1, 2$ *soient les mêmes.*

En effet, si $j : \mathrm{Ker}(u_1, u_2) \to X$ est l'injection canonique, dire que $x \in \mathrm{Ker}(u_1, u_2)$ signifie que le morphisme canonique $h : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ se factorise en $h = j \circ g$, où g est un morphisme de $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$ dans $\mathrm{Ker}(u_1, u_2)$; il revient donc au même (**0**, 1.4.2) de dire que l'on a $u_1 \circ h = u_2 \circ h$. Compte tenu de (2.5.5), cela équivaut à dire que $u_1(x) = u_2(x)$ et que, si y est la valeur commune de ces deux points, les deux homomorphismes ω_i de l'énoncé ($i = 1, 2$) sont les mêmes.

Remarque **(5.1.7)** *Soit* **P** *une propriété de morphismes de schémas, et considérons les propositions suivantes:*

(i) *Si* $j : X \to Y$ *est une immersion et* $g : Y \to Z$ *un morphisme possédant la propriété* **P**, *alors* $g \circ j$ *possède la propriété* **P**.

(ii) *Si* $f : X \to X'$ *et* $g : Y \to Y'$ *sont deux* S-*morphismes possédant la propriété* **P**, *alors* $f \times_S g$ *possède la propriété* **P**.

(iii) *Si le composé* $g \circ f$ *de deux morphismes* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *possède la propriété* **P**, *alors* f *possède la propriété* **P**.

Alors (iii) *est une conséquence de* (i) *et* (ii).

En effet le morphisme f se factorise en

$$f : X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y \tag{5.1.7.1}$$

où p_2 est la seconde projection. D'autre part, p_2 s'identifie à $(g \circ f) \times_Z 1_Y$ (**0**, 1.2.8); en vertu de (ii), p_2 possède la propriété **P**, et comme Γ_f est une immersion (5.1.4), il en est de même de f en vertu de (i).

En particulier:

Proposition (5.1.8) *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes; considérons, pour un morphisme, la propriété d'être:*

(i) *un monomorphisme*;
(ii) *une immersion*;
(iii) *une immersion locale*;
(iv) *universellement bicontinu*;
(v) *radiciel.*
Alors, si $g \circ f$ *possède l'une de ces propriétés,* f *la possède également.*

Les propriétés (i) et (v) n'ont été mises que pour mémoire, car pour (i) il s'agit d'une propriété valable pour toute catégorie, et pour (v), la proposition a déjà été prouvée (3.7.7).

Une immersion possède chacune de ces propriétés, et le composé de deux morphismes ayant l'une (déterminée) de ces propriétés la possède également ((4.3.6), (4.4.5) et (3.8.1)); cela prouve (5.1.8) pour la propriété (i). Pour la propriété (ii), (5.1.8) résulte des mêmes références et de (**0**, 1.2.12).

Corollaire (5.1.9) *Soient* $j: X \to Y$, $g: X \to Z$ *deux* S*-morphismes. Si* j *possède l'une des propriétés* (i), (ii), (iii), (iv), (v) *de* (5.1.8), *il en est de même de* $(j, g)_S$.

En effet, si $p: Y \times_S Z \to Y$ est la première projection, on a $j = p \circ (j, g)_S$ et il suffit d'appliquer (5.1.8).

Remarque **(5.1.10)** On a vu (**0**,1.4.12) que l'existence des produits fibrés dans une catégorie entraîne celle des limites projectives *finies.* La façon dont a été établi ce résultat, jointe à la caractérisation des noyaux dans la catégorie des schémas (5.1.5), montrent que pour tout système projectif *fini* $(X_i)_{i \in I}$ de schémas (resp. de S-schémas), $\varprojlim X_i$ est un *sous-schéma du produit* $\prod_{i \in I} X_i$ (resp. $\prod_{i \in I, S} X_i$).

5.2. Morphismes et schémas séparés

Définition (5.2.1) *On dit qu'un morphisme de schémas* $f: X \to Y$ *est séparé si le morphisme diagonal* $\Delta_f: X \to X \times_Y X$ *est une immersion* fermée; *on dit alors que* X *est un* Y*-schéma séparé sur* Y. *On dit qu'un schéma* X *est séparé s'il est séparé sur* Spec(**Z**).

En vertu de (5.1.2), pour que X soit séparé sur Y, il faut et il suffit que la diagonale $\Delta_X(X)$ soit un *sous-espace fermé* de l'espace sous-jacent à $X \times_Y X$.

Proposition (5.2.2) *Tout morphisme de schémas* affines *est séparé. En particulier, tout schéma affine est séparé.*

Cela a été vu dans la preuve de (5.1.2).

Proposition (5.2.3) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $\psi: S \to T$ *un morphisme faisant de* X *et* Y *des* T*-schémas. Soient* p_1, p_2 *les projections canoni-*

ques de $X \times_S Y$; *si* ψ *est un morphisme séparé, le morphisme* $(p_1, p_2)_T$: $X \times_S Y \to X \times_T Y$ *est une immersion fermée.*

Corollaire (5.2.4) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $f: X \to Y$ *un* S*-morphisme. Si* Y *est séparé sur* S, *le morphisme graphe* $\Gamma_f: X \to X \times_S Y$ *est une immersion fermée. En particulier, toute* S*-section de* Y *est une immersion fermée.*

Les démonstrations sont celles de (5.1.3) et (5.1.4) en remplaçant «immersion» par «immersion fermée».

Proposition (5.2.5) *Soit* Y *un* S*-schéma séparé sur* S. *Alors, pour tout couple de* S*-morphismes* $u_1: X \to Y, u_2: X \to Y$, *le sous-schéma* $\mathrm{Ker}(u_1, u_2)$ *de* X *est fermé.*

C'est une conséquence évidente de (5.1.5).

Remarque **(5.2.5.1)** Si u_1, u_2, u_3 sont trois S-morphismes de X dans Y, le schéma des coïncidences $\mathrm{Ker}(u_1, u_2, u_3)$, qui existe par (**0**,1.4.13), est encore un *sous-schéma fermé* de X, car il est égal à $\mathrm{Ker}(u_1, u_2) \times_X \mathrm{Ker}(u_2, u_3)$, c'est-à-dire (4.3.4) à $\inf(\mathrm{Ker}(u_1, u_2), \mathrm{Ker}(u_2, u_3))$, et ce sous-schéma est fermé en vertu de (5.2.5) et (4.3.6).

Corollaire (5.2.6) *Soient* S *un schéma intègre, s son point générique,* X *un* S*-schéma séparé sur* S. *Si deux* S*-sections* u, v *de* X *sont telles que* $u(s) = v(s)$, *alors* $u = v$.

En effet, si $x = u(s) = v(s)$, les homomorphismes $\kappa(x) \to \kappa(s)$ correspondant à u et v sont nécessairement identiques, puisque leur composé avec l'homomorphisme $\kappa(s) \to \kappa(x)$ correspondant au morphisme structural de X est l'identité $\kappa(s) \to \kappa(s)$. On en déduit (5.1.6) que $s \in \mathrm{Ker}(u, v)$, et par hypothèse $\mathrm{Ker}(u, v)$ est un sous-schéma fermé de S (5.2.5); comme S est réduit et s son point générique, le seul sous-schéma fermé de S contenant s est S lui-même (4.5.2), donc $u = v$.

Remarque **(5.2.7)** *Soit* **P** *une propriété de morphismes de schémas, et considérons les propositions suivantes*:

(i) *Si* $j: X \to Y$ *est une immersion fermée et* $g: Y \to Z$ *un morphisme possédant la propriété* **P**, *alors* $g \circ j$ *possède la propriété* **P**.

(ii) *Si* $f: X \to X'$ *et* $g: Y \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes possédant la propriété* **P**, *alors* $f \times_S g$ *possède la propriété* **P**.

(iii) *Si le composé* $g \circ f$ *de deux morphismes* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *possède la propriété* **P** *et si* g *est séparé, alors* f *possède la propriété* **P**.

(iv) *Si* $f: X \to Y$ *possède la propriété* **P**, *il en est de même de* f_{red}.

Alors, (iii) *et* (iv) *sont des conséquences de* (i) *et* (ii).

Pour la propriété (iii), la démonstration est la même que dans (5.1.7), en tenant compte de ce que Γ_f est une immersion *fermée* (5.2.4).

D'autre part, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_{red} & \xrightarrow{f_{red}} & Y_{red} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

les flèches verticales sont des immersions fermées; on voit donc que (iv) est conséquence de (i) et (iii), en observant qu'une immersion fermée est séparée en vertu de la définition et de (**0**,1.4.11)(cf. (5.3.1)).

Proposition (5.2.8) *Soient* $f:X\to Y$ *un morphisme,* $g:Y\to Z$ *un morphisme séparé. Supposons que* $g\circ f$ *possède l'une des propriétés suivantes: être:*

(i) *universellement fermé;*

(ii) *une immersion fermée.*

Alors f *possède la même propriété.*

En effet, ces propriétés vérifient les conditions (i) et (ii) de (5.2.7) en vertu de (3.8.2) et (4.3.6).

Corollaire (5.2.9) *Soient* Z *un* S*-schéma séparé sur* S, $j:X\to Y$, $g:X\to Z$ *deux* S*-morphismes. Si* j *possède l'une des propriétés* (i), (ii) *de* (5.2.8), *il en est de même de* $(j,g)_S:X\to Y\times_S Z$.

La démonstration à partir de (5.2.8) est la même que celle de (5.1.9) à partir de (5.1.8), compte tenu de ce que la projection $p:Y\times_S Z\to Y$ est un morphisme séparé ((5.3.1), qui n'utilise pas (5.2.9)).

Remarque **(5.2.10)** Si l'on suppose réciproquement que le morphisme graphe $\Gamma_f:X\to X\times_S Y$ est une immersion fermée pour tout S-morphisme $f:X\to Y$, cela entraîne que Y est séparé sur S, en prenant $f=1_Y$. De même, si l'on suppose que lorsque $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ sont tels que $g\circ f$ soit une immersion fermée, il en est de même de f, alors cela entraîne que g est séparé, en prenant $f=\Delta_Y:Y\to Y\times_Z Y$, et $g=p_1:Y\times_Z Y\to Y$.

5.3. Critères de séparation

Proposition (5.3.1) (i) *Tout morphisme radiciel (et en particulier tout monomorphisme, donc toute immersion) est un morphisme séparé.*

(ii) *Le composé de deux morphismes séparés est séparé.*

(iii) *Si* $f:X\to X'$, $g:Y\to Y'$ *sont deux* S*-morphismes séparés,* $f\times_S g$ *est séparé.*

(iv) *Si* $f:X\to Y$ *est un* S*-morphisme séparé, le* S′*-morphisme* $f_{(S')}$ *est séparé pour toute extension* $S'\to S$ *du schéma de base.*

(v) *Si le composé* $g\circ f$ *de deux morphismes est séparé,* f *est séparé.*

(vi) *Pour qu'un morphisme* f *soit séparé, il faut et il suffit que* f_{red} (5.1.5) *le soit.*

(i) résulte aussitôt de (3.7.1,(c')). Si $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ sont deux morphismes, le diagramme

(5.3.1.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta_{X/Z}} & X\times_Z X \\ & {\scriptstyle\Delta_{X/Y}}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle j} & \\ & X\times_Y X & \end{array}$$

où j désigne l'immersion canonique (5.2.3), est commutatif, comme on le vérifie aussitôt. Si f et g sont séparés, $\Delta_{X/Y}$ est une immersion fermée par définition, et j est une immersion fermée en vertu de (5.2.3), donc $\Delta_{X/Z}$ est une immersion fermée par (4.3.6), ce qui prouve (ii). Vu (i) et (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes (**0**, 1.3.9), et il suffit de démontrer (iv). Or, $X_{(S')}\times_{Y_{(S')}}X_{(S')}$ s'identifie canoniquement à $(X\times_Y X)\times_Y Y_{(S')}$ en vertu de (**0**,1.3.4) et de (**0**,1.3.5), et on vérifie aussitôt que le morphisme diagonal $\Delta_{X_{(S')}}$ s'identifie alors à $\Delta_X\times_Y 1_{Y_{(S')}}$; la proposition résulte donc de (4.3.6).

Pour établir (v), considérons la factorisation (5.1.7.1)

$$X \xrightarrow{\Gamma_f} X\times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y$$

de f, en remarquant que $p_2=(g\circ f)\times_Z 1_Y$; l'hypothèse que $g\circ f$ est séparé entraîne que p_2 est séparé par (iii) et (i), et comme Γ_f est une immersion, Γ_f est séparé par (i), donc f est séparé par (ii). Enfin, pour démontrer (vi), rappelons que les schémas $X_{red}\times_{Y_{red}}X_{red}$ et $X_{red}\times_Y X_{red}$ s'identifient canoniquement (4.5.11); si on désigne par j l'injection $X_{red}\to Y$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{red} & \xrightarrow{\Delta_{X_{red}}} & X_{red}\times_Y X_{red} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j\times_Y j} \\ X & \xrightarrow[\Delta_X]{} & X\times_Y X \end{array}$$

est commutatif (**0**,1.4.5), et la proposition résulte de ce que les flèches verticales sont des homéomorphismes des espaces sous-jacents ((4.3.6) et (4.5.11)).

Corollaire (5.3.2) *Si $f:X\to Y$ est séparé, la restriction de f à tout sous-schéma de X est séparée.*

Cela résulte de (5.3.1, (i) et (ii)).

Corollaire (5.3.3) *Si X, Y sont deux S-schémas tels que Y soit séparé sur S, $X\times_S Y$ est séparé au-dessus de X.*

C'est un cas particulier de (5.3.1, (iv)).

Proposition (5.3.4) *Soit* X *un schéma, et supposons que son espace sous-jacent soit réunion d'une famille* finie *de parties fermées* X_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$; *on considère pour chaque k le sous-schéma réduit de* X *ayant* X_k *pour espace sous-jacent* (4.6.1) *et on le note encore* X_k. *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme, et pour chaque k, soit* Y_k *une partie fermée de* Y *telle que* $f(X_k) \subset Y_k$; *on note encore* Y_k *le sous-schéma réduit de* Y *ayant* Y_k *pour espace sous-jacent, de sorte que la restriction* $X_k \to Y$ *de f à* X_k *se factorise en*

$$X_k \xrightarrow{f_k} Y_k \longrightarrow Y$$

(4.6.2). *Pour que f soit séparé, il faut et il suffit que les* f_k *le soient.*

La nécessité résulte de (5.3.1, (i), (ii) et (v)). Inversement, si la condition de l'énoncé est satisfaite, chacune des restrictions $X_k \to Y$ de f est séparée (5.3.1, (i) et (ii)); si p_1, p_2 sont les projections de $X \times_Y X$, le sous-espace $\Delta_{X_k}(X_k)$ s'identifie au sous-espace $\Delta_X(X) \cap p_1^{-1}(X_k)$ de l'espace sous-jacent à $X \times_Y X$ ((5.1.1) et (5.1.2)); ces sous-espaces étant fermés dans $X \times_Y X$, il en est de même de leur réunion $\Delta_X(X)$.

Supposons en particulier que les X_k soient les *composantes irréductibles* de X; alors on peut supposer que les Y_k sont des parties fermées irréductibles de Y (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 4); la prop. (5.3.4) ramène donc dans ce cas la notion de séparation au cas des schémas *intègres* (2.1.8).

Proposition (5.3.5) *Soit* (Y_λ) *un recouvrement ouvert d'un schéma* Y; *pour qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *soit séparé, il faut et il suffit que chacune de ses restrictions* $f^{-1}(Y_\lambda) \to Y_\lambda$ *soit séparée.*

Si on pose $X_\lambda = f^{-1}(Y_\lambda)$, tout revient, compte tenu de (4.2.4, (ii)) et de l'identité des produits $X_\lambda \times_Y X_\lambda$ et $X_\lambda \times_{Y_\lambda} X_\lambda$ (3.2.1.4), à prouver que les $X_\lambda \times_Y X_\lambda$ forment un recouvrement de $X \times_Y X$. Or, si l'on pose $Y_{\lambda\mu} = Y_\lambda \cap Y_\mu$ et $X_{\lambda\mu} = X_\lambda \cap X_\mu = f^{-1}(Y_{\lambda\mu})$, $X_\lambda \times_Y X_\mu$ s'identifie au produit $X_{\lambda\mu} \times_{Y_{\lambda\mu}} X_{\lambda\mu}$ (3.2.7.1), donc aussi à $X_{\lambda\mu} \times_Y X_{\lambda\mu}$ (**0**,1.2.14), et finalement à un ouvert de $X_\lambda \times_Y X_\lambda$, ce qui établit notre assertion (3.2.3).

La prop. (5.3.5) permet, en prenant un recouvrement de Y par des ouverts affines, de ramener l'étude des morphismes séparés à celle des morphismes séparés à valeurs dans des schémas affines.

Proposition (5.3.6) *Soient* Y *un schéma* affine, X *un schéma,* (U_α) *un recouvrement de* X *par des ouverts affines. Pour qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *soit séparé, il faut et il suffit que, pour tout couple d'indices* (α, β), $U_\alpha \cap U_\beta$ *soit un ouvert affine, et que l'anneau* $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_X)$ *soit engendré par la réunion des images canoniques des anneaux* $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ *et* $\Gamma(U_\beta, \mathcal{O}_X)$.

Les $U_\alpha \times_Y U_\beta$ forment un recouvrement ouvert de $X \times_Y X$ (3.2.3); en désignant par p et q les projections de $X \times_Y X$, on a

$$\Delta_X^{-1}(U_\alpha \times_Y U_\beta) = \Delta_X^{-1}(p^{-1}(U_\alpha) \cap q^{-1}(U_\beta))$$
$$= \Delta_X^{-1}(p^{-1}(U_\alpha)) \cap \Delta_X^{-1}(q^{-1}(U_\beta)) = U_\alpha \cap U_\beta ;$$

tout revient donc à exprimer que la restriction de Δ_X à $U_\alpha \cap U_\beta$ est une immersion fermée dans $U_\alpha \times_Y U_\beta$. Or, cette restriction n'est autre que $(j_\alpha, j_\beta)_Y$, en désignant par j_α (resp. j_β) le morphisme d'injection de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans U_α (resp. U_β), ainsi qu'il résulte des définitions. Comme $U_\alpha \times_Y U_\beta$ est un schéma affine dont l'anneau est canoniquement isomorphe à $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X) \otimes_{\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)} \Gamma(U_\beta, \mathcal{O}_X)$ (3.2.1.3), on voit que $U_\alpha \cap U_\beta$ doit être un schéma affine et que l'application $h_\alpha \otimes h_\beta \mapsto h_\alpha h_\beta$ de l'anneau $A(U_\alpha \times_Y U_\beta)$ dans $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_X)$ doit être surjective (4.2.1.1), ce qui achève la démonstration.

(5.3.7) *On retrouve ainsi le fait qu'un schéma affine est séparé* (5.2.2).

Corollaire (5.3.8) *Soit* Y *un schéma affine; pour que* $f: X \to Y$ *soit un morphisme séparé, il faut et il suffit que* X *soit séparé.*

On observera en effet que le critère de (5.3.6) ne dépend pas de f.

Corollaire (5.3.8) *Pour qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *soit séparé, il faut que pour tout ouvert* U *sur lequel* Y *induit un schéma séparé, le schéma induit* $f^{-1}(U)$ *soit séparé, et il suffit qu'il en soit ainsi pour tout ouvert affine* $U \subset Y$.

La nécessité de la condition résulte de (5.3.4) et (5.3.1, (ii)); la suffisance résulte de (5.3.4) et (5.3.8), compte tenu de l'existence de recouvrements ouverts affines de Y.

En particulier, on retrouve le fait que si X et Y sont des schémas affines, *tout* morphisme $X \to Y$ est séparé (5.2.2).

Proposition (5.3.10) *Soient* Y *un schéma séparé,* $f: X \to Y$ *un morphisme. Pour tout ouvert affine* U *de* X *et tout ouvert affine* V *de* Y, $U \cap f^{-1}(V)$ *est affine.*

Soient p_1, p_2 les projections de $X \times_Z Y$; le sous-espace $U \cap f^{-1}(V)$ est l'image par p_1 de $\Gamma_f(X) \cap p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$. Or, $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ s'identifie à l'espace sous-jacent au schéma $U \times_Z V$ (3.2.3), et est par suite un schéma affine (3.2.1.3); comme $\Gamma_f(X)$ est fermé dans $X \times_Z Y$ (5.2.4), $\Gamma_f(X) \cap p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ est fermé dans $U \times_Z V$, et par suite le schéma induit par le sous-schéma de $X \times_Z Y$ associé à Γ_f (4.2.1), sur la partie ouverte $\Gamma_f(X) \cap p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ de son espace sous-jacent, est un sous-schéma fermé d'un schéma affine, donc un schéma affine (4.2.1.1). La proposition résulte alors du fait que Γ_f est une immersion.

Exemples **(5.3.11)** Le schéma de l'exemple (2.4.2) («droite projective sur un corps K») est *séparé*, car pour le recouvrement (X_1, X_2) de X par des ouverts affines, $X_1 \cap X_2 = U_{12}$ est affine et $\Gamma(U_{12}, \mathcal{O}_X)$, anneau des fractions rationnelles de la forme $f(s)/s^m$ avec $f \in K[s]$, est engendré par $K[s]$ et par $1/s$, donc les conditions de (5.3.6) sont vérifiées.

Avec le même choix de X_1, X_2, U_{12} et U_{21} que dans l'exemple (2.4.2), prenons cette fois pour u_{12} l'isomorphisme qui à $f(s)$ fait correspondre $f(t)$; on obtient cette fois par recollement un schéma *intègre non séparé* X, car la première condition de (5.3.6) est vérifiée, mais non la seconde. Il est immédiat ici que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X_1, \mathcal{O}_X) = K[s]$ est un isomorphisme; l'isomorphisme réciproque définit un morphisme $f : X \to \mathrm{Spec}(K[s])$ qui est surjectif, et pour tout $y \in \mathrm{Spec}(K[s])$ tel que $\mathfrak{j}_y \neq (0)$, $f^{-1}(y)$ est réduit à un point, mais pour $\mathfrak{j}_y = (0)$, $f^{-1}(y)$ se compose de *deux* points distincts (on dit que X est la «droite affine sur K, où le point 0 est dédoublé»).

On peut aussi donner des exemples où *aucune* des deux conditions de (5.3.6) n'est vérifiée. Remarquons d'abord que dans le spectre premier Y de l'anneau de polynômes $A = K[s,t]$ à deux indéterminées sur un corps K, l'ouvert U réunion de $D(s)$ et de $D(t)$ *n'est pas un ouvert affine.* En effet, si z est une section de $\mathcal{O}_Y$ au-dessus de U, il existe deux entiers $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ tels que $s^m z$ et $t^n z$ soient les restrictions à U de polynômes en s et t (1.4.1), ce qui n'est évidemment possible que si la section z se prolonge en une section au-dessus de Y tout entier, identifiée à un polynôme en s et t. Si U était un ouvert affine, le morphisme d'injection $U \to Y$ serait donc un isomorphisme (1.6.5), ce qui est absurde puisque $U \neq Y$.

Cela étant, prenons deux schémas affines Y_1, Y_2, spectres premiers des anneaux $A_1 = K[s_1, t_1]$, $A_2 = K[s_2, t_2]$; prenons $U_{12} = D(s_1) \cup D(t_1)$, $U_{21} = D(s_2) \cup D(t_2)$, et pour u_{12} la restriction à U_{21} de l'isomorphisme $Y_2 \to Y_1$ correspondant à l'isomorphisme d'anneaux qui à $f(s_1, t_1)$ fait correspondre $f(s_2, t_2)$; on a ainsi un exemple où aucune des conditions de (5.3.6) n'est satisfaite (le schéma intègre ainsi obtenu est dit «plan affine sur K, où le point 0 est dédoublé»).

5.4. Morphismes schématiquement dominants et sous-schémas schématiquement denses

Proposition (5.4.1) *Soit $f = (\psi, \theta) : Z \to X$ un morphisme de schémas. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *L'homomorphisme $\theta : \mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Z)$ est injectif.*

b) *Pour tout ouvert U de X, l'homomorphisme canonique*

$$\theta_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Z) \tag{5.4.1.1}$$

est injectif.

c) *Pour tout ouvert* U *de* X *et tout sous-schéma fermé* Y *de* U *tel qu'il existe une factorisation*

$$f^{-1}(U) \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{j} U \tag{5.4.1.2}$$

de la restriction $f^{-1}(U) \to U$ *de* f (où j est l'injection canonique), *on a* $Y = U$.

Si de plus X *est un* S*-schéma, ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante*:

d) *Pour tout morphisme séparé* $g : X' \to S$ *et tout couple de* S*-morphismes* u, v *d'un ouvert* U *de* X *dans* X', *tel que les composés de* u *et* v *avec le morphisme* $f^{-1}(U) \to U$, *restriction de* f, *soient égaux, on a* $u = v$.

L'équivalence de a) et b) résulte des définitions (**0**, 3.4).

Pour voir que b) entraîne c), il suffit de considérer l'Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_U$ définissant Y, et de noter que, pour tout ouvert $V \subset U$, l'hypothèse de c) entraîne que θ_V se factorise en

$$\Gamma(V, \mathscr{O}_U) \to \Gamma(V, \mathscr{O}_U/\mathscr{J}) \to \Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{O}_Z).$$

Cela entraîne que toute section t de $\mathscr{J}$ au-dessus de V a pour image 0 dans $\Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{O}_Z)$, donc, en vertu de b), $\mathscr{J} = 0$ et $Y = U$.

Inversement, si c) est vérifiée, il suffit, pour prouver b), de considérer une section t de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de U appartenant au noyau de θ_U, et le sous-schéma fermé Y de U défini par l'Idéal quasi-cohérent $t\mathscr{O}_U$ de $\mathscr{O}_U$: l'hypothèse que l'image de t par θ_U est nulle entraîne que l'on a une factorisation (5.4.1.2) en vertu de (4.1.6).

Pour prouver que c) entraîne d), on applique c) au sous-schéma *fermé* $Y = \mathrm{Ker}(u, v)$ de U (5.2.5), la factorisation (5.4.1.2) résultant de l'hypothèse d) et de la définition du noyau de u et v; la conclusion $Y = U$ équivaut à $u = v$.

Inversement, pour déduire b) de d), considérons le S-schéma $X' = S[T] = S \otimes_Z Z[T]$ (T indéterminée), qui est séparé sur S par (5.3.1,(iv)); on sait (3.4.2) que les sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de U correspondent biunivoquement aux S-morphismes $U \to S[T]$; dire que deux sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de U ont même image par θ_U équivaut à dire que les composés des deux morphismes correspondants avec $f^{-1}(U) \to U$ sont égaux.

Définition (5.4.2) *Lorsque les conditions équivalentes de* (5.4.1) *sont vérifiées, on dit que le morphisme* f *est schématiquement dominant. Lorsque* f *est l'injection canonique d'un sous-schéma* Z *de* X, *on dit aussi que* Z *est schématiquement dense dans* X.

On notera que la notion de morphisme schématiquement dominant est *locale* sur X, comme il résulte par exemple de la propriété b) de (5.4.1): si (W_α) est un recouvrement ouvert de X, f est schématiquement dominant si et seulement s'il en est ainsi de chacun des morphismes $f^{-1}(W_\alpha) \to W_\alpha$, restrictions de f.

Proposition (5.4.3) *Un morphisme schématiquement dominant est dominant. Inversement, si* X *est* réduit *et si* $f : Z \to X$ *est dominant, alors* f *est schématiquement dominant.*

La première assertion résulte aussitôt de la condition b) de (5.4.1). D'autre part, si X est réduit et si $f(Z)$ est dense dans X, alors, puisque tout ouvert U de X est réduit, la factorisation (5.4.1.2) entraîne une factorisation

$$(f^{-1}(U))_{\mathrm{red}} \xrightarrow{g_{\mathrm{red}}} Y_{\mathrm{red}} \xrightarrow{j_{\mathrm{red}}} U$$

pour la restriction de f_{red} à $(f^{-1}(U))_{\mathrm{red}} = f_{\mathrm{red}}^{-1}(U)$; l'hypothèse que $f(Z)$ est dense dans X entraîne que l'image de g_{red} est dense dans U, donc que l'espace sous-jacent à Y est identique à U; mais comme U est réduit, cela entraîne $Y = Y_{\mathrm{red}} = U$ (4.5.2).

Corollaire (5.4.4) *Un sous-schéma* Y *de* X *qui est schématiquement dense dans* X *est nécessairement induit sur un ouvert partout dense de* X; *en outre tout sous-schéma* Z *de* X *qui majore* Y *est schématiquement dense dans* X.

Il résulte de (5.4.3) que l'espace sous-jacent à Y est dense dans X; comme il est localement fermé dans X, il est ouvert dans son adhérence X. Par suite, si $j: Y \to X$ est l'injection canonique, $j_*(\mathscr{O}_Y)$ a pour restriction $\mathscr{O}_Y$ à Y, et l'hypothèse entraîne que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{Y,x}$ est injectif pour tout $x \in Y$; comme cet homomorphisme est aussi surjectif (4.2.2,(ii)), il est bijectif, ce qui prouve la première assertion. La seconde résulte de ce que, si $j': Z \to X$ est l'injection canonique, l'homomorphisme composé $\mathscr{O}_X \to j'_*(\mathscr{O}_Z) \to j_*(\mathscr{O}_Y)$ est injectif, donc aussi $\mathscr{O}_X \to j'_*(\mathscr{O}_Z)$.

Remarques **(5.4.5)** Soit $f: X \to Y$ un morphisme *non séparé*, mais tel que le sous-schéma X′ de $X \times_Y X$ associé à l'immersion Δ_X, isomorphe à X, soit induit sur un ouvert d'un sous-schéma fermé Z de $X \times_Y X$ ayant pour espace sous-jacent l'*adhérence* de la diagonale $\Delta_X(X)$ (distincte de cette dernière par hypothèse) et soit *schématiquement dense* dans Z (on verra au § 6 que c'est le cas lorsque f est quasi-séparé ou lorsque X est réduit). Alors les restrictions à Z des projections canoniques p_1, p_2 de $X \times_Y X$ dans X coïncident dans l'ouvert schématiquement dense X′ de Z, mais non dans Z puisqu'il y a par hypothèse un point de Z non sur la diagonale.

* **(5.4.6)** Si X et Y sont des S-schémas *séparés* sur S et si $f: X \to Y$ est un morphisme schématiquement dominant, la condition d) de (5.4.1) signifie que f est un *épimorphisme* dans la catégorie des S-schémas séparés sur S (T,1.1). Réciproquement, si f est un épimorphisme dans cette catégorie et si de plus le noyau de l'homomorphisme correspondant à f, $\theta: \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$, est quasi-cohérent (ce qui a lieu par exemple lorsque f est quasi-compact et quasi-séparé (6.7.1)), alors f est schématiquement dominant. Raisonnons en effet par l'absurde; l'hypothèse entraîne que l'*image schématique* Y′ de X par f existe (6.10.5), et si f n'était pas schématiquement dominant, Y′ serait un sous-schéma fermé de de Y, *distinct de* Y, f se factorisant en

$$X \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{j} Y,$$

où j est l'injection canonique (6.10.5). On peut alors (chap. VI) *recoller* deux copies de Y *le long de* Y′, obtenant un S-schéma $Y \amalg_{Y'} Y$ séparé sur S, et deux S-morphismes distincts h_1, h_2 de Y dans $Y \amalg_{Y'} Y$, de sorte que la suite

$$Y' \xrightarrow{j} Y \underset{h_1}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} Y \amalg_{Y'} Y$$

soit *exacte* (0,1.4.2). On a alors $(h_1 \circ j) \circ f = (h_2 \circ j) \circ f$, bien que $h_1 \circ j \neq h_2 \circ j$, contrairement à l'hypothèse que f est un épimorphisme. ∗

5.5. Critères valuatifs

(5.5.1) Les critères valuatifs, dont nous verrons par la suite de nombreux exemples, permettent d'affirmer qu'un morphisme $f: X \to Y$ de schémas possède une certaine propriété lorsque pour *tout* changement de base $Y' \to Y$ où Y′ est un *spectre d'anneau de valuation* (ou même, dans certains cas, un *spectre d'anneau de valuation discrète*), le morphisme $f' = f_{(Y')}: X \times_Y Y' \to Y'$ déduit de f possède la même propriété, ce qui est souvent beaucoup plus facile à vérifier, étant donné la structure

très simple des anneaux de valuation, et surtout des anneaux de valuation *discrète*.

Comme ce sont ces derniers qui joueront le plus grand rôle dans les applications, nous appellerons, pour abréger, *trait* un schéma $Y = \mathrm{Spec}(A)$ qui est isomorphe au spectre d'un *anneau de valuation discrète* A; rappelons qu'un trait comporte *deux points*; le *point fermé* (ou *centre*) (2.5.1) $a = \mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de A, et où $\mathcal{O}_{Y,a} = A$ et $\kappa(y) = A/\mathfrak{m}$, corps résiduel de A; et le *point générique* $b = (0)$ (qui est donc tel que $\{b\}$ soit *ouvert* dans Y), où $\mathcal{O}_{Y,b} = \kappa(b) = K$ est le *corps des fractions* de A.

On peut encore dire qu'un trait est un *schéma noethérien intègre normal ayant exactement deux points*. En effet, un tel schéma X ne peut pas être discret, car il ne serait pas intègre; comme c'est un espace de Kolmogoroff, un des points b est nécessairement ouvert et a pour adhérence X, le second point a étant donc fermé; comme le seul voisinage de a est alors X lui-même, X est un schéma local (2.5.2), donc de la forme Spec(A), où A est un anneau local, noethérien et intégralement clos par hypothèse (2.7.3); le fait qu'il n'a qu'un seul idéal premier $\neq 0$ entraîne que A est un anneau de valuation discrète (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 7, prop. 11).

L'utilisation des critères valuatifs repose sur les deux propositions suivantes:

Proposition (5.5.2) *Soient* Y *un schéma,* $f: X \to Y$ *un morphisme,* x *un point de* X, $y = f(x)$, y' *une spécialisation* (**0**,2.1.1) *de* y. *Il existe alors un schéma local* Y', *spectre d'un anneau de valuation, et un morphisme* $g: Y' \to Y$ *tel que, si* a *désigne l'unique point fermé de* Y' *et* b *son point générique, on ait* $g(a) = y'$ *et* $g(b) = y$. *On peut en outre supposer vérifiée l'une des deux propriétés additionnelles suivantes (la seconde seulement si* $y' \neq y$*):*

(i) Y' *est le spectre d'un anneau de valuation complet dont le corps résiduel est algébriquement clos, et il existe un* $\kappa(y)$*-homomorphisme* $\kappa(x) \to \kappa(b)$.

(ii) *Il existe un* $\kappa(y)$*-isomorphisme* $\kappa(x) \to \kappa(b)$.

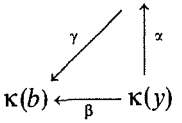
Supposons d'abord $y' \neq y$. Soit Y_1 le sous-schéma fermé réduit de Y ayant $\overline{\{y\}}$ pour espace sous-jacent (4.6.1), et soit X_1 le sous-schéma fermé image réciproque $f^{-1}(Y_1)$; comme $y' \in \overline{\{y\}}$ par hypothèse et que $\kappa(x)$ est le même dans X et dans X_1, on peut supposer Y *intègre*, de point générique y; $\mathcal{O}_{Y,y}$ est alors un anneau local intègre qui n'est pas un corps, et dont le corps des fractions est $\mathcal{O}_{Y,y} = \kappa(y)$, et $\kappa(x)$ est une extension de $\kappa(y)$. Pour réaliser les conditions $g(a) = y'$ et $g(b) = y$, ainsi que la condition additionnelle (i) (resp. (ii)), on prendra $Y' = \mathrm{Spec}(A')$, où A' est un anneau de valuation dominant $\mathcal{O}_{Y,y'}$ et qui est complet et a un corps

résiduel algébriquement clos extension de $\kappa(y')$ (resp. un anneau de valuation dominant $\mathcal{O}_{Y,y'}$, et dont $\kappa(x)$ est le corps des fractions); l'existence d'un tel anneau A′ est garantie par (**0**,6.5.6).

Si $y'=y$, il suffit de prendre pour A′ un anneau de valuation complet dont le corps résiduel est algébriquement clos et qui contient un sous-corps isomorphe à $\kappa(y)$, par exemple un corps de séries formelles à une indéterminée sur la clôture algébrique de $\kappa(y)$.

***Proposition (5.5.3)** *Soient* Y *un schéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de type fini,* x *un point de* X, $y=f(x)$, $y' \neq y$ *une spécialisation de* y. *Il existe alors un trait* Y′ (dont nous désignerons par a le point fermé, par b le point générique), *un morphisme* $g: Y' \to Y$ *et un morphisme* $h: \{b\} \to X$, *tels que l'on ait* $g(a)=y'$, $g(b)=y$, *et que, dans le diagramme commutatif*

(5.5.3.1)



(où α, β, γ, *sont les monomorphismes correspondant respectivement à* f, g, h), γ *soit bijectif.*

Comme dans (5.5.2), on peut se borner au cas où Y est intègre de point générique y (compte tenu de (6.3.4,(iv)), et comme la question est locale sur X et Y, on peut supposer f de type fini; on est alors dans la situation de (5.5.2), avec la propriété supplémentaire que $\kappa(x)$ est une extension *de type fini* de $\kappa(y)$ (6.5.10) et que $\mathcal{O}_{Y,y'}$ est noethérien; cela permet d'appliquer (**0**,6.5.8) et de prendre $Y'=\mathrm{Spec}(A')$, où A′ est un anneau de valuation discrète dominant $\mathcal{O}_{Y,y'}$ et dont $\kappa(x)$ est le corps des fractions. On a donc ainsi défini un diagramme commutatif (5.5.3.1), où γ est une bijection, et α et β correspondent aux morphismes f et g; l'existence de h est alors triviale (2.5.4).

Proposition (5.5.4) («critère valuatif de séparation») *Soient* Y *un schéma* (resp. *un schéma localement noethérien*), $f: X \to Y$ *un morphisme* (resp. *un morphisme localement de type fini*). *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) f *est séparé.*

b) f *est quasi-séparé, et pour tout* Y*-schéma* Y′ *spectre d'un anneau de valuation* (resp. *pour tout* Y*-trait* Y′), *deux* Y*-morphismes de* Y′ *dans* X *qui transforment le point générique de* Y′ *en un même point de* X *sont égaux.*

c) f *est quasi-séparé, et pour tout* Y*-schéma* Y′ *spectre d'un anneau de valuation* (resp. *pour tout* Y*-trait* Y′), *deux* Y′*-sections de* $X'=X_{(Y')}$ *qui transforment le point générique de* Y′ *en un même point de* X′ *sont égales.*

L'équivalence entre b) et c) résulte de la correspondance biunivoque entre Y-morphismes de Y′ dans X et Y′-sections de X′ (**0**,1.3.7). Si f est séparé, la condition b) est vérifiée, en vertu de (5.4.3) et (5.4.1, d)), puisque Y′ est réduit et l'ouvert $\{b\}$ dense dans Y′. Il reste à prouver que b) entraîne que le morphisme diagonal $\Delta: X \to X \times_Y X$ est fermé, et il revient au même de montrer que cette immersion vérifie le critère (6.1.8, b)), puisqu'elle est par hypothèse quasi-compacte (6.1.3). Or, soit z un point de la diagonale $\Delta(X)$, $z' \neq z$ une spécialisation de z dans $X \times_Y X$. Il existe alors (5.5.2) un anneau de valuation A et un morphisme g de $Y' = \mathrm{Spec}(A)$ dans $X \times_Y X$, qui transforme le point fermé a de Y′ en z', et le point générique b de Y′ en z; ce morphisme fait de Y′ un $(X \times_Y X)$-schéma, et *a fortiori* un Y-schéma. Si l'on compose avec g les deux projections de $X \times_Y X$, on obtient deux Y-morphismes h_1, h_2 de Y′ dans X, qui par hypothèse transforment le point b en le même point de X; ils sont donc, en vertu de b), égaux à un même morphisme h, ce qui signifie (**0**,1.2.1) que g se factorise en $g = \Delta \circ h$, et par suite $z' \in \Delta(X)$. Lorsqu'on suppose Y localement noethérien et f localement de type fini, $X \times_Y X$ est localement noethérien (6.2.4); on peut alors reprendre le raisonnement précédent en y supposant que A est un anneau de valuation discrète, en vertu de (5.5.3). ∎

L'enoncé de b) signifie encore que si $Y' = \mathrm{Spec}(A)$ et si K est le corps des fractions de A, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spec}(K), X) \tag{5.5.4.1}$$

est *injective*.

Remarque **(5.5.5)** Pour que, dans (5.5.4), f soit séparé, il *suffit* que la condition b) ou la condition c) soit vérifiée pour un anneau de valuation A qui est *complet* et donc le corps résiduel est *algébriquement clos*; cela résulte en effet de (5.5.2).

(5.5.6) Soient A un anneau de valuation, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, b le point générique de Y, de sorte que $\mathscr{O}_{Y,b} = \kappa(b)$ est le corps des fractions K de A.

Soit $f: X \to Y$ un morphisme; à toute Y-*section* s *de* f correspond, par le changement de base $\mathrm{Spec}(\kappa(b)) \to Y$, une section de la restriction $f^{-1}(b) \to \mathrm{Spec}(K)$ de f à la fibre $f^{-1}(b)$ (qui est ici un schéma induit sur un *ouvert* de X). On notera que l'ensemble des sections $\Gamma(f^{-1}(b)/\mathrm{Spec}(K))$ s'identifie par définition (3.5.5) à l'ensemble des *points de* $f^{-1}(b) = X \otimes_A K$ *rationnels sur* K.

On a ainsi défini une application canonique

$$\Gamma(X/Y) \to \Gamma(f^{-1}(b)/\mathrm{Spec}(K)). \tag{5.5.6.1}$$

On notera que lorsque le morphisme f est *séparé*, cette application est *injective* (5.5.4.1).

Proposition (5.5.7) *Soient* A *un anneau de valuation, de corps des fractions* K, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, *b le point générique de* Y, $f: X \to Y$ *un morphisme* fermé. *Alors l'application canonique* (5.5.6.1) *est* surjective. *Si de plus f est séparé, l'application* (5.5.6.1) *est bijective.*

Soit x un point de $f^{-1}(b)$, *rationnel sur* K; on sait (3.5.6) que $\{x\}$ est *fermé dans* $f^{-1}(b)$. Considérons le sous-schéma fermé réduit X′ de X ayant pour espace sous-jacent l'adhérence $\overline{\{x\}}$ de x *dans* X (4.6.1); il est clair que la restriction f' de f à X′ est encore un morphisme fermé, et comme $f^{-1}(b) \cap X' = \{x\}$, il suffit de prouver l'existence d'*une* Y-section de X′. Comme f' est fermé et dominant, on a $f'(X') = Y$; soit x' un point de X′ au-dessus du point fermé a de Y; alors $\mathcal{O}_{X',x'}$ est un anneau local contenu dans $K = \kappa(x) = \kappa(b)$ et dominant $\mathcal{O}_{Y,a} = A$. Par ailleurs on a $\mathcal{O}_{X',x'} \neq K$ puisque x' n'est pas le point générique de X′. On en conclut que $\mathcal{O}_{X',x'} = A$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 1, n° 2, th. 1), et par suite il existe un isomorphisme $Y \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'})$, qui par composition avec le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'}) \to X'$, fournit la section cherchée.

Nous pouvons caractériser les morphismes *universellement fermés* par une réciproque de (5.5.7):

***Proposition (5.5.8)** *Soient* Y *un schéma,* $f: X \to Y$ *un morphisme quasi-compact. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *f est universellement fermé.*

b) *Pour tout* Y*-schéma de la forme* $Y' = \mathrm{Spec}(A)$, *où* A *est un anneau de valuation de corps des fractions* K, *l'application canonique* (5.5.4.1)

$$\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spec}(K), X)$$

correspondant à l'injection canonique $A \to K$, *est surjective.*

c) *Pour tout* Y*-schéma de la forme* $Y' = \mathrm{Spec}(A)$, *où* A *est un anneau de valuation, l'application canonique* (5.5.6.1) *relative au* Y′*-schéma* $X_{(Y')}$ *est surjective.*

L'équivalence de b) et c) résulte aussitôt de (**0**,1.3.7); a) implique c) car a) entraîne que $f_{(Y')}$ est fermé, et il suffit d'appliquer (5.5.7).

Reste à prouver que b) entraîne a). Si la condition b) est vérifiée par f, elle l'est aussi par $f_{(Y'')}: X_{(Y'')} \to Y''$, où Y″ est un Y-schéma quelconque, en vertu de l'équivalence de b) et c) et du fait que $X_{(Y'')} \times_{Y''} Y' = X \times_Y Y'$ pour tout morphisme $Y' \to Y''$ (**0**,1.3.2.1); comme en outre $f_{(Y'')}$ est quasi-compact (6.1.5,(iii)), on est ramené à prouver que b) entraîne que f est *fermé*. Pour cela, il suffit de vérifier la condition b) de (6.1.8). Soient donc $x \in X$, y' une spécialisation de $y = f(x)$, distincte de y; en vertu de (5.5.2), il y a un schéma Y′, spectre d'un anneau de valuation, et un morphisme $g: Y' \to Y$ tels que, si a désigne le point fermé et b le point

générique de Y', on ait $g(a)=y'$, $g(b)=y$, et il existe un $\kappa(y)$-homomorphisme $\kappa(x)\to\kappa(b)$. Ce dernier correspond canoniquement à un Y-morphisme $\mathrm{Spec}(\kappa(b))\to X$ (2.5.5), et il résulte donc de b) qu'il existe un Y-morphisme $h:Y'\to X$ auquel correspond le morphisme précédent. On a alors $h(b)=x$; si on pose $h(a)=x'$, x' est spécialisation de x, et l'on a $f(x')=f(h(a))=g(a)=y'$. *

Remarques **(5.5.9)** (i) Sous les hypothèses de (5.5.8), pour que f soit universellement fermé, il *suffit* que la condition b) ou la condition c) soit vérifiée pour des anneaux de valuation A *complets* et dont le corps résiduel est *algébriquement clos*; cela résulte en effet de la démonstration et de (5.5.2).

(ii) Lorsque Y est *localement noethérien* et le morphisme f *de type fini*, nous verrons plus tard (chap. II) que dans les conditions b) et c) de (5.5.8) on peut se borner au cas où Y' est un *trait* (donc A un anneau de valuation discrète).

§ 6. Conditions de finitude relatives

Nous étudions, dans ce paragraphe, diverses «conditions de finitude» pour un morphisme $f:X\to Y$ de schémas. Il y a essentiellement deux notions de «finitude» de nature *globale* sur X, celle de morphisme *quasi-compact* et celle de morphisme *quasi-séparé*. Il y a d'autre part deux notions de «finitude» de nature *locale* sur X, celle de morphisme *localement de type fini* et celle de morphisme *localement de présentation finie*. En combinant ces notions locales aux notions globales précédentes, on obtient les notions de morphisme *de type fini* et de morphisme *de présentation finie*.

6.1. Morphismes quasi-compacts et morphismes quasi-séparés

Définition (6.1.1) *On dit qu'un morphisme de schémas* $f:X\to Y$ *est* quasi-compact *si pour tout ouvert quasi-compact* U *de* Y, $f^{-1}(U)$ *est quasi-compact.*

Si X est *noethérien*, *tout* morphisme $X\to Y$ est donc quasi-compact (cf. (6.1.9)).

On dit alors aussi que le Y-schéma X est *quasi-compact sur* Y.

Si $\mathfrak{B}$ est une base de la topologie de Y formée d'ouverts quasi-compacts (par exemple d'ouverts affines), pour que f soit quasi-compact, il faut et il suffit que pour tout ouvert $V\in\mathfrak{B}$, $f^{-1}(V)$ soit quasi-compact, tout ouvert quasi-compact de Y étant réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{B}$.

Si $f:X\to Y$ est un morphisme quasi-compact, il est clair que pour tout ouvert V de Y, la restriction $f^{-1}(V)\to V$ de f est un morphisme quasi-compact. Inversement, si (U_α) est un recouvrement ouvert de Y et $f:X\to Y$ un morphisme tel que ses restrictions $f^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha$ soient des morphismes quasi-compacts, alors f est quasi-compact, puisqu'il y a une base d'ouverts quasi-compacts pour Y, dont tout ensemble est contenu dans un U_α. On en conclut que si $f:X\to Y$ est un S-morphisme de S-schémas, et s'il existe un recouvrement ouvert (S_λ) de S tel que les restrictions $g^{-1}(S_\lambda)\to h^{-1}(S_\lambda)$ de f (où $g:X\to S$ et $h:Y\to S$ sont les morphismes structuraux) sont des morphismes quasi-compacts, alors f est quasi-compact.

Proposition (6.1.2) *Soient* X *un schéma quasi-compact et* Y *un schéma séparé; alors tout morphisme* $f:X\to Y$ *est quasi-compact* (cf. 6.1.10,(iii))).

En effet, X est réunion *finie* d'ouverts affines U_i, et pour tout ouvert affine V de Y, $U_i\cap f^{-1}(V)$ est un ouvert affine (5.3.10), donc quasi-compact; par suite $f^{-1}(V)$ est quasi-compact.

Définition (6.1.3) *On dit qu'un morphisme de schémas* $f:X\to Y$ *est quasi-séparé* (ou que X est un Y-*schéma quasi-séparé sur* Y) *si le morphisme diagonal* $\Delta_f:X\to X\times_Y X$ *est quasi-compact. On dit qu'un schéma* X *est quasi-séparé si* X *est quasi-séparé sur* Spec(**Z**).

Proposition (6.1.4) *Tout morphisme séparé est quasi-séparé. En particulier, tout schéma séparé est quasi-séparé.*

En effet, Δ_f est alors une immersion fermée, qui est évidemment un morphisme quasi-compact.

Proposition (6.1.5)

(i) *Une immersion* $j:X\to Y$ *est quasi-compacte si elle est fermée, ou si l'espace sous-jacent à* Y *est localement noethérien, ou si l'espace sous-jacent à* X *est noethérien.*

(ii) *Le composé de deux morphismes quasi-compacts est quasi-compact.*

(iii) *Si* $f:X\to Y$ *est un* S-*morphisme quasi-compact, alors, pour tout changement de base* $S'\to S$, $f_{(S')}:X_{(S')}\to Y_{(S')}$ *est quasi-compact.*

(iv) *Si* $f:X\to X'$ *et* $g:Y\to Y'$ *sont deux* S-*morphismes quasi-compacts, alors* $f\times_S g:X\times_S Y\to X'\times_S Y'$ *est quasi-compact.*

(v) *Si le composé* $g\circ f$ *de deux morphismes* $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ *est quasi-compact, et si* g *est quasi-séparé, ou si l'espace sous-jacent à* X *est localement noethérien, alors* f *est quasi-compact.*

(vi) *Pour qu'un morphisme* f *soit quasi-compact, il faut et il suffit que* f_{red} *le soit.*

L'assertion (vi) est évidente, la propriété d'être quasi-compact pour un morphisme ne dépendant que de l'application continue correspondante.

Démontrons ensuite la partie de (v) correspondant au cas où l'espace sous-jacent X est supposé localement noethérien. Posons $h=g\circ f$, et soit U un ouvert quasi-compact dans Y; $g(U)$ est quasi-compact (non nécessairement ouvert) dans Z, donc contenu dans une réunion finie d'ouverts quasi-compacts V_j (2.1.3), et $f^{-1}(U)$ est par suite contenu dans la réunion des $h^{-1}(V_j)$, qui sont des sous-espaces quasi-compacts de X, donc des sous-espaces noethériens. On en conclut (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 2, prop. 8) que $f^{-1}(U)$ est un espace noethérien, et *a fortiori* quasi-compact.

Il reste à prouver (i), (ii), (iii) et (v) lorsque g est quasi-séparé (**0**,1.3.9).

L'assertion (ii) est évidente, ainsi que (i) lorsque j est une immersion fermée; si j est une immersion et si Y est localement noethérien, tout ouvert quasi-compact V dans Y est noethérien, donc $j^{-1}(V)=X\cap V\subset V$ est quasi-compact; enfin, si X est noethérien, on a vu (6.1.1) que tout morphisme $X\to Y$ est quasi-compact.

Pour prouver (iii), on peut se borner au cas où $S=Y$ (**0**, 1.3.4); posons $f'=f_{(S')}$, et soit U' un ouvert quasi-compact dans S'. Pour tout $s'\in U'$, soit T un voisinage ouvert affine de $g(s')$ dans S, et soit W un voisinage ouvert affine de s' contenu dans $U'\cap g^{-1}(T)$; il suffira de montrer que $f'^{-1}(W)$ est quasi-compact; autrement dit, on peut se ramener à prouver que lorsque S et S' sont *affines*, l'espace sous-jacent à $X\times_S S'$ est quasi-compact. Mais comme X est alors par hypothèse réunion finie d'ouverts affines V_j, $X\times_S S'$ est réunion des espaces sous-jacents aux schémas affines $V_j\times_S S'$ (3.2.3), ce qui achève de démontrer (iii).

Pour établir enfin (v) lorsque g est quasi-séparé, rappelons (5.1.7.1) que f est le morphisme composé

$$X \xrightarrow{\Gamma_f} X\times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y;$$

d'autre part p_2 s'identifie à $(g\circ f)\times_Z 1_Y$ (**0**, 1.2.8), et si $g\circ f$ est quasi-compact il en est de même de p_2 par (ii). Enfin, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X\times_Z Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\times 1_Y} \\ Y & \xrightarrow[\Delta_g]{} & Y\times_Z Y \end{array}$$

(**0**, 1.4.9); comme par hypothèse Δ_g est un morphisme quasi-compact, il en est de même de Γ_f par (iii); la conclusion résulte donc de (ii).

On notera que l'assertion (vi) est aussi conséquence de la proposition plus générale:

Proposition (6.1.6) *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *deux morphismes. Si* $g \circ f$ *est quasi-compact et* f *surjectif,* g *est quasi-compact.*

En effet, si V est un ouvert quasi-compact dans Z, $f^{-1}(g^{-1}(V))$ est quasi-compact par hypothèse, et l'on a $g^{-1}(V) = f(f^{-1}(g^{-1}(V)))$ puisque f est surjectif; donc $g^{-1}(V)$ est quasi-compact.

Proposition (6.1.7)

(i) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme quasi-compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) f *est dominant*;

b) *pour tout point maximal* y *de* Y, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$;

c) *pour tout point maximal* y *de* Y, $f^{-1}(y)$ *contient un point maximal de* X.

(ii) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme quasi-compact et dominant. Pour tout morphisme générisant* $g: Y' \to Y$ (3.9), *le morphisme* $f' = f_{(Y')}: X_{(Y')} \to Y'$ *est quasi-compact et dominant.*

(i) Il est clair que c) entraîne b) et que b) entraîne a); tout revient donc à voir que a) entraîne c). En effet, supposons a) vérifiée et considérons un voisinage ouvert affine U de y; $f^{-1}(U)$ est quasi-compact, donc réunion *finie* d'ouverts affines V_i, et l'hypothèse que f est dominant implique que y appartient à l'adhérence *dans* U d'un des $f(V_i)$. On peut évidemment supposer X et Y réduits; comme l'adhérence dans X d'une composante irréductible de V_i est une composante irréductible de X (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 7), on peut remplacer X par V_i, Y par le sous-schéma fermé réduit de U ayant $\overline{f(V_i)} \cap U$ pour espace sous-jacent (4.6.1), et on est ainsi ramené à démontrer la proposition lorsque $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A)$ sont affines et réduits. Comme f est dominant, A est alors un sous-anneau de B (1.2.6); la proposition résulte alors du fait que tout idéal premier minimal de A est l'intersection de A et d'un idéal premier minimal de B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 6, prop. 16).

(ii) On sait déjà que f' est quasi-compact (6.1.5); d'autre part, un point maximal y' de Y' est par hypothèse au-dessus d'un point maximal y de Y (3.9.5); comme $f^{-1}(y)$ n'est pas vide d'après (i), il en est de même de $f'^{-1}(y')$ (3.4.10), d'où la conclusion.

Proposition (6.1.8) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme quasi-compact. Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Le morphisme* f *est fermé.*

b) *Pour tout* $x \in X$ *et toute spécialisation* y' *de* $y = f(x)$, *distincte de* y, *il existe une spécialisation* x' *de* x *telle que* $f(x') = y'$.

En particulier, si $f: X \to Y$ *est un morphisme d'immersion quasi-compact, pour que* f *soit une immersion fermée, il faut et il suffit que* X

(*considéré comme sous-espace de* Y) *contienne toute spécialisation* (*dans* Y) *de chacun de ses points.*

La condition b) exprime que $f(\overline{\{x\}}) = \overline{\{y\}}$ et est donc conséquence de a). Pour montrer que b) entraîne a), considérons une partie fermée X′ de l'espace sous-jacent X; soit $Y' = \overline{f(X')}$, et montrons que $Y' = f(X')$. Considérons les sous-schémas fermés réduits de X et Y respectivement ayant pour espaces sous-jacents X′ et Y′ (4.6.1); il y a alors un morphisme $f' : X' \to Y'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

soit commutatif (4.6.2) et comme f est quasi-compact, il en est de même de f' (6.1.5, (i) et (v)). On est donc ramené à prouver que si f est un morphisme quasi-compact et *dominant* (et vérifie l'hypothèse de b)), alors $f(X) = Y$. Or, soit y' un point de Y et soit y le point générique d'une composante irréductible de Y contenant y'; en vertu de b), il suffit de voir que $f^{-1}(y)$ n'est pas vide, ce qui résulte de (6.1.7).

Proposition (6.1.9)

(i) *Tout morphisme radiciel* $f : X \to Y$ *(en particulier tout monomorphisme et plus particulièrement toute immersion) est quasi-séparé.*

(ii) *Si* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *sont deux morphismes quasi-séparés,* $g \circ f : X \to Z$ *est quasi-séparé.*

(iii) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme quasi-séparé. Alors, pour tout changement de base* $g : S' \to S$, *le morphisme* $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *est quasi-séparé.*

(iv) *Si* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes quasi-séparés, alors* $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ *est quasi-séparé.*

(v) *Si le composé* $g \circ f$ *de deux morphismes* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *est quasi-séparé, alors* f *est quasi-séparé; si de plus* f *est quasi-compact et surjectif,* g *est aussi quasi-séparé.*

(vi) *Si* $f : X \to Y$ *est quasi-séparé, alors* $f_{red} : X_{red} \to Y_{red}$ *est quasi-séparé, et réciproquement.*

En vertu de (5.1.7) et (**0**, 1.3.9), il suffit (sauf pour la seconde assertion de (v) et la seconde assertion de (vi)) de démontrer (i), (ii) et (iii).

L'assertion (i) est triviale, tout morphisme radiciel étant séparé (5.3.1).

Pour prouver (iii), on se ramène au cas où $Y = S$ (**0**, 1.3.4) et l'assertion résulte de ce que $\Delta_{f_{(S')}} = (\Delta_f)_{(S')}$ (**0**, 1.4.7) et de ((6.1.5, (iii)).

Pour prouver (ii), considérons les projections p et q de $X \times_Y X$ sur X; si $\pi : X \times_Y X \to Y$ est le morphisme structural et $j = (p,q)_Z$, on sait que le carré

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{j} & X \times_Z X \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \times_Z f} \\ Y & \xrightarrow[\Delta_g]{} & Y \times_Z Y \end{array} \tag{6.1.9.1}$$

est cartésien (**0**, 1.4.8). Si g est quasi-séparé, Δ_g est quasi-compact, donc il en est de même de j (6.1.5, (iii)); si de plus f est quasi-séparé, Δ_f est quasi-compact, donc il en est de même de $j \circ \Delta_f$ (6.1.5, (ii)), qui est égal à $\Delta_{g \circ f}$.

Supposons maintenant $g \circ f$ quasi-séparé, f quasi-compact et surjectif. Alors, avec les notations précédentes, $\Delta_{g \circ f} = j \circ \Delta_f$ est quasi-compact; comme il en est de même de $f \times_Z f$ (6.1.5, (iv)), on voit, en vertu de la commutativité de (6.1.9.1) que $\Delta_g \circ \pi \circ \Delta_f$ est lui aussi quasi-compact; mais $\pi \circ \Delta_f = f$ est surjectif, donc (6.1.6) Δ_g est quasi-compact, donc g est quasi-séparé.

On déduit de là que si f_{red} est quasi-séparé, il en est de même de f: en effet, si $i : Y_{\mathrm{red}} \to Y$ et $j : X_{\mathrm{red}} \to X$ sont les immersions canoniques, i est quasi-séparé, donc aussi $i \circ f_{\mathrm{red}} = f \circ j$. Mais j étant un homéomorphisme, est quasi-compact et surjectif, donc f est quasi-séparé.

On notera qu'il résulte de (6.1.9, (i) et (ii)) que tout *sous-schéma d'un schéma quasi-séparé est quasi-séparé.*

Corollaire (6.1.10) (i) *Soit* X *un schéma quasi-séparé. Alors tout morphisme* $f : X \to Y$ *est quasi-séparé.*

(ii) *Soit* Y *un schéma quasi-séparé. Pour qu'un morphisme* $f : X \to Y$ *soit quasi-séparé, il faut et il suffit que le schéma* X *soit quasi-séparé.*

(iii) *Soient* X *un schéma quasi-compact,* Y *un schéma quasi-séparé. Alors tout morphisme* $f : X \to Y$ *est quasi-compact.*

Cela résulte de (6.1.9, (ii) et (v)), (6.1.5, (v)) et (6.1.2), appliqués à X, Y et Spec(**Z**).

Proposition (6.1.11) *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme,* (U_α) *un recouvrement ouvert de* Y *par des ouverts tels que les schémas induits* U_α *soient quasi-séparés. Pour que* f *soit quasi-séparé, il faut et il suffit que chacun des schémas induits par* X *sur les ouverts* $f^{-1}(U_\alpha)$ *soit quasi-séparé.*

L'image réciproque de U_α dans $X \times_Y X$ est $X_\alpha \times_{U_\alpha} X_\alpha$, en posant $X_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, et la restriction $X_\alpha \to X_\alpha \times_{U_\alpha} X_\alpha$ de Δ_f n'est autre que Δ_{f_α}, en désignant par f_α la restriction $X_\alpha \to U_\alpha$ de f (**0**, 1.4.7); en vertu

de la définition (6.1.3) et du caractère local de la notion de morphisme quasi-compact (6.1.1), pour que f soit quasi-séparé, il faut et il suffit que chacun de f_α le soit. Mais comme par hypothèse U_α est quasi-séparé, la conclusion résulte de (6.1.10, (ii)).

Pour vérifier qu'un morphisme est quasi-séparé, on est donc ramené à donner des critères pour qu'un schéma soit quasi-séparé:

Proposition (6.1.12) *Soient* X *un schéma,* (U_α) *un recouvrement de* X *formé d'ouverts quasi-compacts. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) X *est un schéma quasi-séparé.*

b) *Pour tout ouvert quasi-compact* U *de* X, *l'injection canonique* $U \to X$ *est quasi-compacte* (autrement dit, U est *rétrocompact* dans X).

c) *L'intersection de deux ouverts quasi-compacts de* X *est quasi-compacte.*

d) *Pour tout couple d'indices* (α, β), *l'intersection* $U_\alpha \cap U_\beta$ *est quasi-compacte.*

Les propriétés b) et c) sont équivalentes par définition d'un morphisme quasi-compact. Comme un ouvert quasi-compact est réunion finie d'ouverts affines, pour deux ouverts quasi-compacts U, V de X, $U \times_Z V$ est un ouvert quasi-compact de $X \times_Z X$ (3.2.3), dont l'image réciproque par le morphisme diagonal Δ_X est $U \cap V$, donc a) entraîne c). Il est trivial que c) entraîne d); enfin, si d) est vérifiée, les $U_\alpha \times_Z U_\beta$ forment un recouvrement de $X \times_Z X$ par des ouverts quasi-compacts, et l'on sait que, pour que le morphisme $\Delta_X : X \to X \times_Z X$ soit quasi-compact, il suffit que les images réciproques $U_\alpha \cap U_\beta$ de $U_\alpha \times_Z U_\beta$ par Δ_X soient quasi-compactes (6.1.1); donc d) entraîne a).

Corollaire (6.1.13) *Tout schéma* X *dont l'espace sous-jacent est localement noethérien* (par exemple un *schéma localement noethérien*) *est quasi-séparé; tout morphisme* $f : X \to Y$ *est alors quasi-séparé.*

Proposition (6.1.14) *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme,* $g : Y' \to Y$ *un changement de base* quasi-compact et surjectif. *Posons* $X' = X_{(Y')}$, $f' = f_{(Y')} : X_{(Y')} \to Y'$. *Considérons, pour un morphisme la propriété d'être*:

(i) *quasi-compact*;

(ii) *quasi-séparé.*

Alors, si $\boldsymbol{P}$ *désigne l'une de ces propriétés, et si* f' *possède la propriété* $\boldsymbol{P}$, *il en est de même de* f.

(i) Soit $g' : X' \to X$ la projection canonique, qui est un morphisme surjectif (3.6.1); si f' est quasi-compact, il en est de même de $g \circ f'$ puisque g est quasi-compact (6.1.5); comme $f \circ g' = g \circ f'$ est quasi-compact et g' surjectif, f est quasi-compact (6.1.5).

(ii) On a $X' \times_{Y'} X' = (X \times_Y X)_{(Y')}$ et $\Delta_{f'} = (\Delta_f)_{(Y')}$ (**0**, 1.4.7); comme la projection $X' \times_{Y'} X' \to X \times_Y X$ est quasi-compacte ((**0**, 1.3.3) et (6.1.5,

(iii))) et surjective (3.6.1), on peut, compte tenu de (**0**, 1.3.5), appliquer (i) au morphisme Δ_f; comme par hypothèse $\Delta_{f'}$ est quasi-compact, il en est donc de même de Δ_f.

Proposition (6.1.15) *Soient* $f' : X' \to Y$, $f'' : X'' \to Y$ *deux morphismes,* $X = X = X' \amalg X''$ *le schéma somme,* $f : X \to Y$ *le morphisme égal à* f' *dans* X' *et à* f'' *dans* X''. *Pour que* f *soit quasi-compact* (resp. *quasi-séparé*), *il faut et il suffit que* f' *et* f'' *le soient.*

Le cas des morphismes quasi-compacts résulte aussitôt de la définition. Pour le cas des morphismes quasi-séparés, notons que $X \times_Y X$ est somme des quatre schémas $X' \times_Y X'$, $X' \times_Y X''$, $X'' \times_Y X'$, $X'' \times_Y X''$, et Δ_f est le morphisme qui coïncide avec $\Delta_{f'}$ dans X' et avec $\Delta_{f''}$ dans X''; la proposition résulte donc encore des définitions.

6.2. Morphismes localement de type fini et morphismes localement de présentation finie

Définition (6.2.1) *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme de schémas,* x *un point de* X, $y = f(x)$. *On dit que* f *est de type fini* (resp. *de présentation finie*) *au point* x *s'il existe un voisinage ouvert affine* V *de* y *et un voisinage ouvert affine* U *de* x *tels que* $f(U) \subset V$ *et que l'anneau* $A(U)$ *soit une* $A(V)$*-algèbre de type fini* (resp. *de présentation finie*) (**0**, 6.3.4 et 6.3.5). *On dit que* f *est localement de type fini* (resp. *localement de présentation finie*) *s'il est de type fini* (resp. *de présentation finie*) *en tout point de* X. *On dit alors aussi que le* Y*-schéma* X *est localement de type fini* (resp. *localement de présentation finie*) *sur* Y.

Remarque **(6.2.1.1)** Supposons que les voisinages U et V aient les propriétés énoncées dans (6.2.1). Alors, quels que soient les voisinages ouverts affines U_1 de x et V_1 de y, il existe des voisinages ouverts affines $U_2 \subset U \cap U_1$ de x, $V_2 \subset V \cap V_1$ de y, respectivement de la forme $\mathrm{Spec}((A(U_1))_s)$ et $\mathrm{Spec}((A(V_1))_t)$ tels que $f(U_2) \subset V_2$ et que $A(U_2)$ soit une $A(V_2)$*-algèbre de type fini* (resp. *de présentation finie*) et une $A(V_1)$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie). En effet, prenons $t \in A(V_1)$ tel que $V_2 = \mathrm{Spec}((A(V_1))_t)$ soit un voisinage de y contenu dans $V \cap V_1$. D'autre part, prenons $s' \in A(U_1)$ tel que $U' = \mathrm{Spec}((A(U_1))_{s'})$ soit un voisinage de x contenu dans $U \cap U_1 \cap f^{-1}(V_2)$; il existe ensuite un $s'' \in A(U)$ tel que $U_2 = \mathrm{Spec}((A(U))_{s''})$ soit un voisinage de x contenu dans U'; si s'_0 est l'image de s'' par l'homomorphisme $A(U) \to A(U')$ correspondant à l'injection canonique $U' \to U$, on a aussi $U_2 = \mathrm{Spec}((A(U'))_{s'_0})$ (1.2.2.2), donc $U = \mathrm{Spec}((A(U_1))_s)$ pour un $s \in A(U_1)$ convenable. Cela étant, on peut écrire $A(U_2) = A(U)[T]/(1 - s''T)$, donc $A(U_2)$ est une $A(U)$-algèbre de présentation finie, et *a fortiori* une

A(V)-algèbre de type fini (resp. de présentation finie) (**0**, 6.3.5). Mais l'homomorphisme $A(V)\to A(U_2)$ se factorise en $A(V)\to A(V_2)\to A(U_2)$; si $A(U_2)$ s'identifie à une algèbre quotient $A(V)[T_1,\dots,T_n]/\mathfrak{J}$, elle s'identifie aussi à l'algèbre quotient $A(V_2)[T_1,\dots,T_n]/\mathfrak{J}_2$, où $\mathfrak{J}_2$ est l'idéal engendré par l'image de $\mathfrak{J}$ dans $A(V_2)[T_1,\dots,T_n]$; donc $A(U_2)$ est une $A(V_2)$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie) et aussi une $A(V_1)$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie) puisque l'on a vu plus haut que $A(V_2)$ est une $A(V_1)$-algèbre de présentation finie.

(6.2.1.2) Si Y est localement noethérien, il revient au même de dire que f est localement de type fini ou localement de présentation finie en un point en vertu de (**0**, 6.3.5). En outre:

Proposition (6.2.2) *Si* Y *est un schéma localement noethérien et si* $f:X\to Y$ *est un morphisme localement de type fini, alors* X *est localement noethérien.*

En effet, avec les notations de la définition (6.2.1), l'anneau A(V) est noethérien (2.7.3) et comme A(U) est une A(V)-algèbre de type fini, c'est aussi un anneau noethérien.

Proposition (6.2.3) (i) *Toute immersion locale est localement de type fini.*

(ii) *Si deux morphismes* $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ *sont localement de type fini, il en est de même de* $g\circ f$.

(iii) *Si* $f:X\to Y$ *est un* S*-morphisme localement de type fini,* $f_{(S')}:X_{(S')}\to Y_{(S')}$ *est localement de type fini pour toute extension* $g:S'\to S$ *du schéma de base.*

(iv) *Si* $f:X\to X'$ *et* $g:Y\to Y'$ *sont deux* S*-morphismes localement de type fini,* $f\times_S g:X\times_S Y\to X'\times_S Y'$ *est localement de type fini.*

(v) *Si le composé* $g\circ f$ *de deux morphismes est localement de type fini,* f *est localement de type fini.*

(vi) *Si un morphisme* f *est localement de type fini, il en est de même de* f_{red}.

En vertu de (5.1.7), il suffit de démontrer (i), (ii) et (iii). Si $j:X\to Y$ est une immersion locale, pour tout $x\in X$ il y a un voisinage ouvert affine V de $j(x)$ dans Y et un voisinage ouvert affine U de x dans X tels que la restriction $U\to V$ de j soit une immersion fermée ((4.4.1) et (4.2.11)) donc A(U) est un anneau quotient de A(V) (4.2.1.1) et par suite une A(V)-algèbre de type fini.

Pour établir (iii), on peut se borner au cas où $Y=S$ (**0**,1.3.4); soient $p:X_{(S')}\to X$, $q:X_{(S')}\to S'$ les projections canoniques, x' un point de $X_{(S')}$, $x=p(x')$, $s'=q(x')$, $s=f(p(x'))=g(q(x'))$. Soit V un ouvert affine dans S, voisinage de s, tel qu'il existe un voisinage ouvert affine U de x dans X pour lequel A(U) soit une A(V)-algèbre de type fini. Soit d'autre part

V′ un voisinage ouvert affine de s' dans S′ contenu dans $g^{-1}(V)$; alors $p^{-1}(U)\cap q^{-1}(V')$ est un voisinage ouvert de x' qui s'identifie au produit $U\times_V V'$ (3.2.3), et ce dernier est un schéma affine d'anneau isomorphe à $A(U)\otimes_{A(V)}A(V')$ (3.2.1.3); comme ce dernier est une A(V′)-algèbre de type fini (**0**,6.3.4), cela établit (iii).

Pour démontrer enfin (ii), considérons un point $x\in X$; il y a par hypothèse un voisinage ouvert affine W de $g(f(x))$ dans Z et un voisinage ouvert affine V de $f(x)$ dans Y tels que $g(V)\subset W$ et que A(V) soit une A(W)-algèbre de type fini. D'autre part (6.2.1.1) il existe un voisinage affine $V'\subset V$ de $f(x)$ et un voisinage affine $U\subset f^{-1}(V')$ de x tels que A(V′) soit une A(V)-algèbre de type fini et A(U) une A(V′)-algèbre de type fini. On en conclut que A(U) est une A(W)-algèbre de type fini, d'où (ii).

Corollaire (6.2.4) *Soit* $f: X\to Y$ *un morphisme localement de type fini. Pour tout morphisme* $Y'\to Y$ *tel que* Y′ *soit localement noethérien,* $X\times_Y Y'$ *est localement noethérien.*

En effet, $f_{(Y')}: X\times_Y Y'\to Y'$ est localement de type fini (6.2.3,(iii)) et il suffit d'appliquer (6.2.2).

Proposition (6.2.5) *Soit* $\varphi: A\to B$ *un homomorphisme d'anneaux. Pour que le morphisme correspondant* $f: \mathrm{Spec}(B)\to \mathrm{Spec}(A)$ *soit localement de type fini, il faut et il suffit que* B *soit une* A*-algèbre de type fini.*

La condition est évidemment suffisante; prouvons qu'elle est nécessaire. En vertu de (6.2.1.1), il existe un recouvrement fini de Spec(B) par des ouverts $D(g_i)$ où $g_i\in B$, tels que les B_{g_i} soient des A-algèbres de type fini. Par hypothèse, pour tout i il existe une partie finie F_i de B et un entier $n_i\geqslant 0$ tel que B_{g_i} soit la A-algèbre engendrée par les éléments $b_i/g_i^{n_i}$, où b_i parcourt F_i. Comme les g_i sont en nombre fini, on peut supposer tous les n_i égaux à un même entier n. En outre, comme les $D(g_i)$ recouvrent Spec(B), l'idéal engendré dans B par les g_i est égal à B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, cor. 3 de la prop. 11), autrement dit il existe des h_i dans B tels que $\sum_i h_i g_i = 1$. Soit alors F la partie finie de B, réunion des F_i, de l'ensemble des g_i et de l'ensemble des h_i; montrons que le sous-anneau $B'=A[F]$ de B est égal à B. Par hypothèse, pour tout $b\in B$ et tout i, l'image canonique de b dans B_{g_i} est de la forme $b'_i/g_i^{m_i}$, où $b'_i\in B'$; en multipliant les b'_i par des puissances convenables des $g_i\in B'$, on peut encore supposer tous les m_i égaux à un même entier m. Par définition des anneaux de fractions, il y a donc un entier N (dépendant de b) tel que $N\geqslant m$ et $g_i^N b\in B'$ pour tout i. Or, *dans l'anneau* B′, les g_i engendrent l'idéal B′ (puisque les h_i appartiennent à B′), donc les $D(g_i)$ recouvrent Spec(B′) et puisque $D(g_i^N)=D(g_i)$, les g_i^N engendrent

aussi l'idéal B′ (Bourbaki, *loc. cit.*); il y a donc des $c_i \in B'$ tels que $\sum_i c_i g_i^N = 1$, d'où $b = \sum_i c_i g_i^N b \in B'$. CQFD.

Proposition (6.2.6) (i) *Tout isomorphisme local est localement de présentation finie.*

(ii) *Si deux morphismes* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *sont localement de présentation finie, il en est de même de* $g \circ f$.

(iii) *Si* $f: X \to Y$ *est un* S*-morphisme localement de présentation finie,* $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *est localement de présentation finie pour toute extension* $g: S' \to S$ *du schéma de base.*

(iv) *Si* $f: X \to X'$ *et* $g: Y \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes localement de présentation finie,* $f \times_S g: X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ *est localement de présentation finie.*

(v) *Si le composé* $g \circ f$ *de deux morphismes* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *est localement de présentation finie et si* g *est localement de type fini, alors* f *est localement de présentation finie.*

Il suffit de prouver (i), (ii), (iii) et (v) (**0**,1.3.9). L'assertion (i) est triviale, et les démonstrations de (ii) et (iii) se déduisent de celles de (6.2.3,(ii) et (iii)) en remplaçant partout «algèbre de type fini» par «algèbre de présentation finie», compte tenu de (6.2.1.1) et (**0**, 6.3.5). Pour prouver (v), considérons le carré cartésien (**0**,1.4.9)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_Z Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \times_Z 1_Y} \\ Y & \xrightarrow[\Delta_g]{} & Y \times_Z Y \end{array}$$

Si l'on sait que Δ_g est localement de présentation finie, il résultera de (iii) qu'il en est de même de Γ_f. D'autre part, f se factorise en

$$X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y$$

(5.1.7.1), et on a $p_2 = (g \circ f) \times_Z 1_Y$; comme par hypothèse $g \circ f$ est localement de présentation finie, il en est de même de p_2 en vertu de (iv), et on déduira donc finalement de (ii) que f est aussi localement de présentation finie. On est ainsi ramené à démontrer le

Corollaire (6.2.6.1) *Soit* $g: Y \to Z$ *un morphisme localement de type fini; alors le morphisme diagonal* $\Delta_g: Y \to Y \times_Z Y$ *est localement de présentation finie.*

On peut se borner au cas où $Z = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, B étant une A-algèbre de type fini; le morphisme Δ_g correspond alors (5.1.2) à l'homomorphisme $\pi: B \otimes_A B \to B$ tel que $\pi(x \otimes y) = xy$. Il suffit donc de

prouver que le noyau $\mathfrak{J}$ de π est un idéal de type fini de $B \otimes_A B$, ce qui résulte du lemme suivant:

Lemme (6.2.6.2) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre. L'idéal* $\mathfrak{J}$ *de* $B \otimes_A B$*, noyau de l'homomorphisme canonique* $\pi: B \otimes_A B \to B$*, est engendré par les éléments* $1 \otimes s - s \otimes 1$*, où* s *parcourt un système générateur de la* A*-algèbre* B.

Il est clair en effet que pour tout $x \in B$, on a $x \otimes 1 - 1 \otimes x \in \mathfrak{J}$; d'autre part, quels que soient x, y dans B, on a $x \otimes y = xy \otimes 1 + (x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1)$. Si $\sum_i (x_i \otimes y_i) \in \mathfrak{J}$, on a par définition $\sum_i x_i y_i = 0$, donc

$$\text{(6.2.6.3)} \qquad \sum_i (x_i \otimes y_i) = \sum_i (x_i \otimes 1)(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1),$$

ce qui prouve que $\mathfrak{J}$ est l'idéal engendré par les éléments $1 \otimes x - x \otimes 1$. En outre, si $x = st$, on a

$$\text{(6.2.6.4)} \quad x \otimes 1 - 1 \otimes x = (s \otimes 1)(t \otimes 1 - 1 \otimes t) + (s \otimes 1 - 1 \otimes s)(1 \otimes t)$$

ce qui termine la démonstration par récurrence sur le nombre de facteurs d'un produit dans B.

Proposition (6.2.7) *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre,* B′ *une algèbre de polynômes* $A[T_1, \ldots, T_n]$*,* $u: B' \to B$ *un homomorphisme surjectif de* A*-algèbres. Pour que* B *soit une* A*-algèbre de présentation finie, il faut et il suffit que le noyau* $\mathfrak{J}$ *de* u *soit un idéal de type fini de* B′.

La condition est suffisante par définition (**0**,6.3.5). Pour voir qu'elle est nécessaire, remarquons que le morphisme $g: \mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(A)$ est localement de type fini; si B est une A-algèbre de présentation finie, le morphisme $f: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B')$ correspondant à u est tel que $g \circ f: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ soit localement de présentation finie, donc il résulte de (6.2.6,(v)) que f est aussi localement de présentation finie. Or, pour démontrer que l'idéal $\mathfrak{J}$ est de type fini, il suffit de prouver que $\tilde{\mathfrak{J}}$ est un $\tilde{B}'$-Module de type fini (1.4.3). Revenant à la définition (6.2.2), on est finalement ramené à prouver le

Lemme (6.2.7.1) *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal d'un anneau* C*,* s *un élément de* C*, tel que* $C_s/\mathfrak{a}_s$ *soit une* C*-algèbre de présentation finie; alors* $\mathfrak{a}_s$ *est un idéal de type fini dans l'anneau* C_s.

Par hypothèse, il existe une C-algèbre de polynômes $C' = C[T_1, \ldots, T_n]$ et un C-homomorphisme surjectif $v: C' \to C_s/\mathfrak{a}_s$ dont le noyau $\mathfrak{b}$ est de type fini. Soit $p: C_s \to C_s/\mathfrak{a}_s$ l'homomorphisme canonique; pour tout i, il y a un $t_i \in C$ tel que $p(t_i/s^k) = v(T_i)$ (on peut supposer que l'exposant k est le même pour tous les indices i). Considérons alors la C_s-algèbre $D = C_s[T_1, \ldots, T_n]$, et l'homomorphisme de C_s-algèbres $w: D \to C_s$ tel que $w(T_i) = t_i/s^k$; w est évidemment surjectif, et il en est par suite de même de $v' = p \circ w: D \to C_s/\mathfrak{a}_s$. D'autre part, tout polynôme de D peut

s'écrire P/s^m, où $P \in C' = C[T_1, \ldots, T_n]$, et l'on a $v'(P/s^m) = (1/s^m)v(P)$; comme $1/s$ est inversible dans C_s, la relation $v'(P/s^m) = 0$ dans $C_s/\mathfrak{a}_s$ équivaut à $v(P) = 0$, et par suite le noyau $\mathfrak{b}'$ de v' est engendré par l'image canonique de $\mathfrak{b}$ dans D, et *a fortiori* est *de type fini* dans l'anneau D. Mais $\mathfrak{b}' = v'^{-1}(0) = w^{-1}(p^{-1}(0)) = w^{-1}(\mathfrak{a}_s)$, et comme w est surjectif, $\mathfrak{a}_s = w(\mathfrak{b}')$, ce qui prouve que $\mathfrak{a}_s$ est un idéal de type fini de C_s.

Remarque **(6.2.7.2)** Si B est une A-algèbre de présentation finie, B′ une A-algèbre de type fini et $u: B' \to B$ un homomorphisme *surjectif*, alors le noyau $\mathfrak{J}$ de u est un idéal de type fini de B′. En effet, il y a un homomorphisme surjectif $v: C \to B'$, où C est une algèbre de polynômes sur A; comme $u \circ v$ est surjectif, $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ est un idéal de type fini de C en vertu de (6.2.7). Comme on a $\mathfrak{J} = v(\mathrm{Ker}(u \circ v))$, $\mathfrak{J}$ est un idéal de type fini de B′.

Inversement, si B′ est une A-algèbre de présentation finie, et $u: B' \to B$ un A-homomorphisme surjectif, et si $\mathfrak{J} = \mathrm{Ker}(u)$ est un idéal de type fini de B′, B est une A-algèbre de présentation finie. En effet, on a comme ci-dessus un homomorphisme surjectif $v: C \to B'$ où C est une algèbre de polynômes et $\mathrm{Ker}(v)$ un idéal de type fini de C (en vertu de (6.2.7)). Comme $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ est engendré par $\mathrm{Ker}(v)$ et un système d'éléments dont les images dans B′ forment un système générateur de $\mathfrak{J}$, il est de type fini et par suite (6.2.7) B est une A-algèbre de présentation finie.

Corollaire (6.2.8) *Soient* X, Y *deux schémas,* $j: X \to Y$ *une immersion,* U *un ouvert de* Y *tel que* j(X) *soit fermé dans* U, $\mathscr{I}$ *l'Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_U$ *qui définit le sous-schéma fermé de* Y *associé à* j. *Pour que* j *soit localement de présentation finie, il faut et il suffit que* $\mathscr{I}$ *soit un* $\mathscr{O}_U$*-Module de type fini.*

Proposition (6.2.9) *Soit* $\varphi: A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux. Pour que le morphisme correspondant* $f: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *soit localement de présentation finie, il faut et il suffit que* B *soit une* A*-algèbre de présentation finie.*

La condition étant trivialement suffisante, il reste à prouver qu'elle est nécessaire. Si f est localement de présentation finie, il résulte déjà de (6.2.5) que B est une A-algèbre de type fini, donc il existe un homomorphisme surjectif $u: B' = A[T_1, \ldots, T_n] \to B$ de A-algèbres; il résulte de (6.2.6,(v)) que l'immersion $j: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B')$ est localement de présentation finie; donc (6.2.8), si $\mathfrak{J}$ est le noyau de u, le $\tilde{B}'$-Module $\tilde{\mathfrak{J}}$ est de type fini, et par suite (1.4.3) $\mathfrak{J}$ est un idéal de B′ de type fini.

Proposition (6.2.10) *Soit* $\rho: A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux faisant de* B *une* A*-algèbre finie. Pour que* B *soit une* A*-algèbre de présentation finie, il faut et il suffit que* B *soit un* A*-module de présentation finie.*

Il existe une A-algèbre finie et de présentation finie B′ qui est un A-module libre, et un A-homomorphisme surjectif de A-algèbres $u : B' \to B$ (0,6.3.6); on a donc un A-homomorphisme surjectif $v : B'' = A[T_1, \ldots, T_m] \to B'$, dont le noyau est de type fini. Si $w = v \circ u : B'' \to B$ et si b (resp. a) est le noyau de w (resp. u), on a $a = v(b)$ puisque v est surjectif. Or (6.2.7), si B est une A-algèbre de présentation finie, b est un idéal de type fini de B″, donc a est un idéal de type fini de B′, donc un A-module de type fini puisque B′ est une A-algèbre finie; comme B′ est un A-module libre, B est un A-module de présentation finie. Inversement, si B est un A-module de présentation finie, a est un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8, lemme 9) et *a fortiori* un idéal de type fini de B′; on en déduit que b est un idéal de type fini de B″, car b est engendré par le noyau b″ de l'homomorphisme $v : B'' \to B'$ et par un nombre fini d'éléments dont les images par v forment un système générateur de a. Donc B est une B′-algèbre de présentation finie, et comme B′ est une A-algèbre de présentation finie, B est une A-algèbre de présentation finie.

Proposition (6.2.11) *Soit* $f : Y \to X$ *une immersion localement de présentation finie en un point* $y \in Y$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*;

a) *f est une application ouverte au point y* (0,2.10.1).

b) *Il existe un voisinage ouvert* U *de y dans* Y *tel que* $f|U$ *soit une nilimmersion* (4.5.16) *sur un schéma induit sur un ouvert de* X.

c) *Il existe un voisinage ouvert* U *de y dans* Y *tel que* $f|U$ *soit une immersion nilpotente* (4.5.16) *sur un schéma induit sur un ouvert de* X.

Il est clair que c) implique b) et que b) implique a). Pour voir que a) implique c), on peut, en restreignant f, supposer que f est une immersion *fermée* d'un ouvert affine U de Y dans un ouvert affine V de X. Comme f est un homéomorphisme de U sur le sous-espace $f(U)$ de V, l'hypothèse a) entraîne qu'en restreignant encore f si nécessaire, on peut supposer que $f(U) = V$. Si $V = \mathrm{Spec}(A)$, $U = \mathrm{Spec}(B)$, on a alors $B = A/\mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est un nilidéal de A. D'autre part, en raison de (6.2.1.1), on peut, en remplaçant éventuellement A par un anneau de fractions A_s, supposer que B est une A-algèbre de présentation finie; mais alors $\mathfrak{J}$ est un idéal de type fini de A (6.2.7), donc est nilpotent.

Proposition (6.2.12) *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini. On suppose que f admet une* Y*-section g, et de plus que, pour tout* $y \in Y$, *la fibre* $X_y = f^{-1}(y)$ *est un* $\kappa(y)$*-schéma qui est* $\kappa(y)$*-isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$ (et a nécessairement comme espace sous-jacent $\{g(y)\}$). *Alors f est un isomorphisme.*

En effet, g est une nilimmersion de Y dans X (5.1.4); donc le sous-schéma de X associé à cette immersion, et qui a X pour espace sous-jacent, est défini par un *Nilidéal* $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$. Comme $f \circ g = 1_Y$ et que f est localement de type fini, g est localement de présentation finie (6.2.6, (v)), donc $\mathscr{J}$ est un *Idéal de type fini* de $\mathscr{O}_X$ (6.2.8). En outre l'hypothèse que g est une Y-section de f entraîne que l'homomorphisme composé $\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{J}$ est un isomorphisme, donc que l'on a un isomorphisme $\mathscr{O}_X \simeq \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{J}$. Pour tout $x \in X$, si l'on pose $y = f(x)$, $\mathscr{O}_{X,x}$ est donc isomorphe à $\mathscr{O}_{Y,y} \oplus \mathscr{J}_x$. Par tensorisation avec $\kappa(y) = \mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$, on en déduit que $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathscr{O}_{X,x}$ est $\kappa(y)$-isomorphe à $\kappa(y) \oplus (\mathscr{J}_x/\mathfrak{m}_y\mathscr{J}_x)$; l'hypothèse sur X_y entraîne donc que $\mathscr{J}_x/\mathfrak{m}_y\mathscr{J}_x = 0$, ou $\mathfrak{m}_y\mathscr{J}_x = \mathscr{J}_x$ et *a fortiori* $\mathfrak{m}_x\mathscr{J}_x = \mathscr{J}_x$. Comme $\mathscr{J}_x$ est un idéal de type fini de $\mathscr{O}_{X,x}$, l'hypothèse $\mathscr{J}_x = \mathfrak{m}_x\mathscr{J}_x$ entraîne $\mathscr{J}_x = 0$ par le lemme de Nakayama. On a donc $\mathscr{J} = 0$ et f est un isomorphisme.

Corollaire (6.2.13) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme. On suppose que* X *est localement de type fini sur* S; *pour tout* $s \in S$, *soient* X_s, Y_s *les*

fibres de X *et* Y *au point* s, *et* $f_s : X_s \to Y_s$ *le morphisme déduit de* f *par le changement de base* $\mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to S$. *Alors si, pour tout* $s \in S$, f_s *est un monomorphisme,* f *est un monomorphisme.*

En effet, si f_s est un monomorphisme, il en est de même de $f_y : X_y \to \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ qui s'en déduit par le changement de base $\mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to \mathrm{Spec}(\kappa(s))$ (**0**, 1.3.6). Par ailleurs f est localement de type fini (6.2.3, (v)); on voit donc qu'on peut se limiter au cas où $Y = S$. Pour voir que f est un monomorphisme, il suffit (**0**, 1.4.11) de prouver que la première projection $p : X \times_S X \to X$ est un isomorphisme. Or l'hypothèse sur f_s entraîne pour la même raison que la première projection $p_s : X_s \otimes_{\kappa(s)} X_s \to X_s$ est un isomorphisme. Mais le morphisme p admet une S-section, la diagonale Δ_f; donc il résulte de (6.2.12) que p est un isomorphisme.

6.3. Morphismes de type fini et morphismes de présentation finie

Proposition (6.3.1) *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme, et soit* (U_α) *un recouvrement de* Y *par des ouverts affines. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) f *est localement de type fini et quasi-compact.*

b) *Pour tout* α, $f^{-1}(U_\alpha)$ *est réunion finie d'ouverts affines* $V_{\alpha i}$ *tels que chaque anneau* $A(V_{\alpha i})$ *soit une* $A(U_\alpha)$*-algèbre de type fini.*

c) *Pour tout ouvert affine* U *de* Y, $f^{-1}(U)$ *est réunion finie d'ouverts affines* V_j *tels que l'anneau* $A(V_j)$ *soit une* $A(U)$*-algèbre de type fini.*

Il est clair que c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a); prouvons que a) entraîne c). On peut évidemment se borner au cas où $Y = U$ est affine; alors X est quasi-compact, donc réunion finie d'ouverts affines V_j tels que la restriction $V_j \to U$ de f soit localement de type fini; la conclusion résulte donc de (6.2.5).

Définition (6.3.2) *On dit qu'un morphisme* $f : X \to Y$ *est de type fini s'il est localement de type fini et quasi-compact.*

On dit alors aussi que X est un Y-schéma *de type fini sur* Y.

Proposition (6.3.3) *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de type fini*; *si* Y *est noethérien, il en est de même de* X.

Cela résulte de (6.2.2) et (2.7.2).

Proposition (6.3.4) (i) *Soit* $j : X \to Y$ *un morphisme d'immersion. Si* j *est quasi-compact (ce qui est le cas si* j *est une immersion fermée, ou si l'espace sous-jacent à* X *est noethérien, ou si l'espace sous-jacent à* Y *est localement noethérien),* j *est de type fini.*

(ii) *Le composé de deux morphismes de type fini est de type fini.*

(iii) *Si* $f : X \to Y$ *est un* S*-morphisme de type fini,* $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *est de type fini pour toute extension* $S' \to S$ *du schéma de base.*

(iv) *Si* $f: X \to X'$ *et* $g: Y \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes de type fini,* $f \times_S g$ *est de type fini.*

(v) *Si le composé* $g \circ f$ *de deux morphismes* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *est de type fini et si* g *est quasi-séparé ou si* X *est noethérien,* f *est de type fini.*

(vi) *Si un morphisme* f *est de type fini, il en est de même de* f_{red}.

Cela résulte de (6.1.5) et (6.2.3).

Corollaire (6.3.5) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme de type fini. Pour tout morphisme* $Y' \to Y$ *tel que* Y' *soit noethérien,* $X \times_Y Y'$ *est noethérien.*

Cela résulte de (6.3.4, (iii)) et de (6.3.3).

Corollaire (6.3.6) *Soit* X *un schéma de type fini sur un schéma localement noethérien* S. *Alors tout* S*-morphisme* $f: X \to Y$ *est de type fini.*

En effet, on peut supposer S noethérien; si $\varphi: X \to S$ et $\psi: Y \to S$ sont les morphismes structuraux, on a $\varphi = \psi \circ f$ et X est noethérien en vertu de (6.3.3); f est donc de type fini en vertu de (6.3.4, (v)).

Définition (6.3.7) *Soient* X, Y *deux schémas. On dit qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *est de présentation finie s'il vérifie les trois conditions suivantes:*

(i) f *est localement de présentation finie;*

(ii) f *est quasi-compact* (ce qui, lorsque (i) est vérifiée, équivaut à dire que f est *de type fini* (6.3.2));

(iii) f *est quasi-séparé.*

On dit alors aussi que X *est de présentation finie sur* Y, *ou un* Y*-schéma de présentation finie.*

La condition (iii) est automatiquement vérifiée si f est séparé, ou si X est localement noethérien (6.1.13); lorsque Y est localement noethérien, il revient au même de dire que f est *de présentation finie* ou que f est *de type fini* (cette dernière condition entraînant que X est localement noethérien (6.2.2)).

Proposition (6.3.8) (i) *Toute immersion quasi-compacte et localement de présentation finie (en particulier toute immersion ouverte quasi-compacte) est de présentation finie.*

(ii) *Le composé de deux morphismes de présentation finie est de présentation finie.*

(iii) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $f: X \to Y$ *un* S*-morphisme de présentation finie. Alors, pour tout morphisme* $S' \to S$, *le morphisme* $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *est de présentation finie.*

(iv) *Soient* $f: X \to Y$, $f': X' \to Y'$ *deux* S*-morphismes de présentation finie; alors* $f \times_S f': X \times_S X' \to Y \times_S Y'$ *est de présentation finie.*

(v) *Si le composé* $g \circ f$ *de deux morphismes est de présentation finie et si* g *est quasi-séparé et localement de type fini,* f *est de présentation finie.*

Cela résulte immédiatement de (6.1.5), (6.1.9) et (6.2.6).

Il résulte en particulier de (6.3.8, (iii)) que si f est un morphisme de présentation finie et U un ouvert de Y, la restriction $f^{-1}(U)\to U$ de f est un morphisme de présentation finie. Inversement, soit (U_α) un recouvrement de Y par des ouverts affines, et supposons que les restrictions $f^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha$ de f soient des morphismes de présentation finie; il en résulte alors que f est de présentation finie, car f est évidemment localement de présentation finie, quasi-compact en vertu de (6.1.1) et quasi-séparé en vertu de (6.1.11). On peut donc dire que la propriété pour un morphisme $f: X\to Y$ d'être de présentation finie est *locale sur* Y.

Si X est un schéma quasi-séparé, tout morphisme $f: X\to Y$ est quasi-séparé (6.1.10). Donc, si f est quasi-compact et localement de présentation finie, f est alors de présentation finie.

En particulier:

Corollaire (6.3.9) *Soit* $\varphi: A\to B$ *un homomorphisme d'anneaux. Pour que le morphisme correspondant* $f: \mathrm{Spec}(B)\to\mathrm{Spec}(A)$ *soit de type fini* (resp. *de présentation finie*), *il faut et il suffit que* φ *fasse de* B *une* A*-algèbre de type finie* (resp. *de présentation finie*).

La nécessité de la condition résulte en effet de (6.2.5) (resp. (6.2.9)).

Remarque **(6.3.10)** Dans la définition (6.3.7), la condition (iii) n'est pas conséquence des deux autres. Soit par exemple Y un schéma affine dont l'espace sous-jacent ne soit pas noethérien, et soit U un ouvert non quasi-compact dans Y. Soit X le schéma obtenu en recollant deux schémas Y_1, Y_2 isomorphes à Y le long des ouverts U_1, U_2 correspondant à U (**0**, 4.1.7), de sorte que X est réunion de deux ouverts isomorphes respectivement à Y_1 et Y_2 (et que nous identifions à ces derniers), avec $Y_1\cap Y_2 = U$. En outre, il y a un morphisme $f: X\to Y$ qui coïncide dans Y_i avec l'isomorphisme donné $Y_i\to Y$ $(i=1,2)$. Il est clair que f vérifie la la condition (i) de (6.3.7), étant un isomorphisme local; il vérifie aussi (ii), l'image réciproque d'un ouvert quasi-compact de Y étant la réunion de ses images dans Y_1 et Y_2; mais comme $Y_1\cap Y_2$ n'est pas quasi-compact, f n'est pas quasi-séparé (6.1.12).

Proposition (6.3.11) *Soient* X′, X″ *deux schémas,* $X = X'\amalg X''$ *leur somme,* $f': X'\to Y$, $f'': X''\to Y$ *deux morphismes,* $f: X\to Y$ *le morphisme qui coïncide avec* f' *dans* X′ *et avec* f'' *dans* X″. *Pour que* f *soit de présentation finie* (resp. *de type fini*), *il faut et il suffit que* f' *et* f'' *le soient.*

Compte tenu de (6.1.15), il suffit d'observer qu'il revient au même de dire que f est localement de présentation finie (resp. de type fini) ou que f' *et* f'' le sont.

6.4. Schémas de Jacobson et anneaux de Jacobson

Définition (6.4.1) *On dit qu'un schéma* X *est un schéma de Jacobson si l'espace topologique* X *sous-jacent est un espace de Jacobson* (**0**, 2.7.1). *On dit qu'un anneau* A *est un anneau de Jacobson si* Spec(A) *est un schéma de Jacobson.*

Toute partie fermée de $X=\mathrm{Spec}(A)$ est de la forme $Z=V(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A égal à sa racine (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, prop. 11) et l'ensemble X_0 des points fermés de X est l'ensemble des idéaux maximaux de A; dire que $Z \cap X_0$ est dense dans Z signifie donc que $\mathfrak{a}$ est *intersection d'idéaux maximaux* (Bourbaki, *loc. cit.*); comme $\mathfrak{a}$ est intersection d'idéaux premiers, il revient au même de dire que A est un anneau de Jacobson, ou que tout idéal premier de A est intersection d'idéaux maximaux; par définition des espaces de Jacobson ((**0**, 2.7.1) et (**0**, 2.5.2)), la définition usuelle des anneaux de Jacobson (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 4, déf. 1) coïncide donc avec la définition (6.4.1).

Proposition (6.4.2) *Soient* X *un schéma,* (U_α) *un recouvrement de* X *formé d'ouverts affines. Pour que* X *soit un schéma de Jacobson, il faut et il suffit que les anneaux* $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_X)$ *des* U_α *soient des anneaux de Jacobson.*

Cela résulte de (**0**, 2.7.3) et de la définition (6.4.1).

(6.4.3) Un schéma discret est un schéma de Jacobson; un anneau artinien est donc un anneau de Jacobson (2.8.2). Tout anneau principal ayant une infinité d'idéaux maximaux (par exemple **Z**) est un anneau de Jacobson; un anneau local noethérien A est un anneau de Jacobson si et seulement si son idéal maximal est son seul idéal premier, c'est-à-dire si A est artinien. Tout sous-schéma d'un schéma de Jacobson est un schéma de Jacobson en vertu de (**0**, 2.7.2).

Proposition (6.4.4.) *Soit* B *un anneau intègre. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Il existe* $f \neq 0$ *dans* B *tel que* B_f *soit un corps.*

b) *Le corps des fractions de* B *est une* B*-algèbre de type fini.*

c) *Il existe un corps* K *contenant* B *et qui est une* B*-algèbre de type fini.*

d) *Le point générique de* Spec(B) *est isolé dans* Spec(B).

Il est clair que d) est équivalent à a), puisque d) signifie qu'il existe $f \neq 0$ dans B tel que $D(f)$ soit réduit au point générique de Spec(B). Il est trivial que a) entraîne b) et que b) entraîne c). Enfin, c) entraîne a), en vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, cor. 2 du th. 1.

Proposition (6.4.5) *Soit* A *un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) A *est un anneau de Jacobson.*

b) *Pour tout idéal premier non maximal* p *de* A *et tout* $f \neq 0$ *dans* $B=A/p$, B_f *n'est pas un corps.*

b') *Toute* A*-algèbre de type fini* K *qui est un corps est une* A*-algèbre finie.*

On sait que a) entraîne b') (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 4, cor. 3 du th. 3). En outre, le noyau de l'homomorphisme $A \to K$ est alors un idéal *maximal* m de A, et K est une extension *finie* de A/m *(loc. cit.)*. Il est trivial que b') entraîne b), puisque $A/p=B$ n'est pas un corps, que toute B-algèbre de type fini est une A-algèbre de type fini et que B_f est une B-algèbre de type fini. Reste à voir que b) implique a). Nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme (6.4.5.1) *Soit* X *un espace topologique ayant la propriété suivante: pour toute partie localement fermée* $Z \neq \emptyset$ *de* X, *il existe une partie* Z' *de* Z, *localement fermée dans* X *(ou dans* Z, *ce qui revient au même), et un point* $x \in Z'$, *fermé* dans Z'. *Alors*:

(i) *Toute partie localement fermée* $Z \neq \emptyset$ *de* X *contient un point* x *isolé dans* $\overline{\{x\}}$.

(ii) *Pour que* X *soit un espace de Jacobson, il faut et il suffit qu'aucun point non fermé* x *de* X *ne soit isolé dans* $\overline{\{x\}}$.

Notons tout de suite qu'un espace sous-jacent à un *schéma* X vérifie l'hypothèse de l'énoncé de ce lemme, car Z est alors aussi espace sous-jacent à un sous-schéma de X (4.6.1), et il suffit de prendre pour Z' un ouvert affine non vide U *dans* Z; U est un espace de Kolmogoroff quasi-compact, donc contient un point fermé (**0**, 2.1.2).

(i) Soit $Z' \subset Z$ une partie localement fermée dans Z contenant un point x tel que x soit fermé *dans* Z'. Il y a un voisinage ouvert U de x dans X tel que $Z' \cap U$ soit fermé *dans* U, donc x est aussi fermé dans U; cela signifie que $U \cap \overline{\{x\}} = \{x\}$, autrement dit que x est *isolé* dans $\overline{\{x\}}$.

(ii) Si X est un espace de Jacobson, un point non fermé x de X ne peut être isolé dans $\overline{\{x\}}$, car cela signifierait qu'il existe un ouvert U de X tel que $U \cap \overline{\{x\}} = \{x\}$; or $U \cap \overline{\{x\}}$ est localement fermé dans X et ne contiendrait aucun point fermé dans X, contrairement à l'hypothèse que X est un espace de Jacobson (**0**, 2.7.1). Inversement, supposons vérifiée la condition de l'énoncé; alors l'ensemble des points fermés de X est identique à l'ensemble X_0 des $x \in X$ qui sont isolés dans $\overline{\{x\}}$; mais il résulte de (i) que cet ensemble est *très dense* dans X (**0**, 2.5.2), donc par définition X est un espace de Jacobson.

Revenant alors à la démonstration de (6.4.5), la condition b) entraîne que pour tout point x non fermé de Spec(A), le point générique x de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{j}_x) = V(\mathfrak{j}_x) = \overline{\{x\}}$ n'est pas isolé dans $\overline{\{x\}}$, donc b) entraîne a) en vertu du lemme (6.4.5.1) et de (6.4.4).

Corollaire (6.4.6) *Toute algèbre de type fini* B *sur un anneau de Jacobson* A *est un anneau de Jacobson, et l'image réciproque dans* A *de tout idéal maximal de* B *est un idéal maximal de* A. *En particulier, toute algèbre de type fini sur un corps ou sur* **Z** *est un anneau de Jacobson.*

Une B-algèbre de type fini K qui est un corps est aussi une A-algèbre de type fini, donc un A-module de type fini et *a fortiori* un B-module de type fini, d'où la première assertion; la seconde a été démontrée au cours de la démonstration de (6.4.5), appliqué à $K = B/\mathfrak{m}$.

Corollaire (6.4.7) *Si* X *est un schéma de Jacobson,* $f: Y \to X$ *un morphisme localement de type fini, alors* Y *est un schéma de Jacobson et l'image par* f *de tout point fermé dans* Y *est un point fermé dans* X.

La question étant locale sur X et sur Y, on est ramené au cas où X et Y sont affines, et le corollaire résulte alors de (6.4.6).

Exemples **(6.4.8)** (i) Un schéma X qui est localement de type fini sur Spec(**Z**) est un schéma de Jacobson en vertu de (6.4.2) et (6.4.6). *En outre, pour qu'un point $x \in X$ soit *fermé* dans X, il faut et il suffit que le corps $\kappa(x)$ soit *fini*, comme il résulte de (6.4.7) et (6.5.2).

(ii) Nous verrons plus tard que si A est un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et $X = \mathrm{Spec}(A)$, alors l'ouvert $Y = X - \{\mathfrak{m}\}$ de X est un schéma de Jacobson (IV*, 10.5.9). *

6.5. Schémas algébriques et localement algébriques

Définition (6.5.1) *Etant donné un corps* K, *on appelle* K-*schéma algébrique* (resp. *localement algébrique*) *un* K-*schéma de type fini sur* K (resp. *localement de type fini sur* K); K *est appelé le corps de base de* X.

Proposition (6.5.2) *Etant donné un corps* K, *un* K-*schéma localement algébrique* (resp. *algébrique*) X *est localement noethérien* (resp. *noethérien*). *En outre* X *est un schéma de Jacobson* (6.4.1), *dont les points fermés* (qui forment un ensemble *très dense* (**0**, 2.5.3) dans X) *sont les points* $x \in X$ *tels que* $\kappa(x)$ *soit une extension* finie *(donc algébrique) de* K.

La première assertion est évidente ((6.2.2) et (6.3.3)). Le fait que X soit un schéma de Jacobson résulte de (6.4.7). Pour caractériser les points fermés de X, on note que pour que $x \in X$ soit fermé, il faut et il suffit que pour un recouvrement ouvert (U_α) de X, x soit fermé dans chacun des U_α le contenant; comme il existe un tel recouvrement formé d'ouverts affines U_α tels que $A(U_\alpha)$ soit une K-algèbre de type fini, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$, A étant une K-algèbre de type fini. Les points fermés x de X sont alors les points tels que $\mathfrak{j}_x$ soit un idéal maximal de A; mais $A/\mathfrak{j}_x = \kappa(x)$ est alors une extension finie de K (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 4, th. 3). Inversement, si $\kappa(x)$ est une K-algèbre finie, il en est de même de l'anneau $A/\mathfrak{j}_x \subset \kappa(x)$, et comme une K-algèbre intègre de rang fini sur K est un corps (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 2, n° 1, cor. de la prop. 1), on a $A/\mathfrak{j}_x = \kappa(x)$, donc x est fermé.

Corollaire (6.5.3) *Soient* K *un corps* algébriquement clos, X *un* K-*schéma localement algébrique*; *les points fermés de* X *sont alors les points rationnels sur* K (3.5.5), *qui s'identifient aux* K-*points de* X *à valeurs dans* K, *et forment un ensemble très dense dans* X.

Proposition (6.5.4) *Soient* K *un corps*, X *un* K-*schéma localement algébrique. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) X *est artinien* (2.8.1).

b) *L'espace sous-jacent à* X *n'a qu'un nombre fini de points fermés.*

b') *L'espace sous-jacent à* X *est fini.*

c) X *est isomorphe à* Spec(A), *où* A *est une* K-*algèbre de rang fini.*

Si de plus X *est un* K-*schéma algébrique, ces conditions sont aussi équivalentes aux suivantes*:

d) *L'espace sous-jacent à* X *est discret.*

e) *Les points de* X *sont tous fermés.*

On sait que a) entraîne toutes les autres conditions, et que d) ou e) entraîne a) lorsque X est noethérien (2.8.2); en outre, il est clair que c) entraîne a), une K-algèbre de rang fini étant un anneau artinien. Reste à voir que b) entraîne a); mais comme l'ensemble X_0 des points fermés de X est alors fini, fermé et très dense dans X, on a nécessairement $X_0 = X$, X est noethérien et on est ramené à l'équivalence de e) et a) dans ce cas.

Corollaire (6.5.5) *Soient* K *un corps*, X *un* K-*schéma localement algébrique*, x *un point de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) x *est isolé dans* X;

b) x *est fermé dans* X *et* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est artinien*;

c) $\mathcal{O}_{X,x}$ *est une* K-*algèbre de rang fini.*

Si $\mathcal{O}_{X,x}$ est une K-algèbre de rang fini, il en est de même de son corps résiduel $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$, donc c) entraîne b) en vertu de (6.5.2). Dire que $\mathcal{O}_{X,x}$ est artinien signifie que x est point maximal de X, un anneau local noethérien ne pouvant être artinien que s'il a un seul idéal premier égal à son idéal maximal (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, prop. 9). Si de plus x est fermé, l'ensemble $\{x\}$ est fermé et stable par généralisation, donc ouvert (**0**, 2.1.5), ce qui prouve que x est isolé dans X. Enfin, si x est isolé dans X, il existe un voisinage ouvert affine U de

x tel que $U=\{x\}$ et que $A(U)$ soit une K-algèbre de type fini (6.2.1.1). Mais alors $\mathcal{O}_{X,x}=A(U)$ (2.5.2), donc a) implique c).

(6.5.6) Lorsque les conditions de (6.5.4) sont satisfaites, on dit que X est un schéma *fini* sur K ou un K-*schéma fini* (c'est un cas particulier de la notion de S-schéma fini, qui sera définie de façon générale au chap. II). On dit que le rang $[A:K]$ de l'algèbre A est le *rang* de X sur K et on le note aussi $\mathrm{rg}_K(X)$. Si X et Y sont deux schémas finis sur K, on a

$$\mathrm{rg}_K(X \amalg Y) = \mathrm{rg}_K(X)+\mathrm{rg}_K(Y), \tag{6.5.6.1}$$

$$\mathrm{rg}_K(X \times_K Y) = \mathrm{rg}_K(X)\mathrm{rg}_K(Y) \tag{6.5.6.2}$$

comme il résulte de (3.2.1.3).

Corollaire (6.5.7) *Soit* X *un schéma fini sur un corps* K. *Pour toute extension* K′ *de* K, $X\otimes_K K'$ *est un schéma fini sur* K′, *et son rang sur* K′ *est égal au rang de* X *sur* K.

En effet, si $X=\mathrm{Spec}(A)$, on a $[A\otimes_K K' : K'] = [A:K]$.

Corollaire (6.5.8) *Soit* X *un schéma fini sur un corps* K; *on pose*

$$n = \sum_{x\in X} [\kappa(x):K]_s$$

(on rappelle que si K′ est une extension de K, $[K':K]_s$ est le *rang séparable* de K′ sur K, rang de la plus grande extension *algébrique* séparable de K contenue dans K′). *Alors, pour toute extension algébrique séparablement close* Ω *de* K, *l'espace sous-jacent à* $X\otimes_K\Omega$ *a exactement n points, qui s'identifient aux points de* X *à valeurs dans* Ω (3.5.4).

On peut évidemment se borner au cas où l'anneau $A=A(X)$ est local (2.8.2); soient $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $L=A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel, extension algébrique finie de K. Les points de X à valeurs dans Ω correspondent biunivoquement aux Ω-sections de $X\otimes_K\Omega$ (3.5.5), ou encore aux points fermés de $X\otimes_K\Omega$ (6.5.3), et finalement à tous les points de ce schéma artinien (2.8.2); ils correspondent aussi biunivoquement aux K-homomorphismes de L dans Ω (2.5.5), et la proposition résulte donc de Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 7, n° 5, prop. 8.

(6.5.9) Le nombre n défini dans (6.5.8) s'appelle le *rang séparable* de A (ou de X) sur K, ou aussi le *nombre géométrique de points* de X; c'est donc le nombre d'éléments de $X(\Omega)_K$ (3.5.2). Il résulte aussitôt de cette définition que pour *toute* extension K′ de K, $X\otimes_K K'$ a même nombre géométrique de points que X. Si on désigne ce nombre par $n(X)$, il est clair que, si X et Y sont deux schémas finis sur K, on a

$$n(X \amalg Y) = n(X)+n(Y). \tag{6.5.9.1}$$

Sous les mêmes hypothèses, on a aussi

$$n(X \times_K Y) = n(X)n(Y) \tag{6.5.9.2}$$

comme il résulte de l'interprétation de $n(X)$ comme nombre d'éléments de $X(\Omega)_K$, et de la formule (3.5.2.1).

Proposition (6.5.10) *Soit* $f: X\to Y$ *un morphisme localement de type fini* (resp. *de type fini*); *alors, pour tout* $y\in Y$, *la fibre* $X_y = f^{-1}(y)$ (3.4.7) *est un schéma localement algébrique* (resp. *algébrique*) *sur* $\kappa(y)$, *et pour tout* $x\in X_y$, $\kappa(x)$ *est une extension de type fini de* $\kappa(y)$.

Comme $X_y = X \otimes_Y \kappa(y)$ (3.4.7) à isomorphisme près, la proposition résulte de (6.2.3, (iii)) et (6.3.4, (iii)).

Cette proposition montre que les morphismes de type fini (resp. localement de type fini) correspondent intuitivement aux «familles algébriques de variétés algébriques (resp. localement algébriques)», Y jouant le rôle de «variété de paramètres», ce qui donne à ces morphismes une signification «géométrique». Les morphismes qui ne sont pas localement de type fini interviendront surtout par la suite comme «changements de base», par exemple par localisation, complétion ou hensélisation, ou dans les «critères valuatifs» (5.5).

Proposition (6.5.11) *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y' \to Y$ *deux morphismes, et posons* $X' = X \times_Y Y'$ *et* $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$. *Soient* $y' \in Y'$, $y = g(y')$; *si la fibre* $X_y = f^{-1}(y)$ *est un schéma algébrique fini sur* $\kappa(y)$, *alors la fibre* $X'_{y'} = f'^{-1}(y')$ *est un schéma algébrique fini sur* $\kappa(y')$, *ayant un rang sur* $\kappa(y')$ *égal à celui de* X_y *sur* $\kappa(y)$, *et ayant même nombre géométrique de points que* X_y.

Comme $X'_{y'} = X_y \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y')$ (3.4.9), cela résulte de (6.5.7) et (6.5.9).

6.6. Détermination locale d'un morphisme

Proposition (6.6.1) *Soient* X, Y *deux* S-*schémas,* $x \in X$, $y \in Y$ *des points au-dessus d'un même point* $s \in S$.

(i) *Supposons que* Y *soit localement de type fini sur* S *au point* y. *Alors, si deux* S-*morphismes* $f = (\psi, \theta)$, $f' = (\psi', \theta')$ *de* X *dans* Y *sont tels que* $\psi(x) = \psi'(x) = y$ *et que les* $\mathcal{O}_{S,s}$-*homomorphismes (locaux)* $\theta_x^\#$ *et* $\theta_x'^\#$ *de* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *dans* $\mathcal{O}_{X,x}$ *coïncident, f et f' coïncident dans un voisinage ouvert convenable de* x.

(ii) *Supposons que* Y *soit localement de présentation finie sur* S *au point* y. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_{S,s}$-*homomorphisme local* $\varphi: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *et un* S-*morphisme* $f = (\psi, \theta)$ *de* U *dans* Y *tels que* $\psi(x) = y$ *et* $\theta_x^\# = \varphi$.

(i) La question étant locale sur S, X et Y, on peut supposer S, X, Y affines d'anneaux respectifs A, B, C, f et f' étant de la forme $({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$ et $({}^a\varphi', \tilde{\varphi}')$ respectivement, où φ et φ' sont deux A-homomorphismes de C dans B tels que $\varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x) = \varphi'^{-1}(\mathfrak{j}_x) = \mathfrak{j}_y$, et que les homomorphismes φ_x et φ'_x de C_y dans B_x, déduits de φ et φ', soient identiques; on peut en outre supposer que C est une A-algèbre *de type fini*. Soient c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des générateurs de la A-algèbre C, et posons $b_i = \varphi(c_i)$, $b'_i = \varphi'(c_i)$; par hypothèse, on a $b_i/1 = b'_i/1$ dans l'anneau de fractions B_x $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Cela signifie qu'il existe des éléments $s_i \in B - \mathfrak{j}_x$ tels que $s_i(b_i - b'_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et on peut évidemment supposer tous les s_i égaux à un même élément $g \in B - \mathfrak{j}_x$. On en conclut que l'on a $b_i/1 = b'_i/1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ dans l'anneau de fractions B_g; si i_g est l'homomorphisme canonique $B \to B_g$, on a par suite $i_g \circ \varphi = i_g \circ \varphi'$; donc les restrictions de f et f' à $D(g)$ sont identiques.

(ii) On peut encore supposer S, X, Y affines d'anneaux respectifs A, B, C. Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_x$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{j}_y$, de sorte que φ est un A-homomorphisme local $C_\mathfrak{q} \to B_\mathfrak{p}$. On en déduit par composition un A-homomorphisme

$$\rho: C \longrightarrow C_\mathfrak{q} \xrightarrow{\varphi} B_\mathfrak{p},$$

où la première flèche est l'homomorphisme canonique. Or, on peut considérer $B_\mathfrak{p}$ comme limite inductive du système filtrant de A-algèbres B_s, où s parcourt l'ensemble des éléments de B tels que $s \notin \mathfrak{p}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 3, prop. 9). Comme C est par hypothèse une A-algèbre de présentation finie, on déduit de (**0**, 6.3.11) qu'il existe un $s \notin \mathfrak{p}$ et un A-homomorphisme $\sigma: C \to B_s$

dont l'image canonique est ρ, autrement dit qui rend commutatif le diagramme

(6.6.1.1)
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\sigma} & B_s \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_q & \xrightarrow[\varphi]{} & B_p \end{array}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes canoniques. Il suffit donc de prendre $U=D(s)$ et pour f le morphisme $({}^a\sigma, \tilde{\sigma})$ pour répondre à la question.

Remarque **(6.6.1.2)** Les résultats de (6.6.1) sont des cas particuliers de théorèmes plus généraux sur les «limites projectives filtrantes» de morphismes de présentation finie (**IV***, 8.8.2).

Corollaire (6.6.2) *Sous les hypothèses de* (6.6.1, (ii)), *si en outre* X *est localement de type fini sur* S *au point x, on peut supposer le morphisme f de type fini.*

On peut en effet se borner au cas où S, X, Y sont affines, les morphismes structuraux $X\to S$ et $Y\to S$ étant respectivement de type fini et de présentation finie; alors la proposition résulte de (6.2.1.1) et de (6.3.4, (v)).

Corollaire (6.6.3) *Supposons vérifiées les hypothèses de* (6.6.1, (ii)) *et supposons en outre que* Y *soit intègre et* φ *injectif. Alors on peut supposer que* U *est affine et que f est un morphisme composé* $U\xrightarrow{g} V\to Y$, *où* V *est un ouvert affine contenant y et g est tel que l'homomorphisme correspondant* $A(V)\to A(U)$ *soit injectif.*

En effet, avec les notations de la preuve de (6.6.1, (ii)), C est intègre et l'homomorphisme canonique $C\to C_q$ est donc injectif; il résulte alors du diagramme (6.6.1.1) que σ est aussi injectif.

Proposition (6.6.4) *Soient* $f=(\psi,\theta): X\to Y$ *un morphisme, x un point de* X, $y=\psi(x)$.

(i) *Supposons que f soit localement de type fini au point x. Pour que f soit une immersion locale au point x* (4.4.1), *il faut et il suffit que* $\theta_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y,y}\to\mathcal{O}_{X,x}$ *soit surjectif.*

(ii) *Supposons que f soit localement de présentation finie au point x. Pour que f soit un isomorphisme local au point x* (4.4.2), *il faut et il suffit que* $\theta_x^\sharp$ *soit un isomorphisme.*

Il n'y a évidemment à prouver que la suffisance de ces conditions (4.2.2).

(ii) Par définition X est localement de présentation finie sur y au point x; en vertu de (6.6.1, (i) et (ii)), il y a donc un voisinage ouvert V de y et un morphisme $g: V\to X$ tels que $g\circ f$ (resp. $f\circ g$) soit défini et coïncide avec l'identité dans un voisinage ouvert W de x (resp. un voisinage ouvert T de y). Prenant $T'=T\cap g^{-1}(W)$, $W'=f^{-1}(T')$ on vérifie aussitôt que $g(T')\subset W'$ et $f(W')\subset T'$ et que $(g\circ f)|W'=1_{W'}$ et $(f\circ g)|T'=1_{T'}$, donc f et g sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

(i) La question étant locale sur X et Y, on peut supposer X et Y affines, d'anneaux respectifs A, B; on a $f=({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, où φ est un homomorphisme d'anneaux $B\to A$ qui fait de A une B-algèbre de type fini; on a $\varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)=\mathfrak{j}_y$, et l'homomorphisme $\varphi_x: B_y\to A_x$ déduit de φ est *surjectif*. Soit (t_i) $(1\leqslant i\leqslant n)$ un système générateur de la B-algèbre A; l'hypothèse sur φ_x implique qu'il existe des $b_i\in B$ et un $c\in B-\mathfrak{j}_y$ tels que, dans l'anneau de fractions A_x, on ait $t_i/1=\varphi(b_i)/\varphi(c)$ pour $1\leqslant i\leqslant n$. Par suite (1.3.3), il existe $a\in A-\mathfrak{j}_x$ tel que, si l'on pose $g=a\varphi(c)$, on ait aussi $t_i/1=a\varphi(b_i)/g$ *dans l'anneau de fractions* A_g. Cela étant, il existe par hypothèse un polynôme $Q(X_1,\ldots,X_n)$ à coefficients dans l'anneau $\varphi(B)$, tel que

$a=Q(t_1,\ldots,t_n)$; posons $Q(X_1/T,\ldots,X_n/T)=P(X_1,\ldots,X_n,T)/T^m$, où P est homogène de degré m. Dans l'anneau A_g, on a

$$a/1=a^m P(\varphi(b_1),\ldots,\varphi(b_n),\varphi(c))/g^m=a^m\varphi(d)/g^m$$

où $d\in B$. Comme, dans A_g, $g/1=(a/1)(\varphi(c)/1)$ est inversible par définition, il en est de même de $a/1$ et de $\varphi(c)/1$, et on peut donc écrire $a/1=(\varphi(d)/1)(\varphi(c)/1)^{-m}$. On en conclut que $\varphi(d)/1$ est aussi inversible dans A_g. Posons alors $h=cd$; comme $\varphi(h)/1$ est inversible dans A_g, l'homomorphisme composé

$$B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow A_g \quad \text{se factorise en} \quad B \longrightarrow B_h \xrightarrow{\gamma} A_g.$$

Montrons que γ est *surjectif*; il suffit de vérifier que l'image de B_h dans A_g contient les $t_i/1$ et $(g/1)^{-1}$. Or, on a $(g/1)^{-1}=(\varphi(c)/1)^{m-1}(\varphi(d)/1)^{-1}=\gamma(c^m/h)$, et $a/1=\gamma(d^{m+1}/h^m)$, donc $(a\varphi(b_i))/1=\gamma(b_i d^{m+1}/h^m)$, et comme $t_i/1=(a\varphi(b_i)/1)(g/1)^{-1}$, notre assertion est démontrée. Le choix de h implique que $\psi(D(g))\subset D(h)$, et la restriction de f à $D(g)$ est égale à $({}^a\gamma,\tilde{\gamma})$; comme γ est surjectif, cette restriction est une immersion fermée de $D(g)$ dans $D(h)$ (4.3.3).

Corollaire (6.6.5) *Avec les notations de la prop.* (6.6.4), *supposons que f soit une immersion locale au point x et soit localement de présentation finie au point x. Pour que f soit une application ouverte au point x, il faut et il suffit que le noyau de $\theta_x^\sharp$ soit nilpotent (ou un nilidéal, ce qui revient au même ici).*

Il n'y a encore à prouver que la suffisance de la condition en vertu de (6.2.11). On peut supposer que $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $X=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{n})$, où $\mathfrak{n}$ est un idéal de type fini de A (6.2.8), et l'hypothèse signifie que $\mathfrak{n}_x$ est nilpotent (ou un nilidéal). Si $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système générateur de $\mathfrak{n}$, on a donc $(s_i/1)^m=0$ dans A_x pour un entier m et pour $1\leqslant i\leqslant n$. Cela entraîne l'existence d'un $t\in A-\mathfrak{j}_X$ tel que $ts_i=0$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, et par suite $(s_i/1)^m=0$ dans l'anneau A_t, ce qui signifie que $\mathfrak{n}_t$ est nilpotent, d'où la conclusion.

6.7. Image directe d'un faisceau quasi-cohérent

Proposition (6.7.1) *Soient* X, Y *deux schémas, $f:X\to Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé. Alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, $f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent.*

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y affine. Puisque f est quasi-compact, X est alors réunion d'un nombre *fini* d'ouverts affines X_i; en outre (6.1.9, (ii)) X est un schéma quasi-séparé, donc les intersections $X_i\cap X_j$ sont des ouverts *quasi-compacts* (6.1.11).

a) Supposons d'abord que les $X_i\cap X_j$ soient eux-mêmes des ouverts *affines*. Posons $\mathscr{F}_i=\mathscr{F}|X_i$, $\mathscr{F}_{ij}=\mathscr{F}|(X_i\cap X_j)$ et soient $\mathscr{F}'_i$ et $\mathscr{F}'_{ij}$ les images de $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_j$ par les restrictions de f à X_i et à $X_i\cap X_j$; on sait que les $\mathscr{F}'_i$ et $\mathscr{F}'_{ij}$ sont quasi-cohérents (1.7.8). Posons

$$\mathscr{G}=\bigoplus_i \mathscr{F}'_i, \qquad \mathscr{H}=\bigoplus_{i,j}\mathscr{F}'_{ij};$$

$\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents; nous allons définir un homomorphisme $u:\mathscr{G}\to\mathscr{H}$ tel que $f_*(\mathscr{F})$ soit le *noyau* de u, et il en résultera que $f_*(\mathscr{F})$ est quasi-cohérent (2.2.2). Il suffit de définir u comme homomorphisme de préfaisceaux; tenant compte des défini-

tions de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$, il suffit donc, pour tout ouvert $W \subset Y$, de définir un homomorphisme

$$u_W\colon \bigoplus_i \Gamma(f^{-1}(W)\cap X_i, \mathscr{F}) \to \bigoplus_{i,j} \Gamma(f^{-1}(W)\cap X_i \cap X_j, \mathscr{F})$$

de façon à satisfaire aux conditions de compatibilité pour les restrictions à un ouvert plus petit. Si, pour toute section s_i de $\mathscr{F}$ au-dessus de $f^{-1}(W)\cap X_i$, on désigne par $s_{i|j}$ sa restriction à $f^{-1}(W)\cap X_i\cap X_j$, on posera

$$u_W((s_i)) = (s_{i|j} - s_{j|i})$$

et les conditions de compatibilité sont remplies de façon évidente. Pour prouver que le noyau $\mathscr{R}$ de u est $f_*(\mathscr{F})$, définissons un homomorphisme v de $f_*(\mathscr{F})$ dans $\mathscr{R}$ en faisant correspondre à toute section s de $\mathscr{F}$ au-dessus de $f^{-1}(W)$ la famille (s_i), où s_i est la restriction de s à $f^{-1}(W)\cap X_i$; les axiomes (F_1) et (F_2) des faisceaux (G, II, 1.1) entraînent que v est *bijectif*, ce qui termine la démonstration dans ce cas.

b) Dans le cas général, le même raisonnement s'applique une fois qu'on a établi que les $\mathscr{F}'_{ij}$ sont *quasi-cohérents*. Or $X_i\cap X_j$, étant quasi-compact, est réunion finie d'ouverts affines X_{ijk}; et comme les X_{ijk} sont des ouverts affines dans un schéma *affine* X_i, leurs intersections sont encore des ouverts affines, puisqu'un schéma affine est *séparé* ((5.3.6) et (5.2.2)). On est donc ramené au cas a), et (6.7.1) est donc démontrée.

(6.7.2) Le résultat de (6.7.1) s'appliquera en particulier lorsque f est *séparé* et quasi-compact (6.1.4), ou lorsque f est quasi-compact et l'espace sous-jacent à X *localement noethérien* (6.1.12).

(6.7.3) Soit U un ouvert dans un schéma X tel que l'injection canonique $j\colon U\to X$ ne soit pas quasi-compacte; alors il peut se faire que le $\mathscr{O}_X$-Module $j_*(\mathscr{O}_U)$ *ne soit pas quasi-cohérent*. Considérons par exemple le schéma affine X défini dans (1.3.16), où on prend pour X le sous-espace compact de **R** formé de 0 et des points $1/n$ $(n\geqslant 1)$, et soit U le complémentaire de 0 dans X. Soit $M=\Gamma(X, j_*(\mathscr{O}_U))=\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ par définition; M est donc le A-module des applications localement constantes de U dans K; mais comme U est *discret*, cet ensemble n'est autre que l'ensemble K^U de *toutes* les applications de U dans K. Montrons que l'application canonique $\tilde{M}\to j_*(\mathscr{O}_U)$ n'est pas un isomorphisme; il suffira de voir que cette application, restreinte aux *fibres* au point 0, n'est pas bijective. Or on a $\tilde{M}_0 = M_0$ et comme M est déjà un K-module, $M_0 = M$; d'autre part, $(j_*(\mathscr{O}_U))_0$ est l'ensemble des *germes* au point 0 des applications localement constantes de U dans K; l'application canonique qui fait correspondre à une application de U dans K son germe au point 0 n'est évidemment pas injective.

(6.7.4) On aura soin de noter que même si X et Y sont des schémas noethériens et $f: X \to Y$ un morphisme de type fini, l'image directe $f_*(\mathscr{F})$ d'un $\mathscr{O}_X$-Module *cohérent n'est pas* en général un $\mathscr{O}_Y$-Module *cohérent*, comme le montre le cas où Y est le spectre d'un corps K, $X = \mathrm{Spec}(K[T])$ et $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$ (cf. chap. III, §§ 2 et 3).

6.8. Prolongement de sections de faisceaux quasi-cohérents

Théorème (6.8.1) *Soient* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module inversible* (**0**, 5.5.1), *s une section de* $\mathscr{L}$ *au-dessus de* X, X_s *l'ensemble ouvert des* $x \in X$ *tels que* $s(x) \neq 0$ ((**0**, 4.1.9) et (**0**, 5.5.2)), $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent.*

(i) *Si* $t \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ *est telle que* $t|X_s = 0$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $t \otimes s^{\otimes n} = 0$.

(ii) *Pour toute section* $t \in \Gamma(X_s, \mathscr{F})$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $t \otimes s^{\otimes n}$ *se prolonge en une section* t' *de* $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ *au-dessus de* X.

(i) Comme l'espace sous-jacent à X est réunion finie d'ouverts affines U_i tels que $\mathscr{L}|U_i$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_X|U_i$, on est ramené au cas où X est affine et $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$; l'assertion est alors identique à celle de (1.4.1, c)).

(ii) X est réunion finie d'ouverts affines U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que $\mathscr{L}|U_i$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_X|U_i$, et pour chaque i, $(t \otimes s^{\otimes n})|(U_i \cap X_s)$ s'identifie à $(t|(U_i \cap X_s))\,(s|(U_i \cap X_s))^n$ par un isomorphisme de $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})|U_i$ sur $\mathscr{F}|U_i$. On sait alors (1.4.1, c)) qu'il existe un entier n tel que, pour chaque i, $(t \otimes s^{\otimes n})|(U_i \cap X_s)$ se prolonge en une section t_i de $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de U_i. Soit $t_{i|j}$ la restriction de t_i à $U_i \cap U_j$; par définition on a $(t_{i|j} - t_{j|i})|(X_s \cap U_i \cap U_j) = 0$. Puisque X est quasi-séparé, $U_i \cap U_j$ est quasi-compact (6.1.12). En vertu de (i) il existe donc un entier m (indépendant de i et j) tel que $(t_{i|j} - t_{j|i}) \otimes s^{\otimes m} = 0$. On en conclut aussitôt qu'il existe une section t' de $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (n+m)}$ au-dessus de X, induisant $t_i \otimes s^{\otimes m}$ au-dessus de chaque U_i, et par suite induisant $t \otimes s^{\otimes (n+m)}$ au-dessus de X_s.

Les corollaires qui suivent donnent une interprétation de (6.8.1) en un langage plus algébrique:

Corollaire (6.8.2) *Les hypothèses étant celles de* (6.8.1), *considérons l'anneau gradué* $A_* = \Gamma_*(\mathscr{L})$ *et le* A_**-module gradué* $M_* = \Gamma_*(\mathscr{L}, \mathscr{F})$ (**0**, 5.4.6), *de type* **Z**. *Soient* $n \in \mathbf{Z}$, *et* $s \in A_n$; *alors il existe un isomorphisme canonique* $\Gamma(X_s, \mathscr{F}) \simeq ((M_*)_s)_0$ (sous-groupe du module de fractions (gradué) $(M_*)_s$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 9)) formé des éléments homogènes de degré 0).

Avec les notations de (6.8.1, (ii)), on fait en effet correspondre à $t \in \Gamma(X_s, \mathscr{F})$ l'élément t'/s^n de $((M_*)_s)_0$, qui est indépendant de l'entier n et du prolongement t' choisis, en vertu de (6.8.1, (i)). Il est immédiat de

vérifier qu'on a bien défini ainsi un isomorphisme de groupes additifs, l'injectivité résultant encore de (6.8.1, (i)).

Corollaire (6.8.3) *On suppose vérifiées les hypothèses de* (6.8.1), *et en outre que* $\mathscr{L}=\mathscr{O}_X$. *Alors, si on pose* $A=\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$, $M=\Gamma(X,\mathscr{F})$, *le* A_s-*module* $\Gamma(X_s,\mathscr{F})$ *est canoniquement isomorphe à* M_s.

La démonstration est essentiellement la même que celle de (6.8.2).

Proposition (6.8.4) *Soient* X *un schéma quasi-compact,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$-*Module quasi-cohérent de type fini,* $\mathscr{J}$ *un Idéal de* $\mathscr{O}_X$, *quasi-cohérent et de type fini, tels que* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *soit contenu dans* $\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J})$. *Alors il existe un entier* $n>0$ *tel que* $\mathscr{J}^n\mathscr{F}=0$.

Comme X est réunion *finie* d'ouverts affines, on peut se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine; alors $\mathscr{F}=\tilde{M}$ et $\mathscr{J}=\tilde{\mathfrak{J}}$, où M est un A-module de type fini et $\mathfrak{J}$ un idéal de type fini de A. Soient t_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ des éléments de $\mathfrak{J}$ formant un système générateur de $\mathfrak{J}$, et s_j $(1\leqslant j\leqslant q)$ des éléments de M engendrant M; par hypothèse, toute section de $\mathscr{F}$ au-dessus de X est nulle dans chacun des $D(t_i)$, donc (6.8.1) il existe un entier h indépendant de i et j, tel que $t_i^h s_j=0$ quels que soient i et j, et par suite $t_i^h s=0$ pour tout $s\in M$. On en conclut que, si $n=mh$, on a $\mathfrak{J}^n M=0$, et par suite le $\mathscr{O}_X$-Module correspondant $\mathscr{J}^n\mathscr{F}=(\mathfrak{J}^n M)^{\sim}$ (1.3.13) est nul.

Proposition (6.8.5) *Soient* X *un schéma,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$-*Module quasi-cohérent de type fini. Alors il existe un sous-schéma fermé* Y *de* X, *dont l'espace sous-jacent est égal à* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, *et un* $\mathscr{O}_Y$-*Module quasi-cohérent de type fini* $\mathscr{G}$ *tels que, si* $j: Y\to X$ *est l'injection canonique,* $\mathscr{F}$ *soit isomorphe à* $j_*(\mathscr{G})$.

Il suffira de se rappeler que l'Idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, *annulateur* de $\mathscr{F}$ (**0**, 5.3.10) est *quasi-cohérent* (2.2.2,(vii)): on prendra alors pour Y le sous-schéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$ (4.1.1); comme $\mathscr{J}\mathscr{F}=0$, $\mathscr{F}$ est un $(\mathscr{O}_X/\mathscr{J})$-Module, et on répondra à la question en prenant $\mathscr{G}=j^*(\mathscr{F})$.

6.9. Prolongement des faisceaux quasi-cohérents

(6.9.1) Soient X un espace topologique, $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, d'anneaux) sur X, U une partie ouverte de X, $\psi: U\to X$ l'injection canonique, $\mathscr{G}$ un sous-faisceau de $\mathscr{F}|U=\psi^{-1}(\mathscr{F})$. Comme ψ_* est exact à gauche, $\psi_*(\mathscr{G})$ est un sous-faisceau de $\psi_*(\psi^{-1}(\mathscr{F}))$; si on considère l'homomorphisme canonique $\rho_{\mathscr{F}}: \mathscr{F}\to\psi_*(\psi^{-1}(\mathscr{F}))$ (**0**, 3.5.3), nous désignerons par $\overline{\mathscr{G}}$ le sous-faisceau $\rho_{\mathscr{F}}^{-1}(\psi_*(\mathscr{G}))$ de $\mathscr{F}$. Il résulte immédiatement des définitions que pour tout ouvert V de X, $\Gamma(V,\overline{\mathscr{G}})$ est formé des sections $s\in\Gamma(V,\mathscr{F})$ dont la restriction à $V\cap U$ soit une section de $\mathscr{G}$ au-dessus de $V\cap U$. On a donc $\overline{\mathscr{G}}|U=\psi^{-1}(\overline{\mathscr{G}})=\mathscr{G}$, et $\overline{\mathscr{G}}$ est le *plus grand* sous-faisceau de $\mathscr{F}$ induisant $\mathscr{G}$ sur U; nous dirons que

$\overline{\mathscr{G}}$ est le *prolongement canonique* du sous-faisceau $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}|U$ en un sous-faisceau de $\mathscr{F}$.

Proposition (6.9.2) *Soient* X *un schéma,* U *une partie ouverte de* X *telle que l'injection canonique* $j : U \to X$ *soit un morphisme quasi-compact* (ce qui sera vérifié pour *tout* U si l'espace sous-jacent X est *localement noethérien* (6.1.5)). *Alors*:

(i) *Pour tout* $(\mathscr{O}_X|U)$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}$, $j_*(\mathscr{G})$ *est un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent et on a* $j_*(\mathscr{G})|U = j^*(j_*(\mathscr{G})) = \mathscr{G}$.

(ii) *Pour tout* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *et tout sous-*$(\mathscr{O}_X|U)$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}$, *le prolongement canonique* $\overline{\mathscr{G}}$ *de* $\mathscr{G}$ (6.9.1) *est un sous-*$\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent de* $\mathscr{F}$.

Si $j = (\psi, \theta)$ (ψ étant l'injection $U \to X$ des espaces sous-jacents), on a par définition $j_*(\mathscr{G}) = \psi_*(\mathscr{G})$ pour tout $(\mathscr{O}_X|U)$-Module $\mathscr{G}$, et en outre $j^*(\mathscr{H}) = \psi^{-1}(\mathscr{H}) = \mathscr{H}|U$ pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{H}$ en raison de la définition d'un schéma induit sur un ouvert. (i) est donc un cas particulier de (6.7.1); pour la même raison, $j_*(j^*(\mathscr{F}))$ est quasi-cohérent, et comme $\overline{\mathscr{G}}$ est l'image réciproque de $j_*(\mathscr{G})$ par l'homomorphisme $\rho_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to j_*(j^*(\mathscr{F}))$, (ii) résulte de (2.2.2).

On notera que l'hypothèse que le morphisme $j : U \to X$ est quasi-compact est aussi vérifiée lorsque l'ouvert U est *quasi-compact* et que X est *quasi-séparé* (6.1.11).

Corollaire (6.9.3) *Soient* X *un schéma,* U *un ouvert quasi-compact de* X *tel que le morphisme d'injection* $j : U \to X$ *soit quasi-compact. Supposons en outre que tout* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent soit limite inductive de ses sous-*$\mathscr{O}_X$*-Modules quasi-cohérents de type fini* (ce qui a lieu lorsque X est un *schéma affine*). *Soient alors* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* $\mathscr{G}$ *un sous-*$(\mathscr{O}_X|U)$*-Module quasi-cohérent* de type fini *de* $\mathscr{F}|U$. *Il existe alors un sous-*$\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* de type fini $\mathscr{G}'$ *de* $\mathscr{F}$ *tel que* $\mathscr{G}'|U = \mathscr{G}$.

En effet, on a $\mathscr{G} = \overline{\mathscr{G}}|U$, et $\overline{\mathscr{G}}$ est quasi-cohérent d'après (6.9.2), donc limite inductive de ses sous-$\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents de type fini $\mathscr{H}_\lambda$. Par suite $\mathscr{G}$ est limite inductive des $\mathscr{H}_\lambda|U$, donc égal à un des $\mathscr{H}_\lambda|U$ puisqu'il est de type fini (**0**, 5.2.3).

Remarque **(6.9.4)** Supposons que X soit *quasi-séparé*. Alors, si la conclusion de (6.9.3) a lieu pour tout ouvert affine U et tout sous-$(\mathscr{O}_X|U)$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}|U$, il en résulte que $\mathscr{F}$ est limite inductive de ses sous-$\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents de type fini. En effet, pour tout ouvert affine $U \subset X$, on a $\mathscr{F}|U = \tilde{M}$, où M est un A(U)-module, et comme ce dernier est limite inductive de ses sous-modules de type fini, $\mathscr{F}|U$ est limite inductive de ses sous-$(\mathscr{O}_X|U)$-Modules quasi-cohérents de type fini (1.3.9). Or, par hypothèse, chacun de

ces sous-Modules est induit sur U par un sous-$\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}_{\lambda,U}$ de $\mathscr{F}$. Les sommes finies des $\mathscr{G}_{\lambda,U}$ sont encore des $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents de type fini, car la question est locale et le cas où X est affine a été traité dans (1.3.10); il est clair alors que $\mathscr{F}$ est limite inductive de ces sommes finies, d'où notre assertion.

Corollaire (6.9.5) *Sous les hypothèses de* (6.9.3), *pour tout* $(\mathscr{O}_X|U)$-*Module quasi-cohérent de type fini* $\mathscr{G}$, *il existe un* $\mathscr{O}_X$-*Module quasi-cohérent de type fini* $\mathscr{G}'$ *tel que* $\mathscr{G}'|U=\mathscr{G}$.

Comme $\mathscr{F}=j_*(\mathscr{G})$ est quasi-cohérent (6.9.2) et $\mathscr{F}|U=\mathscr{G}$, il suffit d'appliquer (6.9.3) à $\mathscr{F}$.

Lemme (6.9.6) *Soient* X *un schéma,* L *un ensemble bien ordonné,* $(V_\lambda)_{\lambda\in L}$ *un recouvrement de* X *par des ouverts affines,* U *un ouvert de* X; *pour tout* $\lambda\in L$, *on pose* $W_\lambda=\bigcup_{\mu<\lambda} V_\mu$. *On suppose que*: 1° *pour tout* $\lambda\in L$, $V_\lambda\cap W_\lambda$ *est quasi-compact*; 2° *le morphisme d'immersion* $U\to X$ *est quasi-compact* (autrement dit, U est *rétrocompact*). *Alors, pour tout* $\mathscr{O}_X$-*Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *et tout sous-*$(\mathscr{O}_X|U)$-*Module quasi-cohérent* de type fini $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{F}|U$, *il existe un sous-*$\mathscr{O}_X$-*Module quasi-cohérent* de type fini $\mathscr{G}'$ *de* $\mathscr{F}$ *tel que* $\mathscr{G}'|U=\mathscr{G}$.

Posons $U_\lambda=U\cup W_\lambda$; on va définir par récurrence transfinie une famille $(\mathscr{G}'_\lambda)$, où $\mathscr{G}'_\lambda$ est un sous-$(\mathscr{O}_X|U_\lambda)$-Module quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{F}|U_\lambda$, tel que $\mathscr{G}'_\lambda|U_\mu=\mathscr{G}'_\mu$ pour $\mu<\lambda$ et $\mathscr{G}'_\lambda|U=\mathscr{G}$. L'unique sous-$\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{G}'|U_\lambda=\mathscr{G}'$ pour tout $\lambda\in L$ (**0**, 3.3.1) répondra à la question. Supposons donc les $\mathscr{G}'_\mu$ définis et ayant les propriétés précédentes pour $\mu<\lambda$; si λ n'a pas de prédécesseur, on prendra pour $\mathscr{G}'_\lambda$ l'unique sous-$(\mathscr{O}_X|U_\lambda)$-Module de $\mathscr{F}|U_\lambda$ tel que $\mathscr{G}'_\lambda|U_\mu=\mathscr{G}'_\mu$ pour tout $\mu<\lambda$, ce qui est licite puisque les U_μ avec $\mu<\lambda$ forment alors un recouvrement de U_λ. Si au contraire λ a un prédécesseur μ, on a $U_\lambda=U_\mu\cup V_\mu$, et il suffira de définir un sous-$(\mathscr{O}_X|V_\mu)$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}''_\mu$ de $\mathscr{F}|V_\mu$ tel que

$$\mathscr{G}''_\mu|(U_\mu\cap V_\mu)=\mathscr{G}'_\mu|(U_\mu\cap V_\mu);$$

on prendra ensuite pour $\mathscr{G}'_\lambda$ le sous-$(\mathscr{O}_X|U_\lambda)$-Module de $\mathscr{F}|U_\lambda$ tel que $\mathscr{G}'_\lambda|U_\mu=\mathscr{G}'_\mu$ et $\mathscr{G}'_\lambda|V_\mu=\mathscr{G}''_\mu$ (**0**, 3.3.1). Or, comme V_μ est affine, l'existence de $\mathscr{G}''_\mu$ est assurée par (6.9.3) dès que l'on a démontré que $U_\mu\cap V_\mu$ est quasi-compact; mais $U_\mu\cap V_\mu$ est réunion de $U\cap V_\mu$ et de $W_\mu\cap V_\mu$, qui sont tous deux quasi-compacts en vertu de l'hypothèse.

Théorème (6.9.7) *Soient* X *un schéma,* U *un ouvert de* X. *On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes*;

a) *L'espace sous-jacent à* X *est localement noethérien.*

b) X *est un schéma quasi-compact et quasi-séparé et* U *un ouvert quasi-compact.*

Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ et tout sous-$(\mathcal{O}_X|U)$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{F}|U$, *il existe alors un sous-$\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent* de type fini $\mathscr{G}'$ *de* $\mathscr{F}$ *tel que* $\mathscr{G}'|U=\mathscr{G}$.

Soit $(V_\lambda)_{\lambda\in L}$ un recouvrement de X par des ouverts affines, L étant supposé fini dans le cas b); L étant muni d'une structure d'ensemble bien ordonné, il suffit de vérifier que les conditions du lemme (6.9.6) sont satisfaites. C'est évident dans l'hypothèse a), les espaces V_λ étant noethériens. Dans l'hypothèse b), les $V_\lambda \cap V_\mu$ sont quasi-compacts (6.1.11), et comme L est fini, $V_\lambda \cap W_\lambda$ est quasi-compact. D'où le théorème.

Corollaire (6.9.8) *Sous les hypothèses de* (6.9.7), *pour tout $(\mathcal{O}_X|U)$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}$, il existe un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}'$ tel que $\mathscr{G}'|U=\mathscr{G}$.*

Il suffit d'appliquer (6.9.7) à $\mathscr{F}=j_*(\mathscr{G})$, qui est quasi-cohérent (6.9.2) et tel que $\mathscr{F}|U=\mathscr{G}$.

Corollaire (6.9.9) *Soit* X *un schéma dont l'espace sous-jacent est localement noethérien, ou un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Alors tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent est limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents de type fini.*

Cela résulte de (6.9.7) et de la remarque (6.9.4).

Proposition (6.9.10) *Soient* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini. Alors il existe un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{G}$ de présentation finie et un épimorphisme $u:\mathscr{G}\to\mathscr{F}$.*

Soit $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines, et soit $A_i=\Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)$; alors $\mathscr{F}|U_i=\tilde{M}_i$, où M_i est un A_i-module de type fini (1.4.3), donc M_i est quotient d'un A_i-module de la forme $A_i^{p_i}$, en d'autres termes (1.4.3), il existe un $\mathcal{O}_{U_i}$-Module $\mathscr{G}_i$ de présentation finie et un épimorphisme $u_i:\mathscr{G}_i\to\mathscr{F}|U_i$. Supposons qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{G}_i'$ de présentation finie, un isomorphisme $\theta_i:\mathscr{G}_i'|U_i\simeq\mathscr{G}_i$ et un homomorphisme $u_i':\mathscr{G}_i'\to\mathscr{F}$ tels que $u_i'|U_i=u_i\circ\theta_i$. Alors on répondra à la question en prenant pour $\mathscr{G}$ la *somme directe* $\bigoplus_i \mathscr{G}_i'$, et pour $u:\mathscr{G}\to\mathscr{F}$ l'homomorphisme qui coïncide avec u_i' dans $\mathscr{G}_i'$; comme la restriction de u_i' à U_i est déjà un épimorphisme, il en sera ainsi *a fortiori* de la restriction de u à U_i, et comme les U_i recouvrent X, u est un épimorphisme.

La proposition (6.9.10) sera donc conséquence du lemme suivant:

Lemme (6.9.10.1) *Soient* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé,* U *un ouvert quasi-compact de* X, *$\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, $\mathscr{G}$ un $\mathcal{O}_U$-Module quasi-cohérent de type fini* (resp. *de présentation finie*), *$u:\mathscr{G}\to\mathscr{F}|U$ un homomorphisme. Alors il existe un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{G}'$ de type fini* (resp. *de présentation finie*), *un isomorphisme $\theta:\mathscr{G}'|U\simeq\mathscr{G}$ et un homomorphisme $u':\mathscr{G}'\to\mathscr{F}$ tels que $u'|U=u\circ\theta$.*

Supposons d'abord seulement $\mathscr{G}$ de type fini, et considérons le sous-$\mathcal{O}_U$-Module $\mathscr{H}$ de $\mathscr{G}\times(\mathscr{F}|U)$, *graphe* de u, de sorte que si p est la restriction à $\mathscr{H}$ de la seconde projection de $\mathscr{G}\times(\mathscr{F}|U)$, on peut factoriser u en

$$\mathscr{G}\xrightarrow{v}\mathscr{H}\xrightarrow{p}\mathscr{F}|U,$$

où v est un isomorphisme; $\mathscr{H}$ est donc de type fini. Il existe un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}_1$ tel que $\mathscr{G}_1|U=\mathscr{G}$ (6.9.8), puis un sous-$\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{H}_1$ de $\mathscr{G}_1\times\mathscr{F}$, quasi-cohérent de type fini, tel que $\mathscr{H}_1|U=\mathscr{H}$. Si $p_1:\mathscr{H}_1\to\mathscr{F}$ est la restriction de la seconde projection de $\mathscr{G}_1\times\mathscr{F}$, il est clair que p_1 prolonge p; on répond donc à la question en prenant $\mathscr{G}'=\mathscr{H}_1$, $u'=p_1$ et $\theta=v^{-1}$.

Supposons maintenant que $\mathscr{G}$ soit de présentation finie, et soit $(V_j)_{1\leq j\leq m}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines; posons

$$W_j=\bigcup_{k\leq j}V_k,\qquad U_j=U\cup W_j;$$

on va définir par récurrence une suite finie $(\mathscr{G}'_j)$, où $\mathscr{G}'_j$ est un $\mathscr{O}_U$-Module de présentation finie, telle que $\mathscr{G}'_0=\mathscr{G}$, une suite d'isomorphismes $\theta_j:\mathscr{G}'_j|U_{j-1}\simeq\mathscr{G}'_{j-1}$ pour $j\geqslant 1$, et une suite d'homomorphismes $u'_j:\mathscr{G}'_j\to\mathscr{F}|U_j$ tels que $u'_0=u$ et $u'_j|U_{j-1}=u'_{j-1}\circ\theta_j$. Il suffira alors de prendre $\mathscr{G}'=\mathscr{G}'_m$, $u'=u'_m$ et

$$\theta=(\theta_1|U)\circ(\theta_2|U)\circ\cdots\circ(\theta_m|U)$$

pour satisfaire aux conditions du lemme.

Comme $U_j=U_{j-1}\cup V_j$, il suffit, pour chaque j, de définir un $\mathscr{O}_{V_j}$-Module de présentation finie $\mathscr{G}''_j$, un isomorphisme

$$\theta'_j:\mathscr{G}''_j|(U_{j-1}\cap V_j)\to\mathscr{G}'_{j-1}|(U_{j-1}\cap V_j)$$

et un homomorphisme $u''_j:\mathscr{G}''_j\to\mathscr{F}|V_j$ tels que l'on ait

$$u''_j|(U_{j-1}\cap V_j)=(u'_{j-1}|(U_{j-1}\cap V_j))\circ\theta'_j;$$

on définira alors $\mathscr{G}'_j$ par recollement de $\mathscr{G}'_{j-1}$ et de $\mathscr{G}''_j$ au moyen de θ'_j (**0**, 3.3.1), et la condition imposée à u''_j permettra de définir u'_j (**0**, 3.3.2). Comme X est quasi-séparé et les U_j des ouverts quasi-compacts, $U_{j-1}\cap V_j$ est encore quasi-compact (6.1.12), donc, remplaçant V_j par X et $U_{j-1}\cap V_j$ par U, on voit finalement qu'on est ramené à prouver le lemme lorsque X est *affine*, soit $X=\mathrm{Spec}(A)$. Alors, en vertu de la première partie de la démonstration, on peut déjà trouver un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{G}_1$ *de type fini*, un isomorphisme $\theta_1:\mathscr{G}_1|U\simeq\mathscr{G}$, et un homomorphisme $u_1:\mathscr{G}_1\to\mathscr{F}$ tels que $u_1|U=u\circ\theta_1$. On a ici $\mathscr{G}_1=\tilde{M}$, où M est un A-module de type fini (1.4.3), et qui peut donc s'écrire $M=L/R$, où L est un A-module libre de type fini et R un sous-module de L. L'hypothèse sur $\mathscr{G}$ signifie que $\tilde{R}|U$ est un $\mathscr{O}_U$-Module quasi-cohérent de type fini. Or, R est limite inductive de ses sous-modules R_λ de type fini, donc $\tilde{R}|U$ est limite inductive des $\tilde{R}_\lambda|U$; il résulte donc de (**0**, 5.2.3) qu'il existe un indice λ tel que $\tilde{R}_\lambda|U=\tilde{R}|U$. Le $\mathscr{O}_X$-Module $\tilde{L}/\tilde{R}_\lambda=\mathscr{G}'$ est alors de présentation finie, et $\mathscr{G}'|U$ est isomorphe à $\mathscr{G}$; et en composant u_1 avec l'homomorphisme canonique $\mathscr{G}'\to\mathscr{G}_1$ on obtient un homomorphisme $u':\mathscr{G}'\to\mathscr{F}$ tel que la restriction de u' à U, composée avec un isomorphisme de $\mathscr{G}'|U$ sur $\mathscr{G}$, redonne u.

Corollaire (6.9.11) *Soient* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé,* U *un ouvert quasi-compact de* X. *Pour tout $\mathscr{O}_U$-Module $\mathscr{F}$ de présentation finie, il existe un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}'$ de présentation finie tel que $\mathscr{F}'|U=\mathscr{F}$.*

Tout d'abord, en vertu de (6.9.8), il existe un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{F}_1$ tel que $\mathscr{F}_1|U=\mathscr{F}$. D'autre part, par (6.9.10), on peut écrire, à isomorphisme près, $\mathscr{F}_1=\mathscr{G}/\mathscr{H}$, où $\mathscr{G}$ est de présentation finie; et en vertu de (6.9.9), $\mathscr{H}$ est limite inductive de ses sous-Modules $\mathscr{H}_\lambda$ de type fini; par suite $\mathscr{H}|U$ est limite inductive des $\mathscr{H}_\lambda|U$. Mais $\mathscr{F}=(\mathscr{G}|U)/(\mathscr{H}|U)$ et $\mathscr{H}|U$ est par hypothèse de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8, lemme 9); donc il existe un λ tel que $\mathscr{H}_\lambda|U=\mathscr{H}|U$ (**0**, 5.2.3). Alors $\mathscr{F}'=\mathscr{G}/\mathscr{H}$ est de présentation finie et on a $\mathscr{F}'|U=\mathscr{F}$.

Corollaire (6.9.12) *Soit* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Alors tout $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent est isomorphe à une limite inductive filtrante de $\mathscr{O}_X$-Modules de présentation finie.*

On sait déjà (6.9.9) qu'un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ est limite inductive filtrante de ses sous-Modules quasi-cohérents $\mathscr{F}_\lambda$ de type fini ($\lambda \in L$, ensemble ordonné filtrant d'indices). On peut d'autre part écrire, en vertu de (6.9.10), $\mathscr{F}_\lambda = \mathscr{R}_\lambda/\mathscr{N}_\lambda$, où $\mathscr{R}_\lambda$ est un $\mathcal{O}_X$-Module de présentation finie. Pour toute partie finie J de L, posons

$$\mathscr{R}_J = \bigoplus_{\lambda \in J} \mathscr{R}_\lambda, \qquad \mathscr{N}_J = \bigoplus_{\lambda \in J} \mathscr{N}_\lambda,$$

de sorte que $\mathscr{R}_J/\mathscr{N}_J$ est isomorphe à la somme directe des $\mathscr{F}_\lambda$ pour $\lambda \in J$, et par suite il y a un homomorphisme canonique de $\mathscr{R}_J$ sur la *somme* $\mathscr{F}_J$ des sous-Modules $\mathscr{F}_\lambda$ pour $\lambda \in J$; notons $\mathscr{M}_J$ son noyau, qui, en vertu de (6.9.9), est limite inductive filtrante de ses sous-Modules quasi-cohérents de type fini. Considérons l'ensemble des couples $\alpha = (J, \mathscr{R}_J)$, où J parcourt l'ensemble des parties finies de L et pour chaque J, $\mathscr{R}_J$ parcourt l'ensemble des sous-$\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents de type fini de $\mathscr{M}_J$. On ordonne cet ensemble en posant $(J, \mathscr{R}_J) \leqslant (J', \mathscr{R}_{J'})$ si l'on a $J \subset J'$ et si, en notant $u_{J',J} : \mathscr{R}_J \to \mathscr{R}_{J'}$ l'homomorphisme canonique, on a $u_{J',J}(\mathscr{R}_J) \subset \mathscr{R}_{J'}$. Il est immédiat que l'on a ainsi une relation d'ordre; en outre cette relation est *filtrante*, car si $(J, \mathscr{R}_J)$ et $(J', \mathscr{R}_{J'})$ sont quelconques, on considère $J'' = J \cup J'$ et $\mathscr{R}_{J''}$ somme des images $u_{J'',J}(\mathscr{R}_J)$ et $u_{J'',J'}(\mathscr{R}_{J'})$ dans $\mathscr{R}_{J''}$; il est clair que $(J'', \mathscr{R}_{J''})$ est un majorant de $(J, \mathscr{R}_J)$ et de $(J', \mathscr{R}_{J'})$. Pour tout $\alpha = (J, \mathscr{R}_J)$, soit alors $\mathscr{G}_\alpha = \mathscr{R}_J/\mathscr{R}_J$ qui est de présentation finie; si $\alpha \leqslant \beta = (J', \mathscr{R}_{J'})$, on a $u_{J',J}(\mathscr{R}_J) \subset \mathscr{R}_{J'}$ et on note $v_{\beta\alpha} : \mathscr{G}_\alpha \to \mathscr{G}_\beta$ l'homomorphisme obtenu à partir de $u_{J',J}$ par passage aux quotients. Il est immédiat que $(\mathscr{G}_\alpha, v_{\beta\alpha})$ est un système inductif de $\mathcal{O}_X$-Modules; montrons que sa limite inductive $\mathscr{F}'$ est isomorphe à $\mathscr{F}$. Pour cela, soit $w_\alpha : \mathscr{G}_\alpha \to \mathscr{F}'$ l'homomorphisme déduit de l'homomorphisme $u_J : \mathscr{R}_J \to \mathscr{F}$ par passage au quotient; les w_α forment un système inductif, de limite $w' : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$, et il s'agit de prouver que w' est un isomorphisme. Mais on peut alors supposer X affine, et la fin du raisonnement est la même que dans (**0**, 6.3.1.4).

Proposition (6.9.13) *Soit* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé.*

(i) *Pour toute $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente de type fini $\mathscr{B}$, il existe un sous-$\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{E}$ de $\mathscr{B}$ tel que $\mathscr{E}$ engendre* (**0**, 4.1.3) *la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathscr{B}$.*

(ii) *Pour tout Idéal de type fini $\mathscr{J}$ dans une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$, il existe un sous-$\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{E}$ de $\mathscr{J}$ tel que $\mathscr{E}$ engendre l'Idéal $\mathscr{J}$.*

(i) Il existe par hypothèse un recouvrement ouvert fini (U_i) de X formé d'ouverts affines tels que $\Gamma(U_i, \mathscr{B}) = B_i$ soit une algèbre de type fini sur $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = A_i$; soit E_i un sous-A_i-module de type fini de B_i engendrant la A_i-algèbre B_i; en vertu de (6.9.7), il existe un sous-$\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{E}_i$ de $\mathscr{B}$, quasi-cohérent et de type fini, tel que $\mathscr{E}_i|U_i = \tilde{E}_i$. Il est clair que le $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{E}$ somme des $\mathscr{E}_i$ répond à la question.

(ii) Avec les mêmes notations, $\Gamma(U_i, \mathscr{J}) = \mathfrak{J}_i$ est un idéal de type fini de B_i, donc engendré par un nombre fini d'éléments, et si E_i est le A_i-module engendré par ces éléments, *a fortiori* E_i engendre l'idéal $\mathfrak{J}_i$; définissant $\mathscr{E}_i$ et $\mathscr{E}$ comme dans (i), on obtient aussitôt la conclusion.

Proposition (6.9.14) *Sous les hypothèses de* (6.9.7):

(i) *Pour toute $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$ et toute sous-$\mathcal{O}_U$-Algèbre quasi-cohérente de type fini $\mathscr{C}$ de $\mathscr{B}|U$* (resp. *tout Idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{B}|U$*), *il existe une sous-$\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente de type fini $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{B}$* (resp. *un Idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}'$ de $\mathscr{B}$*), *telle que $\mathscr{C}'|U = \mathscr{C}$* (resp. $\mathscr{J}'|U = \mathscr{J}$).

(ii) *Pour toute $\mathcal{O}_U$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{C}$ de type fini, il existe une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente de type fini $\mathscr{C}'$ telle que $\mathscr{C}'|U = \mathscr{C}$.*

(i) Il suffit de reprendre les raisonnements de (6.9.6) et (6.9.7) en remplaçant sous-Module par sous-Algèbre (resp. Idéal); on est ainsi ramené au cas où X est affine et U quasi-compact. Mais alors, en vertu de (6.9.13), il existe un sous-$\mathcal{O}_U$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{J}$) qui engendre la $\mathcal{O}_U$-Algèbre $\mathscr{C}$ (resp. le $(\mathscr{B}|U)$-Idéal $\mathscr{J}$). Alors, par (6.9.7), il existe un sous-$\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{B}$, quasi-cohérent et de type fini et tel que $\mathscr{E}'|U=\mathscr{E}$; il suffit de prendre pour $\mathscr{C}'$ (resp. $\mathscr{J}'$) la sous-$\mathcal{O}_X$-Algèbre de $\mathscr{B}$ (resp. l'Idéal de $\mathscr{B}$) engendré par $\mathscr{E}'$.

(ii) On raisonne comme dans (6.9.8) en remplacant $j_*(\mathscr{G})$ par $j_*(\mathscr{C})$.

Corollaire (6.9.15) *Soit* X *un schéma dont l'espace sous-jacent est localement noethérien, ou un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Alors toute $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$* (resp. *tout Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{B}$) est limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_X$-Algèbres de type fini* (resp. *des Idéaux quasi-cohérents de type fini contenus dans $\mathscr{J}$*).

En effet, il résulte de (6.9.9) que $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{J}$) est limite inductive (en tant que $\mathcal{O}_X$-Module) de ses sous-$\mathcal{O}_X$-*Modules* quasi-cohérents de type fini; ces derniers engendrent des sous-$\mathcal{O}_X$-*Algèbres* quasi-cohérentes (resp. des *Idéaux quasi-cohérents*) de type fini (1.3.14), dont $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{J}$) est *a fortiori* limite inductive.

Proposition (6.9.16) *Soit* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé.*

(i) *Pour toute $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente de type fini $\mathscr{B}$, il existe une $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathscr{A}$ de présentation finie et un épimorphisme $u:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$.*

(ii) *Soit* U *un ouvert quasi-compact de* X. *Pour toute $\mathcal{O}_U$-Algèbre $\mathscr{B}$ de présentation finie, il existe une $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathscr{B}'$ de présentation finie telle que $\mathscr{B}'|U\cong\mathscr{B}$.*

(iii) *Toute $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente est isomorphe à une limite inductive filtrante de $\mathcal{O}_X$-Algèbres de présentation finie.*

Il suffit de calquer les démonstrations sur celles de (6.9.10), (6.9.11) et (6.9.12) en remplaçant Modules par Algèbres. De façon plus précise, pour (i), on remplace les sommes directes de Modules par des produits tensoriels d'Algèbres; on est ramené à prouver l'analogue du lemme (6.9.10.1) pour les Algèbres, et on peut appliquer la même méthode, le graphe d'un homomorphisme d'Algèbres étant une sous-Algèbre de leur produit; on utilise alors (6.9.14,(ii)) au lieu de (6.9.8). On est finalement ramené au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, U un ouvert quasi-compact de X, $\mathscr{B}$ une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente; on a un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-Algèbres $u:\mathscr{C}\to\mathscr{B}|U$, où $\mathscr{C}$ est une $\mathcal{O}_U$-Algèbre de présentation finie, et il s'agit de trouver une $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathscr{C}'$ de présentation finie telle que $\mathscr{C}'|U=\mathscr{C}$, et un homomorphisme $u':\mathscr{C}'\to\mathscr{B}$ prolongeant u. On commence par considérer une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente de type fini $\mathscr{C}_1$ telle que $\mathscr{C}_1|U=\mathscr{C}$ (6.9.14) et un homomorphisme $u_1:\mathscr{C}_1\to\mathscr{B}$ qui prolonge u. On a alors $\mathscr{C}_1=\tilde{\mathrm{R}}$, où R est une A-algèbre de type fini ((2.2.5) et (6.2.5)), et on peut écrire $\mathrm{R}=\mathrm{P}/\mathfrak{J}$, où $\mathrm{P}=\mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_r]$ est une algèbre de polynômes et $\mathfrak{J}$ un idéal de P. L'hypothèse signifie que $\tilde{\mathfrak{J}}|U$ est un $(\tilde{\mathrm{P}}|U)$-Idéal de type fini (6.2.7). Comme $\mathfrak{J}$ est limite inductive des idéaux $\mathfrak{J}_\lambda\subset\mathfrak{J}$ de type fini de P, $\tilde{\mathfrak{J}}|U$ est limite inductive des $\tilde{\mathfrak{J}}_\lambda|U$, et on applique cette fois (**0**, 5.2.3) à l'espace annelé $(U,\tilde{\mathrm{P}}|U)$ pour montrer qu'il existe un indice λ tel que $\tilde{\mathfrak{J}}_\lambda|U=\tilde{\mathfrak{J}}|U$. On termine le raisonnement en considérant la $\mathcal{O}_X$-Algèbre de présentation finie $\tilde{\mathrm{P}}/\tilde{\mathrm{J}}_\lambda=\mathscr{C}_2$ et en composant u_1 avec l'homomorphisme canonique $\mathscr{C}_2\to\mathscr{C}_1$.

Pour prouver (ii), on raisonne comme dans (6.9.11), en remplaçant respectivement (6.9.8), (6.9.9) et (6.9.10) par (6.9.14,(ii)), (6.9.16,(i)) et (6.9.15).

Enfin, pour (iii), on écrit une Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$ comme limite inductive de ses sous-Algèbres quasi-cohérentes de type fini $\mathscr{B}_\lambda$ (6.9.15), puis on écrit $\mathscr{B}_\lambda=\mathscr{R}_\lambda/\mathscr{J}_\lambda$ en utilisant (6.9.16,(i)), $\mathscr{R}_\lambda$ étant une $\mathcal{O}_X$-Algèbre de présentation finie.

Il faut alors calquer la démonstration sur celle de (6.9.12), en prenant ici pour $\mathscr{R}_\lambda$ le *produit tensoriel* $\bigotimes_{\lambda\in J}\mathscr{R}_\lambda$.

Proposition (6.9.17) *Soient* X *un schéma noethérien,* $\mathscr{J}$ *un Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X$, Y *le sous-schéma fermé de* X *défini par* $\mathscr{J}$, U *l'ouvert* X−Y. *Soient* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_U$*-Module* cohérent, $\mathscr{G}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* $\mathscr{F}'$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module* cohérent *tel que* $\mathscr{F}'|U=\mathscr{F}$ (6.9.8). *On a alors une bijection canonique*

$$\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n\mathscr{F}',\mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F},\mathscr{G}|U). \tag{6.9.17.1}$$

L'application canonique (6.9.17.1) se définit de façon naturelle: comme $\mathscr{J}^{n+1}\mathscr{F}'\subset\mathscr{J}^n\mathscr{F}'$, les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n\mathscr{F}',\mathscr{G})$ forment un système inductif pour les applications de restriction d'un homomorphisme de $\mathscr{J}^n\mathscr{F}'$ dans $\mathscr{G}$ à $\mathscr{J}^{n+1}\mathscr{F}'$. Un élément du premier membre de (6.9.17.1) est donc l'image canonique d'un homomorphisme $f':\mathscr{J}^n\mathscr{F}'\to\mathscr{G}$ pour un n assez grand, et son image dans le second membre est la restriction $f'|U$, qui est bien un homomorphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}|U$ (car $\mathscr{J}^n|U=\mathscr{O}_U$ par définition de U pour tout n) et ne dépend pas du représentant f' choisi.

Montrons d'abord que l'application (6.9.17.1) est *injective*. En effet, avec les notations précédentes, supposons que $f'|U=0$; alors l'image $f'(\mathscr{J}^n\mathscr{F}')\subset\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini, dont le support est contenu dans Y. En vertu de (6.8.4), il existe un entier $p>0$ tel que $\mathscr{J}^pf'(\mathscr{J}^n\mathscr{F}')=0$, autrement dit la restriction de f' à $\mathscr{J}^{n+p}\mathscr{F}'$ est nulle, donc aussi l'image de f' dans $\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n\mathscr{F}',\mathscr{G})$.

Pour prouver que l'application (6.9.17.1) est *surjective*, considérons d'abord le cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est *affine*, de sorte que $\mathscr{J}=\tilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de l'anneau noethérien A, $\mathscr{F}'=\tilde{M}'$, où M' est un A-module de type fini et $\mathscr{G}=\tilde{N}$, où N est un A-module. Soient $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ un système générateur de $\mathfrak{J}$, $(s_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ un système générateur de M'. Soit $f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}|U$ un $\mathscr{O}_U$-homomorphisme, et considérons les sections $t_j=f(s_j|U)$ de $\mathscr{G}$ au-dessus de U. Nous allons d'abord prouver qu'il existe un entier $h>0$ tel que chacune des sections $g_i^ht_j$ *se prolonge* en une section u_{ij} de $\mathscr{G}$ au-dessus de X. En effet (1.4.1) il existe un entier k tel que la section $g_i^kt_j|D(g_i)$ de $\mathscr{G}$ au-dessus de $D(g_i)$ se prolonge en une section v_{ij} de $\mathscr{G}$ au-dessus de X ($1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$). Pour tout indice $l\neq i$, la section $(g_i^kt_j-v_{ij})|D(g_l)$ au-dessus de $D(g_l)$ s'annule dans $D(g_i)\cap D(g_l)$; il résulte donc encore de (1.4.1), appliqué au schéma affine induit $D(g_l)$, qu'il y a un entier $r>0$ tel que $g_l^{k+r}t_j-g_l^rv_{ij}$ soit nulle dans *chacun* des $D(g_i)$, donc dans U, et $h=k+r$ et $u_{ij}=g_i^rv_{ij}$ répondent donc à la question. Si $\mathfrak{J}_1$ est l'idéal engendré par les g_i^h, on a $\mathfrak{J}^{mh}\subset\mathfrak{J}_1\subset\mathfrak{J}$, donc on peut désormais supposer $h=1$.

Les éléments g_is_i engendrent le A-module $\mathfrak{J}^mM'$ et définissent donc un épimorphisme $p:A^{mn}\to\mathfrak{J}^mM'$ tel que $p(e_{ij})=g_is_j$, où (e_{ij}) est la base canonique de A^{mn}; soit $R=\mathrm{Ker}(p)$ son noyau, qui est un A-module de type fini, puisque A est noethérien. Soit d'autre part $q:A^{mn}\to N$ l'homomorphisme tel que $q(e_{ij})=u_{ij}$, et soit $S=\mathrm{Ker}(q)$ son noyau. Par définition, on a $(\tilde{q}|U)(e_{ij}|U)=f((\tilde{p}|U)(e_{ij}|U))$, autrement dit $\tilde{q}|U=f\circ(\tilde{p}|U)$, donc, en posant $\mathscr{R}=\tilde{R}$, $\mathscr{S}=\tilde{S}$, on a $\mathscr{R}|U\subset\mathscr{S}|U$. Cela s'exprime encore en disant que le $\mathscr{O}_X$-Module de type fini $\mathscr{R}/(\mathscr{R}\cap\mathscr{S})$ *a son support dans* Y. Alors (6.8.4), il y a un entier v tel que $\mathscr{J}^v(\mathscr{R}/(\mathscr{R}\cap\mathscr{S}))=0$, autrement dit $\mathfrak{J}^vR\subset S$.

Cela étant, montrons qu'il existe un entier $\mu>0$ tel que, en faisant correspondre à un élément ag_is_j de $\mathfrak{J}^{\mu+m}M'$ l'élément au_{ij} de N, on définit par linéarité un A-homomorphisme $\tilde{f}:\mathfrak{J}^{\mu+m}M'\to N$ tel que la restriction de $\tilde{\tilde{f}}:\mathscr{J}^{\mu+m}\mathscr{F}'\to\mathscr{G}$ à U soit l'homomorphisme $f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}|U$ donné. Comme $\mathfrak{J}^{\mu+m}M'=\mathfrak{J}^\mu A^{mn}/(\mathfrak{J}^\mu A^{mn}\cap R)$, il suffit de prouver que pour μ assez grand on a $\mathfrak{J}^\mu A^{mn}\cap R\subset S$. Mais en vertu du

lemme d'Artin-Rees (A étant noethérien) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 1, cor. 1 du th. 1), il existe un entier $\lambda > 0$ tel que $\mathfrak{J}^{\lambda+\alpha}A^{mn} \cap R = \mathfrak{J}(\mathfrak{J}^{\lambda+\alpha-1}A^{mn} \cap R)$, pour $\alpha > 0$, d'où en particulier $\mathfrak{J}^{\lambda+\nu}A^{mn} \cap R \subset \mathfrak{J}^{\nu}(\mathfrak{J}^{\lambda}A^{mn} \cap R) \subset \mathfrak{J}^{\nu}R \subset S$; la proposition est donc démontrée dans ce cas.

Prouvons maintenant la surjectivité de (6.9.17.1) lorsque X est un schéma noethérien quelconque; soit (V_i) un recouvrement fini de X par des ouverts affines, et pour chaque couple (i, j), soit (V_{ijk}) un recouvrement fini de $V_i \cap V_j$ par des ouverts affines. On a alors (**0**, 3.1.1) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_U(\mathscr{F},\mathscr{G}|U) & \longrightarrow & \prod_i \mathrm{Hom}_{U\cap V_i}(\mathscr{F},\mathscr{G}|U) & \rightrightarrows & \prod_{i,j,k} \mathrm{Hom}_{U\cap V_{ijk}}(\mathscr{F},\mathscr{G}|U) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\varinjlim_n \mathrm{Hom}_U(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) & \to & \prod_i \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{V_i}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) & \rightrightarrows & \prod_{i,j,k} \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{V_{ijk}}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G})
\end{array}$$

où l'on a écrit pour simplifier $\mathrm{Hom}_W(\mathscr{M},\mathscr{N})$ au lieu de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_W}(\mathscr{M}|W, \mathscr{N}|W)$ pour deux faisceaux $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ et un ouvert W, les flèches verticales étant les applications (6.9.17.1) correspondantes. Dans ce diagramme, la première ligne est exacte (**0**, 1.4.2) par définition et la seconde résulte de ce que le foncteur $\varinjlim$ commute aux produits finis dans la catégorie des ensembles. Comme les deux flèches verticales de droite sont des bijections d'après ce qui a été vu précédemment, il en est de même de la flèche verticale de gauche. CQFD.

6.10. Image schématique d'un schéma. Adhérence schématique d'un sous-schéma

Définition (6.10.1) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme de schémas. S'il existe un plus petit sous-schéma fermé* Y′ *de* Y *tel que l'injection canonique* $j: Y' \to Y$ *majore* f (ou, ce qui revient au même, tel que le sous-schéma $f^{-1}(Y')$ de X soit *égal à* X) *on dit que* Y′ *est le sous-schéma fermé de* Y image schématique *de* X *par* f.

Définition (6.10.2) *Soit* X *un sous-schéma d'un schéma* Y. *S'il existe un plus petit sous-schéma fermé* Y′ *de* Y *majorant* X, *on dit que* Y′ *est* l'adhérence schématique *de* X.

L'adhérence schématique du sous-schéma X de Y (lorsqu'elle existe) est donc l'image schématique de X par l'injection canonique $j: X \to Y$.

Proposition (6.10.3) (transitivité des images schématiques) *Soient* $f: X \to Y$ *et* $g: Y \to Z$ *deux morphismes; on suppose que l'image schématique* Y′ *de* X *par* f *existe et que, si* g' *est la restriction de* g *à* Y′, *l'image schématique* Z′ *de* Y′ *par* g' *existe. Alors l'image schématique de* X *par* $g \circ f$ *existe et est égale à* Z′.

Dire qu'un sous-schéma fermé Z_1 de Z est tel que $(g \circ f)^{-1}(Z_1) = X$ signifie que $f^{-1}(g^{-1}(Z_1)) = X$, ou encore que f est majoré par l'injection canonique $g^{-1}(Z_1) \to Y$. Or, en vertu de l'existence de l'image schématique Y′, un sous-schéma fermé Z_1 de Z ayant cette propriété est tel que $g^{-1}(Z_1)$ majore Y′, ce qui, en désignant par j l'injection canonique $Y' \to Y$, revient à dire que $j^{-1}(g^{-1}(Z_1)) = g'^{-1}(Z_1) = Y'$. On conclut de la définition de Z′ que Z′ est le plus petit des sous-schémas fermés Z_1 ayant cette dernière propriété, d'où la conclusion.

(6.10.4) Avec les notations de (6.10.1), posons $f = (\psi, \theta)$, et supposons que l'image schématique Y′ existe; elle est donc définie par un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}'$ de $\mathscr{O}_Y$, et par définition, $\mathscr{J}'$ est *le plus grand Idéal quasi-cohérent tel que l'homomorphisme* $\theta: \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ *se factorise en* $\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y/\mathscr{J}' \to f_*(\mathscr{O}_X)$. Ceci implique bien

entendu que $\mathscr{J}' \subset \mathrm{Ker}(\theta) = \mathscr{J}$; on a donc aussitôt un cas où Y′ existe, celui où $\mathscr{J}$ *est quasi-cohérent*, et où alors $\mathscr{J}' = \mathscr{J}$.

Les critères les plus applicables d'existence de l'image schématique sont les suivants:

Proposition (6.10.5) *L'image schématique* Y′ *de* X *par un morphisme* $f: X \to Y$ *existe dans les deux cas suivants*:

1° $f_*(\mathscr{O}_X)$ *est un* $\mathscr{O}_Y$*-Module quasi-cohérent* (ce qui est le cas lorsque f est *quasi-compact et quasi-séparé* (6.7.1)).

2° X *est réduit.*

Dans les deux cas, Y′ *a pour espace sous-jacent l'adhérence* $\overline{f(X)}$, *et si* f *se factorise en*

$$X \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{j} Y,$$

où j *est l'injection canonique,* g *est schématiquement dominant* (5.4.2). *En outre, si* X *est réduit* (resp. *intègre*), *il en est de même de* Y′.

Le cas 1° est une conséquence immédiate de (6.10.4) et de (2.2.2, (ii)); en outre, comme $\mathscr{O}_Y/\mathscr{J} \to f_*(\mathscr{O}_X)$ est alors injectif, cela montre que g est schématiquement dominant. Le cas 2° résulte de (4.6.2), car il y a un plus petit sous-schéma fermé Z tel que $f(X) \subset Z$, savoir le sous-schéma réduit de Y ayant $\overline{f(X)}$ pour espace sous-jacent.

Corollaire (6.10.6) *Soient* X *un sous-schéma d'un schéma* Y, $j: X \to Y$ *l'injection canonique. L'adhérence schématique* Y′ *de* X *dans* Y *existe dans les deux cas suivants*:

1° $j_*(\mathscr{O}_X)$ *est un* $\mathscr{O}_Y$*-Module quasi-cohérent* (ce qui est le cas si le morphisme j est *quasi-compact*).

2° X *est réduit.*

Dans les deux cas, Y′ *a pour espace sous-jacent* $\overline{X}$ *et* X *est schématiquement dense dans* Y′; *si* X *est réduit* (resp. *intègre*), *il en est de même de* Y′.

Il suffit de faire $f = j$ dans (6.10.5).

Proposition (6.10.7) *Supposons vérifiée l'une des deux hypothèses de* (6.10.5). *Pour tout ouvert* V *de* Y, *soit* $f_V: f^{-1}(V) \to V$ *la restriction de* f; *alors l'image schématique de* $f^{-1}(V)$ *par* f_V *existe et est égale au sous-schéma* $\inf(V, Y')$ *de* Y *induit par* Y′ *sur l'ouvert* $V \cap Y'$ *de* Y′.

Posons $X' = f^{-1}(V)$ pour simplifier; l'adhérence de $f_V(X')$ dans V est égale à $\overline{f(X)} \cap V$, ce qui prouve déjà la proposition lorsque X est réduit. D'autre part, $(f_V)_*(\mathscr{O}_{X'})$ n'est autre que la restriction de $f_*(\mathscr{O}_X)$ à V, et le noyau $\mathscr{J}_V$ de l'homomorphisme $\mathscr{O}_Y \to (f_V)_*(\mathscr{O}_{X'})$ est la restriction à V du noyau de $\mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$, ce qui prouve la proposition dans le cas 1° de (6.10.5).

Ce résultat s'interprète en disant que, sous les conditions de (6.10.5), la formation de l'image schématique commute à une extension $Y_1 \to Y$ du schéma de base, qui est une *immersion ouverte*. Nous verrons au chap. IV qu'il en est de même lorsque $Y_1 \to Y$ est un morphisme *plat*, pourvu que f soit quasi-compact et quasi-séparé (IV*, 11.10.5).

6.11. Morphismes quasi-finis

Proposition (6.11.1) *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de type fini,* x *un point de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Le point* x *est isolé dans sa fibre* $f^{-1}(f(x))$.

b) *L'anneau* $\mathscr{O}_{X,x}$ *est un* $\mathscr{O}_{Y,f(x)}$*-module quasi-fini* (**0**, 7.4.1).

La question étant évidemment locale sur X et sur Y, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, A étant une B-algèbre de type fini (6.2.5). En outre, on peut remplacer X par $X \times_Y \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,f(x)})$ sans changer la fibre $f^{-1}(f(x))$, ni l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ (3.4.4); on peut donc supposer que $B = \mathscr{O}_{Y,f(x)}$ est un anneau local; si $\mathfrak{n}$ est son idéal maximal, $f^{-1}(f(x))$ est alors un schéma affine d'anneau $A/\mathfrak{n}A$, de type fini sur $\kappa(f(x)) = B/\mathfrak{n}$. Cela étant, si a) est vérifiée, on peut en outre supposer que $f^{-1}(f(x))$ est réduite au point x; donc $A/\mathfrak{n}A$ est de rang fini sur le corps $B/\mathfrak{n}$ (6.5.5), et $A/\mathfrak{n}A$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{n}\mathscr{O}_{X,x}$ (3.4.6), donc $\mathscr{O}_{X,x}$ est un B-module quasi-fini. Inversement, s'il en est ainsi, $f^{-1}(f(x))$ est un schéma affine artinien, donc discret (2.8.2). Par suite x est isolé dans sa fibre, et cela montre que b) entraîne a).

Corollaire (6.11.2) *Soit $f: X \to Y$ un morphisme de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Tout point $x \in X$ est isolé dans sa fibre $f^{-1}(f(x))$* (autrement dit le sous-espace $f^{-1}(f(x))$ est *discret*).

b) *Pour tout $x \in X$, le schéma $f^{-1}(f(x))$ est fini sur le corps $\kappa(f(x))$* (6.5.6).

c) *Pour tout $x \in X$, l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est un $\mathscr{O}_{Y,f(x)}$-module quasi-fini.*

L'équivalence de a) et c) résulte de (6.11.1). D'autre part, comme $f^{-1}(f(x))$ est un $\kappa(f(x))$-schéma algébrique (6.5.1), l'équivalence de a) et b) résulte de (6.5.4).

Définition (6.11.3) *Lorsque $f: X \to Y$ est un morphisme de type fini vérifiant les conditions équivalentes de* (6.11.2), *on dit que f est quasi-fini, ou que X est quasi-fini sur Y. On dit qu'un morphisme $f: X \to Y$ est quasi-fini en un point $x \in X$ s'il existe un voisinage ouvert affine V de $y = f(x)$ et un voisinage ouvert affine U de x tels que $f(U) \subset V$, et que le morphisme $U \to V$, restriction de f, soit quasi-fini. On dit qu'un morphisme $f: X \to Y$ est localement quasi-fini* (ou que X est *localement quasi-fini sur* Y) *s'il est quasi-fini en tout point de* X.

Remarques **(6.11.4)** (i) On verra plus loin que si f est localement de type fini, il *suffit* que x soit isolé dans sa fibre pour que f soit quasi-fini au point x (**IV***, 13.1.4).

(ii) La notion de morphisme quasi-fini en un point n'est pas exclusivement de nature topologique: si K est un corps extension d'un corps k, le morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$ n'est quasi-fini que si K est de rang fini sur k, bien qu'il s'agisse de schémas réduits chacun à un point.

(iii) Soient $f: X \to Y$, X' un sous-schéma de X. On dit que X' est une *quasi-section* de f si la restriction de f à X' est un morphisme localement quasi-fini et surjectif.

Proposition (6.11.5) (i) *Une immersion quasi-compacte* (resp. *une immersion*) *$j: X \to Y$ est un morphisme quasi-fini* (resp. *localement quasi-fini*).

(ii) *Si $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ sont des morphismes quasi-finis* (resp. *localement quasi-finis*), *$g \circ f$ est quasi-fini* (resp. *localement quasi-fini*).

(iii) *Si* X *et* Y *sont des* S*-schémas, $f: X \to Y$ un* S*-morphisme quasi-fini* (resp. *localement quasi-fini*), *alors $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ est quasi-fini* (resp. *localement quasi-fini*) *pour toute extension $g: S' \to S$ de la base.*

(iv) *Si $f: X \to Y$ et $g: X' \to Y'$ sont deux* S*-morphismes quasi-finis* (resp. *localement quasi-finis*), *$f \times_S g: X \times_S X' \to Y \times_S Y'$ est quasi-fini* (resp. *localement quasi-fini*).

(v) *Soient $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit quasi-fini; si en outre g est quasi-séparé ou si X est noethérien, f est quasi-fini. Si $g \circ f$ est localement quasi-fini, il est de même de f.*

(vi) *Si f est quasi-fini* (resp. *localement quasi-fini*), *il en est de même de f_{red}.*

Compte tenu de (5.1.7), il suffit de considérer le cas des morphismes quasi-finis.

Pour une immersion $f:X\to Y$, la fibre de tout point x est réduite à ce point, donc f est quasi-finie si et seulement si elle est de type fini, et on sait que cela équivaut à dire qu'elle est quasi-compacte (6.3.4).

Pour prouver (ii), on remarque d'abord que $h=g\circ f$ est de type fini (6.3.4); en outre, si $z=h(x)$ et $y=f(x)$, y est isolé dans $g^{-1}(z)$, donc il existe un voisinage ouvert V de y dans Y ne contenant aucun point de $g^{-1}(z)$ distinct de y; $f^{-1}(V)$ est donc un voisinage ouvert de x ne rencontrant aucune fibre $f^{-1}(y')$, où $y'\neq y$ appartient à $g^{-1}(z)$; comme x est isolé dans $f^{-1}(y)$, il est isolé dans $h^{-1}(z)=f^{-1}(g^{-1}(z))$.

Pour prouver (iii), on peut se limiter au cas où $Y=S$ (**0**, 1.3.4); on remarque encore tout d'abord que $f'=f_{(S')}$ est de type fini (6.3.4); d'autre part, si $x'\in X'=X_{(S')}$ et si l'on pose $y'=f'(x')$ et $y=g(y')$, $f'^{-1}(y')$ s'identifie à $f^{-1}(y)\otimes_{\kappa(y)}\kappa(y')$ (3.4.9); comme $f^{-1}(y)$ est de rang fini sur $\kappa(y)$, $f'^{-1}(y')$ est de rang fini sur $\kappa(y')$ (6.5.7), d'où la conclusion.

Les assertions (iv) et (vi) se déduisent de (i), (ii) et (iii) par la méthode générale ((**0**, 1.3.9) et (5.2.7)).

Quant à (v), les hypothèses entraînent déjà que f est de type fini (6.3.4); d'autre part, si x est isolé dans $f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))))$, il l'est *a fortiori* dans $f^{-1}(f(x))$ ce qui prouve (v).

Remarque **(6.11.6)** Au chap. II, nous définirons la «condition de finitude» la plus stricte pour un morphisme $f:X\to Y$, la notion de morphisme *fini*, qui, lorsqu'il s'agit de schémas affines $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(B)$, correspond au fait que A est une B-algèbre *finie*. Nous prouverons alors qu'un morphisme fini est quasi-fini (d'où la terminologie), mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple d'une immersion ouverte quasi-compacte $D(s)\to\mathrm{Spec}(A)$ pour un $s\in A$ (puisque A_s n'est pas en général une A-algèbre finie). Pour les morphismes *séparés*, on verra que le composé d'une immersion ouverte quasi-compacte et d'un morphisme fini donne en fait les morphismes quasi-finis les plus généraux lorsque Y est quasi-compact et quasi-séparé («main theorem» de Zariski, **IV***, 18.12.13; on peut en fait y supprimer l'hypothèse que Y est quasi-séparé); on prouvera aussi qu'un morphisme propre et quasi-fini est fini (**IV***, 18.12.4). Mais la condition de séparation est essentielle dans ces résultats, comme le prouve l'exemple du morphisme quasi-fini $f:X\to\mathrm{Spec}(K[s])$ défini dans (5.3.11).

§ 7. Ensembles constructibles dans les schémas

7.1. Morphismes de présentation finie et ensembles constructibles

(7.1.1) Soit X un schéma; on sait que tout ouvert quasi-compact dans X est réunion finie d'ouverts affines, et réciproquement. Pour qu'un ouvert U de X soit *rétrocompact* dans X (**0**, 2.3.1), il faut et il suffit donc que pour tout *ouvert affine* V de X, $U\cap V$ soit quasi-compact. Lorsque X est *quasi-séparé* (6.1.3), tout ouvert quasi-compact dans X est rétrocompact dans X (6.1.12), donc toute partie constructible de X est rétrocompacte dans X (**0**, 2.3.12); si *de plus* X est *quasi-compact*, il y a

identité entre parties constructibles et parties globalement constructibles (**0**, 2.3.11), et entre parties ouvertes globalement constructibles et parties ouvertes quasi-compactes (**0**, 2.3.5).

Proposition (7.1.2) *Soient* X, Y *deux schémas,* $f: X \to Y$ *un morphisme. Pour toute partie globalement constructible* (resp. *constructible,* resp. *ouverte et rétrocompacte*) Z *de* Y, $f^{-1}(Z)$ *est une partie globalement constructible* (resp. *constructible,* resp. *ouverte et rétrocompacte*).

Supposons Z constructible; pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert affine V de $f(x)$ tel que $Z \cap V$ soit globalement constructible dans V; si la proposition est démontrée pour les parties globalement constructibles, $f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(V)$ sera globalement constructible dans $f^{-1}(V)$, donc $f^{-1}(Z)$ sera constructible. Il suffit par suite de considérer le cas où Z est globalement constructible, et compte tenu de (**0**, 2.3.3), on est ramené au cas où Z est *ouvert et rétrocompact* dans Y, autrement dit tel que l'injection canonique $Z \to Y$ soit un morphisme quasi-compact. Il suffit alors de voir que $f^{-1}(Z)$ est *rétrocompact dans* X, autrement dit tel que l'injection canonique $f^{-1}(Z) \to X$ soit un morphisme quasi-compact; mais cela résulte de (6.1.5,(iii)), puisque $f^{-1}(Z) = Z \times_Y X$ (4.3.1).

Lemme (7.1.3) *Soient* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé,* Z *une partie constructible de* X. *Il existe alors un schéma affine* X′ *et un morphisme de présentation finie* $f: X' \to X$ *tels que* $f(X') = Z$ (pour une réciproque, voir (7.1.4)).

Comme X est quasi-compact, il est réunion finie d'ouverts affines X_i ($i \in I$), et comme X est quasi-séparé, il résulte de (6.1.12) que chacune des immersions canoniques $g_i: X_i \to X$ est de présentation finie; on en conclut que si $f_i: X'_i \to X_i$ est un morphisme de présentation finie, il en est de même de $g_i \circ f_i: X'_i \to X$ (6.3.8), et si X′ est le schéma somme des X'_i, le morphisme $h: X' \to X$ qui coïncide avec $g_i \circ f_i$ dans chaque X'_i est lui aussi de présentation finie (6.3.11). Comme $Z \cap X_i$ est constructible dans X_i (**0**, 2.3.10), on voit qu'on est ramené à prouver le lemme lorsque X est *affine* d'anneau A, donc Z globalement constructible dans X. Comme Z est alors réunion finie d'ensembles de la forme $U \cap \complement V$, où U et V sont des ouverts quasi-compacts (**0**, 2.3.3), on voit, en considérant encore une somme convenable de schémas, qu'on peut se ramener au cas où $Z = U \cap \complement V$; comme d'ailleurs U est réunion finie d'ouverts affines, on peut même se borner au cas où U est *affine.* Comme V est quasi-compact, il est réunion finie d'ouverts de la forme $D(s_i)$, où $s_i \in A$; soit $\mathfrak{J}$ l'idéal de A engendré par les s_i, et soit Z′ le sous-schéma fermé affine de X qu'il définit (et qui par construction est de présentation finie sur X); on a par définition $V = \complement Z'$, donc $U \cap \complement V = U \cap Z'$. Con-

sidérons le schéma affine $X' = Z' \times_X U$, et soit $f: X' \to X$ le morphisme structural; on vient de voir que l'immersion canonique $Z' \to X$ est de présentation finie, et il en est de même de l'immersion ouverte $U \to X$, qui est quasi-compacte puisque U et X sont affines; on conclut donc de (6.3.8,(iv)) que f est de présentation finie, et l'on a $f(X') = Z' \cap U$ (3.4.11), ce qui achève la démonstration.

Théorème (7.1.4) (Chevalley) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme de présentation finie. Pour toute partie constructible* Z *de* X, $f(Z)$ *est constructible dans* Y.

Soient $y \in Y$ et V un voisinage ouvert affine de y; comme f est quasi-compact et quasi-séparé, il en est de même de sa restriction $f^{-1}(V) \to V$, donc $f^{-1}(V)$ est un schéma quasi-compact et quasi-séparé (6.1.10); comme $Z \cap f^{-1}(V)$ est globalement constructible dans $f^{-1}(V)$ (7.1.1), on voit qu'on peut se borner au cas où Y est affine et Z globalement constructible; X est alors quasi-compact et quasi-séparé, donc (7.1.3) il existe un morphisme de présentation finie $g: X' \to X$ tel que $Z = g(X')$; comme $f \circ g$ est de présentation finie, on voit qu'on est ramené au cas où $Z = X$; autrement dit, il suffira de prouver le

Lemme (7.1.4.1) *Soient* Y *un schéma affine,* $f: X \to Y$ *un morphisme quasi-compact et localement de présentation finie; alors* $f(X)$ *est une partie constructible de* Y.

Comme X est quasi-compact, il est réunion finie d'ouverts affines; on peut donc se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, B étant une A-algèbre de présentation finie (6.2.9). Or A est limite inductive de ses *sous-***Z***-algèbres de type fini.* En vertu de (**0**, 6.3.13), il existe une telle sous-**Z**-algèbre A_0 de A, et une A_0-algèbre de présentation finie B_0, telles que B soit isomorphe à $B_0 \otimes_{A_0} A$; posons $X_0 = \mathrm{Spec}(B_0)$, $Y_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, de sorte l'on a $X = X_0 \times_{Y_0} Y$, f étant la projection $X \to Y$; soient $f_0: X_0 \to Y_0$, $g_0: Y \to Y_0$ les morphismes structuraux; il résulte de (3.4.11) que l'on a $f(X) = g_0^{-1}(f_0(X_0))$; compte tenu de (7.1.2), il suffit donc de montrer que $f_0(X_0)$ est globalement constructible. Autrement dit, on est finalement ramené à démontrer le

Corollaire (7.1.5) *Soient* Y *un schéma noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme de type fini. Pour toute partie globalement constructible* Z *de* X, $f(Z)$ *est une partie globalement constructible de* Y.

On se ramène comme ci-dessus à prouver que $f(X)$ est globalement constructible. Appliquons le critère (**0**, 2.4.3): il faut prouver que pour toute partie fermée irréductible T de Y, $T \cap f(X) = f(f^{-1}(T))$ est rare dans T ou contient un ouvert non vide de T; en prenant un sous-schéma de Y ayant T pour espace sous-jacent (4.6.1) et en considérant son image réciproque par f, on voit finalement (compte tenu de (6.3.4,(iii))

qu'on est ramené à prouver que si l'on suppose Y *irréductible* et f *dominant*, $f(X)$ contient un ouvert non vide de Y. On peut en outre supposer Y affine; alors X est réunion finie d'ouverts affines V_i, et comme $f(X)$ est dense dans Y, il en est de même d'un au moins des $f(V_i)$. On peut donc aussi supposer X affine; si (X_j) est la famille (finie) des composantes irréductibles de X, on voit comme ci-dessus qu'un au moins des $f(X_j)$ est dense dans Y; on peut donc supposer X irréductible. Enfin, en remplaçant f par f_{red} (6.3.4, (vi)) on peut supposer X et Y *intègres*. Alors $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau intègre noethérien, B une A-algèbre intègre de type fini contenant A (1.2.7). Il suffit de montrer qu'il existe $g \in A$ tel que, pour tout $y \in D(g)$ (c'est-à-dire tel que $g \notin \mathfrak{j}_y$) l'idéal $\mathfrak{j}_y$ soit l'intersection de A et d'un idéal premier de B, car cela montrera que $D(g) \subset f(X)$. Finalement il suffit de prouver le

Lemme (7.1.5.1) *Soient* A *un anneau intègre*, B *une* A*-algèbre intègre de type fini. Il existe* $g \in A$ *tel que tout homomorphisme de* A *dans un corps algébriquement clos* Ω, *non nul en* g, *se prolonge en un homomorphisme de* B *dans* Ω.

Or c'est là un résultat classique d'algèbre commutative (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, cor. 3 du th. 1).

Corollaire (7.1.6) *Soient* Y *un schéma irréductible*, η *son point générique*, $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini. Si* $f^{-1}(\eta)$ *n'est pas vide, il existe un voisinage ouvert* U *de* η *dans* Y *tel que* $f^{-1}(y)$ *soit non vide pour tout* $y \in U$. *Si* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent de type fini, et si* $\mathscr{F}_\eta = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \kappa(\eta)$ *n'est pas nul, alors il existe un voisinage ouvert* U′ *de* η *dans* Y *tel que* $\mathscr{F}_y = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \kappa(y)$ *ne soit pas nul pour tout* $y \in U'$.

Si p_y est la projection canonique de la fibre $f^{-1}(y) = X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ dans X, on a $\mathscr{F}_y = p_y^*(\mathscr{F})$, donc

$$\mathrm{Supp}(\mathscr{F}_y) = p_y^{-1}(\mathrm{Supp}(\mathscr{F})) = \mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \cap f^{-1}(y)$$

en vertu de (3.3.12.1) et (3.4.6), puisque $\mathscr{F}$ est de type fini; en outre $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ est fermé dans X (**0**, 5.2.2), et si Z est un sous-schéma fermé de X ayant pour espace sous-jacent $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ (4.6.1), et j l'immersion canonique $Z \to X$, $f \circ j$ est localement de type fini (6.2.3); cela prouve que la première assertion entraîne la seconde. Pour prouver la première assertion, remarquons d'abord que l'on peut supposer X et Y réduits (6.2.3, (vi)), autrement dit Y *intègre*. Soit ξ un point de $f^{-1}(\eta)$; on peut remplacer X et Y par des voisinages ouverts affines de ξ et η respectivement, et par suite supposer que $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, B étant une A-algèbre de type fini. En outre, si Z est le sous-schéma fermé réduit de X ayant $\{\xi\}$ pour ensemble sous-jacent (4.6.1), on peut, comme ci-dessus, remplacer X par Z, autrement dit supposer B *intègre* (4.5.4). Comme le morphisme f est alors dominant, l'homomorphisme

correspondant $\varphi: A \to B$ est injectif (1.2.7); donc le corollaire résulte finalement du lemme (7.1.5.1).

Proposition (7.1.7) *Soient* S *un schéma,* $g: X \to S$, $h: Y \to S$ *deux morphismes de présentation finie,* $f: X \to Y$ *un* S*-morphisme. Pour tout* $s \in S$, *posons* $X_s = g^{-1}(s) = X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s))$, $Y_s = h^{-1}(s) = Y \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s))$, $f_s = f \times 1 : X_s \to Y_s$. *Alors l'ensemble des* $s \in S$ *tels que* f_s *soit surjectif* (resp. *radiciel*) *est constructible.*

Soit E l'ensemble des $s \in S$ tels que f_s soit surjectif; l'ensemble $S - E$ est égal à $h(Y - f(X))$; or f est de présentation finie (6.3.8, (v)), donc $f(X)$ est constructible dans Y (7.1.4); comme h est de présentation finie, $h(Y - f(X))$ est constructible dans S, donc aussi E.

Pour montrer que l'ensemble E′ des $s \in S$ tels que f_s soit radiciel est constructible, nous utiliserons la caractérisation (3.7.1, c″)) des morphismes radiciels: le morphisme Δ_{f_s} se déduit de $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ par le changement de base $\mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to S$ (**0**, 1.4.7). Comme f est de présentation finie, il en est de même du morphisme structural $X \times_Y X \to Y$ (6.3.8, (iv)), donc aussi de Δ_f (6.3.8, (v)); il suffit donc d'appliquer la première partie de la proposition à Δ_f, en utilisant (3.7.1, c″)).

Proposition (7.1.8) *Soient* K *un corps,* X, Y *deux* K*-schémas algébriques* (6.5.1), $f: X \to Y$ *un* K*-morphisme,* Ω *une extension algébriquement close de* K. *Pour que* f *soit surjectif, il faut et il suffit que l'application* $X(\Omega)_K \to Y(\Omega)_K$ *correspondant à* f (3.5.1) *soit surjective.*

Comme le morphisme $\mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathrm{Spec}(K)$ est surjectif, il suffit de prouver qu'après extension de la base à Ω, le morphisme $f_{(\Omega)} : X_{(\Omega)} \to Y_{(\Omega)}$ est surjectif (3.6.3). On peut donc se limiter au cas où K est lui-même algébriquement clos, et l'hypothèse signifie alors que tout point $y \in Y$ rationnel sur K est de la forme $f(x)$, où $x \in X$ est rationnel sur K. *A fortiori* $f(X)$ contient tous les points fermés de Y (qui sont ici les points rationnels sur K (6.5.3)); mais f est de type fini puisque X est noethérien (6.3.4, (v)), donc $f(X)$ est une partie *globalement constructible* de l'espace noethérien Y contenant l'ensemble Y_0 des points fermés de Y (7.1.5). Mais Y est un espace de Jacobson (6.5.2) et, étant noethérien, les parties globalement constructibles de Y sont identiques aux parties globalement quasi-constructibles (**0**, 2.3.2). Puisque Y_0 est très dense dans Y (**0**, 2.7.1), on déduit de (**0**, 2.6.2) que $f(X) = Y$.

7.2. Ensembles pro-constructibles et ind-constructibles

Proposition (7.2.1) *Soient* X *un schéma quasi-compact et quasi-séparé,* E *une partie de* X, $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ *un recouvrement ouvert affine de* X, *et pour tout* $\alpha \in I$, *posons* $E_\alpha = E \cap X_\alpha$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Il existe un morphisme quasi-compact* $f: X' \to X$ *tel que* $E = f(X')$.

a′) *Pour tout* α, *il existe un morphisme quasi-compact* $f_\alpha : X'_\alpha \to X_\alpha$ *tel que* $E_\alpha = f_\alpha(X'_\alpha)$.

a'') *Pour tout* α, *il existe un schéma affine* X'_α *et un morphisme* $f_\alpha : X'_\alpha \to X_\alpha$ *tels que* $f_\alpha(X'_\alpha) = E_\alpha$.

b) E *est intersection de parties globalement constructibles de* X.

b') $F = X - E$ *est réunion de parties globalement constructibles de* X.

Il est clair que b) et b') sont équivalentes. La condition a) entraîne a') en prenant pour X'_α le schéma induit sur l'ouvert $f^{-1}(X_\alpha)$ de X' et pour f_α la restriction de f. Pour voir que a') entraîne a''), il suffit de remarquer que X'_α est réunion finie d'ouverts affines $X''_{\alpha\lambda}$ ($\lambda \in L$); soit X''_α le schéma *somme* des $X''_{\alpha\lambda}$ ($\lambda \in L$), qui est un schéma affine; si $g_\alpha : X''_\alpha \to X'_\alpha$ est le morphisme coïncidant avec l'identité dans chacun des $X''_{\alpha\lambda}$, il est clair que si l'on pose $f'_\alpha = f_\alpha \circ g_\alpha$, on a $E_\alpha = f'_\alpha(X''_\alpha)$ puisque g_α est surjectif. Pour montrer que a'') entraîne a), notons qu'il y a une partie finie J de I telle que les X_α d'indices $\alpha \in J$ recouvrent X; soit X' le schéma somme des X'_α pour $\alpha \in J$, et soit $f : X' \to X$ le morphisme coïncidant avec $j_\alpha \circ f_\alpha$ pour tout $\alpha \in J$, où $j_\alpha : X_\alpha \to X$ est l'injection canonique. Comme E est réunion des $E \cap X_\alpha$ pour $\alpha \in J$, on a bien $E = f(X')$ et il reste à voir que f est un morphisme quasi-compact; mais l'hypothèse que X est quasi-séparé entraîne que j_α est quasi-compact (6.1.12), donc il en est de même de $j_\alpha \circ f_\alpha$ ((6.1.1) et (6.1.5)) et finalement de f (6.1.15).

Reste donc à prouver l'équivalence de a'') et de b). Prouvons en premier lieu que a'') entraîne b): considérons une partie finie J de I telle que les X_α pour $\alpha \in J$ recouvrent X; il suffira de montrer que, pour tout $\alpha \in J$, E_α est intersection de parties globalement constructibles $F_{\alpha\lambda}$ de X_α ($\lambda \in L_\alpha$); en effet, tout $F_{\alpha\lambda}$ est aussi une partie globalement constructible de X en vertu de (**0**, 2.3.8, (ii)), car l'hypothèse que X est quasi-séparé entraîne que tout X_α est rétrocompact dans X (6.1.12); E étant réunion des E_α pour $\alpha \in J$, est intersection des réunions (finies) $\bigcup_{\alpha \in J} F_{\alpha,\lambda(\alpha)}$, pour tous les choix des $\lambda(\alpha) \in L_\alpha$; ces réunions étant globalement constructibles dans X, cela établit notre assertion. On peut donc se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ et où $E = f(X')$, où $X' = \mathrm{Spec}(A')$ est affine, $f : X' \to X$ un morphisme correspondant à un homomorphisme d'anneaux $A \to A'$. Notons maintenant que A' est limite inductive d'une famille filtrante (A'_λ) de A-algèbres *de présentation finie* (**0**, 6.3.8); si $X'_\lambda = \mathrm{Spec}(A'_\lambda)$, f se factorise en

$$X' \longrightarrow X'_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X$$

et il résulte de (3.4.10, (ii)) que l'on a $f(X') = \bigcap_\lambda f_\lambda(X'_\lambda)$; si l'on démontre que $f_\lambda(X'_\lambda)$ est intersection de parties constructibles de X, il en sera de même de $f(X')$. On peut donc se borner au cas où A' est une A-algèbre *de présentation finie*. Mais alors $f(X')$ est globalement constructible dans X en vertu du théorème de Chevalley (7.1.5), ce qui prouve b).

Démontrons enfin que b) entraîne a''). Si E est intersection d'une famille $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ de parties globalement constructibles de X, chaque E_α est intersection des $G_\lambda\cap X_\alpha$, qui sont globalement constructibles dans X_α (**0**, 2.3.8,(i)), donc on est ramené au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine. On sait alors (7.1.3) que pour tout $\lambda\in L$ il existe un morphisme $f_\lambda: X'_\lambda\to X$, où $X'_\lambda=\mathrm{Spec}(A'_\lambda)$ est affine, tel que $f_\lambda(X'_\lambda)=G_\lambda$. Il suffit donc de prouver le lemme suivant:

Lemme (7.2.1.1) *Soient* $(A'_\lambda)_{\lambda\in L}$ *une famille de* A*-algèbres,* $X=\mathrm{Spec}(A)$, $X'_\lambda=\mathrm{Spec}(A'_\lambda)$, *et soit* $f_\lambda: X'_\lambda\to X$ *le morphisme structural. Pour toute partie finie* J *de* L, *posons* $A'_J=\bigotimes_{\lambda\in J}A'_\lambda$ *(produit tensoriel de* A*-algèbres),* $X'_J=\mathrm{Spec}(A'_J)$, *et soit* $f_J: X'_J\to X$ *le morphisme structural. On a alors* $f_J(X'_J)=\bigcap_{\lambda\in J}f_\lambda(X'_\lambda)$. *Soient* $A'=\varinjlim A'_J$, J *parcourant l'ensemble filtrant des parties finies de* L, *et* $X'=\mathrm{Spec}(A')$; *si* $f: X'\to X$ *est le morphisme structural, on a* $f(X')=\bigcap_{\lambda\in L}f_\lambda(X'_\lambda)$.

La première assertion résulte de (3.4.5); la deuxième résulte de (3.4.10, (ii)), qui donne la relation $f(X')=\bigcap_J f_J(X'_J)$.

Définition (7.2.2) *Soit* X *un espace topologique. On dit qu'une partie* E *de* X *est pro-constructible* (resp. *ind-constructible*) *dans* X *si, pour tout* $x\in X$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *tel que* $E\cap U$ *soit intersection* (resp. *réunion*) *de parties constructibles de* U.

Tenant compte de (6.1.12) et de (**0**, 2.3.8 et **0**, 2.3.11), les conditions équivalentes de la proposition (7.2.1) s'expriment donc en disant que E est *pro-constructible* dans X, les ensembles constructibles dans X étant identiques aux ensembles globalement constructibles dans X sous les hypothèses de (7.2.1).

Proposition (7.2.3) *Soit* X *un schéma.*

(i) *Pour qu'une partie* E *de* X *soit pro-constructible, il faut et il suffit que* $X-E$ *soit ind-constructible.*

(ii) *Toute réunion finie et toute intersection de parties pro-constructibles de* X *sont pro-constructibles. Toute intersection finie et toute réunion de parties ind-constructibles de* X *sont ind-constructibles.*

(iii) *Toute intersection* (resp. *réunion*) *de parties constructibles de* X *est pro-constructible* (resp. *ind-constructible*). *Inversement, si* X *est quasi-séparé, toute partie pro-constructible* (resp. *ind-constructible*) *de* X *est intersection* (resp. *réunion*) *de parties globalement constructibles de* X.

(iv) *Soit* (U_α) *un recouvrement ouvert de* X. *Pour qu'une partie* E *de* X *soit pro-constructible* (resp. *ind-constructible*) *dans* X, *il faut et il suffit*

que pour tout α, $E \cap U_\alpha$ *soit pro-constructible* (resp. *ind-constructible*) *dans* U_α.

(v) *Toute partie pro-constructible* E *de* X *est rétrocompacte dans* X. *Pour qu'une partie localement fermée* E *de* X *soit rétrocompacte dans* X, *il faut et il suffit qu'elle soit pro-constructible dans* X.

(vi) *Soit* $f: X' \to X$ *un morphisme de schémas; pour toute partie pro-constructible* (resp. *ind-constructible*) E *de* X, $f^{-1}(E)$ *est pro-constructible* (resp. *ind-constructible*) *dans* X'.

(vii) *Soit* $f: X' \to X$ *un morphisme quasi-compact; pour toute partie pro-constructible* E' *de* X', $f(E')$ *est pro-constructible dans* X; *en particulier* $f(X')$ *est pro-constructible dans* X.

(viii) *Soit* $f: X' \to X$ *un morphisme localement de présentation finie; pour toute partie ind-constructible* E' *de* X', $f(E')$ *est ind-constructible dans* X; *en particulier* $f(X')$ *est ind-constructible dans* X.

(ix) *Supposons que* X *soit quasi-compact et quasi-séparé; alors, pour qu'une partie* E *de* X *soit pro-constructible, il faut et il suffit qu'il existe un schéma affine* X' *et un morphisme (nécessairement quasi-compact)* $f: X' \to X$ *tels que* $E = f(X')$.

Les propriétés (i), (ii), (iv) et la première assertion de (iii) résultent de la définition (7.2.2) et sont valables pour un espace topologique quelconque, en utilisant la distributivité mutuelle de l'intersection et de la réunion et le fait que si T est constructible dans X, $T \cap U$ est constructible dans U pour tout ouvert U de X.

Si X est quasi-compact et quasi-séparé et E est pro-constructible dans X, il y a un recouvrement fini (U_i) de X formé d'ouverts affines tels que $E \cap U_i$ soit intersection de parties globalement constructibles $M_{i\lambda}$ de U_i ($\lambda \in L_i$); les $M_{i\lambda}$ sont aussi globalement constructibles dans X en vertu de (6.1.12) et (**0**, 2.3.8, (ii)) et E est intersection des réunions finies $\bigcup_i M_{i,\lambda(i)}$ (où $\lambda(i) \in L_i$ pour tout i), qui sont des parties globalement constructibles dans X; cela démontre la seconde assertion de (iii).

L'assertion (ix) résulte de (iii) et de (7.2.1).

Pour démontrer la première assertion de (v), on peut se limiter au cas où X est affine, et prouver alors que E est quasi-compact (**0**, 2.3.1); mais comme X est alors quasi-séparé, il existe en vertu de (ix) un morphisme quasi-compact $f: X' \to X$ tel que $E = f(X')$; comme X' est quasi-compact, il en est de même de son image E par une application continue.

Pour prouver (vi), on peut se borner, en vertu de (iv), au cas où X est affine; la conclusion résulte alors de (iii) et de (7.1.2).

De même, pour démontrer (vii), on peut se borner au cas où X est affine; alors X' est réunion finie d'ouverts affines X'_i et $f(E')$ est réunion des $f(E' \cap X'_i)$, si bien qu'on peut aussi supposer que X' est affine, en

vertu de (ii); mais alors $E'=g(X'')$, où $g: X''\to X'$ est un morphisme quasi-compact, en vertu de (ix), et l'on a $f(E')=f(g(X''))$, donc $f(E')$ est pro-constructible puisque $f\circ g$ est quasi-compact.

On déduit de (vii) la démonstration de la seconde assertion de (v): en effet, soit E une partie localement fermée et rétrocompacte dans X, et considérons un sous-schéma de X ayant E pour espace sous-jacent (4.6.1); l'injection canonique $j: E\to X$ est alors par hypothèse un morphisme quasi-compact, et il résulte de (vii) que $E=j(E)$ est pro-constructible dans X.

Enfin, pour prouver (viii), on peut encore supposer X affine; en outre, si (X'_α) est un recouvrement ouvert affine de X' tel que $E'\cap X'_\alpha$ soit réunion de parties globalement constructibles de X'_α ((iii) et (iv)), $f(E')$ est réunion des $f(E'\cap X'_\alpha)$ et, en vertu du théorème de Chevalley (7.1.4), chacune des $f(E'\cap X'_\alpha)$ est réunion de parties globalement constructibles de X, d'où la conclusion.

Exemples **(7.2.4)** Toute partie *finie* d'un schéma X est pro-constructible: en effet, il suffit de considérer les parties $\{x\}$ réduites à un seul point (7.2.3, (ii)) et $\{x\}$ est l'image de $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$ par le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\kappa(x))\to X$, qui est quasi-compact; d'où la conclusion par (7.2.3, (vii)). Par contre, une partie $\{x\}$ réduite à un point n'est pas nécessairement ind-constructible; par exemple, soit A un anneau noethérien intègre ayant une infinité d'idéaux maximaux, et soit x le point générique de $X=\mathrm{Spec}(A)$; si $\{x\}$ était ind-constructible dans X, il serait globalement constructible en vertu de (7.2.3, (iii)) et par suite contiendrait un ouvert non vide de X (**0**, 2.4.2); mais cela contredit l'hypothèse que A possède une infinité d'idéaux maximaux, en vertu du théorème d'Artin-Tate ($\mathbf{0}^*_{\mathrm{IV}}$, 16.3.3).

Toute partie *fermée* Y d'un schéma X est pro-constructible, par (7.2.3, (v)). Toute partie ouverte de X est donc ind-constructible, mais une partie ouverte U de X n'est pro-constructible que si elle est *rétrocompacte*, en vertu encore de (7.2.3, (v)).

Enfin, si X est un schéma *noethérien*, donc quasi-séparé (6.1.13), il résulte de (7.2.3,(iii)) et de (**0**, 2.3.3) que les parties ind-constructibles de X sont les *réunions de parties localement fermées de* X.

Théorème (7.2.5) *Soient* X *un schéma quasi-compact*, E *une partie ind-constructible de* X, $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ *une famille de parties pro-constructibles de* X *telle que* $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda\subset E$; *alors il existe une partie finie* J *de* L *telle que* $\bigcap_{\lambda\in J} F_\lambda\subset E$.

Notons que les ensembles $F=X-E$ et $F\cap F_\lambda$ sont pro-constructibles, donc on est ramené au

Corollaire (7.2.6) *Soient* X *un schéma quasi-compact,* $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ *une famille de parties pro-constructibles de* X *dont l'intersection est vide; alors il existe une sous-famille finie* $(F_\lambda)_{\lambda\in J}$ *dont l'intersection est vide.*

Recouvrant X par un nombre fini d'ouverts affines, et utilisant (7.2.3, (iv)), on est ramené au cas où X est affine; en vertu de (7.2.3, (ix)), on a $F_\lambda = f_\lambda(X'_\lambda)$, où $X'_\lambda = \mathrm{Spec}(A'_\lambda)$ est affine, et f_λ est un morphisme $X'_\lambda \to X$; alors, avec les notations de (7.2.1.1), on a par hypothèse $f(X') = \emptyset$, donc $X' = \emptyset$; mais cela entraîne par (3.4.13, (i)) qu'il existe une partie finie J de L telle que $X'_J = \emptyset$, donc $f_J(X'_J) = \bigcap_{\lambda\in J} F_\lambda = \emptyset$.

Corollaire (7.2.7) *Soient* X *un schéma quasi-compact,* F *une partie pro-constructible de* X, $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$ *une famille de parties ind-constructibles de* X *telle que* $F \subset \bigcup_{\lambda\in L} E_\lambda$; *alors il existe une partie finie* J *de* L *telle que* $F \subset \bigcup_{\lambda\in J} E_\lambda$. *En particulier, de tout recouvrement de* X *par des parties ind-constructibles, on peut extraire un recouvrement fini de* X.

Cela résulte de (7.2.5) par passage aux complémentaires.

Proposition (7.2.8) *Soit* X *un schéma. Pour qu'une partie* E *de* X *soit ind-constructible, il est nécessaire que, pour tout* $x\in E$, *l'intersection* $E \cap \overline{\{x\}}$ *soit un voisinage de* x *dans* $\overline{\{x\}}$. *Si l'espace sous-jacent à* X *est localement noethérien, cette condition est suffisante.*

Supposons E ind-constructible, et soit Y l'intersection de $\overline{\{x\}}$ et d'un ouvert affine dans X contenant x; il y a donc un sous-schéma de X ayant Y pour espace sous-jacent (4.6.1), et si $j: Y \to X$ est l'injection canonique, $E \cap Y = j^{-1}(E)$ est ind-constructible dans Y (7.2.3, (vi)). Comme Y est quasi-compact et séparé, $E \cap Y$ est donc réunion de parties globalement constructibles de Y (7.2.3,(iii)); par suite, il y a deux ouverts U, V dans Y tels que $x \in U \cap \complement V \subset E \cap Y$ (**0**, 2.3.3). Mais comme x est point générique de l'espace irréductible Y, V est nécessairement vide et l'on a $U \subset E \cap Y$.

Supposons maintenant l'espace X localement noethérien, et soit E une partie de X vérifiant la condition de l'énoncé. En vertu de la définition (7.2.2), on peut se borner au cas où l'espace X est *noethérien*. Alors, pour tout $x\in E$, $E \cap \overline{\{x\}}$ contient une partie non vide de la forme $U \cap \overline{\{x\}}$, où U est ouvert dans X; cela montre que E est réunion de parties localement fermées de X, donc est ind-constructible (7.2.4).

Proposition (7.2.9) *Soient* X *un schéma,* E *une partie de* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) E *est constructible.*
b) E *est ind-constructible et pro-constructible.*
c) E *et* $X - E$ *sont pro-constructibles.*
d) E *et* $X - E$ *sont ind-constructibles.*

Il suffit évidemment de prouver que d) entraîne a), et on peut se borner au cas où X est affine. Alors (7.2.3, (iii)), E (resp. X−E) est réunion d'une famille (E_λ) (resp. E'_μ)) de parties globalement constructibles de X; comme les E_λ et les E'_μ forment un recouvrement de X, il résulte de (7.2.7) qu'il y a des indices en nombre fini λ_i, μ_j tels que les E_{λ_i} et les E'_{μ_j} forment un recouvrement de X; cela implique que E est réunion des E_{λ_i}, donc est globalement constructible.

Corollaire (7.2.10) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme surjectif, qui est, soit quasi-compact, soit localement de présentation finie. Pour qu'une partie* E *de* Y *soit constructible* (resp. *pro-constructible*, resp. *ind-constructible*), *il faut et il suffit que* $f^{-1}(E)$ *le soit dans* X.

On sait que la condition est nécessaire ((7.1.2) et (7.2.3, (vi))); pour montrer qu'elle est suffisante, on est ramené au cas où X est affine, en vertu de (7.2.3, (iv)); en outre, en vertu de (7.2.9), on peut se borner au cas où $f^{-1}(E)$ est pro-constructible, *ou* au cas où $f^{-1}(E)$ est ind-constructible. Si f est surjectif et quasi-compact, et $f^{-1}(E)$ pro-constructible, il résulte de (7.2.3, (vii)) que $E = f(f^{-1}(E))$ est pro-constructible. Si f est surjectif et localement de présentation finie, et $f^{-1}(E)$ ind-constructible, $E = f(f^{-1}(E))$ est ind-constructible par (7.2.3, (viii)), ce qui achève la démonstration.

(7.2.11) Soient X un schéma, $\mathscr{T}$ sa topologie; il résulte de ((7.2.3), (i) et (ii)) que les parties ind-constructibles (resp. pro-constructibles) de X sont les parties ouvertes (resp. fermées) pour une topologie sur X, appelée *topologie constructible* et que nous noterons $\mathscr{T}^{\mathrm{cons}}$; nous désignerons par X^{cons} l'ensemble X muni de la topologie $\mathscr{T}^{\mathrm{cons}}$.

Proposition (7.2.12) *Soient* X *un schéma,* $\mathscr{T}$ *sa topologie,* $\mathscr{T}^{\mathrm{cons}}$ *la topologie constructible sur* X.

(i) *La topologie* $\mathscr{T}^{\mathrm{cons}}$ *est plus fine que* $\mathscr{T}$.

(ii) *Les parties constructibles de* X *sont identiques aux parties à la fois ouvertes et fermées de l'espace* X^{cons}.

(iii) *Pour tout morphisme* $f: X \to Y$, *l'application sous-jacente de* X^{cons} *dans* Y^{cons} *est continue; on la note* f^{cons}.

(iv) *Si le morphisme* $f: X \to Y$ *est quasi-compact,* f^{cons} *est une application fermée; en particulier, si* f *est quasi-compact et bijectif,* f^{cons} *est un homéomorphisme.*

(v) *Si un morphisme* $f: X \to Y$ *est localement de présentation finie,* f^{cons} *est une application ouverte; en particulier, si* f *est bijectif et localement de présentation finie,* f^{cons} *est un homéomorphisme.*

(vi) *Pour tout ouvert* U *de* X, *la topologie induite par* $\mathscr{T}^{\mathrm{cons}}$ *sur* U *est identique à la topologie de* U^{cons}.

En effet, (i) résulte de ce que tout ouvert pour $\mathscr{T}$ est un ouvert pour $\mathscr{T}^{\mathrm{cons}}$ (7.2.4), et (ii) est une traduction de (7.2.9); (iii), (iv) et (v) traduisent respectivement (7.2.3), (vi), (vii) et (viii). Enfin pour démontrer (vi), il suffit de remarquer que l'injection canonique $j: U \to X$ est localement de présentation finie (6.2.6), donc $j^{\mathrm{cons}}: U^{\mathrm{cons}} \to X^{\mathrm{cons}}$ est une application continue ouverte.

Proposition (7.2.13) *Soit* X *un schéma.*

(i) *Pour que* X^{cons} *soit quasi-compact, il faut et il suffit que* X *soit quasi-compact.*

(ii) *Pour que* X^{cons} *soit séparé, il faut et il suffit que* X *soit quasi-séparé, et alors* X^{cons} *est localement compact et totalement discontinu.*

(iii) *Pour que* X^{cons} *soit compact, il faut et il suffit que* X *soit quasi-compact et quasi-séparé.*

(iv) *Tout point de* X *admet, pour la topologie* $\mathscr{T}^{cons}$, *un voisinage ouvert et compact.*

(v) *Pour qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *soit quasi-compact, il faut et il suffit que l'application continue* $f^{cons}: X^{cons} \to Y^{cons}$ *soit propre.*

(i) Comme $\mathscr{T}^{cons}$ est plus fine que $\mathscr{T}$, il est clair que si X^{cons} est quasi-compact il en est de même de X; la réciproque résulte de (7.2.7).

(ii) Supposons X quasi-séparé, et montrons que X^{cons} est totalement discontinu: en effet, si x, y sont deux points distincts de X et si par exemple $x \notin \overline{\{y\}}$, il existe un voisinage ouvert affine U de X ne contenant pas y; comme X est quasi-séparé, U est rétrocompact dans X (6.1.11), donc U et $X-U$ sont constructibles dans X, et par suite ouverts dans X^{cons} en vertu de (7.2.9), d'où notre assertion. Comme sur tout ouvert affine U de X, la topologie induite par $\mathscr{T}^{cons}$ est celle de U^{cons} en vertu de (7.2.12, (vi)), il résulte de ce qui précède que X^{cons} est localement compact, puisque U est ouvert dans X^{cons} et que U^{cons} est compact. Reste à prouver qui si X^{cons} est séparé, alors X est quasi-séparé; considérons en effet un ouvert affine U de X; la topologie induite sur U par $\mathscr{T}^{cons}$ est celle de U^{cons} (7.2.12, (vi)), donc U est compact pour cette topologie induite, puisque U^{cons} est compact par la première partie du raisonnement. Si V est un second ouvert affine dans X, $U \cap V$ est donc une partie compacte de l'espace séparé X^{cons}, étant intersection de deux parties compactes de cet espace; comme la topologie induite par $\mathscr{T}^{cons}$ sur $U \cap V$ est celle de $(U \cap V)^{cons}$ (7.2.12, (vi)) et que l'application identique $(U \cap V)^{cons} \to U \cap V$ est continue, on en conclut que $U \cap V$ est quasi-compact pour la topologie induite par $\mathscr{T}$; X est par suite quasi-séparé en vertu de (6.1.12).

(iii) est un corollaire immédiat de (i) et (ii).

(iv) Pour tout $x \in X$, un voisinage ouvert affine U de x pour $\mathscr{T}$ est aussi un voisinage de x pour $\mathscr{T}^{cons}$ et il est compact en vertu de (iii) et de (7.2.12, (vi)), la topologie induite sur U par $\mathscr{T}^{cons}$ étant identique à celle de U^{cons}.

(v) Supposons f quasi-compact; alors on sait déjà (7.2.12, (iv)) que f^{cons} est une application *fermée*. Soit d'autre part y un point de Y, et posons

$$Z = f^{-1}(y) = X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y));$$

Z est quasi-compact (6.1.5, (iii)) et comme le morphisme canonique $p: Z \to X$ est injectif, il résulte de (i) et de ce que l'application p^{cons} est continue, que la topologie induite sur $f^{-1}(y)$ par celle de X^{cons} fait de $f^{-1}(y)$ un espace quasi-compact. Cela prouve que f^{cons} est une application propre (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. Ier, 3e éd., §10, n°2, th. 1). Inversement, supposons que l'application continue f^{cons} soit propre, et soit V un ouvert quasi-compact de Y; si $h: V \to Y$ est l'injection canonique, $h^{cons}: V^{cons} \to Y^{cons}$ est continue et injective et V^{cons} est quasi-compact par (i), donc la topologie induite sur V par celle de Y^{cons} fait de V un espace quasi-compact. L'hypothèse que f^{cons} est propre entraîne alors que la topologie induite sur $f^{-1}(V)$ par celle de X^{cons} fait de $f^{-1}(V)$ un espace quasi-compact (*loc. cit.*, prop. 6), donc $f^{-1}(V)$ est aussi un sous-espace quasi-compact de X, ce qui montre que le morphisme f est quasi-compact.

(7.2.14) Nous montrerons plus tard comment on peut, pour tout schéma X, munir l'espace X^{cons} d'un faisceau d'anneaux qui en fait un schéma dont les an-

neaux locaux sont tous des corps, identiques aux corps résiduels aux points de X. De tels schémas s'introduisent par exemple de façon naturelle dans la traduction, en langage des schémas, des constructions de Néron [14] dans sa théorie de la réduction des variétés abéliennes.

7.3. Applications aux morphismes générisants

Théorème (7.3.1) *Soient* X *un schéma,* E *une partie ind-constructible de* X (7.2.2), *x un point de* X. *Pour que x soit intérieur à* E, *il faut et il suffit que toute générisation* (**0**, 2.1.1) *x' de x appartienne à* E, *autrement dit* (2.5.2) *que l'on ait* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \subset E$.

La condition est évidemment nécessaire, tout voisinage de x contenant les générisations de x. Pour voir qu'elle est suffisante, on peut évidemment se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, x étant donc un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. On sait alors (7.2.3,(ix)) qu'il existe un schéma affine $X'=\mathrm{Spec}(A')$ et un morphisme $f: X' \to X$ tels que $f(X')=X-E$. Posons $Y=\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ et $Y'=X' \times_X Y$; l'hypothèse signifie (en vertu de (3.4.4)) que l'on a $Y'=\emptyset$, autrement dit $A' \otimes_A A_{\mathfrak{p}}=0$. Comme $A_{\mathfrak{p}}=\varinjlim A_t$ lorsque t parcourt $A-\mathfrak{p}$ (1.3.3), on a $\varinjlim A'_t=0$, le foncteur $\varinjlim$ commutant avec le produit tensoriel. Par suite (**0**, 6.1.1) il existe un $t \in A-\mathfrak{p}$ tel que $A'_t=0$, et $D(t)$ est alors un voisinage ouvert de x dans X contenu dans E.

Corollaire (7.3.2) *Pour toute partie pro-constructible* F *d'un schéma* X, *on a* $\bar{F}=\bigcup_{x \in F} \overline{\{x\}}$.

Comme $E=X-F$ est ind-constructible (7.2.3,(i)) et que la réunion des ensembles $\{x\}$ pour $x \in F$ est l'ensemble des points dont une générisation appartient à F, cet ensemble a pour complémentaire l'ensemble des points dont toutes les générisations appartiennent à E; le corollaire résulte donc de (7.3.1) par passage aux complémentaires.

Proposition (7.3.3) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme générisant* (3.9.2). *Alors, pour toute partie pro-constructible* F *de* Y, *on a* $f^{-1}(\bar{F})=f^{-1}(F)$. *Pour toute partie ind-constructible* E *de* Y, *l'intérieur* $(f^{-1}(E))^{\circ}$ *est égal à* $f^{-1}(E^{\circ})$.

Les deux assertions se déduisent l'une de l'autre par passage aux complémentaires; prouvons la seconde. On a évidemment $f^{-1}(E^{\circ}) \subset (f^{-1}(E))^{\circ}$, et il n'y a qu'à démontrer l'inclusion inverse. Or, si x est intérieur à $f^{-1}(E)$ on a $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \subset f^{-1}(E)$ et puisque $f(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}))=\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$ (où $y=f(x)$), on a $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y}) \subset E$; on conclut de (7.3.1) que $y \in E^{\circ}$, CQFD.

Corollaire (7.3.3.1) *Soient* Y *un schéma,* η *un point maximal de* Y, $f: X \to Y$ *un morphisme,* U *une partie pro-constructible de* X, *dense dans* X. *Alors* $U \cap f^{-1}(\eta)$ *est dense dans* $f^{-1}(\eta)$.

En remplaçant f par f_{red}, on peut supposer Y réduit. On peut se borner au cas où $f^{-1}(\eta)$ n'est pas vide; soit $i: f^{-1}(\eta) \to X$ l'injection canonique, qui est un morphisme *plat* puisque Y est réduit et η point maximal de Y (3.4.4); i est donc générisant (3.9.3). Puisque U est pro-constructible dans X, on conclut de (7.3.3) que l'on a $i^{-1}(\bar{U})=\overline{i^{-1}(U)}$, et comme $\bar{U}=X$, cela prouve le corollaire.

Corollaire (7.3.4) *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme générisant et quasi-compact,* F *une partie fermée de* X *telle que* $F=f^{-1}(f(F))$; *alors on a* $F=f^{-1}(\overline{f(F)})$.

Soit X' le sous-schéma réduit de X ayant F pour ensemble sous-jacent (4.6.1), et soit $j: X' \to X$ l'injection canonique; alors $f \circ j$ est quasi-compact (6.1.5), donc $f(F)$ est pro-constructible dans Y (7.2.3,(vii)), et le corollaire résulte de (7.3.3) et de ce que F est fermé.

On peut encore écrire le résultat de (7.3.4) sous la forme $F = f^{-1}(f(X) \cap \overline{f(F)})$, autrement dit, les ensembles fermés du sous-espace $f(X)$ de Y sont les parties $Z \subset f(X)$ telles que $f^{-1}(Z)$ soit fermé dans X; cela signifie aussi que *la topologie induite par* Y *sur* $f(X)$ *est quotient de celle de* X *par la relation d'équivalence définie par* f. En particulier:

Corollaire (7.3.5) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme générisant* (resp. *universellement générisant*), *quasi-compact et surjectif. Alors* f *est submersif* (resp. *universellement submersif*) (3.10.1).

Proposition (7.3.6) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas,* $f: X \to Y$ *un* S*-morphisme universellement générisant* (3.9.2), *quasi-compact et surjectif. Pour que* Y *soit séparé au-dessus de* S, *il faut et il suffit que l'immersion canonique* $j: X \times_Y X \to X \times_S X$ (5.1.3) *soit fermée.*

On a en effet un carré cartésien (**0**, 1.4.8)

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{j} & X \times_S X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle f \times_S f} \\ Y & \xrightarrow[\Delta_Y]{} & Y \times_S Y \end{array}$$

Comme f est surjectif, il en est de même de $f \times_S f$; d'autre part la diagonale $\Delta_Y(Y)$ a pour image réciproque par $f \times_S f$ l'image $j(X \times_Y X)$ (3.4.5). Comme $f \times_S f$ est générisant (3.9.2), surjectif et quasi-compact, il suffit d'appliquer (7.3.5) à ce morphisme.

Proposition (7.3.7) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme générisant, quasi-compact et surjectif. Pour qu'une partie* Z *de* Y *soit localement fermée et pro-constructible, il faut et il suffit que* $f^{-1}(Z)$ *soit une partie localement fermée et pro-constructible de* X.

On sait déjà (7.2.10) que, pour que Z soit une partie pro-constructible de Y, il faut et il suffit que $f^{-1}(Z)$ soit une partie pro-constructible de X. La condition de l'énoncé est évidemment nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, considérons le sous-schéma fermé réduit Y_1 de Y ayant $\bar{Z}$ pour espace sous-jacent, et soit X_1 le sous-schéma de X image réciproque de Y_1 par f, qui a pour espace sous-jacent $f^{-1}(\bar{Z}) = \overline{f^{-1}(Z)}$ en vertu de (7.3.3). Comme $f^{-1}(Z)$ est localement fermé dans X, il est ouvert dans $\overline{f^{-1}(Z)}$, donc dans X_1; or le morphisme $f_1: X_1 \to Y_1$ déduit de f par restriction est générisant (3.9.2.1), quasi-compact et surjectif; on déduit donc de (7.3.5) que Z est ouvert dans $\bar{Z}$, ce qui montre que Z est localement fermé dans Y.

Remarque **(7.3.8)** Si $f: X \to Y$ est un morphisme *fidèlement plat* mais non quasi-compact, la topologie de Y n'est pas nécessairement quotient de celle de X par la relation d'équivalence définie par f. Par exemple, soit $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau principal ayant une infinité d'idéaux maximaux, et soit X le schéma *somme* des schémas $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, où y parcourt Y; prenons pour f le morphisme canonique, qui est fidèlement plat; si η désigne le point générique de Y, $Z = \{\eta\}$ n'est pas ouvert dans Y (les ensembles fermés de Y autres que Y étant les parties finies ne contenant pas η), mais $f^{-1}(Z) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\eta})$ puisque $\mathcal{O}_{Y,\eta}$ est un corps, et par suite $f^{-1}(Z)$ est ouvert dans X.

Lemme (7.3.9) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de présentation finie. Pour qu'un point* $y \in Y$ *soit intérieur à* $f(X)$, *il faut et il suffit que toute générisation de* y *dans* Y *appartienne à* $f(X)$.

C'est une conséquence immédiate de (7.3.1) appliqué à $f(X)$, puisque $f(X)$ est ind-constructible dans Y en vertu de (7.2.3,(viii)).

Proposition (7.3.10) *Soit $f: X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie. Pour que f soit ouvert en un point $x \in X$* (resp. *ouvert*, resp. *universellement ouvert en x*, resp. *universellement ouvert*), *il faut et il suffit que f soit générisant au point x* (resp. *générisant*, resp. *universellement générisant au point x*, resp. *universellement générisant*). *En particulier, un morphisme plat et localement de présentation finie est universellement ouvert.*

On n'a à prouver que la suffisance des conditions (3.9.4), et on peut se limiter à montrer que si f est générisant au point x, il est ouvert au point x. Mais il suffit pour cela d'appliquer (7.3.9) à la restriction $U \to Y$ de f à un voisinage ouvert arbitraire U de x.

Corollaire (7.3.11) *Soient $f: X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie, x un point de X, $y = f(x)$; posons $Y_1 = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$, $X_1 = X_{(Y_1)}$, $f_1 = f_{(Y_1)}: X_1 \to Y_1$. Pour que f soit ouvert* (resp. *universellement ouvert*) *au point x, il faut et il suffit que f_1 le soit* (on rappelle que X_1 est canoniquement identifié à un sous-espace de X (3.4.4)).

La condition est trivialement nécessaire; montrons qu'elle est suffisante. Il est clair que si f_1 est générisant au point x, il en est de même de f; donc il n'y a qu'à prouver, en vertu de (7.3.10) (et compte tenu de (6.2.6,(iii))) que lorsque f_1 est universellement générisant au point x, il en est de même de f. Or, soit $g: Y' \to Y$ un morphisme changement de base; posons $X' = X_{(Y')}$, $f' = f_{(Y')}$, et soient x' un point de X' au-dessus de x, et $y' = f(x')$. Posons $Y'_1 = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y',y'})$, $X'_1 = X' \times_{Y'} Y'_1$, $f'_1 = f'_{(Y')}$; comme $g(y') = y$, le morphisme composé $Y'_1 \longrightarrow Y' \xrightarrow{g} Y$ se factorise en $Y'_1 \to Y_1 \to Y$ (2.5.2), donc $X'_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1$ et $f'_1 = (f_1)_{(Y')}$; l'hypothèse entraîne que f'_1 est générisant au point x', donc il en est de même de f'.

Remarques **(7.3.12)** (i) On notera qu'un morphisme $f: X \to Y$ fidèlement plat et quasi-compact *n'est pas nécessairement ouvert*, même lorsque X et Y sont noethériens. Prenons par exemple le même schéma Y que dans (7.3.8) et soit X le schéma somme $Y \amalg \mathrm{Spec}(\kappa(\eta))$, f étant le morphisme canonique; il est clair que f est plat et surjectif, donc fidèlement plat, et en outre quasi-compact; mais l'image par f de la partie ouverte $\mathrm{Spec}(\kappa(\eta))$ de X est $\{\eta\}$, qui n'est pas ouvert dans Y.

(ii) Il est facile d'autre part de donner des exemples de morphismes de type fini, universellement ouverts $f: X \to Y$, où X et Y sont noethériens, et qui cependant *ne sont pas plats*. Prenons par exemple $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau local noethérien non réduit, $X = Y_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(A_{\mathrm{red}})$, pour f le morphisme canonique, qui est un *homéomorphisme universel* (4.5.3). Cependant f n'est pas plat, car sinon A_{red} serait un A-module fidèlement plat (**0**, 6.6.1) et l'homomorphisme $A \to A_{\mathrm{red}}$ serait alors injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, prop. 8), ce qui est absurde.

Proposition (7.3.13) *Soit* Y *un schéma* discret. *Alors tout morphisme $f: X \to Y$ est universellement ouvert.*

La question étant locale sur Y (3.8.2,(v)), on peut se borner au cas où l'espace sous-jacent Y est réduit à un point; remplaçant f par f_{red} (4.5.14), on peut en outre supposer que Y est le spectre d'un *corps k*; d'autre part, pour tout changement de base $Y' \to Y$, les ouverts de $X' = X \times_Y Y'$ images réciproques des ouverts affines de X recouvrent X', donc on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(B)$ affine, B étant une *k-algèbre*. Il s'agit donc de prouver que pour toute k-algèbre A', si l'on pose $B' = B \otimes_k A'$, l'image par $f': \mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(A')$ de tout ouvert de la forme

$U=D(t)$ ($t\in B'$) est ouverte dans Spec(A'). Or, B est limite inductive de la famille filtrante croissante (B_α) de ses sous-k-algèbres *de type fini*, donc (le foncteur $\varinjlim$ commutant au produit tensoriel), B' est limite inductive des A'-algèbres $B_\alpha\otimes_k A'=B'_\alpha$; il existe α tel que t soit image dans B' d'un élément $t_\alpha\in B'_\alpha$, donc $D(t)$ est l'image réciproque par le morphisme canonique $u_\alpha:\mathrm{Spec}(B')\to\mathrm{Spec}(B'_\alpha)$ de l'ouvert $U_\alpha=D(t_\alpha)$ (1.2.2.2). Mais comme k est un corps, B_α est une k-algèbre de présentation finie et un k-module plat, donc B'_α est une A'-algèbre de présentation finie et un A'-module plat; on conclut donc de (7.3.10) que l'image de U_α par $f'_\alpha:\mathrm{Spec}(B'_\alpha)\to\mathrm{Spec}(A')$ est *ouverte* dans Spec(A'). Tout revient par suite à voir que $f'(U)=f'_\alpha(U_\alpha)$; il est clair que $f'(U)\subset f'_\alpha(U_\alpha)$ et il reste donc à voir que pour tout point $y'\in f'_\alpha(U_\alpha)$, l'intersection $V=U\cap f'^{-1}(y')$ n'est pas vide. Or on a $V=u_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, où $V_\alpha=U_\alpha\cap f'^{-1}_\alpha(y')$; autrement dit, V_α est un ouvert non vide (par définition de y') du schéma $\mathrm{Spec}(B'_\alpha\otimes_{A'}\kappa(y'))=\mathrm{Spec}(B_\alpha\otimes_k\kappa(y'))$ et V est son image réciproque par le morphisme $v:\mathrm{Spec}(B\otimes_k\kappa(y'))\to\mathrm{Spec}(B_\alpha\otimes_k\kappa(y'))$. Comme B_α est une sous-algèbre de B et que k est un corps, l'homomorphisme $B_\alpha\otimes_k\kappa(y')\to B\otimes_k\kappa(y')$ est *injectif* par platitude, donc le morphisme v est *dominant* (1.2.7), ce qui achève la démonstration.

Corollaire (7.3.14) *Soient k un corps, X, Y des k-schémas; alors le morphisme projection $X\times_k Y\to X$ est universellement ouvert. En particulier, pour toute extension K de k, le morphisme projection $X_{(K)}\to X$ est universellement ouvert.*

Il suffit d'appliquer (7.3.13) au morphisme structural $Y\to\mathrm{Spec}(k)$.

Corollaire (7.3.15) *Soit $f:X\to Y$ un morphisme de schémas. Pour tout $y\in Y$, l'ensemble des points $x\in f^{-1}(y)$ où f est universellement ouvert est une partie fermée de $f^{-1}(y)$.*

En effet, si en un point $x\in f^{-1}(y)$, f n'est pas universellement ouvert, il y a un morphisme $Y'\to Y$ tel que, si $f'=f_{(Y')}:X_{(Y')}\to Y'$, il y ait un $y'\in Y'$ au-dessus de y et un $x'\in f'^{-1}(y')$ au-dessus de x, où f' n'est pas ouvert. Mais alors (**0**, 2.8.4), il y a un voisinage V' de x' dans $f'^{-1}(y')$ où f' n'est pas ouvert, et en vertu de (7.3.14) la projection V de V' sur $f^{-1}(y)$ est un voisinage de x dans $f^{-1}(y)$, aux points duquel f n'est évidemment pas universellement ouvert.

Remarque **(7.3.16)** Si $f:X\to Y$ est un morphisme *ouvert*, on sait que, pour *toute* partie E de Y, on a $f^{-1}(\bar{E})=\overline{f^{-1}(E)}$ (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I, 4e éd., § 5, n° 4, prop. 7). Cette remarque s'applique par exemple lorsque f est un morphisme *plat localement de présentation finie* (7.3.10), ou un morphisme projection $X\times_k Y\to X$ où X, Y sont des schémas sur un corps k (7.3.14), et généralise alors (7.3.3).

§ 8. Applications rationnelles

8.1. Applications rationnelles et fonctions rationnelles

(8.1.1) Soient X, Y deux schémas, U, V, deux ouverts denses dans X, f (resp. g) un morphisme de U (resp. V) dans Y; nous dirons que f et g sont *équivalents* s'ils coïncident dans un ouvert dense dans $U\cap V$. Comme une intersection finie d'ouverts denses dans X est un ouvert dense dans X, il est clair que cette relation est une *relation d'équivalence.*

Définition (8.1.2) *Étant donnés deux schémas* X, Y, *on appelle* application rationnelle de X dans Y *une classe d'équivalence de morphismes de parties ouvertes*

denses de X *dans* Y, *pour la relation définie dans* (8.1.1). *Si* X *et* Y *sont des* S-*schémas, on dit qu'une telle classe est une* S-*application rationnelle s'il existe un représentant de cette classe qui est un* S-*morphisme. On appelle* S-*section rationnelle de* X *toute* S-*application rationnelle de* S *dans* X. *On appelle fonction rationnelle sur un schéma* X *toute* X-*section rationnelle du* X-*schéma* $X \otimes_Z \mathbf{Z}[T]$ *(où* T *est une indéterminée).*

Par abus de langage, lorsqu'il ne sera question que de S-schémas, on dira «application rationnelle» au lieu de «S-application rationnelle» si aucune confusion ne peut en résulter.

Soient f une application rationnelle de X dans Y, U un ouvert de X; si f_1, f_2 sont des morphismes appartenant à la classe f, définis respectivement dans des ouverts denses V, W de X, les restrictions $f_1|(U \cap V)$, $f_2|(U \cap W)$ coïncident dans $U \cap V \cap W$ qui est dense dans U; la classe de morphismes f définit donc une application rationnelle de U dans Y, appelée *restriction de* f *à* U et notée $f|U$.

Si, à tout S-morphisme $f: X \to Y$, on fait correspondre la S-application rationnelle à laquelle appartient f, on définit une application canonique de $\mathrm{Hom}_S(X,Y)$ dans l'ensemble des S-applications rationnelles de X dans Y. On désigne par $\Gamma_{rat}(X/Y)$ l'ensemble des Y-sections rationnelles de X, et on a donc une application canonique $\Gamma(X/Y) \to \Gamma_{rat}(X/Y)$. Il est clair en outre que si X et Y sont deux S-schémas, l'ensemble des S-applications rationnelles de X dans Y s'identifie canoniquement à $\Gamma_{rat}((X \times_S Y)/X)$ (**0**, 1.3.7).

(8.1.3) Il résulte aussitôt de (8.1.2) et de (**0**, 1.3.7) que les fonctions rationnelles sur X s'identifient canoniquement aux *classes d'équivalence des sections du faisceau structural* $\mathscr{O}_X$ au-dessus d'ouverts partout denses de X, deux telles sections étant équivalentes si elles coïncident dans un ouvert partout dense contenu dans l'intersection de leurs ensembles de définition. Il en résulte en particulier que les fonctions rationnelles sur X forment un *anneau* R(X).

(8.1.4) Lorsque X est un schéma *irréductible*, tout ouvert non vide est dense dans X; on peut encore dire que les ouverts non vides de X sont les *voisinages ouverts du point générique* x de X. Dire que deux morphismes de parties ouvertes non vides de X dans Y sont équivalents signifie donc dans ce cas qu'ils ont *même germe* au point x. Autrement dit, les applications rationnelles (resp. S-applications rationnelles) $X \to Y$ s'identifient aux *germes* au point générique x de X *de morphismes* (resp. de S-morphismes) dans Y. En particulier:

Proposition (8.1.5) *Si* X *est un schéma irréductible, l'anneau* R(X) *des fonctions rationnelles sur* X *s'identifie canoniquement à l'anneau local* $\mathscr{O}_x$ *du point générique* x *de* X. *C'est un anneau local de dimension* 0, *et par suite un anneau local artinien lorsque* X *est noethérien*; *c'est un corps lorsque* X *est intègre, et il s'identifie au corps des fractions de* A(X) *lorsqu'en outre* X *est un schéma affine.*

Vu ce qui précède et l'identification des fonctions rationnelles aux sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus d'un ouvert partout dense, la première assertion n'est autre que la définition de la fibre d'un faisceau en un point. Pour les autres assertions, on peut se borner au cas où X est affine d'anneau A; alors $\mathfrak{j}_x$ est le nilradical de A, et $\mathscr{O}_x$ est donc de dimension 0; si A est intègre, $\mathfrak{j}_x = (0)$, et $\mathscr{O}_x$ est donc le corps des fractions de A. Enfin, si A est noethérien, on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 7, cor. de la prop. 15) que $\mathfrak{j}_x$ est nilpotent et $\mathscr{O}_x = A_x$ artinien.

Si X est *intègre*, l'anneau $\mathscr{O}_z$ est intègre pour tout $z \in X$; tout ouvert affine U contenant z contient aussi x, et R(U), égal au corps des fractions de A(U), s'identifie donc à R(X); on en conclut que R(X) s'identifie aussi au *corps des fractions de* $\mathscr{O}_z$: l'identification canonique de $\mathscr{O}_z$ à un sous-anneau de R(X) consiste à faire corres-

pondre à tout germe de section $s \in \mathscr{O}_z$ l'unique fonction rationnelle sur X, classe d'une section de $\mathscr{O}_X$ (nécessairement définie sur un ouvert partout dense) ayant pour germe s au point z.

(8.1.6) Supposons que l'ensemble des composantes irréductibles de X soit *localement fini*; soit (X_λ) la famille de ces composantes. L'ensemble des intersections $X_\lambda \cap X_\mu$ pour $\lambda \neq \mu$ est alors localement fini, donc la réunion de ces ensembles est fermée et ne contient aucun des points maximaux de X; si X'_λ est l'ouvert de X, complémentaire par rapport à X_λ de la réunion des $X_\lambda \cap X_\mu$ pour $\lambda \neq \mu$, X'_λ est irréductible, son point générique est celui de X_λ et les X'_λ sont deux à deux disjoints, leur réunion étant dense dans X. Pour tout ouvert U partout dense dans X, $U'_\lambda = U \cap X'_\lambda$ est un ouvert non vide dense dans X'_λ, les U'_λ étant deux à deux disjoints, donc $U' = \bigcup_\lambda U'_\lambda$ est dense dans X. Se donner un morphisme de U' dans Y revient à se donner (arbitrairement) un morphisme de chacun des U'_λ dans Y. Par suite (8.1.4):

Proposition (8.1.7) *Soient* X, Y *deux schémas* (resp. S-*schémas*) *tels que la famille* (X_λ) *des composantes irréductibles de* X *soit localement finie*; *pour chaque* λ, *soit* x_λ *le point générique de* X_λ. *Si* R_λ *est l'ensemble des germes au point* x_λ *de morphismes* (resp. S-*morphismes*) *dans* Y, *l'ensemble des applications rationnelles* (resp. S-*applications rationnelles*) *de* X *dans* Y *s'identifie au produit des* R_λ. *En particulier, l'anneau des fonctions rationnelles sur* X *s'identifie au produit des anneaux locaux* $\mathscr{O}_{X,x}$.

Corollaire (8.1.8) *Soit* X *un schéma noethérien. L'anneau des fonctions rationnelles sur* X *est un anneau artinien, dont les composants locaux sont les anneaux locaux* $\mathscr{O}_{x_i}$ *des points maximaux* x_i *de* X.

Corollaire (8.1.9) *Soient* A *un anneau noethérien, et soit* $X = \mathrm{Spec}(A)$. *Si* Q *est le complémentaire de la réunion des idéaux premiers minimaux de* A, *l'anneau des fonctions rationnelles sur* X *s'identifie canoniquement à l'anneau de fractions* $Q^{-1}A$.

Cela résultera du lemme suivant:

Lemme (8.1.9.1) *Pour qu'un élément* $f \in A$ *soit tel que* $D(f)$ *soit partout dense dans* X, *il faut et il suffit que* $f \in Q$; *tout ouvert dense dans* X *contient un ouvert de la forme* $D(f)$, *où* $f \in Q$.

En effet, supposons ce lemme démontré; l'anneau des sections $\Gamma(D(f), \mathscr{O}_X)$ s'identifiant à A_f ((1.3.6) et (1.3.7)), il résulte du fait que les $D(f)$ avec $f \in Q$ forment un ensemble cofinal dans l'ensemble ordonné (pour $\supset$) des ouverts denses dans X, et de la déf. (8.1.1), que l'anneau des fonctions rationnelles sur X s'identifie à la limite inductive des A_f pour $f \in Q$ (pour la relation de préordre «g est multiple de f»), c'est-à-dire à $Q^{-1}A$.

Pour démontrer (8.1.9.1), désignons encore par X_i les composantes irréductibles de X $(1 \leqslant i \leqslant n)$; si $D(f)$ est dense dans X, $D(f) \cap X_i \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et réciproquement; mais cela signifie que $f \notin \mathfrak{p}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, en posant $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{j}(X_i)$, et comme les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers minimaux de A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, cor. 2 de la prop. 14), les relations $f \notin \mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ équivalent à $f \in Q$, d'où la première assertion du lemme. D'autre part, si U est un ouvert dense dans X, le complémentaire de U est un ensemble de la forme $V(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal qui n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{p}_i$; il n'est donc pas contenu dans leur réunion (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2), et il existe donc un $f \in \mathfrak{a}$ appartenant à Q; d'où $D(f) \subset U$, ce qui achève la démonstration.

(8.1.10) Supposons de nouveau X irréductible, de point générique x. Comme tout ouvert non vide U de X contient x, et par suite contient aussi tout $z \in X$ tel que $x \in \{z\}$, tout morphisme $U \to Y$ peut se composer avec le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x) \to X$ (2.5.1); et deux morphismes dans Y de deux parties ouvertes non vides de X, qui coïncident dans une partie ouverte non vide de X, donnent par composition le même morphisme $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x) \to Y$. Autrement dit, à toute application rationnelle de X dans Y correspond ainsi un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x) \to Y$ bien déterminé.

Proposition (8.1.11) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas; on suppose* X *irréductible, de point générique* x, *et* Y *localement de type fini sur* S. *Deux* S*-applications rationnelles de* X *dans* Y, *auxquelles correspond le même* S*-morphisme* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x) \to Y$, *sont identiques. Si on suppose de plus* Y *localement de présentation finie, tout* S*-morphisme de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *dans* Y *correspond à une* S*-application rationnelle (et une seule) de* X *dans* Y.

Compte tenu de ce que tout ouvert non vide de X est partout dense, cela résulte aussitôt de (6.6.1).

Corollaire (8.1.12) *On suppose* Y *localement de présentation finie, et les autres hypothèses de* (8.1.11) *satisfaites. Les* S*-applications rationnelles de* X *dans* Y *s'identifient alors aux points du* S*-schéma* Y, *à valeurs dans le* S*-schéma* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$.

Cela n'est autre que (8.1.11), avec la terminologie introduite dans (3.5.1).

Corollaire (8.1.13) *On suppose remplies les conditions de* (8.1.12). *Soit* s *l'image de* x *dans* S. *La donnée d'une* S*-application rationnelle de* X *dans* Y *équivaut à la donnée d'un point* y *de* Y *au-dessus de* s, *et d'un* $\mathscr{O}_s$*-homomorphisme local* $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x = R(X)$.

Cela résulte de (8.1.11) et de (2.5.3).

En particulier:

Corollaire (8.1.14) *Sous les conditions de* (8.1.12), *les* S*-applications rationnelles de* X *dans* Y *ne dépendent (pour* Y *donné) que du* S*-schéma* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *et en particulier restent les mêmes lorsqu'on remplace* X *par* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_z)$, *pour tout* $z \in X$.

En effet, comme $z \in \{x\}$, x est le point générique de $Z = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_z)$, et $\mathscr{O}_{X,x} = \mathscr{O}_{Z,x}$.

Lorsque X est intègre, $R(X) = \mathscr{O}_x = \kappa(x)$ est un corps (8.1.5); les corollaires précédents se spécialisent alors en:

Corollaire (8.1.15) *On suppose vérifiées les conditions de* (8.1.12) *et en outre que* X *est intègre. Soit* s *l'image de* x *dans* S. *Alors les* S*-applications rationnelles de* X *dans* Y *s'identifient aux points de* $Y \otimes_S \kappa(s)$ *à valeurs dans l'extension* $R(X)$ *de* $\kappa(s)$, *autrement dit chacune d'elles équivaut à la donnée d'un point* $y \in Y$ *au-dessus de* s *et d'un* $\kappa(s)$*-monomorphisme de* $\kappa(y)$ *dans* $\kappa(x) = R(X)$.

Les points de Y au-dessus de s s'identifient en effet à ceux de $Y \otimes_S \kappa(s)$ (3.4.6) et les $\mathscr{O}_s$-homomorphismes locaux $\mathscr{O}_y \to R(X)$ aux $\kappa(s)$-monomorphismes $\kappa(y) \to R(X)$.

Plus particulièrement:

Corollaire (8.1.16) *Soient* k *un corps,* X, Y *deux préschémas localement algébriques* (6.5.1) *sur* k; *on suppose en outre* X *intègre. Alors les* k*-applications rationnelles de* X *dans* Y *s'identifient aux points de* Y *à valeurs dans l'extension* $R(X)$ *de* k (3.5.4).

8.2. Domaine de définition d'une application rationnelle

(8.2.1) Soient X, Y deux schémas, f une application rationnelle de X dans Y. On dit que f est *définie en un point* $x \in X$ s'il existe un ensemble ouvert partout dense U contenant x et un morphisme $U \to Y$ appartenant à la classe d'équivalence f. L'ensemble des points $x \in X$ où f est définie est appelé le *domaine de définition* de f; il est clair que c'est un ouvert partout dense dans X.

Proposition (8.2.2) *Soient* X, Y *deux* S-*schémas, tels que* X *soit réduit et* Y *séparé sur* S. *Soit* f *une* S-*application rationnelle de* X *dans* Y, U_0 *son domaine de définition. Il existe alors un* S-*morphisme et un seul* $U_0 \to Y$ *appartenant à la classe* f.

Comme pour tout morphisme $U \to Y$ appartenant à la classe f, on a nécessairement $U \subset U_0$, il est clair que la proposition sera conséquence du

Lemme (8.2.2.1) *Sous les hypothèses de* (8.2.2), *soient* U_1, U_2 *deux ouverts partout denses de* X, $f_i : U_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ *deux* S-*morphismes tels qu'il existe un ouvert* $V \subset U_1 \cap U_2$ *dense dans* X *et dans lequel* f_1 *et* f_2 *coïncident. Alors* f_1 *et* f_2 *coïncident dans* $U_1 \cap U_2$.

On peut évidemment se borner au cas où $X = U_1 = U_2$. Comme X (donc V) est réduit, X est le plus petit sous-schéma fermé de X majorant V (4.6.2). Soit $g = (f_1, f_2)_S : X \to Y \times_S Y$; comme par hypothèse la diagonale $T = \Delta_Y(Y)$ est un sous-schéma fermé de $Y \times_S Y$, $Z = g^{-1}(T)$ est un sous-schéma fermé de X (4.3.1). Si $h : V \to Y$ est la restriction commune de f_1 et f_2 à V, la restriction de g à V est $g' = (h, h)_S$, qui se factorise en $g' = \Delta_Y \circ h$; comme $\Delta_Y^{-1}(T) = Y$, on a $g'^{-1}(T) = V$, et par suite Z est un sous-schéma fermé de X induisant V, donc majorant V, ce qui entraîne $Z = X$. De la relation $g^{-1}(T) = X$, on déduit (4.3.1) que g se factorise en $\Delta_Y \circ f$, où f est un morphisme $X \to Y$, ce qui entraîne par définition du morphisme diagonal que $f_1 = f_2 = f$.

Il est clair que le morphisme $U_0 \to Y$ défini dans (8.2.2) est l'unique morphisme de la classe f qui *ne puisse être prolongé* à un morphisme d'une partie ouverte de X contenant strictement U_0. *Sous les hypothèses de* (8.2.2), on peut donc *identifier* les applications rationnelles de X dans Y aux morphismes *non prolongeables* (à des ouverts strictement plus grands) d'ouverts partout denses de X dans Y. Avec cette identification, la prop. (8.2.2) entraîne:

Corollaire (8.2.3) *Les hypothèses sur* X *et* Y *étant celles de* (8.2.2), *soit* U *un ouvert partout dense de* X. *Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les* S-*morphismes de* U *dans* Y *et les* S-*applications rationnelles de* X *dans* Y *définies en tous les points de* U.

En vertu de (8.2.2), pour tout S-morphisme f de U dans Y, il existe en effet une S-application rationnelle et une seule $\bar{f}$ de X dans Y qui prolonge f.

Corollaire (8.2.4) *Soient* S *un schéma separé,* X *un* S-*schéma réduit,* Y *un* S-*schéma séparé,* $f : U \to Y$ *un* S-*morphisme d'un ouvert dense* U *de* X *dans* Y. *Si* $\bar{f}$ *est la* Z-*application rationnelle de* X *dans* Y *qui prolonge* f, $\bar{f}$ *est un* S-*morphisme (et est par suite la* S-*application rationnelle de* X *dans* Y *prolongeant* f).

En effet, si $\varphi : X \to S$, $\psi : Y \to S$ sont les morphismes structuraux, U_0 le domaine de définition de $\bar{f}$, j l'injection $U_0 \to X$, il suffit de prouver que $\psi \circ \bar{f} = \varphi \circ j$, ce qui résulte aussitôt de (8.2.2.1), puisque f est un S-morphisme.

Corollaire (8.2.5) *Soient* X, Y *deux* S-*schémas; on suppose* X *réduit,* X *et* Y *séparés sur* S. *Soient* $p : Y \to X$ *un* S-*morphisme (faisant de* Y *un* X-*schéma),* U *un ouvert partout dense de* X, f *une* U-*section de* Y; *alors l'application rationnelle* $\bar{f}$ *de* X *dans* Y *prolongeant* f *est une* X-*section rationnelle de* Y.

Il faut prouver que $p \circ \vec{f}$ est l'identité dans le domaine de définition de $\vec{f}$; puisque X est séparé sur S, cela résulte encore de (8.2.2.1).

Corollaire (8.2.6) *Soient* X *un schéma réduit,* U *un ouvert partout dense de* X. *Il y a correspondance biunivoque canonique entre les sections de* $\mathscr{O}_X$ *au-dessus de* U *et les fonctions rationnelles f sur* X *définies en tout point de* U.

Compte tenu de (8.2.3), (8.1.2) et (8.1.3), il suffit de remarquer que le X-schéma $X \otimes_Z \mathbf{Z}[T]$ est séparé au-dessus de X (5.3.1, (iv)).

Corollaire (8.2.7) *Soient* Y *un schéma réduit,* $f: X \to Y$ *un morphisme séparé,* U *un ouvert partout dense de* Y, $g: U \to f^{-1}(U)$ *une* U*-section de* $f^{-1}(U)$, Z *le sous-schéma réduit de* X *ayant* $\overline{g(U)}$ *pour espace sous-jacent* (4.6.1). *Pour que g soit restriction d'une* Y*-section de* X (autrement dit (8.2.5), pour que l'application rationnelle de Y dans X prolongeant g soit partout définie), *il faut et il suffit que la restriction de f à* Z *soit un isomorphisme de* Z *sur* Y.

La restriction de f à $f^{-1}(U)$ est un morphisme séparé (5.3.1, (i)), donc g est une immersion fermée (5.2.4), et par suite $g(U) = Z \cap f^{-1}(U)$ et le sous-schéma induit par Z sur l'ouvert $g(U)$ de Z est identique au sous-schéma fermé de $f^{-1}(U)$ associé à g (4.6.1). Il est clair alors que la condition de l'énoncé est suffisante, car si elle est remplie et si $f_Z: Z \to Y$ est la restriction de f à Z et $\bar{g}: Y \to Z$ l'isomorphisme réciproque, $\bar{g}$ prolonge g. Inversement, si g est restriction à U d'une Y-section h de X, h est une immersion fermée (5.2.4), donc $h(Y)$ est fermé, et comme il est contenu dans Z, il est égal à Z, et il résulte de (4.6.1) que h est nécessairement un isomorphisme de Y sur le sous-schéma fermé Z de X.

(8.2.8) Soient X, Y deux S-schémas, X étant supposé réduit et Y séparé sur S. Soit f une S-application rationnelle de X dans Y, et soit x un point de X; on peut composer f avec le S-morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x) \to X$ (2.5.1) pourvu que la trace sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ du domaine de définition de f soit dense dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ (identifié à l'ensemble des $z \in X$ tels que $x \in \{z\}$ (2.5.2)). Ceci aura lieu lorsque l'ensemble des composantes irréductibles de X est *localement fini*; cela résulte en effet du

Lemme (8.2.8.1) *Soient* X *un schéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini, x un point de* X. *Les composantes irréductibles de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *sont les traces sur* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *des composantes irréductibles de* X *contenant x. Pour qu'un ouvert* $U \subset X$ *soit tel que* $U \cap \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *soit dense dans* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$, *il faut et il suffit qu'il rencontre les composantes irréductibles de* X *contenant x* (ce qui a lieu en particulier si U est *dense* dans X).

La seconde assertion résulte évidemment de la première, et il suffit donc de démontrer celle-ci. Comme $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ est contenu dans tout ouvert affine U contenant x, et que les composantes irréductibles de U contenant x sont les traces sur U des composantes irréductibles de X contenant x (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 1, prop. 7), on peut supposer X affine d'anneau A. Comme les idéaux premiers de A_x correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{j}_x$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, cor. 2 de la prop. 14), les idéaux premiers minimaux de A_x correspondent aux idéaux premiers minimaux de A contenus dans $\mathfrak{j}_x$, d'où le lemme (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 5, prop. 11).

Cela étant, supposons que l'on soit dans le cas précité. Si U est le domaine de définition de la S-application rationnelle f, désignons par f' l'application rationnelle de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ dans Y qui coïncide (compte tenu de (2.5.2)) avec f dans $U \cap \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$; nous dirons que cette application rationnelle est *induite par f*.

Proposition (8.2.9) *Soient* S *un schéma,* X *un* S*-schéma réduit,* Y *un* S*-schéma séparé sur* S *et localement de présentation finie sur* S. *On suppose en outre que l'ensemble des composantes irréductibles de* X *soit localement fini. Soient alors f une* S*-application rationnelle de* X *dans* Y, *x un point de* X. *Pour que f soit définie au point x, il faut et il suffit que l'application rationnelle f' de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *dans* Y, *induite par f* (8.2.8), *soit un morphisme.*

La condition étant évidemment nécessaire (puisque $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ est contenu dans tout ouvert contenant x), prouvons qu'elle est suffisante. En vertu de (6.6.1), il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un S-morphisme g de U dans Y, induisant f' sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$. Il n'y a qu'un nombre fini de composantes irréductibles X_i de X contenant x (8.2.8.1), et on peut supposer que ce sont les seules rencontrant U, en remplaçant au besoin U par un ouvert plus petit. Comme les points génériques des X_i appartiennent au domaine de définition de f (8.2.2), on voit que f et g coïncident dans un ouvert non vide de chacun des X_i (6.6.1). Tenant compte du fait que chacun des X_i est contenu dans $\bar{U}$, considérons alors le morphisme f_1, défini dans un ouvert dense de $U \cup (X - \bar{U})$, égal à g dans U et à f dans l'intersection de $X - \bar{U}$ et du domaine de définition de f. Comme $U \cup (X - \bar{U})$ est dense dans X, f_1 et f coïncident dans un ouvert dense de X, et comme f est une application rationnelle, f est une extension de f_1 (8.2.3), donc est définie au point x.

(8.2.10) Pour énoncer les deux résultats suivants, nous nous servirons d'une terminologie qui sera justifiée et discutée au chap. IV: si F est une partie d'un schéma Y, on appelle *codimension* de F dans Y et on note $\mathrm{codim}_Y F$ la borne inférieure des entiers $\dim(\mathscr{O}_{Y,z})$ (**IV***, 5.1.3) où z parcourt F.

Corollaire (8.2.11) *Soient* Y *un schéma localement noethérien réduit,* N *l'ensemble des points* $y \in Y$ *ou* Y *n'est pas régulier* (**0**, 4.1.4); *on suppose que* $\mathrm{codim}_Y N \geqslant 2$ (8.2.10). *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme de type fini,* séparé *et* fermé, *et soit g une* Y*-section rationnelle de* X; *si* Y' *est l'ensemble des points de* Y *où g n'est pas définie* (ensemble qui est *fermé* (8.2.1)), *on a* $\mathrm{codim}_Y Y' \geqslant 2$.

Il suffit de prouver que g est définie en tout point $z \in Y$ tel que $\dim \mathscr{O}_{Y,z} \leqslant 1$. Si $\dim \mathscr{O}_{Y,z} = 0$, z est point maximal de Y (1.1.5.1), donc appartient à tout ouvert partout dense de Y, et en particulier au domaine de définition de g. Supposons donc que $\dim \mathscr{O}_{Y,z} = 1$; $\mathscr{O}_{Y,z}$ est alors par hypothèse un anneau local noethérien régulier de dimension 1, donc (**0**, 6.5.7) un *anneau de valuation discrète.* Soit $Z = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,z})$; comme $U = Y - Y'$ est partout dense, $U \cap Z$ n'est pas vide (2.5.2); soit g' l'application rationnelle de Z dans X induite par g (8.2.8); il suffit de montrer que g' est un *morphisme* (8.2.9). Or, g' peut être considérée comme une Z-section rationnelle du Z-schéma $f^{-1}(Z) = X \times_Y Z$; il est clair que le morphisme $f^{-1}(Z) \to Z$, restriction de f, est fermé, et il résulte alors de (5.5.7) qu'une section au-dessus du point générique de Z se prolonge d'une seule manière en une Z-section de $f^{-1}(Z)$; donc g' est partout définie, et par suite un morphisme puisque Z est réduit et X séparé (8.2.2).

Corollaire (8.2.12) *Soient* S *un schéma,* X *et* Y *deux* S*-schémas*; *on suppose* Y *réduit et localement noethérien, et en outre que l'ensemble* N *des points* $y \in Y$ *où* Y *n'est pas régulier soit tel que* $\mathrm{codim}_Y N \geqslant 2$; *on suppose enfin que le morphisme structural* $X \to S$ *soit séparé et universellement fermé. Soit f une* S*-application rationnelle de* Y *dans* X *et soit* Y' *l'ensemble des points de* Y *où f n'est pas définie*; *alors on a* $\mathrm{codim}_Y Y' \geqslant 2$.

On sait (8.1.2) qu'on peut identifier les S-applications rationnelles de Y dans X aux Y-sections rationnelles de $X \times_S Y$; comme le morphisme structural $X \times_S Y \to Y$ est séparé (5.3.1) et fermé, on peut appliquer (8.2.11), d'où le corollaire.

Remarque **(8.2.13)** Les hypothèses faites sur Y dans (8.2.11) et (8.2.12) seront en particulier réalisées lorsque Y est localement noethérien et *normal* (**0**, 4.1.4), en vertu de (**0**, 6.5.7).

8.3. Faisceau des fonctions rationnelles

(8.3.1) Soit X un schéma. Pour tout ouvert $U \subset X$, désignons par R(U) l'anneau des fonctions rationnelles sur U (8.1.3); c'est une $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-algèbre. En outre, si $V \subset U$ est un second ouvert de X, toute section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus d'une partie ouverte partout dense de U donne par restriction à V une section au-dessus d'une partie ouverte partout dense de V, et si deux sections coïncident au-dessus d'une partie ouverte partout dense de U, leurs restrictions à V coïncident au-dessus d'une partie ouverte partout dense de V. On définit donc ainsi un di-homomorphisme d'algèbres $\rho_{V,U} : R(U) \to R(V)$, et il est clair que si $U \supset V \supset W$ sont trois ouverts de X, on a $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$; les R(U) définissent donc un *préfaisceau* d'algèbres sur X.

Définition (8.3.2) *On appelle faisceau des fonctions rationnelles sur un schéma* X *et on désigne par* $\mathscr{R}(X)$ *la* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre associée au préfaisceau formé des* R(U).

Pour tout schéma X et tout ouvert $U \subset X$, il est clair que le faisceau induit $\mathscr{R}(X)|U$ n'est autre que $\mathscr{R}(U)$.

Proposition (8.3.3) *Soit* X *un schéma tel que la famille* (X_λ) *de ses composantes irréductibles soit localement finie (ce qui est en particulier le cas lorsque l'espace sous-jacent à* X *est localement noethérien). Alors le* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{R}(X)$ *est quasi-cohérent, et pour tout ouvert* U *de* X, R(U) *est égal à* $\Gamma(U, \mathscr{R}(X))$ *et s'identifie canoniquement au produit des anneaux locaux des points génériques* x_λ *des composantes irréductibles* X_λ *telles que* $U \cap X_\lambda \neq \emptyset$.

Le fait que R(U) est canoniquement identifié au composé direct des $\mathcal{O}_{x_\lambda} = R(X_\lambda)$ tels que $U \cap X_\lambda \neq \emptyset$ résulte de (8.1.7). Montrons en outre que le préfaisceau $U \mapsto R(U)$ vérifie les axiomes des faisceaux, ce qui prouvera que $R(U) = \Gamma(U, \mathscr{R}(X))$. En effet, il vérifie (F 1) d'après ce qui précède. Pour voir qu'il satisfait à (F 2), considérons un recouvrement d'un ouvert U de X par des ouverts $V_\alpha \subset U$; si les $s_\alpha \in R(V_\alpha)$ sont telles que les restrictions de s_α et s_β à $V_\alpha \cap V_\beta$ coïncident pour tout couple d'indices, on en conclut que pour tout indice λ tel que $U \cap X_\lambda \neq \emptyset$, les composantes dans $R(X_\lambda)$ de toutes les s_α telles que $V_\alpha \cap X_\lambda \neq \emptyset$ sont les mêmes; désignant par t_λ cette composante, il est clair que l'élément de R(U) ayant les t_λ pour composantes a pour restriction s_α à chaque V_α. Enfin, pour voir que $\mathscr{R}(X)$ est quasi-cohérent, on peut se limiter au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles; en prenant pour U les ouverts affines de la forme $D(f)$, où $f \in A$, il résulte de ce qui précède et de la définition (1.3.4) que l'on a $\mathscr{R}(X) = \tilde{M}$, où M est somme directe des A-modules A_{x_λ}.

Corollaire (8.3.4) *Soit* X *un schéma réduit n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles, et soient* X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *les sous-schémas fermés réduits de* X *ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de* X (5.2.1). *Si* h_i *est l'injection canonique* $X_i \to X$, $\mathscr{R}(X)$ *est alors composée directe des* $\mathcal{O}_X$*-Algèbres* $(h_i)_*(\mathscr{R}(X_i))$.

Corollaire (8.3.5) *Si* X *est irréductible, tout* $\mathscr{R}(X)$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *est un faisceau simple.*

Il suffit de montrer que tout $x \in X$ admet un voisinage U tel que $\mathscr{F}|U$ soit un faisceau simple (**0**, 3.6.2), autrement dit on est ramené au cas où X est affine; on peut en outre supposer que $\mathscr{F}$ est le conoyau d'un homomorphisme

$(\mathscr{R}(X))^{(I)} \to (\mathscr{R}(X))^{(J)}$ (**0**, 5.1.3), et tout revient à voir que $\mathscr{R}(X)$ est un faisceau simple; mais cela est évident puisque $\Gamma(U, \mathscr{R}(X)) = R(X)$ pour tout ouvert non vide U, U contenant le point générique de X.

Corollaire (8.3.6) *Si* X *est irréductible, pour tout* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ *est un faisceau simple; si en outre* X *est réduit (donc intègre),* $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ *est isomorphe à un faisceau de la forme* $(\mathscr{R}(X))^{(I)}$.

La seconde assertion résulte de ce que R(X) est alors un corps.

Proposition (8.3.7) *Supposons que le schéma* X *soit tel que l'ensemble de ses composantes irréductibles soit localement fini. Alors* $\mathscr{R}(X)$ *est une* $\mathscr{O}_X$*-Algèbre quasi-cohérente; si en outre* X *est réduit, l'homomorphisme canonique* $\mathscr{O}_X \to \mathscr{R}(X)$ *est injectif.*

La question étant locale, la première assertion résulte de (8.3.3); la seconde résulte de (8.2.3).

(8.3.8) Soient X, Y deux schémas *intègres*, ce qui entraîne que $\mathscr{R}(X)$ (resp. $\mathscr{R}(Y)$) est un $\mathscr{O}_X$-Module (resp. un $\mathscr{O}_Y$-Module) quasi-cohérent (8.3.3). Soit $f: X \to Y$ un morphisme *dominant*; alors il existe un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_X$-Modules

$$\tau : f^*(\mathscr{R}(Y)) \to \mathscr{R}(X). \tag{8.3.8.1}$$

Supposons d'abord $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ affines d'anneaux intègres A et B, f correspondant donc à un homomorphisme injectif $B \to A$ (1.2.6), qui se prolonge en un monomorphisme $L \to K$ du corps des fractions L de B dans le corps des fractions K de A. L'homomorphisme (8.3.8.1) correspond alors à l'homomorphisme canonique $L \otimes_B A \to K$ (1.7.7).

Dans le cas général, pour tout couple d'ouverts affines non vides $U \subset X$, $V \subset Y$ tels que $f(U) \subset V$, on définit de la façon précédente un homomorphisme $\tau_{U,V}$ et on constate aussitôt que si $U' \subset U$, $V' \subset V$ et $f(U') \subset V'$, $\tau_{U,V}$ prolonge $\tau_{U',V'}$, d'où notre assertion. Si x et y sont les points génériques de X et Y respectivement, on a $f(x) = y$,

$$(f^*(\mathscr{R}(Y)))_x = \mathscr{O}_y \otimes_{\mathscr{O}_y} \mathscr{O}_x = \mathscr{O}_x$$

(**0**, 4.3.1) et τ_x est donc un *isomorphisme*. Bien entendu, τ lui-même n'est pas nécessairement un isomorphisme: par exemple, si $B = L$ est un corps contenu dans l'anneau intègre A, A étant distinct de son corps des fractions K, l'homomorphisme canonique $L \otimes_B A \to K$ est alors l'homomorphisme canonique $A \to K$, qui n'est pas bijectif.

8.4. Faisceaux de torsion et faisceaux sans torsion

(8.4.1) Soit X un schéma *réduit* dont l'ensemble des composantes irréductibles est *localement fini*. Pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_X \to \mathscr{R}(X)$ définit par tensorisation un homomorphisme (dit encore *canonique*) $\mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}(X)$ qui, sur chaque fibre, n'est autre que l'homomorphisme $z \mapsto z \otimes 1$ de $\mathscr{F}_x$ dans $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} (\mathscr{R}(X))_x$. Le *noyau* $\mathscr{T}$ (noté aussi $\mathscr{T}(\mathscr{F})$) de cet homomorphisme est un sous-$\mathscr{O}_X$-Module de $\mathscr{F}$, appelé *faisceau de torsion* de $\mathscr{F}$; il est quasi-cohérent si $\mathscr{F}$ est quasi-cohérent (8.3.6). On dit que $\mathscr{F}$ est *sans torsion* si $\mathscr{T} = 0$, et que $\mathscr{F}$ est un *faisceau de torsion* si $\mathscr{T} = \mathscr{F}$. Pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}/\mathscr{T}(\mathscr{F})$ est sans torsion. On déduit de (8.3.6) que:

Proposition (8.4.2) *Si* X *est un schéma intègre, pour qu'un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *soit sans torsion, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un sous-*$\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{G}$ *d'un faisceau simple de la forme* $(\mathscr{R}(X))^{(I)}$*, de sorte que* $(\mathscr{R}(X))^{(I)}$ *soit engendré (en tant que* $\mathscr{R}(X)$*-Module) par* $\mathscr{G}$.

Le cardinal de I est appelé le *rang* de $\mathscr{F}$; pour tout ouvert affine non vide U de X, le rang de $\mathscr{F}$ est égal au rang de $\Gamma(U,\mathscr{F})$ en tant que $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$-module, comme on le voit aussitôt en considérant le point générique de X, contenu dans U. En particulier:

Corollaire (8.4.3) *Sur un schéma intègre* X, *tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent sans torsion et de rang* 1 *(en particulier tout* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible) est isomorphe à un sous-*$\mathcal{O}_X$*-Module de* $\mathscr{R}(X)$, *et réciproquement.*

Corollaire (8.4.4) *Soient* X *un schéma intègre,* $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ *deux* $\mathcal{O}_X$*-Modules sans torsion,* f (resp. f') *une section de* $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}'$) *au-dessus de* X. *Pour que* $f\otimes f'=0$, *il faut et il suffit que l'une des sections* f, f' *soit nulle.*

Soit x le point générique de X; on a par hypothèse $(f\otimes f')_x=f_x\otimes f'_x=0$. Comme $\mathscr{L}_x$ et $\mathscr{L}'_x$ s'identifient à des sous-$\mathcal{O}_x$-modules du corps $\mathcal{O}_x$, la relation précédente entraîne $f_x=0$ ou $f'_x=0$, et par suite $f=0$ ou $f'=0$ puisque $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont sans torsion (8.3.5).

Proposition (8.4.5) *Soient* X, Y *deux schémas intègres,* $f: X\to Y$ *un morphisme dominant. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent sans torsion* $\mathscr{F}$, $f_*(\mathscr{F})$ *est un* $\mathcal{O}_Y$*-Module sans torsion.*

Comme f_* est exact à gauche (**0**, 4.2.1), il suffit, en vertu de (8.4.2), de prouver la proposition lorsque $\mathscr{F}=(\mathscr{R}(X))^{(I)}$. Or, tout ouvert non vide U de Y contient le point générique de Y, donc $f^{-1}(U)$ contient le point générique de X, donc on a alors $\Gamma(U,f_*(\mathscr{F}))=\Gamma(f^{-1}(U),\mathscr{F})=(R(X))^{(I)}$; autrement dit, $f_*(\mathscr{F})$ est le faisceau simple de fibre $(R(X))^{(I)}$, considéré comme $\mathscr{R}(Y)$-Module, et il est évidemment sans torsion.

Proposition (8.4.6) *Soit* X *un schéma réduit dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $\mathscr{F}$ *est un faisceau de torsion*;

b) *pour tout point maximal* x *de* X, $\mathscr{F}_x=0$;

c) $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *ne contient aucune composante irréductible de* X.

La question étant locale, on peut supposer que X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles X_i, de points génériques respectifs x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$; notons encore X_i le sous-schéma fermé réduit de X ayant X_i pour espace sous-jacent et soit $h_i: X_i\to X$ l'injection canonique. Si l'on pose $\mathscr{F}_i=h_i^*(\mathscr{F})$, on voit immédiatement, compte tenu de (8.3.4), que dire que $\mathscr{F}$ est un faisceau de torsion équivaut à dire qu'il en est ainsi de chacun des $\mathscr{F}_i$, et comme $\mathscr{F}_{x_i}=(\mathscr{F}_i)_{x_i}$, pour établir l'équivalence de a) et b), on est ramené au cas où X est intègre. Mais alors, si x est le point générique de X, les relations $\mathscr{F}_x=0$ et $\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{R}(X)=0$ sont équivalentes en vertu de (8.3.5). L'équivalence de b) et c) résulte de ce que $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ est fermé dans X (**0**, 5.2.2) et qu'il est donc équivalent de dire que $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ contient un des X_i ou qu'il contient son point générique x_i.

8.5. Critères de séparation d'un schéma intègre

(8.5.1) Soient X un schéma *intègre*, R son corps des fonctions rationnelles, identique à l'anneau local du point générique a de X; pour tout $x\in X$, on sait que $\mathcal{O}_x$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de R (8.1.5), et pour toute

fonction rationnelle $f \in R$, le domaine de définition $\delta(f)$ de f est l'ensemble ouvert des $x \in X$ tels que $f \in \mathcal{O}_x$. Il en résulte (8.2.6) que pour tout ouvert $U \subset X$, on a

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}. \tag{8.5.1.1}$$

(8.5.2) Etant donné un corps R, pour tout sous-anneau A de R, nous désignerons par L(A) l'ensemble des anneaux locaux A_p, où p parcourt le spectre de A; ils sont identifiés à des sous-anneaux locaux de R contenant A. Comme $p = (pA_p) \cap A$, l'application $p \mapsto A_p$ de Spec(A) dans L(A) est bijective. Pour qu'un sous-anneau local M de R domine un anneau $A_p \in L(A)$, il faut et il suffit que $A \subset M$; l'anneau local A_p dominé par M est alors unique et correspond à l'idéal $p = m(M) \cap A$, où m(M) désigne l'idéal maximal de M (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 1, n° 1, prop. 1).

Lemme (8.5.3) *Soient* R *un corps*, M, N *deux sous-anneaux locaux de* R, P *le sous-anneau de* R *engendré par* $M \cup N$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Il existe un idéal premier* p *de* P *tel que* $m(M) = p \cap M$, $m(N) = p \cap N$.

b) *L'idéal* a *engendré dans* P *par* $m(M) \cup m(N)$ *est distinct de* P.

c) *Il existe un sous-anneau local* Q *de* R *dominant à la fois* M *et* N.

Il est clair que a) implique b); inversement, si $a \neq P$, a est contenu dans un idéal maximal n de P, et comme $1 \notin n$, $n \cap M$ contient m(M) et est distinct de M, donc $n \cap M = m(M)$ et de même $n \cap N = m(N)$. Il est clair que si Q domine M et N, on a $P \subset Q$, $m(M) = m(Q) \cap M = (m(Q) \cap P) \cap M$ et $m(N) = (m(Q) \cap P) \cap N$, donc c) entraîne a); la réciproque est évidente en prenant $Q = P_p$.

Lorsque les conditions équivalentes de (8.5.3) sont satisfaites, on dit que les sous-anneaux locaux M, N de R sont *apparentés*.

Proposition (8.5.4) *Soient* A, B *deux sous-anneaux d'un corps* R, C *le sous-anneau de* R *engendré par* $A \cup B$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *Pour tout anneau local* Q *contenant* A *et* B, *on a* $A_p = B_q$, *en posant* $p = m(Q) \cap A$, $q = m(Q) \cap B$.

b) *Pour tout idéal premier* r *de* C, *on a* $A_p = B_q$, *en posant* $p = r \cap A$, $q = r \cap B$.

c) *Si* $M \in L(A)$ *et* $N \in L(B)$ *sont apparentés, ils sont identiques.*

d) *On a* $L(A) \cap L(B) = L(C)$.

Il résulte de (8.5.2) et (8.5.3) que a) et c) sont équivalentes. Il est clair que a) entraîne b) en l'appliquant à $Q = C_r$; inversement, b) entraîne a), car si Q contient $A \cup B$, il contient C, et si $r = m(Q) \cap C$, on a $p = r \cap A$ et $q = r \cap B$ (8.5.2). Il est immédiat que d) implique a), car si Q contient $A \cup B$, il domine un anneau local $C_r \in L(C)$ (8.5.2); on a par hypothèse $L(C) = L(A) \cap L(B)$ et comme Q ne peut dominer qu'un seul anneau de L(A) (resp. L(B)), on a $C_r = A_p = B_q$. Prouvons enfin que c) entraîne d). Soit $Q \in L(C)$; Q domine un $M \in L(A)$ et un $N \in L(B)$ (8.5.2), donc M et N sont apparentés, donc identiques par hypothèse. Comme on a alors $C \subset M$, M domine un $Q' \in L(C)$ (8.5.2), donc Q domine Q', ce qui (8.5.2) entraîne nécessairement $Q = Q' = M$, donc $Q \in L(A) \cap L(B)$. Inversement, si $Q \in L(A) \cap L(B)$, on a $C \subset Q$, donc (8.5.2) Q domine un $Q'' \in L(C)$ et $L(C) \subset L(A) \cap L(B)$ comme on vient de le voir; comme Q et Q'' sont apparentés, ils sont identiques par hypothèse, donc $Q'' = Q \in L(C)$, ce qui achève la démonstration.

Proposition (8.5.5) *Soient* X *un schéma intègre*, R *son corps des fonctions rationnelles. Pour que* X *soit séparé, il faut et il suffit que la relation «*$\mathcal{O}_x$ *et* $\mathcal{O}_y$ *sont apparentés» entre points* x, y *de* X *implique* $x = y$.

Supposons cette condition vérifiée, et montrons que X est séparé. Soient U et V deux ouverts affines distincts de X, A et B leurs anneaux, identifiés à des sous-anneaux de R; U (resp. V) s'identifie donc (8.5.2) à l'ensemble L(A) (resp. L(B)) et l'hypothèse entraîne (8.5.4) que si C est le sous-anneau de R engendré par $A \cup B$, $W = U \cap V$ s'identifie à $L(A) \cap L(B) = L(C)$. En outre, on sait (8.5.1.1) que tout sous-anneau E de R est égal à l'intersection des anneaux locaux appartenant à L(E); C s'identifie donc à l'intersection des anneaux $\mathscr{O}_z$ pour $z \in W$, autrement dit (8.5.1.1) à $\Gamma(W, \mathscr{O}_X)$. Considérons alors le sous-schéma induit par X sur W; à l'homomorphisme identique $\varphi: C \to \Gamma(W, \mathscr{O}_X)$ correspond (2.3.3) un morphisme $\Phi = (\psi, \theta): W \to \mathrm{Spec}(C)$; nous allons voir que Φ est un *isomorphisme* de schémas, d'où résultera que W est un ouvert *affine*. L'identification de W à $L(C) = \mathrm{Spec}(C)$ montre que ψ est *bijective*. D'autre part, pour tout $x \in W$, $\theta_x^\#$ est l'injection $C_r \to \mathscr{O}_x$, si $r = \mathfrak{m}_x \cap C$, et par définition C_r est identifié à $\mathscr{O}_x$, donc $\theta_x^\#$ est bijective. Il reste donc à voir que ψ est un *homéomorphisme*, autrement dit que pour toute partie fermée $F \subset W$, $\psi(F)$ est fermé dans Spec(C). Or, F est la trace sur W d'une partie fermée de U, de la forme $V(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A; montrons que $\psi(F) = V(\mathfrak{a}C)$, ce qui prouvera notre assertion. En effet, les idéaux premiers de C contenant $\mathfrak{a}C$ sont les idéaux premiers de C contenant $\mathfrak{a}$, donc les idéaux de la forme $\psi(x) = \mathfrak{m}_x \cap C$ où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_x$ et $x \in W$; comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_x$ équivaut à $x \in V(\mathfrak{a}) = W \cap F$ pour $x \in U$, on a bien $\psi(F) = V(\mathfrak{a}C)$. Il s'ensuit que X est séparé, car $U \cap V$ est affine et son anneau C est engendré par la réunion $A \cup B$ des anneaux de U et V (5.3.6).

Inversement, supposons X séparé, et soient x, y deux points de X tels que $\mathscr{O}_x$ et $\mathscr{O}_y$ soient apparentés. Soit U (resp. V) un ouvert affine contenant x (resp. y), d'anneau A (resp. B); on sait alors que $U \cap V$ est affine et que son anneau C est engendré par $A \cup B$ (5.3.6). Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_x \cap A$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_y \cap B$, on a $A_\mathfrak{p} = \mathscr{O}_x$, $B_\mathfrak{q} = \mathscr{O}_y$, et comme $A_\mathfrak{p}$ et $B_\mathfrak{q}$ sont apparentés, il existe un idéal premier $\mathfrak{r}$ de C tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \cap A$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} \cap B$ (8.5.4). Mais alors il existe un point $z \in U \cap V$ tel que $\mathfrak{r} = \mathfrak{m}_z \cap C$ puisque $U \cap V$ est affine, et on a évidemment $x = z$ et $y = z$, d'où $x = y$.

Corollaire (8.5.6) *Soient* X *un schéma intègre séparé, x, y deux points de* X. *Pour que* $x \in \overline{\{y\}}$, *il faut et il suffit que* $\mathscr{O}_x \subset \mathscr{O}_y$, *autrement dit que toute fonction rationnelle définie en x soit définie en y.*

La condition est évidemment nécessaire puisque le domaine de définition $\delta(f)$ d'une fonction rationnelle $f \in R$ est ouvert; montrons qu'elle est suffisante. Si $\mathscr{O}_x \subset \mathscr{O}_y$, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{O}_x$ tel que $\mathscr{O}_y$ domine $(\mathscr{O}_x)_\mathfrak{p}$ (8.5.2); or (2.5.2) il existe $z \in X$ tel que $x \in \overline{\{z\}}$ et que $\mathscr{O}_z = (\mathscr{O}_x)_\mathfrak{p}$; comme $\mathscr{O}_z$ et $\mathscr{O}_y$ sont apparentés, on a $z = y$ par (8.5.5), d'où le corollaire.

Corollaire (8.5.7) *Si* X *est un schéma intègre séparé, l'application* $x \mapsto \mathscr{O}_x$ *est injective; autrement dit, si x, y sont deux points distincts de* X, *il existe une fonction rationnelle définie en l'un de ces points et non en l'autre.*

Cela résulte de (8.5.6) et de l'axiome (T_0) (2.1.4).

Corollaire (8.5.8) *Soit* X *un schéma intègre séparé dont l'espace sous-jacent est noethérien; lorsque f parcourt le corps* R *des fonctions rationnelles sur* X, *les ensembles* $\delta(f)$ *engendrent la topologie de* X.

En effet, toute partie fermée de X est alors réunion finie d'ensembles fermés irréductibles, c'est-à-dire de la forme $\overline{\{y\}}$ (2.1.5). Or, si $x \notin \overline{\{y\}}$, il existe une fonction rationnelle f définie en x et non en y (8.5.6), autrement dit, on a $x \in \delta(f)$ et $\delta(f)$ ne rencontre pas $\overline{\{y\}}$. Le complémentaire de $\overline{\{y\}}$ est par suite réunion d'ensembles de la forme $\delta(f)$, et en vertu de la première remarque, tout ouvert de X est réunion d'intersections finies d'ouverts de la forme $\delta(f)$.

Proposition (8.5.9) *Soient* X, Y *deux schémas intègres,* Y *étant supposé séparé,* $f: X \to Y$ *un morphisme dominant,* K (resp. L) *le corps des fonctions rationnelles de* X (resp. Y). *Alors* L *s'identifie à un sous-corps de* K, *et pour tout* $x \in X$, $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ *est l'unique anneau local de* Y *dominé par* $\mathcal{O}_{X,x}$.

La première assertion a déjà été démontrée (4.4.6) et n'est mise que pour mémoire.

Si $f = (\psi, \theta)$, $\theta_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un homomorphisme local injectif (4.4.6), donc, si on identifie L à un sous-corps de K, $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ est dominé par $\mathcal{O}_{X,x}$; comme Y est séparé, deux anneaux locaux de Y ne peuvent être dominés par un même anneau local (8.5.5), ce qui achève la démonstration.

§ 9. Foncteurs représentables élémentaires dans la théorie des schémas: Schémas relativement affines, fibrés vectoriels, fibrés projectifs et grassmanniennes

Nous nous proposons de montrer, dans ce paragraphe, que des constructions géométriques classiques, comme celle des fibrés vectoriels et des grassmanniennes, se généralisent dans la théorie des schémas. Cette généralisation se fera en établissant que certains foncteurs sont *représentables* (**0**,1.1) en théorie des schémas; la démonstration de ce fait, qui est élémentaire, utilise les méthodes de (**0**,1.7) et (**0**,4.5).

9.1. Morphismes affines et spectres d'Algèbres quasi-cohérentes

Définition (9.1.1) *On dit qu'un morphisme de schémas* $f: X \to Y$ *est affine si* Y *est réunion d'ouverts affines* V_α *tels que, pour tout* α, *le schéma induit sur l'ouvert* $f^{-1}(V)$ *de* X *soit affine.*

On dit encore alors que le Y-schéma X est *affine sur* Y (ou *relativement affine* sur Y).

Si X et Y sont des schémas affines, *tout* morphisme $f: X \to Y$ est donc affine. Par contre, on verra plus loin (9.1.11) qu'il peut exister des morphismes non affines $f: X \to Y$, où X est un schéma affine.

Proposition (9.1.2) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme affine. Pour tout ouvert* $U \subset Y$, *le morphisme* $f^{-1}(U) \to U$, *restriction de f, est affine.*

En vertu de la définition (9.1.1), on est ramené au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, et alors $f = ({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$, où $\varphi: A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux. Comme les $D(g)$, où $g \in A$, forment une base d'ouverts de Y, on est ramené au cas où $U = D(g)$; mais on sait alors que $f^{-1}(U) = D(\varphi(g))$ (1.2.2.2), d'où la proposition.

Proposition (9.1.3) *Un morphisme affine est quasi-compact et séparé.*

La première assertion résulte aussitôt de la définition (9.1.1) et de (6.1.2), et la seconde de (5.3.5) et (5.3.8).

En vertu de (6.7.1), on déduit de (9.1.3):

Corollaire (9.1.3.1) *Si le morphisme* $f:X\to Y$ *est affine, alors, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, $f_*(\mathscr{F})$ *est un* $\mathcal{O}_Y$*-Module quasi-cohérent; en particulier,* $\mathscr{A}(X)=f_*(\mathcal{O}_X)$ *est une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre quasi-cohérente.*

Fixons dans ce qui suit un schéma S. Nous allons voir que l'étude des morphismes affines $f:X\to S$ est *équivalente* à celle des $\mathcal{O}_S$-Algèbres quasi-cohérentes correspondantes $f_*(\mathcal{O}_X)=\mathscr{A}(X)$; de façon précise, les S-schémas X affines sur S forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des S-schémas; nous allons prouver le théorème suivant:

Théorème (9.1.4) *Le foncteur* (**0**,4.2.7)

$$\mathscr{A}: X \mapsto \mathscr{A}(X) \tag{9.1.4.1}$$

est une équivalence *de la catégorie des* S*-schémas affines sur* S, *et de la catégorie opposée à celle des* $\mathcal{O}_S$*-Algèbres quasi-cohérentes.*

Nous prouverons d'abord un résultat qui est la forme globale de (1.6.3):

Proposition (9.1.5) *Soit* X *un* S*-schéma affine sur* S. *Pour tout* S*-espace localement annelé* Y, *l'application* $h\mapsto\mathscr{A}(h)$ *de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_S(Y,X)$ *des* S*-morphismes* (d'espaces localement annelés) *de* Y *dans* X, *dans l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{A}(X),\mathscr{A}(Y))$ *des homomorphismes de* $\mathcal{O}_S$*-Algèbres de* $\mathscr{A}(X)$ *dans* $\mathscr{A}(Y)$, *est bijective* (ce qui établit déjà que le foncteur (9.1.4.1), dans la catégorie des S-schémas affines sur S, est *pleinement fidèle*).

Soient $f:X\to S$, $g:Y\to S$ les morphismes structuraux. On a évidemment sur S deux faisceaux d'ensembles

$$U\mapsto \mathrm{Hom}_U(g^{-1}(U), f^{-1}(U)), \qquad U\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U\text{-Alg}}(\mathscr{A}(f^{-1}(U)),\mathscr{A}(g^{-1}(U)))$$

et pour tout U une application $h\mapsto\mathscr{A}(h)$:

$$\mathrm{Hom}_U(g^{-1}(U), f^{-1}(U)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U\text{-Alg}}(\mathscr{A}(f^{-1}(U)), \mathscr{A}(g^{-1}(U))) \tag{9.1.5.1}$$

qui définit un homomorphisme du premier de ces faisceaux dans le second. Pour voir qu'il s'agit d'un isomorphisme (ce qui prouvera (9.1.5)), il suffit de prouver que (9.1.5.1) est bijective pour tous les ouverts U d'une *base* de la topologie de S. On est ainsi ramené au cas où S est *affine*, soit $S=\mathrm{Spec}(A)$, auquel cas $X=\mathrm{Spec}(B)$ est aussi affine. Mais alors, en vertu de (2.3.2), on a d'une part une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_S(Y,X) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B,\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y))$$

et d'autre part une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, \Gamma(S, \mathscr{A}(Y)))$$

(car dans (1.7.4), on peut remplacer la catégorie des A-modules par celle des A-algèbres et celle des $\mathscr{O}_S$-Modules par celle des $\mathscr{O}_S$-Algèbres, en vertu de (1.3.13)). Enfin, par définition, on a $\Gamma(S, \mathscr{A}(Y)) = \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$, d'où la conclusion.

Corollaire (9.1.6) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas qui sont affines sur* S. *Pour qu'un* S*-morphisme* $h: Y \to X$ *soit un isomorphisme, il faut et il suffit que* $\mathscr{A}(h): \mathscr{A}(X) \to \mathscr{A}(Y)$ *soit un isomorphisme.*

Cela résulte aussitôt de (9.1.5) et du caractère fonctoriel de $\mathscr{A}(X)$.

Pour prouver que (9.1.4.1) est une équivalence de catégories, il reste à prouver que pour toute $\mathscr{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$, il existe un S-schéma X, affine sur S, tel que $\mathscr{A}(X)$ soit $\mathscr{O}_S$*-isomorphe à* $\mathscr{B}$; en vertu de (9.1.5), X sera défini à un S-isomorphisme unique près. Compte tenu de (9.1.5), cela prouvera le corollaire suivant:

Corollaire (9.1.7) *Le foncteur contravariant*

$$Y \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{B}, \mathscr{A}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y\text{-Alg}}(\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y)$$

de la catégorie des S*-schémas dans la catégorie des ensembles, est représentable* (**0**, 1.1).

L'isomorphie indiquée dans l'énoncé est celle qui exprime qu'image directe et image réciproque d'Algèbres sont deux foncteurs adjoints (**0**, 4.4.7.1). Posons $F(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{B}, \mathscr{A}(Y))$; il est clair que $U \mapsto F(U)$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de Y, est un *faisceau* d'ensembles. En appliquant (**0**, 4.5.5) et (2.4.3), on est ramené à prouver le corollaire lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$ est *affine*. Mais cela résulte alors de (9.1.5), car si $\mathscr{B} = \tilde{B}$, où B est une A-algèbre, $Y \mapsto F(Y)$ est représenté par $X = \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(\Gamma(S, \mathscr{B}))$. Le théorème (9.1.4) est ainsi complètement démontré.

Définition (9.1.8) *On appelle spectre d'une* $\mathscr{O}_S$*-Algèbre quasi-cohérente* $\mathscr{B}$ *et on note* $\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$ *l'image de* $\mathscr{B}$ *par un foncteur quasi-inverse de* (9.1.4.1), *autrement dit un* S*-schéma qui représente le foncteur* $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{B}, \mathscr{A}(Y))$ *de* (9.1.7).

Le S-schéma $\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$ est donc affine au-dessus de S; on a $\mathscr{A}(\mathrm{Spec}(\mathscr{B})) = \mathscr{B}$ et pour tout morphisme affine $f: X \to S$, X est S-isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}(X))$.

Corollaire (9.1.9) *Soient* $\mathscr{B}$ *une* $\mathscr{O}_S$*-Algèbre quasi-cohérente,* $g: S' \to S$ *un morphisme. Alors* $\mathrm{Spec}(g^*(\mathscr{B}))$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}) \times_S S'$.

En effet, pour tout morphisme $h: Y \to S'$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{S'}\text{-Alg}}(g^*(\mathscr{B}), h_*(\mathscr{O}_Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{B}, g_*(h_*(\mathscr{O}_Y)))$$

(**0**, 4.4.3.1). Le corollaire résulte donc de (9.1.7) et de (**0**, 1.3.10).

Proposition (9.1.10) *Si $f: X \to S$ est un morphisme affine, alors, pour tout ouvert affine $U \subset S$, le schéma induit par X sur $f^{-1}(U)$ est un schéma affine d'anneau $\Gamma(U, \mathscr{A}(X))$.*

Cela résulte de (9.1.2) et (9.1.8).

Corollaire (9.1.10.1) *Pour tout morphisme affine $f: X \to S$ et tout $s \in S$, $f^{-1}(s)$ est un schéma affine.*

Il suffit d'appliquer (9.1.8) et (9.1.9).

Exemple **(9.1.11)** Soit S le schéma obtenu en dédoublant le point 0 dans le plan affine sur un corps K (5.3.11); avec les notations de (5.3.11), S est réunion de deux ouverts affines Y_1, Y_2; si f est l'immersion ouverte $Y_1 \to S$, $f^{-1}(Y_2) = Y_1 \cap Y_2$ n'est pas un ouvert affine dans Y_1 *(loc. cit.)*, donc on a un exemple d'un schéma affine Y_1 qui n'est pas affine sur S (cf. 9.1.17)).

Corollaire (9.1.12) *Soit* S *un schéma affine; pour qu'un* S*-schéma* X *soit affine sur* S*, il faut et il suffit que* X *soit un schéma affine.*

Corollaire (9.1.13) *Soient* X *un* S*-schéma affine sur* S*,* Y *un* X*-schéma. Pour que* Y *soit affine sur* S*, il faut et il suffit que* Y *soit affine sur* X.

On est aussitôt ramené au cas où S est un schéma affine, et il en est alors de même de X (9.1.12); les deux conditions de l'énoncé expriment alors que Y est un schéma affine (9.1.12).

(9.1.14) Soit X un S-schéma affine sur S. Pour définir un X-schéma Y *affine sur* X, il revient au même, en vertu de (9.1.13), de se donner un S-schéma Y *affine sur* S et un S-morphisme $g: Y \to X$; en d'autres termes (9.1.7) et (9.1.5), cela revient à se donner une $\mathscr{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$ et un homomorphisme $\mathscr{A}(X) \to \mathscr{B}$ de $\mathscr{O}_S$-Algèbres (que l'on peut envisager comme définissant sur $\mathscr{B}$ une structure de $\mathscr{A}(X)$-Algèbre). Si $f: X \to S$ est le morphisme structural, on a alors $\mathscr{B} = f_*(g_*(\mathscr{O}_Y))$.

Corollaire (9.1.15) *Soit* X *un* S*-schéma affine sur* S*.*

(i) *Pour que* X *soit de type fini* (resp. *de présentation finie*) *sur* S*, il faut et il suffit que la $\mathscr{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}(X)$ soit de type fini* (resp. *de présentation finie*) (2.2.5).

(ii) *Pour que* X *soit réduit, il faut et il suffit que la $\mathscr{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}(X)$ soit réduite* (**0**,4.1.4).

(i) Par définition (2.2.5), on est ramené au cas où S est affine; alors il en est de même de X (9.1.12), et si $S=\mathrm{Spec}(A)$, $X=\mathrm{Spec}(B)$, $\mathscr{A}(X)$ est la $\mathscr{O}_S$-Algèbre $\tilde{B}$; comme $\Gamma(U,\tilde{B})=B$, le corollaire résulte de (2.2.5) et (6.3.9).

(ii) La question est évidemment locale sur S; en vertu de (9.1.10), le corollaire résulte de (4.5.1) et (4.5.4).

Proposition (9.1.16) (i) *Une immersion fermée est un morphisme affine.*

(ii) *Le composé de deux morphismes affines est affine.*

(iii) *Si* $f:X\to Y$ *est un* S*-morphisme affine,* $f_{(S')}:X_{(S')}\to Y_{(S')}$ *est affine pour tout changement de base* $S'\to S$.

(iv) *Si* $f:X\to Y$ *et* $f':X'\to Y'$ *sont deux* S*-morphismes affines, alors* $f\times_S f':X\times_S X'\to Y\times_S Y'$ *est affine.*

(v) *Si* $f:X\to Y$ *et* $g:Y\to Z$ *sont deux morphismes tels que* $g\circ f$ *soit affine et* g *séparé, alors* f *est affine.*

(vi) *Si* f *est affine, il en est de même de* f_{red}.

En vertu de (5.2.7) et (**0**, 1.3.9), il suffit de prouver (i), (ii) et (iii). La propriété (i) résulte de (4.2.1.1) et (4.2.4), et (ii) n'est autre que (9.1.13); enfin, (ii) découle de (9.1.9) et (9.1.7).

Corollaire (9.1.17) *Soient* X *un* S*-schéma,* Y *un* S*-schéma séparé sur* S; *si* X *est affine sur* S, *tout* S*-morphisme* $f:X\to Y$ *est affine.*

Cela n'est autre qu'une autre manière d'exprimer (9.1.16, (v)).

Proposition (9.1.18) *Soient* Y *un schéma localement noethérien,* $f:X\to Y$ *un morphisme de type fini. Pour que* f *soit affine, il faut et il suffit que* f_{red} *le soit.*

Vu (9.1.16, (vi)), nous n'avons à prouver que la suffisance de la condition. Il suffit de montrer que si Y est affine et noethérien, X est affine; or Y_{red} est alors affine, donc il en est de même de X_{red} par hypothèse. Or X est noethérien, donc la conclusion résulte de (4.5.9).

Proposition (9.1.19) (i) *Soient* Y *un* S*-schéma affine sur* S, X,X' *deux* Y*-schémas affines sur* Y (donc aussi sur S (9.1.13)). *Soient* $\mathscr{B}=\mathscr{A}(Y)$, $\mathscr{C}=\mathscr{A}(X)$, $\mathscr{C}'=\mathscr{A}(X')$ (où X et X' sont considérés comme des S-schémas). *Alors* $X\times_Y X'$ *est affine sur* Y (donc aussi sur S) *et* $\mathscr{A}(X\times_Y X')$ (où $X\times_Y X'$ est considéré comme S-schéma) *est canoniquement isomorphe à* $\mathscr{C}\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{C}'$.

(ii) *Soient* X,X' *deux* S*-schémas affines sur* S, *et posons* $\mathscr{B}=\mathscr{A}(X)$, $\mathscr{B}'=\mathscr{A}(X')$. *Alors le schéma* XIIX' *est affine sur* S *et isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}\times\mathscr{B}')$.

(i) La propriété résulte aussitôt de ce que (9.1.4.1) est une équivalence de catégories, et de ce que $\mathscr{C}\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{C}'$ est une *somme amalgamée* des $\mathscr{B}$-algèbres $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_S$-Algèbres quasi-cohérentes.

(ii) De même $\mathscr{B} \times \mathscr{B}'$ est un *produit* dans la catégorie des $\mathscr{O}_S$-Algèbres quasi-cohérentes, d'où (ii) en vertu de la définition d'une somme de schémas (3.1).

Remarque **(9.1.20)** Soient S, S' deux schémas, $q : S' \to S$ un morphisme, $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$) une $\mathscr{O}_S$-Algèbre (resp. une $\mathscr{O}_{S'}$-Algèbre) quasi-cohérente, $u : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ un q-morphisme (c'est-à-dire un homomorphisme $\mathscr{B} \to q_*(\mathscr{B}')$ de $\mathscr{O}_S$-Algèbres). Si $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$, $X' = \mathrm{Spec}(\mathscr{B}')$, on en déduit canoniquement un morphisme

$$v = \mathrm{Spec}(u) : X' \to X$$

tel que le diagramme

(9.1.20.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{v} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow[q]{} & S' \end{array}$$

soit commutatif (les flèches verticales étant les morphismes structuraux). En effet, la donnée de u équivaut à celle d'un homomorphisme de $\mathscr{O}_{S'}$-Algèbres quasi-cohérentes $u^\# : q^*(\mathscr{B}) \to \mathscr{B}'$ (0,4.4.3); elle définit donc canoniquement un S'-morphisme

$$w : \mathrm{Spec}(\mathscr{B}') \to \mathrm{Spec}(q^*(\mathscr{B}))$$

tel que $\mathscr{A}(w) = u^\#$ (9.1.5). D'autre part, $\mathrm{Spec}(q^*(\mathscr{B}))$ s'identifie canoniquement à $X \times_S S'$ (9.1.9); le morphisme v est le composé

$$X' \xrightarrow{w} X \times_S S' \xrightarrow{p_1} X$$

de la première projection avec w et la commutativité de (9.1.20.1) résulte des définitions.

Soient U (resp. U') un ouvert affine de S (resp. S'), tels que $q(U') \subset U$, $A = \Gamma(U, \mathscr{O}_S)$, $A' = \Gamma(U', \mathscr{O}_{S'})$ leurs anneaux, $B = \Gamma(U, \mathscr{B})$, $B' = \Gamma(U', \mathscr{B}')$; la restriction de u en un $(q|U')$-morphisme: $\mathscr{B}|U \to \mathscr{B}'|U'$ correspond à un di-homomorphisme d'algèbres $B \to B'$; si V, V' sont les images réciproques de U, U' dans X, X' respectivement par les morphismes structuraux, le morphisme $V' \to V$, restriction de v, correspond (1.7.6) au di-homomorphisme précédent.

(9.1.21) Soient S un schéma, $f : X \to S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, de sorte que $\mathscr{A}(X) = f_*(\mathscr{O}_X)$ est une $\mathscr{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente (6.7.1). On appelle *enveloppe affine* du S-schéma X le S-schéma affine sur S

(9.1.21.1) $$X^0 = \mathrm{Aff}(X/S) = \mathrm{Spec}(f_*(\mathscr{O}_X)) = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}(X)).$$

Si $f^0 : X^0 \to S$ est le morphisme structural, on a donc par définition

(9.1.21.2) $$\mathscr{A}(X^0) = f^0_*(\mathscr{O}_{X^0}) = f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{A}(X)$$

et à l'isomorphisme identique de $\mathscr{A}(X)$ il correspond donc (9.1.5) un S-morphisme canonique fonctoriel

(9.1.21.3) $$i_X : X \to X^0.$$

Pour que i_X soit un *isomorphisme*, il faut et il suffit que le morphisme f soit *affine*.

Pour tout S-schéma Y *affine* sur S, l'application $u \mapsto u \circ i_X$ est une *bijection*

(9.1.21.4) $$\mathrm{Hom}_S(X^0, Y) \simeq \mathrm{Hom}_S(X, Y)$$

fonctorielle en Y: cela résulte de l'existence des bijections canoniques

$$\mathrm{Hom}_S(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{A}(Y),\mathscr{A}(X)),$$
$$\mathrm{Hom}_S(X^0,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{A}(Y),\mathscr{A}(X^0)).$$

(9.1.21.5) On peut donc dire que X^0 *représente* le foncteur covariant $Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(X,Y)$ dans la catégorie des S-schémas affines sur S (**0**, 1.1.11). On en déduit (**0**, 1.1.7) que pour S fixé, $X \mapsto \mathrm{Aff}(X/S)$ est un foncteur covariant de la catégorie des S-schémas quasi-compacts et quasi-séparés sur S, dans la catégorie des S-schémas affines sur S; de façon plus précise, si X_1, X_2 sont deux S-schémas quasi-compacts et quasi-séparés sur S, à tout S-morphisme $g: X_1 \to X_2$ correspond l'unique S-morphisme $g^0: X_1^0 \to X_2^0$ (qui est affine par (9.1.17)) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g} & X_2 \\ {\scriptstyle i_{X_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{X_2}} \\ X_1^0 & \xrightarrow{g^0} & X_2^0 \end{array}$$

Plus généralement, considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xrightarrow{u} & S' \end{array}$$

où les morphismes f, f' sont quasi-compacts et quasi-séparés et le morphisme u *affine*. Si l'on pose $h = u \circ f$, on a $h_*(\mathscr{O}_X) = u_*(f_*(\mathscr{O}_X)) = u_*(f_*^0(\mathscr{O}_X))$, et $u \circ f^0$ est un morphisme affine; on a par suite $X^0 = \mathrm{Aff}(X/S')$ (relativement au morphisme h), d'où un unique S'-morphisme $v^0: X^0 \to X'^0$ (qui est affine (9.1.17)) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & X' \\ {\scriptstyle i_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{X'}} \\ X^0 & \xrightarrow{v^0} & X'^0 \end{array}$$

La relation (9.1.21.4) peut encore s'interpréter de la façon suivante: le foncteur $X \mapsto \mathrm{Aff}(X/S)$ est l'*adjoint à gauche* (**0**,1.5.3) du foncteur injection canonique de la sous-catégorie des S-schémas *affines sur* S dans la catégorie des S-schémas. On en conclut que ce foncteur commute aux limites inductives, et en particulier aux *sommes finies* (**0**,1.5.7).

(9.1.22) Certaines propriétés purement topologiques d'un morphisme entraînent que ce morphisme est *affine*:

Proposition (9.1.23) *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme fermé, y un point de* Y *tel que tout voisinage dans* X *de la fibre* $X_y = f^{-1}(y)$ *contienne un voisinage ouvert affine de* X_y *(condition toujours vérifiée lorsque* X_y *est vide ou réduite à un seul point). Alors il existe un voisinage ouvert affine* U *de y tel que la restriction* $f^{-1}(U) \to U$ *de f soit un morphisme affine.*

En effet, soit U_0 un voisinage ouvert affine de y dans Y, et soit V un voisinage ouvert affine de X_y contenu dans $f^{-1}(U_0)$. Puisque f est fermé, il existe un voisinage ouvert affine $U \subset U_0$ de y tel que $f^{-1}(U) \subset V$. Comme la restriction $g: V \to U_0$ de f est un morphisme affine, il en est de même de la restriction $f^{-1}(U) \to U$ de g à $f^{-1}(U)$ (9.1.16).

Corollaire (9.1.24) *Un morphisme injectif fermé* (et en particulier un morphisme $f: X \to Y$ qui est un *homéomorphisme* de X sur Y) *est affine.*

9.2. Faisceaux quasi-cohérents sur un S-schéma affine sur S

Fixons encore dans ce qui suit un schéma S et considérons la catégorie des couples $(X, \mathscr{F})$ dont les objets sont formés d'un S-schéma X affine sur S et d'un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$; alors:

Théorème (9.2.1) *Le foncteur* (**0**, 4.2.8)

$$\mathscr{A}: (X, \mathscr{F}) \mapsto (\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(\mathscr{F})) \tag{9.2.1.1}$$

est une équivalence *de la catégorie des couples formés d'un* S*-schéma* X *affine sur* S *et d'un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent, et de la catégorie opposée à la catégorie des couples formés d'une* $\mathscr{O}_S$*-Algèbre quasi-cohérente* $\mathscr{B}$ *et d'un* $\mathscr{B}$*-Module quasi-cohérent* (comme $\mathscr{B}$-Module ou comme $\mathscr{O}_S$-Module (2.2.4)).

La preuve suit les mêmes étapes que celle de (9.1.4) et nous n'en indiquerons que les grandes lignes. On démontre d'abord la

Proposition (9.2.2) *Soient* X *un* S*-schéma affine sur* S, $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent. Pour tout* S*-espace localement annelé* Y *et tout* $\mathscr{O}_Y$*-Module* $\mathscr{G}$, *l'application* $(h,u) \mapsto (\mathscr{A}(h), \mathscr{A}(u))$ *de l'ensemble des morphismes* $(Y, \mathscr{G}) \to (X, \mathscr{F})$ *dans l'ensemble des di-homomorphismes* $(\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(\mathscr{F})) \to (\mathscr{A}(Y), \mathscr{A}(\mathscr{G}))$ (**0**,4.2.8) *est bijective.*

La démonstration suit exactement la même marche que celle de (9.1.5) en utilisant cette fois la partie de (2.3.2) concernant les Modules; les détails sont laissés au lecteur.

Corollaire (9.2.3) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas affines sur* S, $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) *un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* (resp. *un* $\mathscr{O}_Y$*-Module quasi-cohérent*). *Pour que* (h,u) *soit un isomorphisme, il faut et il suffit que* $(\mathscr{A}(h), \mathscr{A}(u))$ *soit un di-isomorphisme.*

Proposition (9.2.4) *Pour tout couple* $(\mathscr{B}, \mathscr{M})$ *formé d'une* $\mathscr{O}_S$*-Algèbre quasi-cohérente* $\mathscr{B}$ *et d'un* $\mathscr{B}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{M}$, *il existe un couple* $(X, \mathscr{F})$ *formé de* $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$ *et d'un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *tels que le couple* $(\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(\mathscr{F}))$ *soit di-isomorphe au couple* $(\mathscr{B}, \mathscr{M})$; *le couple* $(X, \mathscr{F})$ *est déterminé à isomorphisme unique près.*

On note $\tilde{\mathscr{M}}$ le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ et on dit qu'il est *associé* à $\mathscr{M}$.

En effet, considérons l'espace localement annelé $(S,\mathscr{B})$; rappelons que si $f=(\psi,\theta):X\to S$ est le morphisme structural, on a $\mathscr{B}=\psi_*(\mathscr{O}_X)$. Le couple $g=(\psi,1_{\mathscr{B}})$ est donc un morphisme $(X,\mathscr{O}_X)\to(S,\mathscr{B})$ d'espaces localement annelés. Montrons que le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}=g^*(\mathscr{M})$ répond à la question; la question étant locale sur S, on peut se borner au cas où $S=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, donc $\mathscr{B}=\tilde{B}$, où B est une A-algèbre, et $\mathscr{M}=(M_{[\varphi]})^{\sim}$, où M est un B-module et $\varphi:A\to B$ l'homomorphisme structural. Prouvons alors que $\mathscr{F}$ est isomorphe à $\tilde{M}$; comme $\psi_*(\tilde{M})=\mathscr{M}$ (1.7.7) cela établira la proposition. Or, de l'application identique $u:\psi_*(\tilde{M})\to\mathscr{M}$, on déduit un homomorphisme

$$u^\sharp:\ \tilde{M}\ \to\ g^*(\mathscr{M})=\psi^{-1}(\mathscr{M})\otimes_{\psi^{-1}(\mathscr{B})}\mathscr{O}_X$$

et il suffit de vérifier que sur chaque fibre, $u^\sharp$ est un isomorphisme. Soient donc x un point de X, $s=\psi(x)$ son image; on a $(g^*(\mathscr{M}))_x=(M\otimes_A A_s)\otimes_{B\otimes_A A_s}B_x$, qui est canoniquement isomorphe à $M\otimes_B B_x=M_x=(\tilde{M})_x$, d'où la conclusion.

Corollaire (9.2.5) *Dans la catégorie des $\mathscr{B}$-Modules quasi-cohérents, $\mathscr{M}\mapsto\tilde{\mathscr{M}}$ est un foncteur covariant additif exact, qui commute aux limites inductives et en particulier aux sommes directes.*

La question étant locale sur S, on est ramené au cas où S est affine, et le corollaire résulte alors de (1.3.5), (1.3.9) et (1.3.11).

Corollaire (9.2.6) *Pour que $\tilde{\mathscr{M}}$ soit un $\mathscr{O}_X$-Module de type fini* (resp. *de présentation finie*), *il faut et il suffit que $\mathscr{M}$ soit un $\mathscr{B}$-Module de type fini* (resp. *de présentation finie*).

La question est encore locale sur S, donc on peut supposer S affine, de sorte que $\mathscr{O}_X=(\Gamma(S,\mathscr{B}))^{\sim}$ et $\mathscr{M}=(\Gamma(S,\mathscr{M}))^{\sim}$ sur le schéma affine X; la conclusion résulte alors de (1.4.3).

Proposition (9.2.7) *Soient* Y *un* S*-schéma affine sur* S, X,X′ *deux* Y*-schémas affines sur* Y (*donc sur* S), $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}'$) *un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent* (resp. *un $\mathscr{O}_{X'}$-Module quasi-cohérent*). *Alors* $\mathscr{A}(\mathscr{F}\otimes_Y\mathscr{F}')$ (où $X\times_Y X'$ est considéré comme S-schéma) *s'identifie canoniquement à* $\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{A}(Y)}\mathscr{A}(\mathscr{F}')$.

Considérons en effet la catégorie formée des couples $(\mathscr{C},\mathscr{N})$, où $\mathscr{C}$ est une $\mathscr{A}(Y)$-Algèbre quasi-cohérente et $\mathscr{N}$ un $\mathscr{C}$-Module quasi-cohérent. On vérifie aussitôt que dans cette catégorie, $(\mathscr{C}\otimes_{\mathscr{A}(Y)}\mathscr{C}',\mathscr{N}\otimes_{\mathscr{A}(Y)}\mathscr{N}')$ est *somme* de $(\mathscr{C},\mathscr{N})$ et $(\mathscr{C}',\mathscr{N}')$; cela entraîne la proposition en vertu de l'équivalence prouvée dans (9.2.1).

Si on applique en particulier (9.2.7) au cas où $X=Y$ et $\mathscr{F}'=\mathscr{O}_{X'}$, on voit que le $\mathscr{A}'$-Module $\mathscr{A}(f'^*(\mathscr{F}))$ s'identifie à $\mathscr{A}(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{A}'$.

(9.2.8) En particulier, lorsque $X = X' = Y$ (Y étant affine au-dessus de S), on voit que si $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sont deux $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents, on a

$$\mathscr{A}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}) = \mathscr{A}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{A}(X)} \mathscr{A}(\mathscr{G}) \tag{9.2.8.1}$$

à un isomorphisme canonique fonctoriel près. Si de plus $\mathscr{F}$ admet une présentation finie, il résulte de (1.7.7) et (1.3.12) que

$$\mathscr{A}(\mathscr{H}om_X(\mathscr{F}, \mathscr{G})) = \mathscr{H}om_{\mathscr{A}(X)}(\mathscr{A}(\mathscr{F}), \mathscr{A}(\mathscr{G})) \tag{9.2.8.2}$$

à un isomorphisme canonique près.

Proposition (9.2.9) *Soient* S *un schéma,* $\mathscr{B}$ *une* $\mathscr{O}_S$*-Algèbre quasi-cohérente,* $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$. *Pour tout Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de* $\mathscr{B}$, $\tilde{\mathscr{J}}$ *est un Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X$, *et le sous-schéma fermé* Y *de* X *défini par* $\tilde{\mathscr{J}}$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}/\mathscr{J})$.

En effet, il résulte aussitôt de (4.2.1.1) que Y est affine au-dessus de S; en vertu de (9.1.7), on est donc ramené au cas où S est affine, et la proposition résulte alors aussitôt de (4.1.1).

On peut encore exprimer le résultat de (9.2.9) en disant que si $h : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ est un homomorphisme *surjectif* de $\mathscr{O}_S$-Algèbres quasi-cohérentes, $\mathscr{A}(h) : \mathrm{Spec}(\mathscr{B}') \to \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$ est une *immersion fermée.*

Corollaire (9.2.10) *Soient* S *un schéma,* $\mathscr{B}$ *une* $\mathscr{O}_S$*-Algèbre quasi-cohérente,* $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$, $f : X \to S$ *le morphisme structural. Pour tout Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{K}$ *de* $\mathscr{O}_S$, *on a* $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X = (\mathscr{K}\mathscr{B})^\sim$.

En effet, si $g : (X, \mathscr{O}_X) \to (S, \mathscr{B})$ est le morphisme d'espaces localement annelés défini dans (9.2.4), f se factorise en

$$(X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{g} (S, \mathscr{B}) \xrightarrow{h} (S, \mathscr{O}_S)$$

où $h = (1_S, \omega)$ est le morphisme d'espaces localement annelés correspondant à l'homomorphisme structural $\omega : \mathscr{O}_S \to \mathscr{B}$. On a $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X = g^*(h^*(\mathscr{K}))\mathscr{O}_X = g^*(h^*(\mathscr{K})\mathscr{B}) = g^*(\mathscr{K}\mathscr{B}) = (\mathscr{K}\mathscr{B})^\sim$.

9.3. Application aux changements de base pour les images directes de Modules quasi-cohérents

(9.3.1) Soient $f : X \to S$, $g : S' \to S$ deux morphismes, $X' = X \times_S S'$, $f' : X' \to S'$ et $g' : X' \to X$ les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' = X \times_S S' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[g]{} & S' \end{array}$$

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module; on peut alors définir un homomorphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{O}_{S'}$-Modules

$$w\colon g^*(f_*(\mathscr{F})) \to f'_*(g'^*(\mathscr{F})) \tag{9.3.1.1}$$

de la façon suivante: on a un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_X$-Modules (**0**, 4.4.3)

$$\rho_{\mathscr{F}}\colon \mathscr{F} \to g'_*(g'^*(\mathscr{F})), \tag{9.3.1.2}$$

d'où l'on déduit un homomorphisme fonctoriel de $\mathscr{O}_S$-Modules (**0**, 4.2.1)

$$v = f_*(\rho_{\mathscr{F}})\colon f_*(\mathscr{F}) \to f_*(g'_*(g'^*(\mathscr{F}))) = g_*(f'_*(g'^*(\mathscr{F}))), \tag{9.3.1.3}$$

et il suffit alors de prendre $w = v^\sharp$ relativement au morphisme g (**0**, 4.4.3). En général, l'homomorphisme w *n'est pas bijectif*, même lorsque $S' = \mathrm{Spec}(\kappa(s))$ avec $s \in S$, g étant le morphisme canonique, et lorsque $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$: *on en a un exemple en prenant pour S un plan affine sur un corps algébriquement clos, pour X le schéma obtenu en faisant éclater un point fermé s de S et en prenant le schéma induit sur l'ouvert de ce schéma éclaté, complémentaire d'un point fermé au-dessus de s (**III***, 8.1).* En d'autres termes, même lorsqu'il ne s'agit que de schémas noethériens, de morphismes de type fini et de Modules cohérents, l'opération «image directe de faisceaux» ne permute pas à l'opération de «passage aux fibres». Nous verrons au chap. III un résultat dans ce sens, de nature «asymptotique», valable pour des faisceaux cohérents lorsque f est propre et S noethérien (**III***, 4.2.4).

Nous allons ici indiquer des cas simples où l'on peut affirmer que l'homomorphisme (9.3.1.1) est bijectif pour *tout $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$*.

Notons auparavant que pour tout $\mathscr{O}_{S'}$-Module $\mathscr{G}'$, on peut déduire de (9.3.1.1) un homomorphisme canonique fonctoriel en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}'$:

$$w\colon \mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_{S'}} g^*(f_*(\mathscr{F})) \to f'_*(f'^*(\mathscr{G}') \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} g'^*(\mathscr{F})) = f'_*(\mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}). \tag{9.3.1.4}$$

Il suffit en effet de considérer l'homomorphisme canonique

$$\rho_{\mathscr{G}'}\colon \mathscr{G}' \to f'_*(f'^*(\mathscr{G}')) \tag{9.3.1.5}$$

qui, tensorisé avec (9.3.1.1), donne un homomorphisme

$$\mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_{S'}} g^*(f_*(\mathscr{F})) \to f'_*(f'^*(\mathscr{G}')) \otimes_{\mathscr{O}_{S'}} f'_*(g'^*(\mathscr{F})) \tag{9.3.1.6}$$

et de composer avec ce dernier l'homomorphisme canonique (**0**, 4.2.2.1).

Proposition (9.3.2) *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, $g\colon S' \to S$ un morphisme. On pose $X' = X \times_S S'$ et on désigne par $f'\colon X' \to S'$, $g'\colon X' \to X$ les projections canoniques* (de sorte que f' est quasi-compact et quasi-séparé ((6.1.5) et (6.1.9)). *Soient $\mathscr{F}$*

un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent, $\mathscr{G}'$ un $\mathscr{O}_{S'}$-Module quasi-cohérent. On suppose vérifiée l'une *des conditions suivantes*:

(i) *f est affine*;

(ii) *$\mathscr{G}'$ est g-plat.*

Alors l'homomorphisme

$$\mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_{S'}} g^*(f_*(\mathscr{F})) \to f'_*(f'^*(\mathscr{G}') \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} g'^*(\mathscr{F})) = f'_*(\mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})$$

est bijectif.

La question étant locale sur S et S', on peut se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $S' = \mathrm{Spec}(A')$ sont affines.

(i) Si f est affine, X est alors affine (9.1.12), soit $X = \mathrm{Spec}(B)$ et alors on a $X' = \mathrm{Spec}(B \otimes_A A')$; en outre on a $\mathscr{F} = \tilde{M}$ et $\mathscr{G}' = \tilde{N}'$, où M est un B-module et N' un A'-module. Alors le premier (resp. le second) membre de (9.3.1.6) est le $\mathscr{O}_{S'}$-Module associé au A'-module $N' \otimes_{A'} (A' \otimes_A M)$ (resp. à $(N' \otimes_{A'} (A' \otimes_A B)) \otimes_{A' \otimes_A B} (M \otimes_B (B \otimes_A A'))$ considéré comme A'-module); chacun de ces modules est canoniquement isomorphe à $N' \otimes_A M$ et lorsqu'on les identifie à ce dernier, l'homomorphisme w est associé à l'identité ((1.7.7) et (1.7.9, (ii))).

(ii) Supposons d'abord f *séparé*. Comme f est quasi-compact, X est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines X_i; en outre, comme f est séparé, les intersections $X_{ij} = X_i \cap X_j$ sont aussi des ouverts affines (5.3.6). Soient f_i et f_{ij} les restrictions de f à X_i et X_{ij} respectivement, qui sont des morphismes *affines*. On a vu dans la démonstration de (6.7.1) que l'on a une suite exacte

$$(9.3.2.1) \quad 0 \longrightarrow f_*(\mathscr{F}) \longrightarrow \bigoplus_i (f_i)_*(\mathscr{F}_i) \xrightarrow{u} \bigoplus_{i,j} (f_{ij})_*(\mathscr{F}_{ij})$$

en posant $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}|X_i, \mathscr{F}_{ij} = \mathscr{F}|X_{ij}$. Comme $\mathscr{G}'$ est g-plat, on a (**0**, 5.7.2) une suite exacte

$$(9.3.2.2) \quad 0 \longrightarrow \mathscr{G}' \otimes g^*(f_*(\mathscr{F}))$$

$$\longrightarrow \bigoplus_i (\mathscr{G}' \otimes g^*((f_i)_*(\mathscr{F}_i))) \xrightarrow{1 \otimes g^*(u)} \bigoplus_{i,j} (\mathscr{G}' \otimes g^*((f_{ij})_*(\mathscr{F}_{ij}))).$$

Les $X'_i = g'^{-1}(X_i) = X_i \times_S S'$ forment un recouvrement ouvert affine de X' et les $X'_{ij} = X'_i \cap X'_j = g'^{-1}(X_{ij}) = X_{ij} \times_S S'$ sont aussi affines; si l'on pose $\mathscr{H}' = f'^*(\mathscr{G}') \otimes g'^*(\mathscr{F})$, on a $\mathscr{H}'|X'_i = (f'_i)^*(\mathscr{G}') \otimes (g'_i)^*(\mathscr{F}_i)$ et $\mathscr{H}'|X'_{ij} = (f'_{ij})^*(\mathscr{G}') \otimes (g'_{ij})^*(\mathscr{F}_{ij})$, où f'_i, g'_i sont les projections canoniques de X'_i, f'_{ij} et g'_{ij} celles de X'_{ij}. On en déduit une suite exacte analogue à (9.3.2.1)

$$(9.3.2.3) \quad 0 \longrightarrow f'_*(\mathscr{H}') \longrightarrow \bigoplus_i (f'_i)_*(\mathscr{H}'_i) \xrightarrow{u'} \bigoplus_{i,j} (f'_{ij})_*(\mathscr{H}'_{ij}).$$

Comme l'homomorphisme (9.3.1.4) est fonctoriel, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \mathscr{G}'\otimes g^*(f_*(\mathscr{F})) & \longrightarrow \bigoplus_i (\mathscr{G}'\otimes g^*((f_i)_*(\mathscr{F}_i))) & \xrightarrow{1\otimes g^*(u)} & \bigoplus_{i,j} (\mathscr{G}'\otimes g^*((f_{ij})_*(\mathscr{F}_{ij})) \\ \downarrow w & \downarrow \bigoplus_i w_i & & \downarrow \bigoplus_{i,j} w_{i,j} \\ 0 \longrightarrow f'_*(\mathscr{H}') & \longrightarrow \bigoplus_i (f'_i)_*(\mathscr{H}'_i) & \xrightarrow{u'} & \bigoplus_{i,j} (f'_{ij})_*(\mathscr{H}'_{ij}) \end{array}$$

Or, les morphismes f_i et f_{ij} étant affines, les homomorphismes w_i et w_{ij} sont bijectifs par (i); il en est donc de même de w.

Dans le cas général, on peut procéder de même, mais ici on peut seulement dire que les X_{ij} sont *quasi-compacts*; f_{ij} n'est plus un morphisme affine, mais comme c'est la restriction à l'ouvert quasi-compact X_{ij} du morphisme affine (donc séparé) f_i, on voit que f_{ij} est *séparé* et *quasi-compact*. Dans le diagramme (9.3.2.4), les homomorphismes w_{ij} sont donc bijectifs en vertu de la première partie de la démonstration; on termine donc de la même façon.

Corollaire (9.3.3) *L'homomorphisme* (9.3.1.1) *est bijectif pour tout $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ lorsque f est affine, ou lorsque g est plat et que f est quasi-compact et quasi-séparé.*

Corollaire (9.3.4) *Soient $f: X\to S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, $g: S'\to S$ un morphisme* plat. *On pose $X'=X\times_S S'$. Alors on a un S'-isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Aff}(X'/S')\simeq \mathrm{Aff}(X/S)\times_S S'. \tag{9.3.4.1}$$

En effet, si $f'=f_{(S')}: X'\to S'$, on a $\mathrm{Aff}(X'/S')=\mathrm{Spec}(f'_*(\mathscr{O}_{X'}))$, et $\mathrm{Aff}(X/S)\times_S S' = \mathrm{Spec}(g^*(f_*(\mathscr{O}_X)))$ (9.1.9); l'isomorphisme de l'énoncé provient donc de l'isomorphisme canonique (9.3.1.1) appliqué à $\mathscr{F}=\mathscr{O}_X$.

Corollaire (9.3.5) *Pour tout morphisme quasi-compact et quasi-séparé $f: X\to S$ et tout point $s\in S$, on a, à un isomorphisme canonique près,*

$$X^0\times_S \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}) = (X\times_S \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}))^0. \tag{9.3.5.1}$$

Corollaire (9.3.6) *Pour tout morphisme quasi-compact et quasi-séparé $f: X\to S$ et tout $V\subset S$, on a, à un isomorphisme canonique près,*

$$(f^{-1}(V))^0 = (f^0)^{-1}(V). \tag{9.3.6.1}$$

Ces deux corollaires sont des cas particuliers de (9.3.4) (le second étant d'ailleurs conséquence immédiate de la définition (9.1.21)).

(9.3.7) Considérons en particulier le cas où $f: U\to S$ est une *immersion ouverte quasi-compacte*, U s'identifiant donc à un schéma induit sur un ouvert *rétrocompact* de S. Comme le morphisme $f^{-1}(U)\to U$, restriction de f, est l'identité, il résulte de (9.3.6) que le morphisme $(f^0)^{-1}(U)\to U$, restriction de f^0, est un isomorphisme, $i_U: U\to U^0$ étant donc une *immersion ouverte* qui permet d'identifier U à un schéma induit sur un ouvert de U^0.

Plus généralement, pour un ouvert V de S, la restriction $(f^0)^{-1}(V)\to V$ de f^0 est un isomorphisme de $(f^0)^{-1}(V)$ sur le schéma induit sur l'ouvert $V\cap U$ de S si et seulement si l'immersion ouverte $U\cap V\to V$ est un *morphisme affine*. Il est clair (9.1.1) que la réunion de ces ouverts V est *le plus grand* d'entre eux U_1, qui

contient U; en vertu de ce qui précède, U_1 est aussi le plus grand ouvert ne rencontrant pas l'ensemble

(9.3.7.1) $$\mathrm{Daf}(U/S)=f^0(U^0)-U$$

(«défaut d'affinité» de l'ouvert U relativement à S, qui est vide si et seulement si U est affine sur S); autrement dit, l'ensemble fermé $Z=S-U_1$ est l'*adhérence* de l'ensemble Daf(U/S). On notera que pour tout morphisme *plat* $g: S'\to S$, si l'on pose $U'=g^{-1}(U)$, on a

(9.3.7.2) $$\mathrm{Daf}(U'/S')=g^{-1}(\mathrm{Daf}(U/S))$$

comme il résulte aussitôt de (9.3.4) et de (3.4.11). En particulier, pour tout ouvert V de S, on a

(9.3.7.3) $$\mathrm{Daf}((U\cap V)/V)=\mathrm{Daf}(U/S)\cap V$$

et pour tout $s\in S$,

(9.3.7.4) $$\mathrm{Daf}((U\cap \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}))/\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}))=\mathrm{Daf}(U/S)\cap \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}).$$

Au chap. IV, nous verrons que lorsque S est localement noethérien et U est un ouvert partout dense dans S, l'ensemble Daf(U/S) n'est pas du tout un ensemble fermé rare quelconque, mais possède des propriétés dimensionnelles très restrictives (IV*, 21.12.16).

Corollaire (9.3.8) *Soient* S *un schéma,* $f: X\to S$ *un morphisme,* $\mathscr{B}$ *une* $\mathscr{O}_S$*-Algèbre quasi-cohérente,* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{B}$*-Module quasi-cohérent. Soient* $S'=\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$, $X'=X\times_S S'$, $f': X'\to S'$ *et* $g': X'\to X$ *les projections canoniques. On a alors un isomorphisme canonique*

(9.3.8.1) $$f^*(\mathscr{M})\simeq g'_*(f'^*(\tilde{\mathscr{M}})).$$

Il suffit dans (9.3.2, (i)) d'intervertir les rôles de X et de S'.

Corollaire (9.3.9) *Soient* $f: X\to S$ *un morphisme,* $\mathscr{G}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-Module quasi-cohérent. Lorsque f est affine, ou lorsque f est quasi-compact et quasi-séparé et que* $\mathscr{G}$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-Module plat, on a, pour tout* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$*, un isomorphisme canonique*

(9.3.9.1) $$\mathscr{G}\otimes_{\mathscr{O}_S} f_*(\mathscr{F})\simeq f_*(f^*(\mathscr{G})\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F})$$

et en particulier un isomorphisme canonique

(9.3.9.2) $$\mathscr{G}\otimes_{\mathscr{O}_S} f_*(\mathscr{O}_X)\simeq f_*(f^*(\mathscr{G})).$$

Il suffit d'appliquer (9.3.2) en prenant $S'=S$, g étant le morphisme identique.

(9.3.10) Considérons deux S-schémas X, Y et soient $f: X\to S$, $g: Y\to S$ les morphismes structuraux. Soit $Z=X\times_S Y$ le produit et notons $h=g\circ f'=f\circ g'$ le morphisme structural

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & Z=X\times_S Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle h} & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[g]{} & Y \end{array}$$

On définit de la façon suivante un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_S$-Algèbres

(9.3.10.1) $$p: f_*(\mathscr{O}_X)\otimes_{\mathscr{O}_S} g_*(\mathscr{O}_Y)\to h_*(\mathscr{O}_Z)$$

ou encore, avec les notations de (**0**, 4.2.7)

$$p : \mathscr{A}(X)\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A}(Y)\to\mathscr{A}(X\times_S Y). \tag{9.3.10.2}$$

En vertu de (9.3.5.1) appliqué à $\mathscr{G}$, on a un homomorphisme de $\mathscr{O}_S$-Algèbres

$$f_*(\mathscr{O}_X)\otimes_{\mathscr{O}_S} g_*(\mathscr{O}_Y)\to g_*(g^*(f_*(\mathscr{O}_X))) \tag{9.3.10.3}$$

et d'autre part, d'après (9.3.1.1), un homomorphisme de $\mathscr{O}_Y$-Algèbres

$$g^*(f_*(\mathscr{O}_X))\to f'_*(g'^*(\mathscr{O}_X))=f'_*(\mathscr{O}_Z) \tag{9.3.10.4}$$

d'où un homomorphisme de $\mathscr{O}_S$-Algèbres

$$g_*(g^*(f_*(\mathscr{O}_X)))\to g_*(f'_*(\mathscr{O}_Z))=h_*(\mathscr{O}_Z) \tag{9.3.10.5}$$

et en le composant avec (9.3.10.3), on obtient l'homomorphisme (9.3.10.1). On vérifie aisément que si s, t sont des sections de $\mathscr{A}(X)$ et $\mathscr{A}(Y)$ respectivement au-dessus d'un ouvert U de S, l'image de $s\otimes t$ par (9.3.10.2) s'obtient en prenant l'image réciproque s' de s par g' et l'image réciproque t' de t par f' (lorsque s est considérée comme section de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de $f^{-1}(U)$ et t comme section de $\mathscr{O}_Y$ au-dessus de $g^{-1}(U)$), et en formant le produit $s't'$.

Proposition (9.3.11) *Avec les notations de* (9.3.10), *supposons f et g quasi-compacts et quasi-séparés. Alors l'homomorphisme canonique* (9.3.10.1) *est bijectif dans chacun des cas suivants:*

(i) *f et g sont affines;*

(ii) *f* (ou *g*) *est plat et affine;*

(iii) *$f_*(\mathscr{O}_X)$ est un $\mathscr{O}_S$-Module plat et g est plat* (ou la condition analogue obtenue en permutant f et g).

Il suffit en effet d'exprimer que chacun des homomorphismes (9.3.10.3) et (9.3.10.4) est bijectif. Pour le premier, c'est le cas si g est affine *ou* si g est quasi-compact et quasi-séparé et $f_*(\mathscr{O}_X)$ un $\mathscr{O}_S$-Module plat quasi-cohérent (9.3.9). Pour le second, c'est le cas si f est affine *ou* si f est quasi-compact et quasi-séparé et g est plat (9.3.3). Il suffit de combiner les diverses alternatives.

Corollaire (9.3.12) *Soient* S *un schéma, $\mathbf{C}$ la catégorie des* S*-schémas qui sont quasi-compacts, quasi-séparés et plats sur* S *et tels que $\mathscr{A}(X)$ soit un $\mathscr{O}_S$-Module plat, et soit $\mathbf{C}'$ la sous-catégorie de $\mathbf{C}$ formée des* S*-schémas plats et affines sur* S. *Alors $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ sont stables pour les produits finis sur* S, *et le foncteur* $X\mapsto \mathrm{Aff}(X/S)$ *de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$* (9.1.21) *commute aux produits finis sur* S.

On sait ((6.1.5) et (6.1.9)) que le produit sur S de deux S-schémas X, Y quasi-compacts et quasi-séparés sur S est quasi-compact et quasi-séparé sur S; en outre, si X et Y sont plats sur S, il en est de même de $X\times_S Y$ en vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 7, cor. 1 de la prop. 8. Il résulte donc de (9.3.11) que $\mathbf{C}$ est stable pour les produits finis; on prouve de la même façon que $\mathbf{C}'$ est stable pour les produits finis, compte tenu de (9.1.16). Le fait que $\mathrm{Aff}(X\times_S Y/S)=\mathrm{Aff}(X/S)\times_S\mathrm{Aff}(Y/S)$ (à isomorphisme canonique près) pour X et Y dans $\mathbf{C}$ résulte alors de (9.3.11) et de (9.1.19).

Remarques **(9.3.13)**

(i) Lorsque $S=\mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps, il résulte de (9.3.11, (iv)) que l'homomorphisme (9.3.10.1) est bijectif lorsque X et Y sont des *k-schémas quasi-compacts et quasi-séparés* quelconques.

(ii) Lorsque S est un schéma quelconque, on ne peut par contre se borner dans (9.3.11) à supposer f et g tous deux quasi-compacts, séparés et plats. Prenons par exemple pour S le sous-schéma fermé de l'espace affine à 4 dimensions sur un corps k, «réunion des plans $Z=T=0$ et $X=Y=0$», autrement dit $S=\mathrm{Spec}(A)$

avec $A=k[X,Y,Z,T]/((X)+(Y))((Z)+(T))$. Soit U l'ouvert (non affine) de S complémentaire du point 0 dans le plan $Z=T=0$, autrement dit le schéma induit sur l'ouvert de S complémentaire de V(a), où a est l'idéal de A engendré par les images de Z et T. Soit de même V l'ouvert (non affine) de S complémentaire de V(b), où b est l'idéal de A engendré par les images de X et Y. Il est clair que l'on a $U\cap V=\emptyset$, donc $U\times_S V=\emptyset$ (4.3.4) et par suite $\mathscr{A}(U\times_S V)=0$. Mais on voit immédiatement (5.3.11) que $\mathscr{A}(U)=(A/b)^{\sim}$ et $\mathscr{A}(V)=(A/a)^{\sim}$, donc le produit tensoriel $\mathscr{A}(U)\otimes_S\mathscr{A}(V)$ est égal à k.

(iii) De même, la conclusion de (9.3.11) ne subsiste plus si l'on suppose g affine, f plat et $f_*(\mathscr{O}_X)$ plat. Prenons par exemple pour S le plan affine sur un corps k, $S=\mathrm{Spec}(A)$ où $A=k[X,Y]$, pour X l'ouvert (non affine) complémentaire du point 0 dans S, pour Y la droite $\mathrm{Spec}(A/a)$, où $a=(X)$. On sait alors (5.3.11) que $f_*(\mathscr{O}_X)$ s'identifie à $\mathscr{O}_S$, donc $\mathscr{A}(X)\otimes_S\mathscr{A}(Y)$ est isomorphe à $(A/a)^{\sim}$. Mais le schéma $X\times_S Y$ est le complémentaire du point 0 dans la droite Y (4.3.4), donc un schéma affine dont l'anneau n'est pas isomorphe à $A/a=k[Y]$, mais bien à son anneau de fractions $k[Y,Y^{-1}]$. Il serait intéressant d'avoir un exemple mettant en défaut la conclusion de (9.3.11), où f et g ne seraient ni affines ni plats, mais $\mathscr{A}(X)$ et $\mathscr{A}(Y)$ plats.

(iv) Comme la définition d'un S-schéma en groupes ((**0**, 1.6.5) et (1.6.6)) ne fait intervenir que les produits finis de S-schémas, il résulte de (9.3.12) que le foncteur $X\mapsto \mathrm{Aff}(X/S)$ transforme les schémas en groupes appartenant à $\boldsymbol{C}$ en schémas en groupes appartenant à $\boldsymbol{C}'$; en d'autres termes, si G est un S-schéma en groupes quasi-compact, quasi-séparé et plat sur S et tel que $\mathscr{A}(G)$ soit un $\mathscr{O}_S$-Module plat, son enveloppe affine $\mathrm{Aff}(G/S)$ est un schéma en groupes affine et plat sur S.

Ce schéma a été étudié notamment par M. Raynaud dans le cas où S est un schéma localement noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$ (auquel cas l'hypothèse que X est plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S implique déjà que $\mathscr{A}(X)$ est un $\mathscr{O}_S$-Module plat).

(v) Sous les hypothèses de (9.1.20, (ii)), soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{B}$-Module quasi-cohérent; il y a alors un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{X'}$-Modules

$$v^*(\tilde{\mathscr{M}})\simeq(q^*(\mathscr{M})\otimes_{q^*(\mathscr{B})}\mathscr{B}')^{\sim}. \tag{9.3.13.1}$$

En effet, l'isomorphisme canonique (9.3.1.1) fournit un isomorphisme canonique de $p_1^*(\tilde{\mathscr{M}})$ sur le faisceau sur $\mathrm{Spec}(q^*(\mathscr{B}))$ associé au $q^*(\mathscr{B})$-Module $q^*(\mathscr{M})$, et il suffit ensuite d'appliquer (9.2.7).

9.4. Fibré vectoriel associé à un faisceau de modules

(9.4.1) Soient A un anneau, E un A-module. Rappelons qu'on appelle *algèbre symétrique* sur E et qu'on note $\mathbf{S}(E)$ (ou $\mathbf{S}_A(E)$) l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle $\mathbf{T}(E)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $x\otimes y-y\otimes x$, où x, y parcourent E. L'algèbre $\mathbf{S}(E)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante: si σ est l'application canonique $E\to\mathbf{S}(E)$ (obtenue par composition de $E\to\mathbf{T}(E)$ et de l'application canonique $\mathbf{T}(E)\to\mathbf{S}(E)$), toute application A-linéaire $E\to B$, où B est une A-algèbre *commutative*, se factorise de façon unique en

$$E\xrightarrow{\sigma}\mathbf{S}(E)\xrightarrow{g}B,$$

où g est un A-homomorphisme *d'algèbres*. Autrement dit, $\mathbf{S}(E)$ *représente* le foncteur covariant $B \mapsto \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(E, B)$ de la catégorie des A-algèbres dans la catégorie des ensembles (**0**, 1.1.11). On déduit aussitôt de cette caractérisation que pour deux A-modules E, F, on a

$$\mathbf{S}(E \oplus F) = \mathbf{S}(E) \otimes \mathbf{S}(F)$$

à un isomorphisme canonique près; en outre, $\mathbf{S}(E)$ est un foncteur covariant en E, de la catégorie des A-modules dans celle des A-algèbres commutatives; enfin, la caractérisation précédente montre aussi que si $E = \varinjlim E_\lambda$, on a $\mathbf{S}(E) = \varinjlim \mathbf{S}(E_\lambda)$ à un isomorphisme canonique près. Par abus de langage, un produit $\sigma(x_1)\sigma(x_2)\cdots\sigma(x_n)$, où les $x_i \in E$, se note souvent $x_1 x_2 \cdots x_n$ si aucune confusion n'en résulte. L'algèbre $\mathbf{S}(E)$ est *graduée*, $\mathbf{S}_n(E)$ étant l'ensemble des combinaisons linéaires des produits de n éléments de E ($n \geqslant 0$); l'algèbre $\mathbf{S}(A)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre des polynômes $A[T]$ à une indéterminée et l'algèbre $\mathbf{S}(A^n)$ à l'algèbre des polynômes à n indéterminées $A[T_1, \ldots, T_n]$.

(9.4.2) Soit φ un homomorphisme d'anneaux $A \to B$. Si F est un B-module, l'application canonique $F \to \mathbf{S}(F)$ donne une application canonique $F_{[\varphi]} \to \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$, qui se factorise donc en $F_{[\varphi]} \to \mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \to \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$; l'homomorphisme canonique $\mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \to \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$ est surjectif, mais non nécessairement bijectif. Si E est un A-module, tout di-homomorphisme $E \to F$ (c'est-à-dire tout A-homomorphisme $E \to F_{[\varphi]}$) donne donc canoniquement un A-homomorphisme d'algèbres $\mathbf{S}(E) \to \mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \to \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$, c'est-à-dire un di-homomorphisme d'algèbres $\mathbf{S}(E) \to \mathbf{S}(F)$.

Avec les mêmes notations, pour tout A-module E, $\mathbf{S}(E \otimes_A B)$ s'identifie canoniquement à l'algèbre $\mathbf{S}(E) \otimes_A B$; cela résulte aussitôt de la propriété universelle de $\mathbf{S}(E)$ (9.4.1).

(9.4.3) Soit R une partie multiplicative de l'anneau A; appliquant (9.4.2) à l'anneau $B = R^{-1}A$, et se rappelant que $R^{-1}E = E \otimes_A R^{-1}A$, on voit que l'on a $\mathbf{S}(R^{-1}E) = R^{-1}\mathbf{S}(E)$ à un isomorphisme canonique près. En outre, si $R' \supset R$ est une seconde partie multiplicative de A, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^{-1}E & \longrightarrow & R'^{-1}E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}(R^{-1}E) & \longrightarrow & \mathbf{S}(R'^{-1}E) \end{array}$$

est commutatif.

(9.4.4) Soit maintenant $(S, \mathscr{A})$ un espace annelé, et soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{A}$-Module sur S. Si, à tout ouvert $U \subset S$ on associe le $\Gamma(U, \mathscr{A})$-module $\mathbf{S}(\Gamma(U, \mathscr{E}))$, on définit (vu le caractère fonctoriel de $\mathbf{S}(E)$ (9.4.2)) un pré-

faisceau d'algèbres; on dit que le faisceau associé, que l'on note $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ ou $\mathbf{S}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E})$, est la *$\mathscr{A}$-Algèbre symétrique* du $\mathscr{A}$-Module $\mathscr{E}$. Il résulte aussitôt de (9.4.1) que $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ est solution d'un problème universel: tout homomorphisme de $\mathscr{A}$-Modules $\mathscr{E}\to\mathscr{B}$, où $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{A}$-Algèbre, se factorise d'une seule manière en $\mathscr{E}\to\mathbf{S}(\mathscr{E})\to\mathscr{B}$, la seconde flèche étant un homomorphisme de $\mathscr{A}$-Algèbres. Il y a donc correspondance biunivoque entre homomorphismes $\mathscr{E}\to\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$-Modules et homomorphismes $\mathbf{S}(\mathscr{E})\to\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$-Algèbres. Autrement dit, $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ *représente* le foncteur covariant $\mathscr{B}\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mod}}(\mathscr{E},\mathscr{B})$ de la catégorie des $\mathscr{A}$-Algèbres dans la catégorie des ensembles (**0**,1.1.11). En particulier, tout homomorphisme $u:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ de $\mathscr{A}$-Modules définit un homomorphisme $\mathbf{S}(u):\mathbf{S}(\mathscr{E})\to\mathbf{S}(\mathscr{F})$ de $\mathscr{A}$-Algèbres et $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ est donc un foncteur covariant en $\mathscr{E}$.

En vertu de (9.4.2) et de la permutabilité de $\mathbf{S}$ avec les limites inductives, on a $(\mathbf{S}(\mathscr{E}))_s=\mathbf{S}(\mathscr{E}_s)$ pour tout point $s\in S$. Si $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ sont deux $\mathscr{A}$-Modules, $\mathbf{S}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{S}(\mathscr{E})\otimes_{\mathscr{A}}\mathbf{S}(\mathscr{F})$, comme on le voit sur les préfaisceaux correspondants.

Notons aussi que $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ est une $\mathscr{A}$-Algèbre graduée, somme directe infinie des $\mathbf{S}_n(\mathscr{E})$, où le $\mathscr{A}$-Module $\mathbf{S}_n(\mathscr{E})$ est le faisceau associé au préfaisceau $U\mapsto\mathbf{S}_n(\Gamma(U,\mathscr{E}))$. Si on prend en particulier $\mathscr{E}=\mathscr{A}$, on voit que $\mathbf{S}_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})$ s'identifie à $\mathscr{A}[T]=\mathscr{A}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[T]$ (T indéterminée, $\mathbf{Z}$ étant considéré comme faisceau simple).

(9.4.5) Soient $(T,\mathscr{B})$ un second espace annelé, f un morphisme $(S,\mathscr{A})\to(T,\mathscr{B})$. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{B}$-Module, $\mathbf{S}(f^*(\mathscr{F}))$ s'identifie canoniquement à $f^*(\mathbf{S}(\mathscr{F}))$; en effet, si $f=(\psi,\theta)$, on a par définition (**0**,4.3.1)

$$\mathbf{S}(f^*(\mathscr{F}))=\mathbf{S}(\psi^{-1}(\mathscr{F})\otimes_{\psi^{-1}(\mathscr{B})}\mathscr{A})=\mathbf{S}(\psi^{-1}(\mathscr{F}))\otimes_{\psi^{-1}(\mathscr{B})}\mathscr{A}$$

(9.4.2); pour tout ouvert U de S et toute section h de $\mathbf{S}(\psi^{-1}(\mathscr{F}))$ au-dessus de U, h coïncide, dans un voisinage V de chaque point $s\in U$, avec un élément de $\mathbf{S}(\Gamma(V,\psi^{-1}(\mathscr{F})))$; si on se reporte à la définition de $\psi^{-1}(\mathscr{F})$ (**0**,3.7.1) et qu'on tient compte de ce que tout élément de $\mathbf{S}(E)$ pour un module E est combinaison linéaire d'un nombre fini de produits d'élément de E, on voit qu'il y a un voisinage W de $\psi(s)$ dans T, une section h' de $\mathbf{S}(\mathscr{F})$ au-dessus de W et un voisinage $V'\subset V\cap\psi^{-1}(W)$ de s tels que h coïncide avec $t\mapsto h'(\psi(t))$ au-dessus de V'; d'où notre assertion.

Proposition (9.4.6) *Soient* A *un anneau,* $S=\mathrm{Spec}(A)$ *son spectre premier,* $\mathscr{E}=\tilde{M}$ *le $\mathscr{O}_S$-Module associé à un* A*-module* M; *alors la $\mathscr{O}_S$-Algèbre* $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ *est associée à la* A*-algèbre* $\mathbf{S}(M)$.

En effet, pour tout $f\in A$, $\mathbf{S}(M_f)=(\mathbf{S}(M))_f$ (9.4.3) et la proposition résulte donc des définitions (1.3.4).

Corollaire (9.4.7) *Si* S *est un schéma, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent, la $\mathscr{O}_S$-Algèbre* $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ *est quasi-cohérente. Si en outre $\mathscr{E}$ est de type fini* (resp.

de présentation finie), chacun des $\mathcal{O}_S$-Modules $\mathbf{S}_n(\mathscr{E})$ est de type fini (resp. *de présentation finie) et la $\mathcal{O}_S$-Algèbre $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ est de type fini* (resp. *de présentation finie*).

La première assertion est conséquence immédiate de (9.4.6) et de (1.4.1); la seconde résulte de ce que, si E est un A-module de type fini, $\mathbf{S}_n(E)$ est un A-module de type fini; on applique alors (1.4.3). Pour établir la troisième, on est ramené (2.2.5) au cas où $S=\mathrm{Spec}(A)$ est affine et $\mathscr{E}=\tilde{E}$, où E est un A-module de type fini (resp. de présentation finie); or, si on a une suite exacte $0\to N\to A^n\to E\to 0$, on en déduit une suite exacte $0\to\mathfrak{J}\to\mathbf{S}(A^n)\to\mathbf{S}(E)\to 0$, où l'idéal $\mathfrak{J}$ de $\mathbf{S}(A^n)$ est engendré par $N\subset\mathbf{S}_1(A^n)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, 3e éd.); d'où la conclusion.

(9.4.8) Soient S un schéma, $\mathscr{E}$ un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent. Pour tout S-schéma T, de morphisme structural $f:T\to S$, posons $\mathscr{E}_{(T)}=f^*(\mathscr{E})$, qui est un $\mathcal{O}_T$-Module quasi-cohérent. Nous allons voir que

$$T\mapsto F_{\mathscr{E}}(T)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)},\mathcal{O}_T)=\Gamma(T,(\mathscr{E}_{(T)})^\vee) \quad (\mathbf{0},4.1.6) \tag{9.4.8.1}$$

peut être défini comme un *foncteur contravariant* de la catégorie des S-schémas dans celle des ensembles. Pour cela, il faut définir, pour tout S-morphisme $g:T'\to T$, une application $F_{\mathscr{E}}(g):F_{\mathscr{E}}(T)\to F_{\mathscr{E}}(T')$ satisfaisant aux axiomes des foncteurs: il est immédiat que l'on peut prendre $F_{\mathscr{E}}(g)$ égale à l'application $g^*:u\mapsto g^*(u)$ $(\mathbf{0},4.3.1)$ puisque le morphisme structural $T'\to S$ n'est autre que $f\circ g$ et qu'on a donc $\mathscr{E}_{(T')}=g^*(\mathscr{E}_{(T)})$ et $\mathcal{O}_{T'}=g^*(\mathcal{O}_T)$.

Proposition (9.4.9) *Pour tout $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, le foncteur contravariant* (9.4.8.1) *est représentable par le couple formé du S-schéma (affine sur S)*

$$\mathbf{V}(\mathscr{E})=\mathrm{Spec}(\mathbf{S}(\mathscr{E})) \tag{9.4.9.1}$$

et le $\mathcal{O}_{\mathbf{V}(\mathscr{E})}$-homomorphisme $(\mathscr{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathbf{S}(\mathscr{E}))^\sim\to(\mathbf{S}(\mathscr{E}))^\sim$ (c'est-à-dire $\mathscr{E}_{(\mathbf{V}(\mathscr{E}))}\to\mathcal{O}_{\mathbf{V}(\mathscr{E})}$) de $\mathcal{O}_{\mathbf{V}(\mathscr{E})}$-Modules déduit de l'homomorphisme canonique $\mathscr{E}\to\mathbf{S}(\mathscr{E})$ (9.4.4).

Cela résulte de la suite d'isomorphismes canoniques fonctoriels en T (dans la catégorie des S-schémas)

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_S(T,\mathbf{V}(\mathscr{E})) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathbf{S}(\mathscr{E}),\mathscr{A}(T)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E},f_*(\mathcal{O}_T))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(f^*(\mathscr{E}),\mathcal{O}_T)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)},\mathcal{O}_T)=F_{\mathscr{E}}(T),\end{aligned}$$

dont le premier est donné par (9.1.7.2), le second par (9.4.4) et le troisième par $(\mathbf{0},4.4.3.1)$.

On dit que le S-schéma $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ est le *fibré vectoriel sur* S *défini par* $\mathscr{E}$.

Le $\mathcal{O}_{\mathbf{V}(\mathscr{E})}$-homomorphisme $\mathscr{E}_{(\mathbf{V}(\mathscr{E}))}\to\mathcal{O}_{\mathbf{V}(\mathscr{E})}$ de (9.4.9) est une *section* sur $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ du *dual* $(\mathscr{E}_{(\mathbf{V}(\mathscr{E}))})^\vee$ de $\mathscr{E}_{(\mathbf{V}(\mathscr{E}))}$, dite *section universelle* de ce dual. Si $U=\mathrm{Spec}(A)$ est un ouvert affine de S, son image réciproque dans

$\mathbf{V}(\mathscr{E})$ s'identifie à $\mathrm{Spec}(\mathbf{S}(M))$, si $\mathscr{E}|U = \tilde{M}$, où M est un A-module; au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbf{S}(M))$, la section universelle s'identifie à l'homomorphisme $m \otimes p \mapsto mp$ de $M \otimes_A \mathbf{S}(M)$ dans $\mathbf{S}(M)$, M étant identifié à la partie $\mathbf{S}_1(M)$ de $\mathbf{S}(M)$.

(9.4.10) Prenons en particulier pour T un schéma induit sur un ouvert U de S. Alors les S-morphismes $U \to \mathbf{V}(\mathscr{E})$ ne sont autres que les U-*sections* (2.6.5) du U-schéma induit par $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ sur l'ouvert $p^{-1}(U)$ (où $p: \mathbf{V}(\mathscr{E}) \to S$ est le morphisme structural). Par définition (9.4.8.1), ces U-sections correspondent biunivoquement (et fonctoriellement en U) aux *sections du dual* $\check{\mathscr{E}}$ *de* $\mathscr{E}$ *au-dessus de* U; la fonctorialité correspond ici à la compatibilité avec la restriction à un ouvert $U' \subset U$. On peut donc dire que le *dual* $\check{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ est canoniquement identifié au *faisceau des germes de* S-*sections de* $\mathbf{V}(\mathscr{E})$.

En particulier, si on prend $T = S$, à l'homomorphisme *nul* $\mathscr{E} \to \mathscr{O}_S$ correspond une S-section canonique de $\mathbf{V}(\mathscr{E})$, dite *section nulle*.

Si maintenant on prend pour T le spectre $\{\xi\}$ d'un corps K, le morphisme structural $f: T \to S$ correspond à un monomorphisme $\kappa(s) \to K$, où $s = f(\xi)$ (2.5.5), et les S-morphismes $\{\xi\} \to \mathbf{V}(\mathscr{E})$ ne sont autres que les *points de* $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ *à valeurs dans l'extension* K *de* $\kappa(s)$ (3.5.4), points qui sont localisés en certains points de $p^{-1}(s)$. L'ensemble de ces points, qu'on peut encore appeler la *fibre rationnelle sur* K de $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ *au-dessus de* s, s'identifie d'après la définition (9.4.8.1) au *dual* du K-*espace vectoriel* $\mathscr{E}_s \otimes_{\mathscr{O}_{S,s}} K = \mathscr{E}^s \otimes_{\kappa(s)} K$ en posant $\mathscr{E}^s = \mathscr{E}_s / \mathfrak{m}_s \mathscr{E}_s$; si $\mathscr{E}^s$ ou K est de rang fini sur $\kappa(s)$, ce dual s'identifie aussi à $(\mathscr{E}^s)^\vee \otimes_{\kappa(s)} K$, en désignant par $(\mathscr{E}^s)^\vee$ le dual du $\kappa(s)$-espace vectoriel $\mathscr{E}^s$.

Ces propriétés justifient la terminologie de «fibré vectoriel» introduite ci-dessus, mais on observera que la définition que nous obtenons est *duale* de la définition classique, puisqu'on s'attendrait à obtenir pour «fibres» de $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ les espaces $\mathscr{E}^s \otimes_{\kappa(s)} K$ eux-mêmes et non leurs duals. Cette définition nous est imposée par la nécessité de pouvoir définir $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ pour un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent *quelconque* $\mathscr{E}$, et non seulement pour un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang fini: on peut montrer en effet que le foncteur $T \mapsto \Gamma(T, \mathscr{E}_{(T)})$ (qui est celui que l'on voudrait représenter) n'est représentable *que si* $\mathscr{E}$ est localement libre de rang fini (il est immédiat qu'il est effectivement représentable dans ce cas puisque $\mathscr{E} = (\check{\mathscr{E}})^\vee$ à isomorphisme canonique près, et le S-schéma qui le représente est donc $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$; nous revenons plus loin sur ce foncteur).

Proposition (9.4.11) (i) $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ *est un foncteur contravariant en* $\mathscr{E}$ *de la catégorie des* $\mathscr{O}_S$-*Modules quasi-cohérents dans la catégorie des* S-*schémas affines.*

(ii) *Si* $\mathscr{E}$ *est un* $\mathscr{O}_S$-*Module de type fini* (resp. *de présentation finie*), $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ *est de type fini* (resp. *de présentation finie*) *sur* S.

(iii) *Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont deux $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents, $\mathbf{V}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{V}(\mathscr{E})\times_S\mathbf{V}(\mathscr{F})$.*

(iv) *Soit $g:S'\to S$ un morphisme; pour tout $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, $\mathbf{V}(g^*(\mathscr{E}))$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{V}(\mathscr{E})_{(S')}=\mathbf{V}(\mathscr{E})\times_S S'$.*

(v) *A un épimorphisme $\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents correspond une immersion fermée $\mathbf{V}(\mathscr{F})\to\mathbf{V}(\mathscr{E})$.*

(i) est conséquence immédiate de (9.1.5), compte tenu de ce que tout homomorphisme de $\mathscr{O}_S$-Modules $\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ définit canoniquement un homomorphisme de $\mathscr{O}_S$-Algèbres $\mathbf{S}(\mathscr{E})\to\mathbf{S}(\mathscr{F})$. (ii) découle immédiatement de (9.1.15) et de (9.4.7). Pour démontrer (iii), il suffit de partir de l'isomorphisme canonique $\mathbf{S}(\mathscr{E}\oplus\mathscr{F})\simeq\mathbf{S}(\mathscr{E})\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathbf{S}(\mathscr{F})$ (9.4.4) et d'appliquer (9.1.19). De même, pour démontrer (iv), il suffit de partir de l'isomorphisme canonique $\mathbf{S}(g^*(\mathscr{E}))\simeq g^*(\mathbf{S}(\mathscr{E}))$ (9.4.5) et d'appliquer (9.1.9). Enfin, pour établir (v), il suffit de remarquer que si l'homomorphisme $\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ est surjectif, il en est de même de l'homomorphisme correspondant $\mathbf{S}(\mathscr{E})\to\mathbf{S}(\mathscr{F})$ de $\mathscr{O}_S$-Algèbres, et la conclusion résulte de (9.2.9).

(9.4.12) Prenons en particulier $\mathscr{E}=\mathscr{O}_S$; le schéma $\mathbf{V}(\mathscr{O}_S)$ est le S-schéma affine, spectre de la $\mathscr{O}_S$-Algèbre $\mathbf{S}(\mathscr{O}_S)$ qui s'identifie à la $\mathscr{O}_S$-Algèbre $\mathscr{O}_S[T]=\mathscr{O}_S\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[T]$ (T indéterminée); c'est évident lorsque $S=\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, en vertu de (9.4.6), et on passe de là au cas général en considérant le morphisme structural $S\to\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ et utilisant (9.4.11, (iv)). En raison de ce résultat, on pose encore $\mathbf{V}(\mathscr{O}_S)=S[T]$, et on a donc la formule

$$S[T]=S\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[T]. \tag{9.4.12.1}$$

L'identification du faisceau des germes de S-sections de $S[T]$ avec $\mathscr{O}_S$, déjà vue dans (3.4.2), se retrouve ici dans un contexte plus général, comme cas particulier de (9.4.10).

(9.4.13) Pour tout S-schéma X, par définition $\mathrm{Hom}_S(X,S[T])$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S,\mathscr{A}(X))$, lequel est canoniquement isomorphe à $\Gamma(S,\mathscr{A}(X))$, et est par suite muni d'une structure d'anneau; en outre, à tout S-morphisme $h:X\to Y$ correspond un morphisme $\Gamma(\mathscr{A}(h)):\Gamma(S,\mathscr{A}(Y))\to\Gamma(S,\mathscr{A}(X))$ pour les structures d'anneau (**0**,4.2.7). Quand on munit $\mathrm{Hom}_S(X,S[T])$ de la structure d'anneau ainsi définie, on voit donc qu'on peut considérer $\mathrm{Hom}_S(X,S[T])$ comme un *foncteur contravariant* en X, de la catégorie des S-schémas dans celle des anneaux. D'autre part, $\mathrm{Hom}_S(X,\mathbf{V}(\mathscr{E}))$ s'identifie de même à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E},\mathscr{A}(X))$ (où $\mathscr{A}(X)$ est considéré comme un *$\mathscr{O}_S$-Module*); on peut par suite le munir canoniquement d'une structure de *module* sur l'anneau $\mathrm{Hom}_S(X,S[T])$, et on voit comme ci-dessus que le couple

$$(\mathrm{Hom}_S(X,S[T]),\mathrm{Hom}_S(X,\mathbf{V}(\mathscr{E})))$$

est un foncteur contravariant en X, à valeurs dans la catégorie dont les éléments sont les couples (A, M) formés d'un anneau A et d'un A-module M, les morphismes étant les di-homomorphismes.

On peut donc dire que S[T] est un S-*schéma en anneaux* et que $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ est un S-*schéma en modules* sur le S-schéma en anneaux S[T] (**0**,1.6.8).

(9.4.14) Nous allons voir que la structure de S-schéma en modules définie sur le S-schéma $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ permet de reconstituer le $\mathscr{O}_S$-Module $\mathscr{E}$ à un isomorphisme unique près: pour cela, nous allons montrer que $\mathscr{E}$ est canoniquement isomorphe à un sous-$\mathscr{O}_S$-Module de $\mathbf{S}(\mathscr{E})=\mathscr{A}(\mathbf{V}(\mathscr{E}))$, défini au moyen de cette structure. En effet (9.4.4) l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg.}}(\mathbf{S}(\mathscr{E}),\mathscr{A}(X))$ des homomorphismes de $\mathscr{O}_S$-*Algèbres* s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E},\mathscr{A}(X))$, ensemble d'homomorphismes de $\mathscr{O}_S$-*Modules*: si h,h' sont deux éléments de ce dernier ensemble, s_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ des sections de $\mathscr{E}$ au-dessus d'un ouvert $U\subset S$, t une section de $\mathscr{A}(X)$ au-dessus de U, on a par définition

$$(h+h')(s_1 s_2\cdots s_n)=\prod_{i=1}^{n}(h(s_i)+h'(s_i))$$

et

$$(t\cdot h)(s_1 s_2\cdots s_n)=t^n\prod_{i=1}^{n}h(s_i).$$

Cela étant, si z est une section de $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ au-dessus de U, $h\mapsto h(z)$ est une application de $\mathrm{Hom}_S(X,\mathbf{V}(\mathscr{E}))=\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg.}}(\mathbf{S}(\mathscr{E}),\mathscr{A}(X))$ dans $\Gamma(U,\mathscr{A}(X))$. Nous allons montrer que $\mathscr{E}$ s'identifie au sous-Module de $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ tel que, *pour tout ouvert* $U\subset S$, *toute section z de ce sous-*$\mathscr{O}_S$*-Module au-dessus de* U *et tout* S*-schéma* X, *l'application* $h\mapsto h(z)$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S|U\text{-Alg.}}(\mathbf{S}(\mathscr{E})|U,\mathscr{A}(X)|U)$ *dans* $\Gamma(U,\mathscr{A}(X))$ *soit un homomorphisme de* $\Gamma(U,\mathscr{A}(X))$*-modules.*

Il est immédiat en effet que $\mathscr{E}$ possède cette propriété; pour démontrer la réciproque, on peut se borner à prouver que lorsque $S=\mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{E}=\tilde{M}$, une section z de $\mathbf{S}(\mathscr{E})$ au-dessus de S qui (pour $U=S$) possède la propriété énoncée ci-dessus, est nécessairement une section de $\mathscr{E}$; on a alors $z=\sum_{n=0}^{\infty}z_n$, où $z_n\in\mathbf{S}_n(M)$, et il s'agit de prouver que $z_n=0$ pour $n\neq 1$. Posons $B=\mathbf{S}(M)$ et prenons pour X le schéma Spec(B[T]), où T est une indéterminée. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg.}}(\mathbf{S}(\mathscr{E}),\mathscr{A}(X))$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes d'anneaux $h:B\to B[T]$ (1.3.13), et d'après ce qu'on a vu plus haut, on a $(T\cdot h)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}T^n h(z_n)$: l'hypothèse sur z implique que l'on a $\sum_{n=0}^{\infty}T^n h(z_n)=T\cdot\sum_{n=0}^{\infty}h(z_n)$ pour tout homomorphisme h. Si on prend en particulier pour h l'injection canonique, il vient $\sum_{n=0}^{\infty}T^n z_n=T\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z_n$, ce qui entraîne bien la conclusion $z_n=0$ pour $n\neq 1$.

Proposition (9.4.15) *Soit* S *un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Tout* S*-schéma* X *affine sur* S *et de type fini sur* S *est* S*-isomorphe à un sous-*S*-schéma fermé d'un* S*-schéma de la forme* $\mathbf{V}(\mathscr{E})$*, où* $\mathscr{E}$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-Module quasi-cohérent de présentation finie.*

En effet, la $\mathscr{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}(X)$ est de type fini (1.3.7). Les hypothèses sur S entraînent que $\mathscr{A}(X)$ est engendrée par un sous-$\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{E}'$ (6.9.11); cela entraîne que l'homomorphisme canonique $\mathbf{S}(\mathscr{E}') \to \mathscr{A}(X)$ prolongeant canoniquement l'injection $\mathscr{E}' \to \mathscr{A}(X)$ est *surjectif*; on en déduit donc (9.2.9) que X est S-isomorphe à un sous-schéma fermé de $\mathbf{V}(\mathscr{E}')$. D'autre part (6.9.10) il existe un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$ de présentation finie et un épimorphisme $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$; $\mathbf{V}(\mathscr{E}')$ est donc S-isomorphe à un sous-schéma fermé de $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ (9.4.11, (v)).

9.5. Schémas en ensembles algébriques

(9.5.1) Soit A un anneau; on appelle *espace affine de dimension n* sur A le A-module A^n. Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de l'anneau de polynômes $A[T_1, \ldots, T_n]$ à n indéterminées, on appelle *ensemble algébrique défini par* $\mathfrak{J}$ l'ensemble des $t = (t_1, \ldots, t_n) \in A^n$ tels que $P(t_1, \ldots, t_n) = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathfrak{J}$.

Si $S = \mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble A^n peut encore s'interpréter comme l'ensemble des *sections* $\Gamma(S, \mathscr{O}_S^n)$ du $\mathscr{O}_S$-Module *libre* $\mathscr{E} = \mathscr{O}_S^n$ au-dessus de S (1.3.9), ou encore comme l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{E}}, \mathscr{O}_S)$ des homomorphismes du *dual* de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{O}_S$. Ce dernier s'identifie, comme on l'a vu, à l'ensemble des homomorphismes de $\mathscr{O}_S$-Algèbres $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}}), \mathscr{O}_S)$; d'ailleurs, si on identifie les formes linéaires coordonnées, éléments de la base canonique de $\Gamma(S, \check{\mathscr{E}})$, aux indéterminées T_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $\Gamma(S, \mathbf{S}(\check{\mathscr{E}}))$ s'identifie à l'anneau de polynômes $A[T_1, \ldots, T_n]$ et un idéal $\mathfrak{J}$ de cet anneau à $\Gamma(S, \mathscr{J})$, où $\mathscr{J}$ est un Idéal quasi-cohérent de la $\mathscr{O}_S$-Algèbre $\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})$. Il est alors immédiat, en vertu de ces identifications, que l'ensemble algébrique défini par $\mathscr{J}$ s'identifie à la partie de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}}), \mathscr{O}_S)$ formée des homomorphismes de $\mathscr{O}_S$-Algèbres qui sont *nuls dans* $\mathscr{J}$, ou encore, ce qui revient au même, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J}, \mathscr{O}_S)$.

(9.5.2) D'une façon générale, considérons un schéma S et un $\mathscr{O}_S$-Module $\mathscr{E}$ *localement libre de rang fini* sur S; nous dirons que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{E}}, \mathscr{O}_S) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}}), \mathscr{O}_S)$ est l'*espace affine sur* S *défini par* $\mathscr{E}$, et pour tout Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})$, nous dirons que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J}, \mathscr{O}_S)$ est l'*ensemble algébrique sur* S *défini par l'Idéal* $\mathscr{J}$.

Soit maintenant T un S-schéma quelconque; alors $\mathscr{E}_{(T)}$ est un $\mathscr{O}_T$-Module localement libre de rang fini et $(\check{\mathscr{E}})_{(T)}$ s'identifie canoniquement au dual $(\mathscr{E}_{(T)})^\vee$ (**0**, 5.4.9); l'Algèbre symétrique $\mathbf{S}((\check{\mathscr{E}})_{(T)})$ s'identifie d'autre part à $(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}}))_{(T)}$ (9.4.5), et si l'on pose $\mathscr{J}_{(T)} = \mathscr{J}\mathbf{S}((\check{\mathscr{E}})_{(T)})$, $\mathbf{S}((\check{\mathscr{E}})_{(T)})/\mathscr{J}_{(T)}$ s'identifie canoniquement à la $\mathscr{O}_T$-Algèbre $(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})_{(T)}$, image réciproque de $\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J}$. On peut donc définir comme dans (9.4.8) un *foncteur contravariant*

$$\mathrm{Al}(\mathscr{E}, \mathscr{J}) : T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}((\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})_{(T)}, \mathscr{O}_T) \tag{9.5.2.1}$$

de la catégorie des S-schémas dans celle des ensembles, qu'on appelle le foncteur «ensembles algébriques définis par $\mathscr{J}$».

Proposition (9.5.3) *Le foncteur* (9.5.2.1) *est représentable par un* S*-schéma* $\mathbf{Al}(\mathscr{E},\mathscr{J})$ *affine sur* S, *sous-schéma fermé de* $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ *défini par l'Idéal* $\tilde{\mathscr{J}}$ *de* $\mathscr{O}_{\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})}$ (9.2.9).
En effet, si X est ce sous-schéma, on a des isomorphismes canoniques (**0**, 4.4.7.1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_S(T,X) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J}, f_*(\mathscr{O}_T))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T\text{-Alg}}(f^*(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J}),\mathscr{O}_T)=\mathrm{Al}(\mathscr{E},\mathscr{J})(T)\end{aligned}$$

(où $f: T\to S$ est le morphisme structural).

On dit que $\mathbf{Al}(\mathscr{E},\mathscr{J})$ est le S-*schéma en ensembles algébriques définis par* $\mathscr{J}$. En particulier, si $\mathscr{J}=0$ et si $\mathscr{E}$ est de rang n, on dit que $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ est le S-*schéma en espaces affines de rang n sur* S *défini par* $\mathscr{E}$ (on dit aussi «S-schéma en espaces affines tordus»).

9.6. Schémas en groupes linéaires

Proposition (9.6.1) *Soient* S *un schéma,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-Module quasi-cohérent,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-Module localement libre de rang fini. Alors le foncteur contravariant* (**0**,4.3.6)

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})\colon T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)},\mathscr{F}_{(T)}) \tag{9.6.1.1}$$

de la catégorie des S*-schémas dans celle des ensembles, est représentable par le fibré vectoriel* $\mathbf{V}(\check{\mathscr{F}}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{E})$, *que l'on note aussi* $\mathbf{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})$.

En effet, on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_S$-Modules $(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_S}\check{\mathscr{E}})^{\vee}\simeq\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_S}\check{\mathscr{F}}$ et un isomorphisme canonique de $\Gamma(S,\mathscr{O}_S)$-modules $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E},\mathscr{F})\simeq\Gamma(S,\check{\mathscr{E}}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{F})$ (**0**, 5.4.2), d'où la proposition.

Corollaire (9.6.2) *Soient* S *un schéma,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-Module localement libre de rang fini*; *alors* $\mathbf{End}(\mathscr{E})=\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{E})$ *est un* S*-schéma en algèbres (non commutatives) et* $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ *est un* S*-schéma en modules à gauche sur ce* S*-schéma en algèbres.*

Cela revient à remarquer que le foncteur contravariant

$$\mathrm{End}(\mathscr{E})\colon T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)},\mathscr{E}_{(T)})$$

est en fait un foncteur de la catégorie des S-schémas dans celle des $\Gamma(S,\mathscr{O}_S)$-algèbres et qu'on a d'autre part un morphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)},\mathscr{E}_{(T)})\times\Gamma(T,\mathscr{E}_{(T)})\to\Gamma(T,\mathscr{E}_{(T)})$$

qui pour chaque T fait de $\Gamma(T,\mathscr{E}_{(T)})$ un $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)},\mathscr{E}_{(T)})$-module à gauche (**0**, 1.6.1).

(9.6.3) Rappelons que pour tout $\mathscr{O}_S$-Module $\mathscr{E}$, on note $\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E})$ le groupe des automorphismes de $\mathscr{E}$; lorsque $S=\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathscr{E}=\tilde{E}$, où E est un A-module, ce groupe s'appelle encore le *groupe linéaire* relatif à E et se note $\mathbf{GL}(E)$; si $E=A^n$, on écrit aussi $\mathbf{GL}(n,A)$.

Proposition (9.6.4) *Soient* S *un schéma,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-Module localement libre de rang fini. Alors le foncteur contravariant*

$$\text{(9.6.4.1)} \qquad \mathrm{Aut}(\mathscr{E})\colon T \mapsto \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)})$$

de la catégorie des S*-schémas dans celle des groupes, est représentable par un* S*-schéma en groupes* $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$*, isomorphe à un schéma induit sur un ouvert de* $\mathbf{End}(\mathscr{E})$.

Comme l'ensemble des $s \in S$ où $\mathscr{E}$ est de rang donné est ouvert et fermé dans S, on peut se borner au cas où $\mathscr{E}$ est de rang constant n.

Montrons d'abord que l'on peut définir canoniquement une «*section déterminant*» du $\mathscr{O}_S$-Module localement libre $\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E})$ au-dessus de S. Posons en effet $Z = \mathbf{End}(\mathscr{E}) = \mathbf{V}(\check{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E})$ et considérons le $\mathscr{O}_Z$-Module localement libre $\check{\mathscr{E}}_{(Z)} \otimes_{\mathscr{O}_Z} \mathscr{E}_{(Z)}$; il lui est attaché une «*section universelle*» de son dual au-dessus de Z (9.4.9); mais ce dual est canoniquement isomorphe à $\mathscr{E}_{(Z)} \otimes_{\mathscr{O}_Z} \check{\mathscr{E}}_{(Z)}$ puisque $\mathscr{E}_{(Z)}$ est localement libre, donc aussi à $\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{E}_{(Z)})$, si bien qu'on peut considérer cette section comme un «*endomorphisme universel*» u de $\mathscr{E}_{(Z)}$; la *section déterminant* est alors la section Δ de $\mathscr{O}_Z$ au-dessus de Z qui, au-dessus de tout ouvert affine W de Z, est l'élément de $\Gamma(W, \mathscr{O}_Z)$ qui est le *déterminant* Δ_W de l'endomorphisme u_W du $\Gamma(W, \mathscr{O}_Z)$-module $\Gamma(W, \mathscr{E}_{(Z)})$. On peut expliciter cette section au-dessus d'un ouvert W image réciproque d'un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de S; si $\mathscr{E}|U = \tilde{M}$, où M est un A-module libre de rang n, choisissons une base $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de M, de sorte qu'une base de $\check{M} \otimes_A M$ est formée des $e_i^* \otimes e_j$; on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{S}(\check{M} \otimes_A M)$ sur l'anneau de polynômes $B = A[T_{ij}]$ à n^2 indéterminées T_{ij} en faisant correspondre T_{ij} à $e_i^* \otimes e_j$. On a $W = \mathrm{Spec}(B)$, et $\Gamma(W, \mathscr{E}_{(Z)})$ s'identifie au B-module $M_{(B)}$, (e_j) s'identifiant à une base de ce B-module; la «section universelle» au-dessus de W est la forme linéaire sur le B-Module $\check{M}_{(B)} \otimes_B M_{(B)}$ qui, à $e_i^* \otimes e_j$, fait correspondre $T_{ij} \in B$, autrement dit c'est l'élément $\sum_{i,j} T_{ij}(e_i \otimes e_j^*)$ de $M_{(B)} \otimes_B \check{M}_{(B)}$; enfin, comme $e_i \otimes e_j^*$ s'identifie canoniquement à l'endomorphisme $m \mapsto \langle m, e_j^* \rangle e_i$ de $M_{(B)}$, l'«endomorphisme universel» au-dessus de W est l'endomorphisme u_W de M tel que $u_W(e_j) = \sum_{i=1}^{n} T_{ij} e_i$, autrement dit l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base (e_i) est $(T_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. La section déterminant Δ a donc pour restriction au-dessus de W l'élément $\det(T_{ij}) \in B = \Gamma(W, \mathscr{O}_Z)$.

Considérons alors la $\mathscr{O}_S$-Algèbre $\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E})_\Delta$, définie par la condition que sa restriction à un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A) \subset S$ est $(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}} \otimes_A \mathscr{E})_{\Delta_U})^\sim$, avec les notations introduites ci-dessus, et montrons que le S-schéma $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E})_\Delta)$ répond aux conditions de l'énoncé. Il est en effet immédiat (en considérant le cas où S est affine) que X est induit sur un

ouvert de $Z = \mathbf{End}(\mathscr{E}) = \mathrm{Spec}(\mathbf{S}(\check{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E}))$. D'autre part, pour un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de S, $\mathrm{Hom}_S(U, \mathbf{End}(\mathscr{E}))$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes de A-algèbre de $\mathbf{S}(\check{M} \otimes_A M)$ dans A, qui sont entièrement déterminés par leurs restrictions à $\check{M} \otimes_A M$, c'est-à-dire les formes linéaires sur $\check{M} \otimes_A M$, identifiées canoniquement aux éléments de $\mathrm{End}_A(M)$; $\mathrm{Hom}_S(U, X)$ s'identifie de même à l'ensemble des A-homomorphismes de $(\mathbf{S}(\check{M} \otimes_A M))_{\Delta_W}$ (avec les notations introduites plus haut) dans A, et ces derniers s'identifient à leur tour au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_S(U, \mathbf{End}(\mathscr{E}))$ formé des homomorphismes de $\mathbf{S}(\check{M} \otimes_A M) = A[T_{ij}]$ dans A, qui transforment l'élément Δ_W en un élément *inversible*; finalement, ces homomorphismes s'identifient, par définition de $\Delta_W = \det(T_{ij})$, aux éléments de $\mathrm{End}_A(M)$ dont le déterminant est inversible, c'est-à-dire aux éléments de $\mathbf{GL}(M)$. On raisonne de même en remplaçant S par un S-schéma arbitraire T, et cela achève la démonstration.

(9.6.5) De l'action du S-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$ sur le S-schéma $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ (qui s'obtient par restriction à $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$ de l'action du S-schéma en algèbres $\mathbf{End}(\mathscr{E})$), on déduit canoniquement, par transport de structure, des actions de $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$ sur les schémas $\mathbf{V}(\mathscr{T}_q^p(\mathscr{E}))$, où $\mathscr{T}_q^p(\mathscr{E})$ est le $\mathscr{O}_S$-Module des tenseurs p fois covariants et q fois contravariants sur $\mathscr{E}$, défini par $\mathscr{T}_q^p(\mathscr{E}) = (\check{\mathscr{E}})^{\otimes p} \otimes \mathscr{E}^{\otimes q}$. Il suffit de définir, dans la catégorie des S-schémas, un morphisme fonctoriel

$$\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)}) \times \Gamma(T, \mathscr{T}_q^p(\mathscr{E}_{(T)})) \to \Gamma(T, \mathscr{T}_q^p(\mathscr{E}_{(T)}))$$

qui soit une loi externe de groupe opérant dans un ensemble; pour cela, on note que pour toute section s de $\mathscr{T}_p^q(\mathscr{E}_{(T)})$ il y a un recouvrement de T par des ouverts affines U tels que $s|U$ appartienne à $\mathscr{T}_p^q(\Gamma(U, \mathscr{E}_{(T)}))$, et la définition de $(u|U) \cdot (s|U) \in \mathscr{T}_p^q(\Gamma(U, \mathscr{E}_{(T)}))$ est alors l'action habituelle du groupe linéaire sur un espace de tenseurs. On définirait de même une opération canonique de $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$ sur $\mathbf{V}(\mathscr{M})$, où $\mathscr{M}$ est un sous-Module tensoriel (localement libre) d'un Module $\mathscr{T}_q^p(\mathscr{E})$, par exemple (pour $p = 0$ ou $q = 0$) le sous-Module des tenseurs symétriques ou des tenseurs antisymétriques, ou encore lorsque $\mathscr{M}$ est une puissance extérieure de $\mathscr{E}$ ou de $\check{\mathscr{E}}$.

(9.6.6) A partir des actions définies dans (9.6.5), on peut définir des S-schémas en groupes qui généralisent les notions classiques de *groupe orthogonal* ou de *groupe symplectique*.

D'une façon générale, considérons un S-schéma en groupes G, et supposons qu'on se donne une action de G sur un schéma $\mathbf{V}(\mathscr{M})$, où $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang fini. Pour toute *section* $s \in \Gamma(S, \mathscr{M})$, nous allons voir qu'on peut définir un S-schéma en groupes

stabilisateur de s qui est un *sous-schéma fermé* de G. On a en effet par hypothèse, dans la catégorie des S-schémas, un morphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(T,G) \times \Gamma(T, \mathscr{M}_{(T)}) \to \Gamma(T, \mathscr{M}_{(T)})$$

qui est une loi externe de groupe opérant sur $\Gamma(T, \mathscr{M}_{(T)})$; si $s_{(T)}$ désigne la section de $\mathscr{M}_{(T)}$ image réciproque de s (**0**, 4.4.3), on peut considérer pour tout T, la restriction de l'application précédente

$$\mathrm{Hom}_S(T,G) \times \{s_{(T)}\} \to \Gamma(T, \mathscr{M}_{(T)})$$

(dont l'image est l'*orbite* de $s_{(T)}$), qu'on peut considérer comme une application $\mathrm{Hom}_S(T,G) \to \Gamma(T, \mathscr{M}_{(T)})$, définissant évidemment un morphisme fonctoriel, et par suite un S-morphisme

$$u_1 : G \to \mathbf{V}(\check{\mathscr{M}}).$$

D'autre part, pour tout T, l'application constante

$$\mathrm{Hom}_S(T,G) \to \{s_{(T)}\}$$

peut être considérée comme une application $\mathrm{Hom}_S(T,G) \to \Gamma(T, \mathscr{M}_{(T)})$ définissant encore un morphisme fonctoriel, et par suite un S-morphisme

$$u_2 : G \to \mathbf{V}(\check{\mathscr{M}}).$$

Le *noyau* des deux applications $\mathrm{Hom}_S(T,G) \to \Gamma(T, \mathscr{M}_{(T)})$ ainsi définies est le *sous-groupe* de $\mathrm{Hom}_S(T,G)$ *stabilisateur* de la section $s_{(T)}$. Il définit un foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans celle des ensembles, et ce foncteur est *représentable* par le S-schéma $\mathrm{Ker}(u_1,u_2)$ (**0**, 1.4.10); il résulte d'ailleurs de (9.1.3) et de la construction de $\mathrm{Ker}(u_1,u_2)$ (5.1.5) que ce dernier est un sous-schéma *fermé* de G. En outre, $\mathbf{V}(\check{\mathscr{M}})$ est de type fini sur S (9.4.11), donc la diagonale de $\mathbf{V}(\check{\mathscr{M}}) \times_S \mathbf{V}(\check{\mathscr{M}})$ est un sous-schéma fermé *de présentation finie* de ce produit ((6.2.6.1) et (6.3.8)); comme $\mathrm{Ker}(u_1,u_2)$ se déduit de cette diagonale par changement de base (5.1.5), l'injection canonique $\mathrm{Ker}(u_1,u_2) \to G$ est aussi *de présentation finie.*

(9.6.7) On obtiendra les S-schémas en groupe annoncés en prenant pour $\mathscr{M}$ le Module des tenseurs covariants symétriques ou antisymétriques sur E, une section de $\mathscr{M}$ étant alors par définition une «forme bilinéaire» symétrique (resp. antisymétrique); on prendra $G = \mathbf{GL}(\mathscr{E})$ avec l'action sur $\mathbf{V}(\check{\mathscr{M}})$ définie dans (9.6.5), et le stabilisateur de la section s considérée sera alors par définition un groupe orthogonal (resp. symplectique) relatif à cette section.

9.7. Grassmanniennes d'un Module

(9.7.1) Soient K un corps, E un espace vectoriel sur K. Rappelons que pour tout entier $n > 0$, on appelle *grassmannienne* d'indice n de E

et que l'on note $\mathbf{G}^n(E)$ *l'ensemble des sous-espaces vectoriels de rang n* de E (si E est de rang fini sur K, cet ensemble est donc réduit à un élément pour $n=\mathrm{rg}_K E$ et vide pour $n>\mathrm{rg}_K(E)$); pour $n=1$, $\mathbf{G}^n(E)$ se note aussi $\mathbf{P}(E)$ et s'appelle l'*espace projectif* sur K associé à l'espace vectoriel E. Si E est de rang fini sur K et $d=\mathrm{rg}_K E$, il y a une correspondance biunivoque canonique entre $\mathbf{G}^n(E)$ et $\mathbf{G}^{d-n}(\check{E})$ pour $1\leqslant n\leqslant d-1$, obtenue en faisant correspondre à tout sous-espace vectoriel de rang n de E son *orthogonal* (de rang $d-n$) dans $\check{E}$; sans hypothèse de finitude sur E, on peut encore considérer $\mathbf{G}^n(\check{E})$ comme l'ensemble des *espaces vectoriels quotients* de E, de rang n (qui sont les duals des sous-espaces vectoriels de rang n de $\check{E}$).

(9.7.2) Cette dernière interprétation des grassmanniennes permet de les généraliser aux schémas de la même façon que nous avons généralisé en (9.4) la notion de fibré vectoriel. Nous allons montrer en effet que pour tout schéma S et *tout* $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, il y a un S-schéma X dont la *fibre rationnelle sur* $\kappa(s)$ (ensemble des points de X à valeurs dans $\kappa(s)$) au-dessus d'un point $s\in S$ s'identifie canoniquement (avec les notations de (9.4.10)) à la *grassmannienne* $\mathbf{G}^n((\mathscr{E}^s)^\vee)$ du *dual* de l'espace vectoriel $\mathscr{E}^s=\mathscr{E}_s/\mathfrak{m}_s\mathscr{E}_s$ sur $\kappa(s)$.

(9.7.3) Pour définir ce schéma, nous allons le considérer comme *représentant un foncteur.* Etant donnés un entier $n\geqslant 1$, un schéma S et un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, nous noterons $\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E})$ *l'ensemble des $\mathscr{O}_S$-Modules quotients de $\mathscr{E}$ qui sont localement libres de rang n.* Montrons que

$$\mathrm{T}\mapsto \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}) \tag{9.7.3.1}$$

peut être défini comme un *foncteur contravariant* de la catégorie des S-schémas dans la catégorie des ensembles. Pour cela, il faut définir, pour tout S-morphisme $g:\mathrm{T}'\to\mathrm{T}$, une application $\mathrm{Grass}_n(g)$: $\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})})\to\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(\mathrm{T}')})$ satisfaisant aux axiomes des foncteurs. On remarque à cet effet que si $\mathscr{F}=\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}/\mathscr{N}$ est un quotient de $\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}$ qui est localement libre de rang n, $g^*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{(\mathrm{T}')}$-Module localement libre de rang n, qui est isomorphe au quotient de $\mathscr{E}_{(\mathrm{T}')}=g^*(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})})$ par l'image de $g^*(\mathscr{N})$, en vertu de l'exactitude à droite du foncteur g^*; on prend donc pour image de $\mathscr{F}$ par $\mathrm{Grass}_n(g)$ le quotient de $\mathscr{E}_{(\mathrm{T}')}$ par l'image de $g^*(\mathscr{N})$, et il est immédiat que pour un second S-morphisme $g':\mathrm{T}''\to\mathrm{T}'$, on a alors $\mathrm{Grass}_n(g\circ g')=\mathrm{Grass}_n(g')\circ\mathrm{Grass}_n(g)$.

Théorème (9.7.4) *Pour tout schéma* S *et tout $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, le foncteur* $\mathrm{T}\mapsto\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})})$ *est représentable.*

Nous allons encore utiliser les méthodes de (**0**, 4.5), appliquées à la catégorie des S-*schémas*, comme on a remarqué qu'on pouvait le faire (2.4).

Prouvons en premier lieu que pour tout S-schéma T, $U \mapsto \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(U)})$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de T, est un *faisceau* d'ensembles (condition (ii) de (**0**, 4.5.4)): c'est immédiat, puisque pour un $\mathscr{O}_U$-Module $\mathscr{F}$, il revient au même de dire qu'il est localement libre de rang n, ou que, pour un recouvrement ouvert (U_α) de U, la restriction $\mathscr{F}|U_\alpha$ est localement libre de rang n pour tout α. En appliquant (**0**, 4.5.5) et (**0**, 4.5.6), on est donc déjà ramené à prouver (9.7.4) lorsque S est *affine*, ce que nous supposerons désormais. On a alors $\mathscr{E} = \tilde{\mathrm{E}}$, où E est un $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$-module, et par suite est engendré par une famille $(t_i)_{i\in I}$ (finie ou non) de *sections* de $\mathscr{E}$ au-dessus de S. Pour tout S-schéma T, notons $t_{i,T}$ l'image réciproque de t_i, section de $\mathscr{E}_{(T)}$ au-dessus de T (**0**, 4.4.3); pour toute partie H de I, à n éléments, les $t_{i,T}$ pour $i \in H$ définissent un homomorphisme de $\mathscr{O}_T$-Modules

$$\varphi_{H,T} : \mathscr{O}_T^n \to \mathscr{E}_{(T)} \tag{9.7.4.1}$$

(**0**, 5.1.1). Pour chacune de ces parties H de I, nous allons définir une partie $F_H(T)$ de $\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$ par la condition suivante: $F_H(T)$ est formée des quotients $\mathscr{H}$ de $\mathscr{E}_{(T)}$, localement libres de rang n, tels que l'homomorphisme composé

(9.7.4.2)

$$\mathscr{O}_T^n \xrightarrow{\varphi_{H,T}} \mathscr{E}_{(T)} \xrightarrow{u} \mathscr{H} \quad \text{(où } u \text{ est l'homomorphisme canonique)}$$

soit un *épimorphisme* (ce qui entraîne (**0**, 5.5.7) que cet homomorphisme est un *isomorphisme*, puisque $\mathscr{O}_T^n$ et $\mathscr{H}$ sont localement libres de même rang). On peut définir $T \mapsto F_H(T)$ comme un *sous-foncteur* de $T \mapsto \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$ (**0**, 1.7.1): en effet, il suffit de vérifier que, pour tout S-morphisme $g : T' \to T$, la restriction de $\mathrm{Grass}_n(g)$ à $F_H(T)$ applique $F_H(T)$ dans $F_H(T')$; cela résulte de ce que $g^*(\varphi_{H,T}) = \varphi_{H,T'}$ et de ce que le foncteur g^* est exact à droite, et transforme donc épimorphismes de $\mathscr{O}_T$-Modules en épimorphismes de $\mathscr{O}_{T'}$-Modules.

(9.7.4.3) Cela étant, nous allons d'abord prouver que chacun des foncteurs F_H est *représentable par un* S-*schéma* X_H *affine sur* S. En effet, si l'homomorphisme (9.7.4.2) est un isomorphisme et si w est son inverse, l'homomorphisme $v = w \circ u : \mathscr{E}_{(T)} \to \mathscr{O}_T^n$ est tel que $v \circ \varphi_{H,T} = 1_{\mathscr{O}_T^n}$. Inversement, si v est un homomorphisme vérifiant cette propriété, v est surjectif, et en prenant $\mathscr{H} = \mathscr{E}/\mathrm{Ker}(v)$, $\mathscr{H}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_T^n$. On voit donc qu'on peut ainsi identifier $F_H(T)$ à l'ensemble des homomorphismes $v : \mathscr{E}_{(T)} \to \mathscr{O}_T^n$ tels que $v \circ \varphi_{H,T} = 1$. En d'autres termes, si on définit les applications α_H et β de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)}, \mathscr{O}_T^n)$ dans l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{O}_T^n, \mathscr{O}_T^n)$ comme les applications $v \mapsto v \circ \varphi_{H,T}$ et $v \mapsto 1_{\mathscr{O}_T^n}$ respectivement, on peut

dire que $F_H(T)$ est le *noyau* (**0**, 1.4.1) du couple d'applications (α_H, β). Or, chacun des foncteurs

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}_{(T)}, \mathscr{O}_T^n), \qquad T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{O}_T^n, \mathscr{O}_T^n)$$

est *représentable* par un S-schéma affine sur S (9.6.1); de façon plus précise, le premier s'identifie à $T \mapsto \mathrm{Hom}_S(T, Y)$, où $Y = \mathbf{V}(\mathscr{E}')^n$, et le second à $T \mapsto \mathrm{Hom}_S(T, Z)$, où $Z = \mathbf{V}(\mathscr{O}_S^n)^n$, et α_H et β correspondent par le foncteur $\mathbf{h}$ (**0**, 1.1.7) à deux S-morphismes

$$a_H : Y \to Z, \qquad b : Y \to Z.$$

Mais on sait que le *noyau* de ces deux S-morphismes (**0**, 1.4.2) existe dans la catégorie des S-schémas et est un sous-schéma fermé de Y ((5.1.5) et (5.2.1)), donc un S-schéma X_H affine sur S (9.1.16), et par définition (**0**, 1.4.2) on a $F_H(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X_H)$, ce qui prouve que X_H *représente* le foncteur F_H.

(9.7.4.4) Pour achever de démontrer (9.7.4), nous allons vérifier les conditions (i) et (iii) de (**0**, 4.5.4), et d'abord que chacun des morphismes fonctoriels $F_H(T) \to \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$ est *représentable par une immersion ouverte*. Il s'agit de voir (**0**, 1.7.7) que pour tout S-schéma Z, le foncteur

$$T \mapsto F_H(T) \times_{\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})} \mathrm{Hom}_S(T, Z) \tag{9.7.4.5}$$

est représentable par un S-schéma induit sur un ouvert de Z. Or (**0**, 1.1.4) un morphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}_S(T, Z) \to \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$ est entièrement déterminé par un élément $\mathscr{F} \in \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(Z)})$ ($\mathscr{O}_Z$-Module localement libre de rang n, quotient de $\mathscr{E}_{(Z)}$) et est de la forme $g \mapsto g^*(\mathscr{F})$. Notre assertion va résulter du lemme suivant:

Lemme (9.7.4.6) (i) *Soient* Z *un* S*-schéma,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_Z$*-Module quotient de* $\mathscr{E}_{(Z)}$ *et localement libre de rang* n, $u : \mathscr{E}_{(Z)} \to \mathscr{F}$ *l'homomorphisme canonique. Alors l'ensemble* $U_{Z,H,\mathscr{F}}$ *des points* $z \in Z$ *où l'homomorphisme* $(u \circ \varphi_{[1],Z})_z$ *est surjectif est ouvert dans* Z.

(ii) *Soit* Y *un second* S*-schéma; alors l'ensemble des* S*-morphismes* $g : Y \to Z$ *tels que* $g^*(\mathscr{F}) \in F_H(Y)$ *est l'ensemble des* S*-morphismes tels que* $g(Y) \subset U_{Z,H,\mathscr{F}}$.

L'assertion (i) n'est qu'un cas particulier de (**0**, 5.5.6). D'autre part, $g^*(u)$ est l'homomorphisme canonique $\mathscr{E}_{(Y)} \to g^*(\mathscr{F})$, et on a $g^*(\varphi_{H,Z}) = \varphi_{H,Y}$; l'ensemble des points $y \in Y$ tels que l'homomorphisme composé $(g^*(u) \circ \varphi_{H,Y})_y$ soit surjectif est donc égal à $g^{-1}(U_{Z,H,\mathscr{F}})$ en vertu de (**0**, 5.5.8); mais dire que $g^*(\mathscr{F}) \in F_H(Y)$ signifie par définition que cet ensemble est Y *tout entier*, d'où l'assertion (ii).

Cela étant, si on remarque que l'ensemble des S-morphismes $g : Y \to Z$ tels que $g(Y) \subset U_{Z.H.\mathscr{F}}$ est l'ensemble des S-morphismes $Y \to U_{Z.H.\mathscr{F}}$,

le lemme précédent prouve que le foncteur (9.7.4.5) est *représenté* par le S-schéma induit sur l'ouvert $U_{Z,H,\mathscr{F}}$ de Z.

(9.7.4.7) Pour prouver maintenant la condition (iii) de (**0**, 4.5.4), il reste, avec les notations précédentes, à voir que les ouverts $U_{Z,H,\mathscr{F}}$ où H parcourt l'ensemble $\mathfrak{F}_n(I)$ des parties de I à n éléments, forment un *recouvrement* de Z. Or, puisque les sections t_i engendrent $\mathscr{E}$, leurs images réciproques $t_{i,Z}$ dans $\mathscr{E}_{(Z)}$ engendrent cet $\mathscr{O}_Z$-Module (**0**, 5.1.4). Pour tout point $z\in Z$, le $\mathscr{O}_{Z,z}$-module $(\mathscr{E}_{(Z)})_z$ est donc engendré par les $(t_{i,Z})_z$; si s_i (pour $i\in I$) est l'image canonique de $t_{i,Z}$ dans $\Gamma(Z,\mathscr{F})$, $\mathscr{F}_z$ est par suite engendré par les $(s_i)_z$, et $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{Z,z}}\kappa(z)$ par les $s_i(z)$. Mais comme $\mathscr{F}_z$ est localement libre de rang n, il existe une partie H de I à n éléments telle que les $s_i(z)$ pour $i\in H$ forment une *base* du $\kappa(z)$-espace vectoriel $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{Z,z}}\kappa(z)$; on en conclut (**0**, 5.5.6) que l'homomorphisme $\mathscr{O}_Z^n\to\mathscr{F}$ défini par les s_i pour $i\in H$ est surjectif au point z, donc $z\in U_{Z,H,\mathscr{F}}$ par définition. CQFD.

(9.7.5) Le S-schéma X qui représente le foncteur $T\mapsto \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$, et qui est défini à isomorphisme unique près, est appelé la *grassmannienne d'indice n de* $\mathscr{E}$ et noté $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$; il y a en outre un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{G}$, localement libre de rang n et quotient de $\mathscr{E}_{(X)}$, déterminé à isomorphisme unique près, tel que l'application $g\mapsto g^*(\mathscr{G})$ soit un *isomorphisme fonctoriel* $\mathrm{Hom}_S(T,X)\simeq \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$ (**0**, 1.1.8); on dit que $\mathscr{G}$ est le $\mathscr{O}_X$-Module *fondamental* sur X. Lorsque S est affine, les S-schémas X_H définis dans la démonstration de (9.7.4) s'identifient à des schémas induits sur des ouverts de X formant un *recouvrement* de X (**0**, 4.5.4).

Pour $n=1$, on écrit $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ au lieu de $\mathbf{Grass}_1(\mathscr{E})$ et on dit que $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ est le *fibré projectif sur* S *défini par* $\mathscr{E}$; nous l'étudierons plus en détail au chap. II, §§ 1 et 6.

Proposition (9.7.6) *Soient $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent, $g: S'\to S$ un morphisme Alors* $\mathbf{Grass}_n(g^*(\mathscr{E}))$ *s'identifie canoniquement à* $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})\times_S S'$ *et le faisceau fondamental sur* $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})\times_S S'$ *à l'image réciproque du faisceau fondamental sur* $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$.

C'est un cas particulier du résultat général (**0**, 1.3.10) sur les foncteurs représentables.

Considérons en particulier un morphisme $g:\{\xi\}\to S$ du spectre $\{\xi\}$ d'un corps K dans S, correspondant à un monomorphisme $\kappa(s)\to K$, où $s=g(\xi)$. Alors l'ensemble des S-morphismes $\{\xi\}\to\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ est l'ensemble des *points de* $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ *à valeurs dans l'extension* K *de* $\kappa(s)$; il résulte de (9.7.6) et de la définition du foncteur (9.7.3.1) que cet ensemble s'identifie canoniquement à la grassmannienne $\mathbf{G}^n((\mathscr{E}^s\otimes_{\kappa(s)}K)^\vee)$ du *dual* de l'espace vectoriel $\mathscr{E}^s\otimes_{\kappa(s)}K$ sur K, au sens de (9.7.1).

Proposition (9.7.7) *Pour tout $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$,* $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ *est un* S*-schéma séparé sur* S. *Si $\mathscr{E}$ est de type fini* (resp. *de présentation finie*), $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ *est un* S*-schéma de type fini* (resp. *de présentation finie*) *sur* S.

Pour prouver que $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ est séparé sur S, appliquons le critère valuatif de séparation (5.5.4). Montrons d'abord que $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ est un S-schéma *quasi-séparé* sur S. On peut se borner au cas où S est affine (6.1.11), et alors il suffit de voir que $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ est un schéma quasi-séparé. Or, on a un recouvrement ouvert de $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})=X$ par les X_H, et ces derniers sont des schémas *affines* (9.7.4.3). Il suffira de prouver que toute intersection $X_H \cap X_K$ est aussi un *schéma affine* (6.1.12); or cette intersection représente le foncteur $T \mapsto F_H(T) \cap F_K(T)$, et ce dernier est défini comme ensemble des coïncidences de trois applications α_H, α_K et β; comme $\mathbf{V}(\mathscr{O}_S^n)^n$ est *séparé*, ce foncteur est par suite représenté par un sous-schéma *fermé* de $\mathbf{V}(\mathscr{E})^n$ (5.2.5.1), et comme ici ce dernier est *affine*, il en est de même de $X_H \cap X_K$ (4.2.1.1).

Pour appliquer maintenant (5.5.4), considérons un anneau de valuation A et son corps de fractions K. Il s'agit de montrer que si l'on pose $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $Y'=\mathrm{Spec}(K)$, l'application canonique $\mathrm{Hom}_S(Y, \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})) \to \mathrm{Hom}_S(Y', \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}))$ est *injective*. Mais par définition d'un foncteur représentable, cela signifie que l'application canonique $\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(Y)}) \to \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(Y')})$ (9.7.3) est injective. Or on peut ici écrire $\mathscr{E}_Y=\tilde{E}$, où E est un A-module; il s'agit de montrer que si M, M' sont deux sous-modules de E tels que E/M et E/M′ soient libres de rang n, et si les K-espaces vectoriels $(E/M)\otimes_A K$ et $(E/M')\otimes_A K$ sont égaux, alors $E/M=E/M'$ (c'est-à-dire $M'=M$). Mais par platitude (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 6, lemme 1), l'hypothèse signifie que $M\otimes_A K$ et $M'\otimes_A K$ sont égaux au même sous-espace de $E\otimes_A K$. Supposons par exemple qu'il y ait un élément de M′ non dans M; alors son image dans $(E\otimes_A K)/(M\otimes_A K)$ serait nulle par hypothèse, donc son image dans E/M appartiendrait au sous-module de torsion de ce module et serait $\neq 0$. Mais E/M étant sans torsion, cela est absurde, d'où la conclusion $M'=M$.

Pour prouver que $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ est de type fini (resp. de présentation finie) sur S lorsque $\mathscr{E}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module de type fini (resp. de présentation finie), on peut encore se borner au cas où $S=\mathrm{Spec}(A)$ est affine; alors $\mathscr{E}=\tilde{E}$, où E est un A-module de type fini (resp. de présentation finie) (1.4.3). On peut se ramener à ne considérer que le cas où E est de type fini; en effet, lorsque E est de présentation finie, comme A est limite inductive de ses sous-$\mathbf{Z}$-algèbres de type fini, il existe une telle sous-algèbre A_0 (qui est donc *noethérienne*) et un A_0-module de type fini E_0 tel que E soit isomorphe à $E_0\otimes_{A_0} A$ (**0**, 6.3.3). Si l'on pose $S_0=\mathrm{Spec}(A_0)$, $\mathscr{E}_0=\tilde{E}_0$, $\mathscr{E}_0$ est un $\mathcal{O}_{S_0}$-Module cohérent et on a (9.7.6) $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$

$= \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}_0) \times_{S_0} S$; si donc on prouve que $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}_0)$ est de présentation finie sur S_0, on en conclura que $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ est de présentation finie sur S (6.3.8); mais puisque S_0 est noethérien, il revient au même de dire que $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}_0)$ est de type fini ou de présentation finie sur S_0 (6.3.7), ce qui fournit la réduction annoncée. Supposons donc seulement $\mathscr{E}$ de type fini; dans la démonstration de (9.7.4), on peut supposer que l'ensemble d'indices I est *fini* (1.4.3), et il suffit de prouver que chacun des ouverts affines X_H dans $X = \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ est de type fini sur S. Mais (avec les notations de (9.7.4.3)), le schéma $Y = (\mathbf{V}(\mathscr{E}))^n$ est de type fini sur S (9.4.11), et on a vu dans (9.7.4.3) que X_H est un sous-schéma fermé de Y, d'où la conclusion (6.3.4).

(9.7.8) Il n'est pas possible de considérer l'ensemble $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ comme un *foncteur* (contravariant) *en* $\mathscr{E}$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents, car à un homomorphisme *quelconque* $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents ne correspond pas en général d'application $\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}') \to \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E})$, le composé $\mathscr{E} \xrightarrow{g} \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{H}$ de g et d'un homomorphisme surjectif $\mathscr{E}' \to \mathscr{H}$ de $\mathscr{E}'$ sur un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang n n'étant pas surjectif en général. Cette dernière condition est toutefois satisfaite lorsque $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est un *épimorphisme* et tout $\mathscr{O}_S$-Module quotient $\mathscr{H}$ de $\mathscr{E}'$, localement libre de rang n, peut alors être considéré canoniquement comme un $\mathscr{O}_S$-Module quotient de $\mathscr{E}$ au moyen de g; autrement dit, la donnée de g définit une *injection* canonique

$$i_g : \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}') \to \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}). \tag{9.7.8.1}$$

En outre, il est clair que pour tout morphisme $T \to S$, l'homomorphisme $g_{(T)} : \mathscr{E}_{(T)} \to \mathscr{E}'_{(T)}$ image réciproque de g est un épimorphisme (**0**, 4.3.1), donc on obtient une injection $i_{g_{(T)}} : \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}'_{(T)}) \to \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$, et pour tout S-morphisme $T' \to T$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}'_{(T)}) & \xrightarrow{i_{g_{(T)}}} & \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}'_{(T')}) & \xrightarrow[i_{g_{(T')}}]{} & \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T')}) \end{array}$$

est commutatif. Puisque les foncteurs $T \mapsto \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$ et $T \mapsto \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}'_{(T)})$ sont représentables, il correspond (**0**, 1.1.7) à tout *épimorphisme* $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents un S-*morphisme*

$$\mathbf{Grass}_n(g) : \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}') \to \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}) \tag{9.7.8.2}$$

tel que l'image réciproque par $\mathbf{Grass}_n(g)$ du Module fondamental sur $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ soit le Module fondamental sur $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}')$. En outre:

Proposition (9.7.9) *Pour tout épimorphisme $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents, le* S*-morphisme* (9.7.8.2) *est une immersion fermée.*

Nous allons appliquer le critère de (0,1.7.8) en prenant pour G le foncteur $T \mapsto \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)})$, pour F le sous-foncteur $T \mapsto \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}'_{(T)})$, pour $\mathscr{P}$ l'ensemble des immersions fermées de schémas (qui vérifie les conditions de (0, 1.7.7) en vertu de (4.3.6, (ii))). Nous devons donc, pour un S-schéma T, considérer un élément $\mathscr{H} \in G(T)$, autrement dit un $\mathscr{O}_T$-Module localement libre de rang n, quotient de $\mathscr{E}_{(T)}$; notons $q : \mathscr{E}_{(T)} \to \mathscr{H}$ l'homomorphisme canonique. Ensuite, dans la catégorie des T-schémas, nous devons considérer le foncteur contravariant $F_{\mathscr{H}} : (\boldsymbol{Sch}_T)^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ défini de la façon suivante: pour tout morphisme $u : Z \to T$, $F_{\mathscr{H}}(u)$ est l'*ensemble à un élément* $\{u^*(\mathscr{H})\}$ si l'homomorphisme $u^*(q) = q_{(Z)} : \mathscr{E}_{(Z)} \to \mathscr{H}_{(Z)} = u^*(\mathscr{H})$ se *factorise* en

$$\mathscr{E}_{(Z)} \xrightarrow{g_{(Z)}} \mathscr{E}'_{(Z)} \xrightarrow{h} \mathscr{H}_{(Z)}$$

(auquel cas h est uniquement déterminé puisque $g_{(Z)}$ est un épimorphisme); dans le cas contraire $F_{\mathscr{H}}(u)$ est *vide*.

Cette définition se transforme de la façon suivante; soit $\mathscr{N} = \mathrm{Ker}(g_{(T)})$ qui est un $\mathscr{O}_T$-Module quasi-cohérent (2.2.2); comme on a une suite exacte

$$\mathscr{N} \xrightarrow{j} \mathscr{E}_{(T)} \xrightarrow{g_{(T)}} \mathscr{E}'_{(T)} \longrightarrow 0,$$

on a aussi, par l'exactitude à droite du foncteur u^*, une suite exacte

$$\mathscr{N}_{(Z)} \xrightarrow{j_{(Z)}} \mathscr{E}_{(Z)} \xrightarrow{g_{(Z)}} \mathscr{E}'_{(Z)} \longrightarrow 0$$

et dire que $q_{(Z)}$ se factorise en $h \circ g_{(Z)}$ signifie que l'homomorphisme $q_{(Z)} \circ j_{(Z)} = (q \circ j)_{(Z)} : \mathscr{N}_{(Z)} \to \mathscr{H}_{(Z)}$ est *nul*. On est ainsi ramené, en changeant les notations, à prouver le lemme suivant:

Lemme (9.7.9.1) *Soient* S *un schéma, $\mathscr{H}$ un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang fini, $\mathscr{N}$ un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent* (resp. *quasi-cohérent de type fini*), *$v : \mathscr{N} \to \mathscr{H}$ un homomorphisme. On considère le foncteur* $A : (\boldsymbol{Sch}_S)^\circ \to \boldsymbol{Ens}$ *défini de la façon suivante: pour tout morphisme $f : T \to S$, $A(f)$ est l'ensemble à un élément $\{f^*(\mathscr{H})\}$ si $f^*(v) : \mathscr{N}_{(T)} \to \mathscr{H}_{(T)}$ est nul, et est l'ensemble vide dans le cas contraire. Alors* A *est représentable par un sous-schéma fermé de* S (resp. *par un sous-schéma fermé de* S *de présentation finie sur* S).

Il s'agit de prouver qu'il existe un sous-schéma fermé S′ de S (qui sera alors nécessairement unique) ayant la propriété suivante: pour qu'un morphisme $f : T \to S$ soit tel que $f^*(v) = 0$, il faut et il suffit que f soit *majoré* (4.1.5) par l'injection canonique $S' \to S$; en outre, si $\mathscr{N}$ est de type fini, cette injection est de présentation finie. Soit (S_α) un recouvrement ouvert de S, et soient $f_\alpha : f^{-1}(S_\alpha) \to S_\alpha$ la restriction de f, $v_\alpha : \mathscr{N}|S_\alpha \to \mathscr{H}|S_\alpha$

la restriction de v; dire que $f^*(v)=0$ équivaut à dire que $f_\alpha^*(v_\alpha)=0$ pour tout α, et dire que f est majoré par $S'\to S$ signifie que f_α est majoré par $S'\cap S_\alpha\to S_\alpha$ pour tout α. Compte tenu de (6.3.8) pour la vérification du fait qu'un morphisme est de présentation finie, on voit qu'il suffit de prouver le lemme pour chacun des S_α et pour les Modules $\mathscr{N}_\alpha$ et $\mathscr{H}_\alpha$. On peut par suite supposer dans ce qui suit que l'on a $\mathscr{H}=\mathscr{O}_S^n$.

Montrons en second lieu qu'on peut se réduire au cas où $n=1$; en effet, désignons par $p_i:\mathscr{O}_S^n\to\mathscr{O}_S$ la i-ème projection; dire que $f^*(v)=0$ signifie encore que $f^*(p_i\circ v)=(p_i)_{(T)}\circ v_{(T)}=0$ pour tout i. Considérons alors le $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent produit $\mathscr{N}^n$, et soit $w:\mathscr{N}^n\to\mathscr{O}_S$ l'homomorphisme qui est égal à $p_i\circ v$ dans le i-ème facteur de $\mathscr{N}^n$; il est clair que la relation $f^*(w)=0$ équivaut au système des n relations $f^*(p_i\circ v)=0$, d'où notre assertion.

Cela étant, soit $\mathscr{J}$ l'image de $v:\mathscr{N}\to\mathscr{O}_S$, qui est un Idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$ (2.2.2). Montrons que le sous-schéma fermé S' de S *défini par l'Idéal* $\mathscr{J}$ (4.1.2) représente le foncteur A. En effet, on a une suite exacte

$$\mathscr{N}\xrightarrow{v}\mathscr{O}_S\longrightarrow\mathscr{O}_S/\mathscr{J}\longrightarrow 0;$$

comme l'image par $f^*(v)$ de $f^*(\mathscr{N})$ est $f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_T$ on a, par l'exactitude à droite du foncteur f^*, la suite exacte

$$f^*(\mathscr{N})\xrightarrow{f^*(v)}\mathscr{O}_T\to\mathscr{O}_T/f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_T\to 0$$

et dire que $f^*(v)=0$ signifie donc que $f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_T=0$, autrement dit (4.3.1) que T est l'image réciproque $f^{-1}(S')$ du sous-schéma S'; mais cela signifie aussi que f est majoré par l'injection canonique $S'\to S$, ce qui prouve notre assertion. Pour achever la preuve du lemme dans le cas où $\mathscr{N}$ est de type fini, il suffit de remarquer qu'alors l'Idéal $\mathscr{J}$ est de type fini, donc l'injection canonique $S'\to S$ est alors de présentation finie ((6.2.8) et (6.3.8, (i))).

9.8. Morphismes de Plücker et de Segre

(9.8.1) Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Pour tout sous-espace vectoriel V de E, de rang n, si l'on considère une base $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de V et si on lui fait correspondre le n-vecteur $a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n$ dans $\overset{n}{\wedge}E$, tous les n-vecteurs ainsi obtenus sont multiples scalaires de l'un d'eux, autrement dit il correspond à V une droite bien déterminée dans l'espace vectoriel $\overset{n}{\wedge}E$, ou encore un point de l'espace projectif $\mathbf{P}\left(\overset{n}{\wedge}E\right)$. On a ainsi défini une application canonique de la *grassmannienne* $\mathbf{G}^n(E)$ dans l'*espace projectif* $\mathbf{P}\left(\overset{n}{\wedge}E\right)$, dite *application de Plücker*, les coordon-

nées (pour une base quelconque choisie dans E) de $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ étant appelées les *coordonnées plückériennes* de V. Nous allons généraliser cette définition aux $\mathcal{O}_S$-Modules quasi-cohérents quelconques $\mathscr{E}$ et définir un S-*morphisme de Plücker*

$$\varpi_{\mathscr{E}} : \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}) \to \mathbf{P}\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}\right). \tag{9.8.1.1}$$

(9.8.2) Soient donc S un schéma, $\mathscr{E}$ un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent, $\mathscr{F}$ un élément de $\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E})$, quotient de $\mathscr{E}$ qui est localement libre de rang n, et soit $u : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ l'homomorphisme canonique. Comme u est un épimorphisme, il en est de même de $\overset{n}{\wedge} u : \overset{n}{\wedge}\mathscr{E} \to \overset{n}{\wedge}\mathscr{F}$, et $\overset{n}{\wedge}\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre *de rang* 1. Si l'on identifie $\overset{n}{\wedge}\mathscr{F}$ au quotient de $\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}$ par le noyau de $\overset{n}{\wedge} u$, on a ainsi défini une application canonique

$$p_{\mathscr{E}} : \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}) \to \mathrm{Grass}_1\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}\right) \tag{9.8.2.1}$$

faisant correspondre $\overset{n}{\wedge}\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}$.

Pour tout morphisme $T \to S$, il est clair que $\overset{n}{\wedge}(\mathscr{E}_{(T)}) = \left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}\right)_{(T)}$ pour tout $\mathcal{O}_S$-Module $\mathscr{E}$; avec les notations précédentes, $p_{\mathscr{E}_{(T)}}$ fait donc correspondre à $\mathscr{F}_{(T)}$ le $\mathcal{O}_T$-Module $\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{F}\right)_{(T)}$ et par suite on a défini un *morphisme fonctoriel* entre deux foncteurs

$$p_{\mathscr{E}_{(T)}} : \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)}) \to \mathrm{Grass}_1\left(\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}\right)_{(T)}\right). \tag{9.8.2.2}$$

Ces deux foncteurs étant représentables, il correspond donc à (9.8.2.2) un S-*morphisme* (9.8.1.1) tel que, si $\mathscr{G}$ est le Module fondamental sur $\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ et $\mathscr{H}$ le Module fondamental sur $\mathbf{P}\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}\right)$, l'image réciproque de $\mathscr{H}$ par $\varpi_{\mathscr{E}}$ soit isomorphe à $\overset{n}{\wedge}\mathscr{G}$; c'est ce S-morphisme que nous appellerons le *morphisme de Plücker.*

Proposition (9.8.3) *Pour tout épimorphisme $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ de $\mathcal{O}_S$-Modules quasi-cohérents, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}') & \xrightarrow{\varpi_{\mathscr{E}'}} & \mathbf{P}\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Grass}_n(g)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Grass}_1(\overset{n}{\wedge} g)} \\ \mathbf{Grass}_n(\mathscr{E}) & \xrightarrow[\varpi_{\mathscr{E}}]{} & \mathbf{P}\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}\right) \end{array} \tag{9.8.3.1}$$

est commutatif.

Il suffit de remarquer que pour tout S-schéma T, le diagramme d'applications

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}'_{(T)}) & \xrightarrow{p_{\mathscr{E}'}} & \mathrm{Grass}_1\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'_{(T)}\right) \\ \downarrow{\scriptstyle i_{\mathscr{E}'(T)}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{\mathscr{E}(T)}} \\ \mathrm{Grass}_n(\mathscr{E}_{(T)}) & \xrightarrow[p_{\mathscr{E}}]{} & \mathrm{Grass}_1\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}_{(T)}\right) \end{array}$$

est commutatif, comme il résulte aussitôt des définitions.

Proposition (9.8.4) *Le morphisme de Plücker $\varpi_{\mathscr{E}}$ est une immersion fermée; si $\mathscr{E}$ est de présentation finie, $\varpi_{\mathscr{E}}$ est de présentation finie.*

La question étant locale sur S, on peut supposer $\mathscr{E}$ engendré par une famille de sections au-dessus de S, c'est-à-dire quotient d'un $\mathscr{O}_S$-Module de la forme $\mathscr{O}_S^{(I)}$ (lorsque $\mathscr{E}$ est de type fini, on peut supposer I fini). Il résulte de la commutativité du diagramme (9.8.3.1), de (9.7.9) et de (4.2.2, (ii)) que si l'on a prouvé que $\varpi_{\mathscr{E}}$ est une immersion fermée pour un $\mathscr{O}_S$-Module $\mathscr{E}$, il en résultera la même propriété pour tout Module quotient $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{E}$; si de plus $\mathscr{E}$ est localement libre de rang fini et $\mathscr{E}'$ de présentation finie, le noyau $\mathscr{N}$ de l'épimorphisme $\mathscr{E}\to\mathscr{E}'$ est de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, §2, n° 8, lemme 9); on en conclut (9.7.9.1) que dans le diagramme (9.8.3.1), $\mathbf{Grass}_n(g)$ et $\mathbf{Grass}_1\left(\overset{n}{\wedge} g\right)$ sont des immersions fermées de présentation finie; si $\varpi_{\mathscr{E}}$ est de présentation finie, il en sera de même de $\varpi_{\mathscr{E}'}$ par (6.3.8).

On va donc se borner au cas où $\mathscr{E}=\mathscr{O}_S^{(I)}$. Pour toute partie H à n éléments de I, nous poserons alors $\mathscr{E}_H=\mathscr{O}_S^{(H)}$, $H'=I-H$, $\mathscr{E}_{H'}=\mathscr{O}_S^{(H')}$, de sorte que $\mathscr{E}=\mathscr{E}_H\oplus\mathscr{E}_{H'}$; l'homomorphisme canonique $\varphi_{H,T}$ défini dans (9.7.4.1) s'identifie ici à l'injection canonique

$$\varphi_{H,T}\colon (\mathscr{E}_H)_{(T)}\to\mathscr{E}_{(T)}, \tag{9.8.4.1}$$

et il lui correspond une injection canonique

$$\psi_{H,T}=\overset{n}{\wedge}\varphi_{H,T}\colon \left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}_H\right)_{(T)}\to\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}\right)_{(T)}. \tag{9.8.4.2}$$

Posons $X=\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$, $P=\mathbf{P}\left(\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}\right)$; lorsque H parcourt l'ensemble $\mathfrak{S}_n(I)$ des parties à n éléments de I, on a vu (9.7.5) que les S-schémas X_H s'identifient à des ouverts affines formant un recouvrement de X; nous noterons P_H les ouverts affines définis de même pour P et le $\mathscr{O}_S$-Module $\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}$. Montrons que X_H est l'*image réciproque* de P_H par le morphisme de Plücker $\varpi_{\mathscr{E}}$; il suffit pour cela (**0**, 1.1.7) de vérifier que pour tout S-

schéma T, l'ensemble $F_H(T)$ (notation de (9.7.4.3)) est l'image réciproque par $p_{\mathscr{E}_{(T)}}$ de l'ensemble analogue $G_H(T)$ défini comme $F_H(T)$ mais à partir de $\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}$ et $\psi_{H,T}$. Or, revenant à la définition de $p_{\mathscr{E}}$ (9.8.2), cela signifie que, pour qu'un épimorphisme $u:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ sur un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang n soit tel que le composé

$$\mathscr{O}_T^{(H)} \xrightarrow{\varphi_{H,T}} \mathscr{E}_{(T)} \xrightarrow{u_{(T)}} \mathscr{F}_{(T)}$$

soit un épimorphisme, il faut et il suffit que le composé

$$\overset{n}{\wedge}\mathscr{O}_T^{(H)} \xrightarrow{\psi_{H,T}} \overset{n}{\wedge}\mathscr{E}_{(T)} \xrightarrow{\overset{n}{\wedge}u_{(T)}} \overset{n}{\wedge}\mathscr{F}_{(T)}$$

le soit, ce qui est un cas particulier de (**0**, 5.5.6).

Il résulte donc de (4.2.4, (ii)) que pour prouver que $\varpi_{\mathscr{E}}$ est une immersion fermée, il suffit de montrer que sa restriction $X_H\to P_H$ en est une.

Changeant de notations, considérons, de façon générale, une décomposition de $\mathscr{E}$ en somme directe

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}'\oplus\mathscr{E}'' \tag{9.8.4.3}$$

où $\mathscr{E}'$ est *localement libre de rang n*, mais $\mathscr{E}''$ quelconque. Désignons par X′ et P′ les ouverts de X et P respectivement définis comme l'étaient plus haut X_H et P_H, mais à partir de l'injection canonique $\mathscr{E}'\to\mathscr{E}$ (remplaçant $\mathscr{E}_H\to\mathscr{E}$); nous allons expliciter le morphisme $X'\to P'$ restriction de $\varpi_{\mathscr{E}}$ et nous montrerons que c'est une *immersion fermée*, ce qui achèvera de prouver (9.8.4). Par définition, l'ensemble $\Gamma(X'/S)=\mathrm{Hom}_S(S,X')$ est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble F′(S) des Modules quotients $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ tels que l'homomorphisme composé $\mathscr{E}'\to\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ soit un isomorphisme, autrement dit avec l'ensemble des *projecteurs* de $\mathscr{E}$, d'image $\mathscr{E}'$; ce dernier ensemble est lui-même en correspondance biunivoque canonique avec $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}'',\mathscr{E}')$. De même, l'ensemble $\Gamma(P'/S)=\mathrm{Hom}_S(S,P')$ est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des *projecteurs* de $\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}$ d'image $\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'$. Comme on a une décomposition canonique en somme directe (Bourbaki, *Alg.*, chap. III, 3e éd.)

$$\mathscr{E}=\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'\oplus\left(\left(\overset{n-1}{\wedge}\mathscr{E}'\right)\otimes\mathscr{E}''\right)\oplus\cdots\oplus\left(\mathscr{E}'\otimes\left(\overset{n-1}{\wedge}\mathscr{E}''\right)\right)\oplus\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'', \tag{9.8.4.4}$$

l'ensemble de ces projecteurs est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}\left(\left(\overset{n-i}{\wedge}\mathscr{E}'\right)\otimes\left(\overset{i}{\wedge}\mathscr{E}''\right),\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'\right). \tag{9.8.4.5}$$

Si l'on tient compte des diverses correspondances canoniques précédentes, on voit que la restriction de $p_{\mathscr{E}}$ à F′(S) s'identifie à l'application de

l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}'',\mathscr{E}')$ dans l'ensemble (9.8.4.5) qui, à tout homomorphisme u, fait correspondre la famille des homomorphismes

$$u_i\colon \Big(\overset{n-i}{\wedge}\mathscr{E}'\Big)\otimes\Big(\overset{i}{\wedge}\mathscr{E}''\Big)\to\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}' \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{9.8.4.6}$$

définis par les formules

$$u_i(x'\otimes y'')=x'\wedge\Big(\Big(\overset{i}{\wedge}u\Big)(y'')\Big). \tag{9.8.4.7}$$

Notons maintenant que le terme de la somme (9.8.4.5) correspondant à $i=1$ s'identifie canoniquement à

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}\Big(\mathscr{E}'',\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}\Big(\overset{n-1}{\wedge}\mathscr{E}',\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'\Big)\Big) \tag{((9.8.4.8)}$$

et d'autre part, l'application qui, à toute section x' de $\mathscr{E}'$, fait correspondre le produit extérieur $z'\mapsto z'\wedge x'$ par cette section, est un isomorphisme de $\mathscr{E}'$ sur $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}\Big(\overset{n-1}{\wedge}\mathscr{E}',\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'\Big)$, si bien que finalement le premier terme de la somme (9.8.4.5) s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}'',\mathscr{E}')$ et que, moyennant cette identification, le premier terme de la suite (9.8.4.6) est simplement donné par

$$u_1=u. \tag{9.8.4.9}$$

En d'autres termes, si l'on identifie l'ensemble (9.8.4.5) au produit A(S) du premier facteur par le produit B(S) des autres, ce qui précède prouve que l'application $\Gamma(X'/S)\to\Gamma(P'/S)$ déduite du morphisme $X'\to P'$ restriction de $\varpi_{\mathscr{E}}$, est injective et a pour image la partie de $\Gamma(P'/S)$ qui correspond à la partie de $A(S)\times B(S)$, *graphe d'une application* $q_S\colon A(S)\to B(S)$ explicitée par les formules (9.8.4.7).

Remplaçons maintenant dans le raisonnement qui précède S par un S-schéma T, $\mathscr{E},\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ par $\mathscr{E}_{(T)},\mathscr{E}'_{(T)}$ et $\mathscr{E}''_{(T)}$ respectivement, et notons que toutes les applications qui sont intervenues sont fonctorielles en T. Considérons alors les foncteurs

$$\begin{aligned} &T\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{E}''_{(T)},\mathscr{E}'_{(T)}),\\ &T\mapsto \prod_{2\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}\Big(\Big(\overset{n-i}{\wedge}\mathscr{E}'_{(T)}\Big)\otimes\Big(\overset{i}{\wedge}\mathscr{E}''_{(T)}\Big),\overset{n}{\wedge}\mathscr{E}'_{(T)}\Big). \end{aligned} \tag{((9.8.4.10)}$$

Ils sont respectivement représentables par deux S-schémas Y,Z *affines sur* S ((9.6.1) et (9.4.11)). Le raisonnement précédent montre que X' s'identifie canoniquement à Y, P' à $X\times_S Z$ et le morphisme $X'\to P'$, restriction de $\varpi_{\mathscr{E}}$, au morphisme *graphe* d'un S-morphisme $Y\to Z$. Comme Y et Z sont séparés sur S (9.1.3), ce morphisme graphe est une immersion fermée (5.2.4)

Lorsque dans (9.8.4.3), $\mathscr{E}$ est lui-même localement libre de rang fini il en est de même de $\mathscr{E}''$; donc les schémas Y et Z représentant les foncteurs (9.8.4.10) sont de la forme $\mathbf{V}(\mathscr{M})$ et $\mathbf{V}(\mathscr{N})$, où $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont localement libres de rang fini (9.6.1), et $Y \times_S Z$ s'identifie par suite à $\mathbf{V}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})$ (9.4.11); la projection canonique $Y \times_S Z \to Y$ correspond donc par suite à l'homomorphisme canonique $\mathbf{S}(\mathscr{M}) \to \mathbf{S}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})$, qui fait de $\mathbf{S}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})$ une $\mathbf{S}(\mathscr{M})$-Algèbre de type fini; cette projection est par suite un morphisme de type fini et affine (donc séparé), et comme un morphisme graphe $Y \to Y \times_S Z$ est une Y-section de cette projection, on conclut de (6.3.8, (v)) que cette Y-section est un morphisme *de présentation finie*, ce qui achève de prouver (9.8.4).

(9.8.5) Il résulte aussitôt de la définition du morphisme de Plücker qu'il est compatible avec les changements de base, autrement dit, pour tout S-schéma T, $\varpi_{\mathscr{E}_{(T)}}$ se déduit de $\varpi_{\mathscr{E}}$ par le changement de base $T \to S$. Considérons en particulier le cas où $T = \{\xi\}$, spectre d'un corps K, l'image de ξ étant un point $s \in S$, de sorte que $\mathscr{E}_{(T)}$ est l'espace vectoriel $E = \mathscr{E}^s \otimes_{\kappa(s)} K$ sur K. La donnée d'une base (a_j) d'un sous-espace vectoriel V de rang n de E équivaut à celle d'une application linéaire u du dual $E^\vee$ dans K^n, et celle du n-vecteur $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ à la donnée de l'application linéaire $\overset{n}{\wedge} u$ de $\overset{n}{\wedge} E^\vee$ dans K; l'application $\varpi_{\mathscr{E}_{(T)}}$ se réduit donc bien dans ce cas à l'application de Plücker définie dans (9.8.1) pour le dual $\check{E}$ de E.

(9.8.6) Considérons maintenant un schéma S, deux $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ et leur produit tensoriel $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$. Nous allons définir un S-morphisme canonique

$$\text{(9.8.6.1)} \qquad \varsigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}} : \mathbf{P}(\mathscr{E}) \times_S \mathbf{P}(\mathscr{F}) \to \mathbf{P}(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})$$

dit *morphisme de Segre*. Pour cela, considérons deux $\mathscr{O}_S$-Modules inversibles $\mathscr{L}, \mathscr{M}$, quotients respectifs de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, et soient $u : \mathscr{E} \to \mathscr{L}$, $v : \mathscr{F} \to \mathscr{M}$ les homomorphismes canoniques. Alors $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{M}$ est inversible et $u \otimes v : \mathscr{E} \otimes \mathscr{F} \to \mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ est surjectif, donc si l'on identifie $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ au conoyau de $u \otimes v$, on a défini une application canonique

$$\text{(9.8.6.2)} \qquad s_{\mathscr{E},\mathscr{F}} : \mathrm{Grass}_1(\mathscr{E}) \times \mathrm{Grass}_1(\mathscr{F}) \to \mathrm{Grass}_1(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})$$

faisant correspondre $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{M}$ au couple $(\mathscr{L}, \mathscr{M})$.

Notons maintenant que pour tout morphisme $T \to S$, $(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})_{(T)}$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{E}_{(T)} \otimes_{\mathscr{O}_T} \mathscr{F}_{(T)}$; donc $s_{\mathscr{E}_{(T)},\mathscr{F}_{(T)}}$ fait correspondre au couple $(\mathscr{L}_{(T)}, \mathscr{M}_{(T)})$ le $\mathscr{O}_T$-Module inversible $(\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{M})_{(T)}$, et on a donc défini un *morphisme fonctoriel*

$$\text{(9.8.6.3)} \qquad s_{\mathscr{E}_{(T)},\mathscr{F}_{(T)}} : \mathrm{Grass}_1(\mathscr{E}_{(T)}) \times \mathrm{Grass}_1(\mathscr{F}_{(T)}) \to \mathrm{Grass}_1((\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})_{(T)}).$$

Les foncteurs des deux membres de (9.8.6.3) étant respectivement représentables par $\mathbf{P}(\mathscr{E})\times_S\mathbf{P}(\mathscr{F})$ (**0**, 1.2.2) et par $\mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{F})$, il correspond à (9.8.6.3) le S-morphisme (9.8.6.1) cherché (qu'on notera simplement ς si aucune confusion n'en résulte). Il résulte de (3.3.3) et de la définition du morphisme fonctoriel (9.8.6.3) que si $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ sont les Modules fondamentaux (inversibles) sur $\mathbf{P}(\mathscr{E})$, $\mathbf{P}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{F})$ respectivement, on a

$$\varsigma^*(\mathscr{K})\cong\mathscr{G}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{H}. \tag{9.8.6.4}$$

Proposition (9.8.7) *Pour tout couple d'épimorphismes $g:\mathscr{E}'\to\mathscr{E}$, $h:\mathscr{F}'\to\mathscr{F}$ de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathscr{E}')\times_S\mathbf{P}(\mathscr{F}') & \xrightarrow{\varsigma_{\mathscr{E}',\mathscr{F}'}} & \mathbf{P}(\mathscr{E}'\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{F}') \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{Grass}_1(g)\times_S\mathbf{Grass}_1(h)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{Grass}_1(g\otimes h)} \\ \mathbf{P}(\mathscr{E})\times_S\mathbf{P}(\mathscr{F}) & \xrightarrow[\varsigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}]{} & \mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{F}) \end{array}$$

est commutatif.

La démonstration est analogue à celle de (9.8.3).

Proposition (9.8.8) *Le morphisme de Segre $\varsigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}$ est une immersion fermée. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont de présentation finie, $\varsigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}$ est de présentation finie.*

La démonstration suivant exactement la même marche que celle de (9.8.4), nous nous bornerons à détailler les parties qui lui sont spéciales et ne se déduisent pas des parties correspondantes de la démonstration de (9.8.4) par une simple transposition. On peut d'abord supposer $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ engendrés par leurs sections au-dessus de S. Utilisant (9.8.7) au lieu de (9.8.3), (9.7.8), (4.3.6, (iii)) et (4.2.2, (ii)), on se ramène au cas où $\mathscr{E}=\mathscr{O}_S^{(I)}$, $\mathscr{F}=\mathscr{O}_S^{(J)}$ (I et J étant *finis* si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont de type fini); pour $i\in I$, $j\in J$, on note respectivement $\mathscr{E}_i$, $\mathscr{F}_j$ les facteurs d'indice i et j dans les sommes directes précédentes. On a un recouvrement ouvert (X_i) (resp. (Y_j)) de $X=\mathbf{P}(\mathscr{E})$ (resp. $Y=\mathbf{P}(\mathscr{F})$), où X_i (resp. Y_j) représente le foncteur $F_i(T)$ (resp. $G_j(T)$) défini comme l'ensemble des $\mathscr{O}_T$-Modules inversibles $\mathscr{L}$ quotients de $\mathscr{E}_{(T)}$ pour lesquels

$$u:(\mathscr{E}_i)_{(T)}\to\mathscr{E}_{(T)}\to\mathscr{L} \tag{9.8.8.1}$$

est un épimorphisme (resp. l'ensemble des $\mathscr{O}_T$-Modules inversibles $\mathscr{M}$ quotients de $\mathscr{F}_{(T)}$ et pour lesquels

$$v:(\mathscr{F}_j)_{(T)}\to\mathscr{F}_{(T)}\to\mathscr{M} \tag{9.8.8.2}$$

est un épimorphisme). Comme $\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{F}=\mathscr{O}_S^{(I\times J)}$, on a un recouvrement ouvert (Z_{ij}) de $Z=\mathbf{P}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{F})$, où Z_{ij} représente le foncteur $H_{ij}(T)$,

ensemble des $\mathscr{O}_T$-Modules inversibles $\mathscr{N}$ quotients de $\mathscr{E}_{(T)} \otimes_{\mathscr{O}_T} \mathscr{F}_{(T)}$ et pour lesquels

$$(\mathscr{E}_i)_{(T)} \otimes_{\mathscr{O}_T} (\mathscr{F}_j)_{(T)} \to \mathscr{E}_{(T)} \otimes_{\mathscr{O}_T} \mathscr{F}_{(T)} \to \mathscr{N}$$

est surjectif. Le premier point consiste à prouver que l'ouvert $X_i \times_S Y_j$ de $X \times_S Y$ est l'*image réciproque* de Z_{ij} par le morphisme de Segre. Comme dans (9.8.3), on voit que cela revient à dire que pour que les homomorphismes u et v de (9.8.8.1) et (9.8.8.2) soient des épimorphismes (ou des isomorphismes, ce qui revient même (**0**, 5.5.7)), il faut et il suffit que $u \otimes v$ le soit. Mais comme il s'agit de Modules inversibles, on voit aussitôt que cela revient à remarquer que pour qu'un produit de deux éléments d'un anneau soit inversible, il faut et il suffit que chacun d'eux le soit.

On est alors ramené par (4.2.4, (ii)), à montrer que la restriction $X_i \times_S Y_j \to Z_{ij}$ du morphisme de Segre est une immersion fermée.

Changeant de notations, considérons, de façon plus générale, deux décompositions de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ en sommes directes

$$\mathscr{E} = \mathscr{O}_S \oplus \mathscr{E}'', \quad \mathscr{F} = \mathscr{O}_S \oplus \mathscr{F}'' \tag{9.8.8.3}$$

où $\mathscr{E}''$ et $\mathscr{F}''$ sont quelconques, et désignons par X', Y' les ouverts de X et Y respectivement définis comme plus haut X_i et Y_j, mais à partir des injections canoniques $\mathscr{O}_S \to \mathscr{E}$, $\mathscr{O}_S \to \mathscr{F}$. Aux décompositions (9.8.8.3) correspond pour $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$ la décomposition en somme directe

$$\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F} = \mathscr{O}_S \oplus \mathscr{E}'' \oplus \mathscr{F}'' \oplus (\mathscr{E}'' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}''), \tag{9.8.8.4}$$

et on notera Z' l'ouvert de Z défini comme Z_{ij} mais à partir de l'injection canonique $\mathscr{O}_S \to \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$. On va expliciter le morphisme $X' \times_S Y' \to Z'$ restriction de $\varsigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}$ et montrer que c'est une *immersion fermée*. On voit comme dans (9.8.3) que $\Gamma(X'/S)$ (resp. $\Gamma(Y'/S)$) s'identifie à l'ensemble $A(S) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}'', \mathscr{O}_S)$ (resp. $B(S) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{F}'', \mathscr{O}_S)$), et $\Gamma(Z'/S)$ à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}'' \oplus \mathscr{F}'' \oplus (\mathscr{E}'' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}''), \mathscr{O}_S)$. En outre, la restriction de $s_{\mathscr{E},\mathscr{F}}$ que nous considérons s'identifie à l'application qui, à tout couple d'homomorphismes $u : \mathscr{E}'' \to \mathscr{O}_S$, $v : \mathscr{F}'' \to \mathscr{O}_S$, fait correspondre l'homomorphisme

$$w : \mathscr{E}'' \oplus \mathscr{F}'' \oplus (\mathscr{E}'' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}'') \to \mathscr{O}_S$$

égal à u dans $\mathscr{E}''$, à v dans $\mathscr{F}''$, à $u \otimes v$ dans $\mathscr{E}'' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}''$. Or, on a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}'' \oplus \mathscr{F}'' \oplus (\mathscr{E}'' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}''), \mathscr{O}_S) = A(S) \times B(S) \times C(S)$, en posant $C(S) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E}'' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}'', \mathscr{O}_S)$ et ce qui précède prouve que l'application $\Gamma(X'/S) \times \Gamma(Y'/S) \to \Gamma(Z'/S)$ déduite du morphisme de Segre est injective et a pour image la partie de $\Gamma(Z'/S)$ qui correspond à une partie de $A(S) \times B(S) \times C(S)$ qui est le *graphe* d'une application $A(S) \times B(S) \to C(S)$. La fin du raisonnement est alors la même que dans (9.8.3) et montre que

la restriction de ς à $X' \times_S Y'$ s'identifie au morphisme graphe d'un S-morphisme

$$\mathbf{V}(\mathscr{E}'') \times_S \mathbf{V}(\mathscr{F}'') \to \mathbf{V}(\mathscr{E}'' \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}''), \tag{9.8.8.5}$$

donc est une immersion fermée ((9.1.3) et (5.2.4)).

Lorsque dans (9.8.8.3), $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont localement libres de rang fini, il en est de même de $\mathscr{E}''$ et $\mathscr{F}''$, et le même raisonnement que dans (9.8.4) montre que le graphe d'un S-morphisme (9.8.8.5) est une immersion fermée de présentation finie, ce qui achève d'établir (9.8.8).

(9.8.9) Le morphisme de Segre est compatible avec les changements de base, autrement dit, pour tout S-schéma T, $\varsigma_{\mathscr{E}_{(T)},\mathscr{F}_{(T)}}$ se déduit de $\varsigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}$ par le changement de base $T \to S$. Ceci donne une interprétation simple de ce morphisme restreint aux ensembles de points de S à valeurs dans une extension K de $\kappa(s)$, des S-schémas $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ et $\mathbf{P}(\mathscr{F})$ (pour un point $s \in S$): à tout couple de points dans les espaces projectifs $\mathbf{P}((\mathscr{E}^s \otimes_{\kappa(s)} K)^\vee)$ et $\mathbf{P}((\mathscr{F}^s \otimes_{\kappa(s)} K)^\vee)$, c'est-à-dire à deux droites passant respectivement par un point $f \in (\mathscr{E}^s \otimes_{\kappa(s)} K)^\vee$ non nul et par un point $g \in (\mathscr{F}^s \otimes_{\kappa(s)} K)^\vee$ non nul, le morphisme fait correspondre la droite passant par le point image de $f \otimes g$ dans l'espace dual

$$((\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F})^s \otimes_{\kappa(s)} K)^\vee.$$

9.9. Fibrés en drapeaux

(9.9.1) Soit E un espace vectoriel sur un corps K, et soit $\mathbf{m} = (m_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une suite croissante d'entiers $\geqslant 0$. On appelle *drapeau de type* **m** dans E une suite *décroissante* de sous-espaces vectoriels $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_p$ de E, de *codimensions* respectives $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dans E. Si l'on pose $E_i = E/V_i$, E_i est un espace vectoriel quotient de E de rang m_i, et la donnée d'un drapeau de type **m** équivaut donc à celle de p espaces quotients E_i de E, tels que $\mathrm{rg}_K E_i = m_i$ et d'une suite d'homomorphismes surjectifs $E_{i+1} \to E_i$ tels que le composé de cet homomorphisme et de l'homomorphisme canonique $E \to E_{i+1}$ soit l'homomorphisme canonique $E \to E_i$ (ce qui le détermine entièrement); on dira pour abréger qu'une telle suite est une *suite croissante* d'espaces quotients de E, et on dit aussi que cette suite est un *drapeau de type* **m**.

(9.9.2) On peut généraliser cette notion aux schémas comme on l'a fait pour les grassmanniennes (un élément d'une grassmannienne de E étant un drapeau de type réduit à un seul entier). Etant donnée une suite $\mathbf{m} = (m_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ croissante d'entiers $\geqslant 0$, et un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, on appellera *drapeau de type* **m** *dans* $\mathscr{E}$ une suite de *Modules quotients localement libres* $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_p$ de $\mathscr{E}$, de rangs respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_p$, tels que, si $\mathscr{F}_i$ est le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{E} \to \mathscr{E}_i$, on ait $\mathscr{F}_{i+1} \subset \mathscr{F}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$. On dira encore, pour abréger, que $(\mathscr{E}_i)$ est une *suite croissante* de Modules quotients de $\mathscr{E}$. Notons $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$ l'ensemble des drapeaux de type **m** dans $\mathscr{E}$. Alors

$$T \mapsto \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)}) \tag{9.9.2.1}$$

peut être défini comme un *foncteur contravariant* de la catégorie des S-schémas dans celle des ensembles. Il suffit pour cela, comme dans (9.7.3), de montrer que pour tout S-morphisme $g : T' \to T$ et tout drapeau de type $\mathbf{m}$, $(\mathscr{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $\mathscr{E}_{(T)}$, les $\mathscr{O}_{T'}$-Modules localement libres $g^*(\mathscr{E}_i)$ forment un drapeau de type $\mathbf{m}$ dans $\mathscr{E}_{(T')} = g^*(\mathscr{E}_{(T)})$. Or, si $u_i : \mathscr{E}_{(T)} \to \mathscr{E}_i$ est l'homomorphisme canonique, et si l'on a un homomorphisme surjectif $v_i : \mathscr{E}_{i+1} \to \mathscr{E}_i$ tel que le composé $\mathscr{E}_{(T)} \xrightarrow{u_{i+1}} \mathscr{E}_{i+1} \xrightarrow{v_i} \mathscr{E}_i$ soit égal à u_i, alors $g^*(u_i)$ est l'homomorphisme canonique de $\mathscr{E}_{(T')}$ sur $g^*(\mathscr{E}_i)$, l'homomorphisme $g^*(v_i) : g^*(\mathscr{E}_{i+1}) \to g^*(\mathscr{E}_i)$ est surjectif et son composé avec $g^*(u_{i+1})$ est $g^*(u_i)$, ce qui prouve notre assertion, et définit canoniquement une application $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(g) : \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)}) \to \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T')})$ qui, à tout drapeau $(\mathscr{E}_i)$ dans $\mathscr{E}_{(T)}$, fait correspondre le drapeau $(g^*(\mathscr{E}_i))$ dans $\mathscr{E}_{(T')}$; il est clair en outre que pour un second S-morphisme $g' : T'' \to T'$, on a $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(g \circ g') = \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(g') \circ \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(g)$.

Par définition, il est clair que $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)})$ est une partie de $\prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}_{(T)})$; nous noterons

$$i_{\mathscr{E}_{(T)}} = i^{(\mathbf{m})}_{\mathscr{E}_{(T)}} : \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)}) \to \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}_{(T)}) \tag{9.9.2.2}$$

l'injection canonique; il est immédiat par ce qui précède que c'est un *morphisme fonctoriel.*

Proposition (9.9.3) *Pour tout schéma* S, *et tout* $\mathscr{O}_S$*-module quasi-cohérent* $\mathscr{E}$, *le foncteur* $T \mapsto \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)})$ *est représentable, et si on note* $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$ *le* S*-schéma qui le représente, il correspond à* (9.9.2.2) *un* S*-morphisme*

$$i_{\mathscr{E}} = i^{(\mathbf{m})}_{\mathscr{E}} : \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) \to \prod_{1 \leqslant i \leqslant p}{}_S \, \mathbf{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}) \tag{9.9.3.1}$$

qui est une immersion fermée.

En vertu de (**0**, 1.7.7) cette proposition résulte du lemme suivant:

Lemme (9.9.3.2) *Soit* $(\mathscr{H}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *une suite de* $\mathscr{O}_S$*-Modules de* $\mathscr{E}$ *tels que* $\mathscr{H}_i \in \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathscr{E})$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant p$. *Pour tout* S*-schéma* T, *considérons l'ensemble* $i^{-1}_{\mathscr{E}_{(T)}}(((\mathscr{H}_i)_{(T)}))$ *image réciproque dans* $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)})$ *du point* $((\mathscr{H}_i)_{(T)})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *de* $\prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}_{(T)})$. *Alors le foncteur contravariant de la catégorie des* S*-schémas dans celle des ensembles*

$$T \mapsto i^{-1}_{\mathscr{E}_{(T)}}(((\mathscr{H}_i)_{(T)})) \tag{9.9.3.3}$$

est représentable par un sous-schéma fermé S′ *de* S.

Il reste donc à démontrer le lemme (9.9.3.2). Soient $u_i : \mathscr{E} \to \mathscr{H}_i$ l'homomorphisme canonique, $\mathscr{K}_i$ son noyau, $w_i : \mathscr{K}_i \to \mathscr{E}$ l'injection canonique. Le foncteur $\mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}_{(T)}$ étant exact à droite, la suite

$$(\mathscr{K}_i)_{(T)} \xrightarrow{(w_i)_{(T)}} \mathscr{E}_{(T)} \xrightarrow{(u_i)_{(T)}} (\mathscr{H}_i)_{(T)} \longrightarrow 0$$

est exacte (bien que $(w_i)_{(T)}$ ne soit plus nécessairement injective); l'image de $(\mathscr{K}_{i+1})_{(T)}$ par $(w_{i+1})_{(T)}$ dans $\mathscr{E}_{(T)}$ étant le noyau de $(u_{i+1})_{(T)}$, dire que les $(\mathscr{H}_i)_{(T)}$ forment un drapeau équivaut à dire que chacun des homomorphismes composés $(u_i \circ w_{i+1})_{(T)}$ est *nul* pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Or, chacun des foncteurs

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}((\mathscr{K}_{i+1})_{(T)}, (\mathscr{H}_i)_{(T)})$$

est *représentable* par un S-schéma affine Y_i (9.6.1). Aux éléments 0 et $u_i \circ w_{i+1}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{K}_{i+1}, \mathscr{H}_i)$ correspondent donc canoniquement deux S-*sections* s_i, s'_i de Y_i (éléments de $\mathrm{Hom}_S(S, Y_i)$); pour un morphisme $f : T \to S$, dire que les éléments 0 et $(u_i \circ w_{i+1})_{(T)}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}((\mathscr{K}_{i+1})_{(T)}, (\mathscr{H}_i)_{(T)})$ sont égaux équivaut à dire que l'on

a $s_i \circ f = s'_i \circ f$, ou encore (**0**, 1.4.2) que f se factorise en $f = j_i \circ g$, où j_i est l'injection canonique dans S du *noyau* S_i des deux S-morphismes s_i, s'_i de S dans Y_i. Comme Y_i est *séparé* sur S (9.1.3), S_i est un sous-schéma *fermé* de S (5.2.5). Alors $S' = \inf_{1 \leqslant i \leqslant p} S_i$ (4.3.4) est un sous-schéma fermé de S, et en vertu de ce qui précède, dire que $i_{\mathscr{E}(T)}^{-1}(((\mathscr{H}_i)_{(T)}))$ n'est pas vide signifie que f se factorise en $f = j \circ g$, où $j : S' \to S$ est l'injection canonique (4.3.4). Cela achève la preuve du lemme (9.9.3.1) et par suite aussi celle de (9.9.3).

(9.9.4) On dit que le S-schéma $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$ représentant le foncteur (9.9.2.1) est le *fibré en drapeaux de type* **m** de $\mathscr{E}$.

Il est clair (**0**, 1.3.10) que pour tout changement de base $g : S' \to S$, on a

$$\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(g^*(\mathscr{E})) = \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) \times_S S' \tag{9.9.4.1}$$

à un isomorphisme canonique près.

Proposition (9.9.5) *Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent de type fini* (resp. *de présentation finie*), $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$ *est un* S*-schéma de type fini* (resp. *de présentation finie*) *sur* S.

On sait en effet (9.7.7) que $X = \Pi_S \mathbf{Grass}_{m_i}(\mathscr{E})$ est de type fini (resp. de présentation finie) sur S. Lorsque $\mathscr{E}$ est de type fini, cela entraîne déjà que $X' = \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$, sous-schéma fermé de X, est de type fini sur S (6.3.4). Lorsque $\mathscr{E}$ est de présentation finie, on raisonne comme dans (9.7.7) pour se ramener au cas où S est noethérien en utilisant (9.9.4.1).

(9.9.6) Soit $u : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ un épimorphisme de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents; on définit comme dans (9.7.7) une injection canonique

$$i_{u(T)} : \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}'_{(T)}) \to \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)}) \tag{9.9.6.1}$$

correspondant à u, fonctorielle en T, et il lui correspond donc un S-morphisme

$$\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(u) : \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}') \to \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}). \tag{9.9.6.2}$$

Proposition (9.9.7) *Pour tout épimorphisme $u : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents, le* S*-morphisme* (9.9.6.2) *est une immersion fermée.*

En effet, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}'_{(T)}) & \xrightarrow{i_{\mathscr{E}'(T)}} & \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}'_{(T)}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_{u(T)}} & & \Big\downarrow \\ \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)}) & \xrightarrow[i_{\mathscr{E}(T)}]{} & \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}_{(T)}) \end{array}$$

où la flèche verticale de droite se déduit des injections canoniques (9.7.7.1). On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}') & \xrightarrow{i_{\mathscr{E}'}} & \prod_{1 \leqslant i \leqslant p}{}_S\, \mathbf{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(u)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \prod_i \mathbf{Grass}_{m_i}(u)} \\ \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) & \xrightarrow[i_{\mathscr{E}}]{} & \prod_{1 \leqslant i \leqslant p}{}_S\, \mathbf{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}) \end{array}$$

dans lequel $i_{\mathscr{E}}, i_{\mathscr{E}'}$ et $\prod_i \mathbf{Grass}_{m_i}(u)$ sont des immersions fermées en vertu de (9.9.3), (9.7.9) et (4.3.6, (iii)). On en conclut que $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(u)$ est aussi une immersion fermée (4.2.2, (ii)).

(9.9.8) Considérons une *sous-suite* croissante $\mathbf{m}'=(m_{i_k})_{1\leqslant k\leqslant q}$ de $\mathbf{m}$, où $(i_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ est une suite strictement croissante d'entiers de l'intervalle $[1,p]$. On définit alors un *morphisme fonctoriel* canonique

$$p^{(\mathbf{m}',\mathbf{m})}_{\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}}\colon \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}) \to \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}'}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})})$$

en faisant correspondre à tout drapeau de type $\mathbf{m}$ de $\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}$, $(\mathscr{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, le drapeau de type m', $(\mathscr{E}_{i_k})_{1\leqslant k\leqslant q}$; il lui correspond par suite un S-morphisme canonique

$$p^{(\mathbf{m}',\mathbf{m})}_{\mathscr{E}}\colon \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) \to \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}'}(\mathscr{E}).$$

D'ailleurs, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}) & \xrightarrow{i^{(\mathbf{m})}_{\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}}} & \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p^{(\mathbf{m}',\mathbf{m})}_{\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}}} & & \Big\downarrow \\ \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}'}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}) & \xrightarrow[i^{(\mathbf{m}')}_{\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}}]{} & \prod\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \mathrm{Grass}_{m_{i_k}}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}) \end{array}$$

où la deuxième flèche verticale est la projection canonique. On en déduit un diagramme commutatif de S-morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) & \xrightarrow{i^{(\mathbf{m})}_{\mathscr{E}}} & \prod_{\mathbf{S}}\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \mathbf{Grass}_{m_i}(\mathscr{E}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p^{(\mathbf{m}',\mathbf{m})}_{\mathscr{E}}} & & \Big\downarrow \\ \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}'}(\mathscr{E}) & \xrightarrow[i^{(\mathbf{m}')}_{\mathscr{E}}]{} & \prod_{\mathbf{S}}\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \mathbf{Grass}_{m_{i_k}}(\mathscr{E}) \end{array}$$

où la seconde flèche verticale est le morphisme de projection canonique; on peut encore dire que le morphisme $p^{(\mathbf{m}',\mathbf{m})}_{\mathscr{E}}$ est la restriction de cette projection à $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$, considérée comme morphisme de ce schéma dans $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}'}(\mathscr{E})$.

(9.9.9) Supposons maintenant que $\mathscr{E}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathbf{S}}$-Module *localement libre*. Alors le S-schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$ (9.6.4) *opère* canoniquement sur le S-schéma $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$. En effet, pour tout S-schéma T, tout élément du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})})$ des automorphismes du $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-Module localement libre $\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}$ transforme un drapeau de type $\mathbf{m}$ dans $\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}$ en un drapeau de même type, donc on a un morphisme fonctoriel

$$\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}) \times \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})}) \to \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})})$$

qui est une loi externe de groupe opérant dans $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(\mathrm{T})})$; on en conclut notre assertion.

9.10. Fibrés en variétés de Stiefel

(9.10.1) Soient S un schéma, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_{\mathbf{S}}$-Module *localement libre* de rang n, $\mathbf{p}=(p_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une suite d'entiers $\geqslant 0$ tels que $p_1+p_2+\cdots+p_r=n$. Une *décomposition de Stiefel de type* $\mathbf{p}$ de $\mathscr{E}$ est une suite $(\mathscr{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de sous-Modules de $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{E}_i$ soit *localement libre de rang* p_i et que $\mathscr{E}$ soit *somme directe des* $\mathscr{E}_i$.

Pour une telle décomposition, soit $e_i\in \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathbf{S}}}(\mathscr{E})$ la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}_i$ qui lui correspond $(1\leqslant i\leqslant r)$; on a donc $1_{\mathscr{E}}=e_1+e_2+\cdots+e_r$, $e_i^2=e_i$, $e_ie_j=0$ pour $i\neq j$; enfin, pour chaque i, $\bigwedge^{p_i+1} e_i=0$ puisque $\mathrm{Im}(e_i)$ est de rang p_i. Inversement, supposons donnés dans $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathbf{S}}}(\mathscr{E})$ une suite d'éléments e_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ vérifiant ces conditions, et montrons que les sous-Modules $\mathrm{Im}(e_i)=\mathscr{E}_i$ de $\mathscr{E}$ forment une dé-

composition de Stiefel de type **p**. La question étant locale sur S, on peut supposer $S=\mathrm{Spec}(A)$ affine; alors il est immédiat que $\mathscr{E}$ est somme directe des $\mathscr{E}_i$; ces derniers correspondant à des A-modules projectifs (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2, prop. 4), sont localement libres (1.4.4); en outre, le rang de $\mathscr{E}_i$ en tout point est $\leqslant p_i$, car en se bornant à un voisinage affine assez petit du point considéré, on peut supposer les $\mathscr{E}_i$ libres, et alors l'hypothèse $\bigwedge^{p_i+1} e_i=0$ entraîne qu'une base de $\mathscr{E}_i$ a au plus p_i éléments; mais comme $\mathscr{E}$ est somme directe des $\mathscr{E}_i$ et $\sum_{i=1}^{r} p_i=n$, $\mathscr{E}_i$ est nécessairement de rang p_i.

Nous noterons $\mathrm{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E})$ l'ensemble des décompositions de Stiefel de type **p** de $\mathscr{E}$, identifié à l'ensemble des suites $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E})$ ayant les propriétés précédentes.

Proposition (9.10.2) *Soient* S *un schéma,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-Module localement libre de rang constant n. Alors le foncteur contravariant*

$$\mathrm{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E}) : T \mapsto \mathrm{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E}_{(T)}) \tag{9.10.2.1}$$

est représentable par un S*-schéma* $\mathbf{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E})$ *affine sur* S.

Soit $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_S$-Algèbre $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{E})$, qui est un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang n^2; posons $\mathscr{B}=\mathscr{A}^r$, qui est localement libre de rang n^2r. Nous allons voir qu'il y a un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathbf{S}(\mathscr{B})$ tel que le foncteur (9.10.2.1) s'identifie canoniquement au foncteur contravariant $\mathrm{Al}(\mathscr{B},\mathscr{J})$ (9.5.2.1); la conclusion résultera alors de (9.5.3).

Supposons d'abord $S=\mathrm{Spec}(R)$ affine, et $\mathscr{E}=\tilde{E}$, où E est un R-module libre de rang n, et choisissons une base $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E. Alors $\mathscr{A}=\tilde{A}$, où $A=\mathrm{End}_R(E)$ a une base canonique formé des unités matricielles C_{jk}; on notera $C_{jk}^{(i)}$ les éléments de la base correspondante du i-ème facteur de $B=A^r$ $(1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j,k\leqslant n)$. Alors $\mathbf{S}(\tilde{B})$ s'identifie (par le choix de la base (c_i)) à l'algèbre de polynômes $L=R[(T_{jk}^{(i)})]$ à n^2r indéterminées, $(T_{jk}^{(i)})$ étant la base duale de $(C_{jk}^{(i)})$ dans B. Cela étant, une suite de r éléments de A est donnée par les n^2r coordonnées de ces éléments $e_i=\sum_{j,k} t_{ijk}C_{jk}$, qu'on peut considérer comme les coordonnées d'un élément $(e_1,\ldots,e_r)$ de B par rapport à la base $(C_{jk}^{(i)})$. Or, les relations entre les e_i qui expriment qu'ils forment une décomposition de Stiefel sont évidemment de la forme $P_\alpha(t_{ijk})=0$, où (P_α) est une famille finie de *polynômes* de L, les $P_\alpha(t_{ijk})$ étant les composantes (sur les bases déduites canoniquement de (c_i) dans les divers R-modules libres concernés) des éléments $e_1+e_2+\cdots+e_r-1_E$, $e_i^2-e_i$, e_{ij} $(i\neq j)$, $\bigwedge^{p_i+1} e_i$. Montrons que l'idéal $\mathfrak{J}_S$ de $\mathbf{S}(\tilde{B})$ qui est engendré par les P_α est *indépendant* du choix de la base (c_i) de E. En effet, par exemple les composantes de e_ie_j sont les éléments de la matrice produit $(T_{hk}^{(i)})(T_{hk}^{(j)})$. Si on prend une autre base dans E, les nouveaux éléments de la base correspondante de B sont les éléments des matrices $P(T_{hk}^{(i)})P^{-1}$, où P est une matrice inversible à éléments dans R; les composantes de e_ie_j pour cette nouvelle base sont donc les éléments de la matrice $P(T_{hk}^{(i)})(T_{hk}^{(j)})P^{-1}$, c'est-à-dire des *combinaisons linéaires* à coefficients dans R des polynômes correspondant à la base initiale; donc l'idéal engendré par les deux systèmes de polynômes est le même, et on raisonne de même pour les autres P_α. Si on pose $\mathscr{J}_S=\tilde{\mathfrak{J}}_S$, il résulte en outre de la définition que pour tout ouvert affine U de S, $\mathscr{J}_U$ est *induit* sur U par l'Idéal $\mathscr{J}_S$.

On peut alors passer au cas général où S est quelconque, et définir l'Idéal $\mathscr{J}$ de $\mathbf{S}(\mathscr{B})$ comme induisant $\mathscr{J}_U$ sur chaque ouvert affine U de S. Cette définition et la définition de $\mathrm{Al}(\mathscr{B},\mathscr{J})$ donnée dans (9.5.1) et (9.5.2) prouvent alors la proposition.

On notera encore ici que le schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$ opère canoniquement sur le schéma $\mathbf{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E})$, l'image par un automorphisme de $\mathscr{E}_{(T)}$ d'une décomposition de Stiefel de $\mathscr{E}_{(T)}$ de type $\mathbf{p}$ étant une décomposition de même type.

(9.10.3) Pour toute suite $\mathbf{p}=(p_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ telle que $p_1+p_2+\cdots+p_r=n$, posons $m_i=p_1+p_2+\cdots+p_i$ pour $1\leqslant i\leqslant r$ et $\mathbf{m}=(m_i)$. Il y a alors un S-morphisme canonique

$$\mathbf{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E}) \to \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}). \tag{9.10.3.1}$$

En effet, il suffit pour cela de définit, dans la catégorie des S-schémas, un morphisme fonctoriel

$$\mathrm{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E}_{(T)}) \to \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}_{(T)}). \tag{9.10.3.2}$$

Or, si $(\mathscr{F}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est une décomposition de $\mathscr{E}_{(T)}$ en somme directe, où $\mathscr{F}_i$ est localement libre de rang p_i $(1\leqslant i\leqslant r)$, il suffit de lui associer le drapeau $(\mathscr{G}_i)$ de type $\mathbf{m}$, où $\mathscr{G}_i=\mathscr{E}_{(T)}/\mathscr{F}'_i$, $\mathscr{F}'_i$ étant la somme directe $\mathscr{F}_{i+1}+\cdots+\mathscr{F}_r$.

Proposition (9.10.4) *Le* S*-morphisme canonique* (9.10.3.1) *est surjectif.*

Il suffit en effet de montrer que pour tout $s\in S$, le morphisme déduit de (9.10.3.1) par changement de base $\mathrm{Spec}(\kappa(s))\to S$ est surjectif; on est par suite ramené au cas où $S=\mathrm{Spec}(K)$ est le spectre d'un corps. Utilisant le fait que $\mathbf{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E})$ et $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$ sont des S-schémas de type fini sur S, on peut appliquer (7.1.8) et on est donc ramené à prouver que l'application $\mathrm{Stief}_{\mathbf{p}}(E)\to\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(E)$ est surjective lorsque E est un espace vectoriel de rang n sur K. Or cela est immédiat, car si les $E_i=E/V_i$ forment un drapeau de type $\mathbf{m}$, et si F_i est un supplémentaire de V_i dans V_{i-1} (en posant $V_0=E$), il est immédiat que l'image canonique de la décomposition de Stiefel (F_i) est le drapeau (E_i).

Notons encore que le S-morphisme canonique (9.10.3.1) est *compatible* avec les actions de $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$ définies dans (9.9.9) et (9.10.2); autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{GL}(\mathscr{E})\times_S\mathbf{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E}) & \longrightarrow & \mathbf{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{GL}(\mathscr{E})\times_S\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) & \longrightarrow & \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les lois d'action du schéma en groupes $\mathbf{GL}(\mathscr{E})$.

§ 10. Schémas formels

10.1. Schémas formels affines

(10.1.1) Soit A un anneau topologique *admissible* (**0**, 7.1.2); pour tout idéal de définition $\mathfrak{J}$ de A, $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J})$ s'identifie au sous-espace fermé $V(\mathfrak{J})$ de Spec(A) (1.2.5), ensemble des idéaux premiers *ouverts* de A; cet espace topologique ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathfrak{J}$ considéré (**0**, 7.1.5); notons-le $\mathfrak{X}$. Soit $(\mathfrak{J}_\lambda)$ un système fondamental de voisinages de 0 dans A, formé d'idéaux de définition, et pour tout λ, soit $\mathscr{O}_\lambda$ le faisceau structural de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}_\lambda)$; ce faisceau est induit sur $\mathfrak{X}$

par $\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{J}}_\lambda$ (lequel est nul hors de $\mathfrak{X}$). Pour $\mathfrak{J}_\mu \subset \mathfrak{J}_\lambda$, l'homomorphisme canonique $A/\mathfrak{J}_\mu \to A/\mathfrak{J}_\lambda$ définit donc un homomorphisme $u_{\lambda\mu} : \mathscr{O}_\mu \to \mathscr{O}_\lambda$ de faisceaux d'anneaux (1.6.5), et $(\mathscr{O}_\lambda)$ est un *système projectif de faisceaux d'anneaux* pour ces homomorphismes. Comme la topologie de $\mathfrak{X}$ admet une base formée d'ouverts quasi-compacts, on peut associer à tout $\mathscr{O}_\lambda$ un *faisceau d'anneaux topologiques pseudo-discrets* (**0**, 3.9.1) qui a $\mathscr{O}_\lambda$ comme faisceau d'anneaux (sans topologie) sous-jacent, et que nous noterons encore $\mathscr{O}_\lambda$; et les $\mathscr{O}_\lambda$ forment encore un *système projectif de faisceaux d'anneaux topologiques* (**0**, 3.9.2). Nous désignerons par $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ le *faisceau d'anneaux topologiques* sur $\mathfrak{X}$, limite projective du système $(\mathscr{O}_\lambda)$; pour tout ouvert *quasi-compact* U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ est donc l'anneau topologique limite projective du système d'anneaux *discrets* $\Gamma(U, \mathscr{O}_\lambda)$ (**0**, 3.2.6).

Définition (10.1.2) *Etant donné un anneau topologique admissible* A, *on appelle spectre formel de* A *et on note* Spf(A) *le sous-espace fermé* $\mathfrak{X}$ *de* Spec(A) *formé des idéaux premiers ouverts de* A. *On dit qu'un espace topologiquement annelé est un schéma formel affine s'il est isomorphe à un spectre formel* $\mathrm{Spf}(A) = \mathfrak{X}$ *muni du faisceau d'anneaux topologiques* $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ *limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets* $(\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{J}}_\lambda)|\mathfrak{X}$, *où* $\mathfrak{J}_\lambda$ *parcourt l'ensemble filtrant des idéaux de définition de* A.

Quand nous parlerons d'un *spectre formel* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ comme d'un schéma formel affine, il s'agira toujours de l'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ où $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est défini comme ci-dessus.

On notera que tout *schéma affine* $X = \mathrm{Spec}(A)$ peut être considéré comme un schéma formel affine d'une seule manière, en considérant A comme un anneau topologique discret: les anneaux topologiques $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ sont alors discrets lorsque U est quasi-compact (mais non en général lorsque U est un ouvert quelconque de X).

Proposition (10.1.3) *Si* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, *où* A *est un anneau admissible,* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ *est topologiquement isomorphe à* A.

En effet, comme $\mathfrak{X}$ est fermé dans Spec(A), il est quasi-compact, et par suite $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ est topologiquement isomorphe à la limite projective des anneaux discrets $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\lambda)$; mais $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\lambda)$ est isomorphe à $A/\mathfrak{J}_\lambda$ (1.3.7); comme A est séparé et complet, il est topologiquement isomorphe à $\varprojlim A/\mathfrak{J}_\lambda$ (**0**, 7.2.1), d'où la proposition.

Proposition (10.1.4) *Soient* A *un anneau admissible,* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, *et pour tout* $f \in A$, *soit* $\mathfrak{D}(f) = D(f) \cap \mathfrak{X}$; *l'espace topologiquement annelé* $(\mathfrak{D}(f), \mathscr{O}_\mathfrak{X}|\mathfrak{D}(f))$ *est isomorphe au spectre formel affine* $\mathrm{Spf}(A_{\{f\}})$ (**0**, 7.6.15).

Pour tout idéal de définition $\mathfrak{J}$ de A, l'anneau discret $S_f^{-1}A/S_f^{-1}\mathfrak{J}$ s'identifie canoniquement à $A_{\{f\}}/\mathfrak{J}_{\{f\}}$ (**0**, 7.6.9), donc ((1.2.5) et (1.2.6)) l'espace topologique $\mathrm{Spf}(A_{\{f\}})$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{D}(f)$. En outre, pour tout ouvert quasi-compact U de $\mathfrak{X}$ contenu dans $\mathfrak{D}(f)$,

$\Gamma(U, \mathscr{O}_\lambda)$ s'identifie au module des sections du faisceau structural de $\mathrm{Spec}(S_f^{-1}A/S_f^{-1}\mathfrak{J}_\lambda)$ au-dessus de U (1.3.6), donc, si on pose $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A_{(f)})$, $\Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ s'identifie au module des sections $\Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{Y})$, ce qui démontre la proposition.

(10.1.5) En tant que faisceau d'anneaux *sans topologie*, le faisceau structural $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ de Spf(A) admet pour tout $x \in \mathfrak{X}$ une fibre qui, en vertu de (10.1.4), s'identifie à la limite inductive $\varinjlim A_{(f)}$ pour les $f \notin \mathfrak{j}_x$. Par suite ((**0**, 7.6.17) et (**0**, 7.6.18)):

Proposition (10.1.6) *Pour tout* $x \in \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, *la fibre* $\mathscr{O}_x$ *est un anneau local dont le corps résiduel est isomorphe à* $\kappa(x) = A_x/\mathfrak{j}_x A_x$. *Si en outre* A *est adique et noethérien,* $\mathscr{O}_x$ *est un anneau noethérien.*

Comme $\kappa(x)$ n'est pas réduit à 0, on conclut de ce résultat que le *support* du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est *égal à* $\mathfrak{X}$.

(10.1.7) On appelle *schéma formel affine adique* (resp. *noethérien*) un schéma formel affine isomorphe à un spectre formel Spf(A), où A est *adique* (resp. *adique et noethérien*).

10.2. Morphismes de schémas formels affines

(10.2.1) Soient A, B deux anneaux admissibles, et soit $\varphi : B \to A$ un homomorphisme *continu*. L'application continue ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ (1.2.1) applique alors $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ dans $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$, car l'image réciproque par φ d'un idéal premier ouvert de A est un idéal premier ouvert de B. D'autre part, pour tout $g \in B$, φ définit un homomorphisme continu $\Gamma(\mathfrak{D}(g), \mathscr{O}_\mathfrak{Y}) \to \Gamma(\mathfrak{D}(\varphi(g)), \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ en vertu de (10.1.4), (10.1.3) et (**0**, 7.6.7); comme ces homomorphismes satisfont aux conditions de compatibilité pour les restrictions correspondant au passage de g à un multiple de g, et que $\mathfrak{D}(\varphi(g)) = {}^a\varphi^{-1}(\mathfrak{D}(g))$, ils définissent un homomorphisme *continu* de faisceaux d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_\mathfrak{Y} \to {}^a\varphi_*(\mathscr{O}_\mathfrak{X})$ (**0**, 3.2.5), que nous noterons encore $\tilde{\varphi}$; on a ainsi obtenu un morphisme $\Phi = ({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$ d'espaces topologiquement annelés $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. On notera qu'en tant qu'homomorphisme de faisceaux d'anneaux sans topologie, $\tilde{\varphi}$ définit un homomorphisme $\tilde{\varphi}_x^\sharp : \mathscr{O}_{{}^a\varphi(x)} \to \mathscr{O}_x$ sur les fibres, pour tout $x \in \mathfrak{X}$.

Proposition (10.2.2) *Soient* A, B *deux anneaux topologiques admissibles, et soient* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$. *Pour qu'un morphisme* $u = (\psi, \theta) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *d'espaces topologiquement annelés soit de la forme* $({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$, *où* φ *est un homomorphisme continu d'anneaux* $B \to A$, *il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$, $\theta_x^\sharp$ *soit un homomorphisme local* $\mathscr{O}_{\psi(x)} \to \mathscr{O}_x$.

La condition est nécessaire: en effet, soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_x \in \mathrm{Spf}(A)$, et soit $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$; si $g \notin \mathfrak{q}$, on a donc $\varphi(g) \notin \mathfrak{p}$, et il est immédiat que l'homomorphisme $B_{\{g\}} \to A_{\{\varphi(g)\}}$ déduit de φ (**0**, 7.6.7) transforme $\mathfrak{q}_{\{g\}}$ en une

partie de $\mathfrak{p}_{\{\varphi(g)\}}$; passant à la limite inductive, on voit donc (compte tenu de (10.1.5) et de (**0**, 7.6.17)) que $\tilde{\varphi}_x^{\#}$ est un homomorphisme local.

Inversement, soit (ψ, θ) un morphisme vérifiant la condition de l'énoncé; en vertu de (10.1.3), θ définit un homomorphisme continu d'anneaux

$$\varphi = \Gamma(\theta) : B = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) = A.$$

En vertu de l'hypothèse sur θ, pour que la section $\varphi(g)$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ au-dessus de $\mathfrak{X}$ ait un germe inversible au point x, il faut et il suffit que g ait un germe inversible au point $\psi(x)$. Mais en vertu de (**0**, 7.6.17), les sections de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$) au-dessus de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) dont le germe n'est pas inversible au point x (resp. $\psi(x)$) sont exactement les éléments de $\mathfrak{j}_x$ (resp. $\mathfrak{j}_{\psi(x)}$); la remarque précédente montre donc que ${}^a\varphi = \psi$. Enfin, pour tout $g \in B$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) = A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{\{g\}} = \Gamma(\mathfrak{D}(g), \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) & \xrightarrow[\Gamma(\theta_{\mathfrak{D}(g)})]{} & \Gamma(\mathfrak{D}(\varphi(g)), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) = A_{\{\varphi(g)\}} \end{array}$$

est commutatif; d'après la propriété universelle des anneaux complets de fractions (**0**, 7.6.6), $\theta_{\mathfrak{D}(g)}$ est égale à $\tilde{\varphi}_{\mathfrak{D}(g)}$ pour tout $g \in B$, donc (**0**, 3.2.5) on a $\theta = \tilde{\varphi}$.

Nous dirons qu'un morphisme (ψ, θ) d'espaces topologiquement annelés vérifiant la condition de (10.2.2) est un *morphisme de schémas formels affines*. On peut dire que les foncteurs $A \mapsto \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{X} \mapsto \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ définissent une *équivalence* de la catégorie des anneaux admissibles et de la catégorie opposée de la catégorie des schémas formels affines (T, I, 1.2).

(10.2.3) Comme cas particulier de (10.2.2), notons que, pour $f \in A$, l'injection canonique du schéma formel affine induit par $\mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{D}(f)$ correspond à l'homomorphisme continu canonique $A \to A_{\{f\}}$. Sous les hypothèses de (10.2.2), soient h un élément de B, g un élément de A, multiple de $\varphi(h)$; on a alors $\psi(\mathfrak{D}(g)) \subset \mathfrak{D}(h)$; la restriction de u à $\mathfrak{D}(g)$, considérée comme morphisme de $\mathfrak{D}(g)$ dans $\mathfrak{D}(h)$, est l'unique morphisme v rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D}(g) & \xrightarrow{v} & \mathfrak{D}(h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow[u]{} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

Ce morphisme correspond à l'unique homomorphisme continu $\varphi' : B_{(h)} \to A_{(g)}$ (**0**, 7.6.7) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{(g)} & \xleftarrow[\varphi']{} & B_{(h)} \end{array}$$

10.3. Idéaux de définition d'un schéma formel affine

(10.3.1) Soient A un anneau admissible, $\mathfrak{J}$ un idéal *ouvert* de A, $\mathfrak{X}$ le schéma formel affine Spf(A). Soit $(\mathfrak{J}_\lambda)$ l'ensemble des idéaux de définition de A contenus dans $\mathfrak{J}$; alors $\tilde{\mathfrak{J}}/\tilde{\mathfrak{J}}_\lambda$ est un faisceau d'idéaux de $\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{J}}_\lambda$. Désignons par $\mathfrak{J}^\Delta$ la limite projective des faisceaux induits sur $\mathfrak{X}$ par $\tilde{\mathfrak{J}}/\tilde{\mathfrak{J}}_\lambda$, qui s'identifie à un *Idéal* de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ (**0**, 3.2.6). Pour tout $f \in A$, $\Gamma(\mathfrak{D}(f), \mathfrak{J}^\Delta)$ est la limite projective de $S_f^{-1}\mathfrak{J}/S_f^{-1}\mathfrak{J}_\lambda$, autrement dit s'identifie à l'idéal ouvert $\mathfrak{J}_{(f)}$ de l'anneau $A_{(f)}$ (**0**, 7.6.9), et en particulier $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^\Delta) = \mathfrak{J}$; on en conclut (les $\mathfrak{D}(f)$ formant une base de la topologie de $\mathfrak{X}$) que l'on a

$$\mathfrak{J}^\Delta | \mathfrak{D}(f) = (\mathfrak{J}_{(f)})^\Delta . \tag{10.3.1.1}$$

(10.3.2) Avec les notations de (10.3.1), pour tout $f \in A$, l'application canonique de $A_{(f)} = \Gamma(\mathfrak{D}(f), \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ dans $\Gamma(\mathfrak{D}(f), (\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{J}})|\mathfrak{X}) = S_f^{-1}A/S_f^{-1}\mathfrak{J}$ est *surjective* et a pour noyau $\Gamma(\mathfrak{D}(f), \mathfrak{J}^\Delta) = \mathfrak{J}_{(f)}$ (**0**, 7.6.9); ces applications définissent donc un *épimorphisme* continu, dit *canonique*, du faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ sur le faisceau d'anneaux discrets $(\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{J}})|\mathfrak{X}$, dont le noyau est $\mathfrak{J}^\Delta$; cet homomorphisme n'est autre d'ailleurs que $\tilde{\varphi}$ (10.2.1), où φ est l'homomorphisme continu $A \to A/\mathfrak{J}$; le morphisme $({}^a\varphi, \tilde{\varphi}) : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}) \to \mathfrak{X}$ de schémas formels affines (où ${}^a\varphi$ est d'ailleurs l'homéomorphisme identique de $\mathfrak{X}$ sur lui-même) est encore dit *canonique*. On a donc, d'après ce qui précède, un *isomorphisme canonique*

$$\mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathfrak{J}^\Delta \simeq (\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{J}})|\mathfrak{X}. \tag{10.3.2.1}$$

Il est clair (en vertu de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^\Delta) = \mathfrak{J}$) que l'application $\mathfrak{J} \mapsto \mathfrak{J}^\Delta$ est *strictement croissante;* d'après ce qui précède, pour $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}'$, le faisceau $\mathfrak{J}'^\Delta/\mathfrak{J}^\Delta$ est canoniquement isomorphe à $\tilde{\mathfrak{J}}'/\tilde{\mathfrak{J}} = (\mathfrak{J}'/\mathfrak{J})^\sim$.

(10.3.3) Les hypothèses et notations étant toujours celles de (10.3.1), nous dirons qu'un Idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est un *Idéal de définition* de $\mathfrak{X}$ si, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert de x de la forme $\mathfrak{D}(f)$, où $f \in A$, tel que $\mathscr{J}|\mathfrak{D}(f)$ soit de la forme $\mathfrak{H}^\Delta$, où $\mathfrak{H}$ est un idéal de définition de $A_{(f)}$.

Proposition (10.3.4) *Pour tout* $f \in A$, *tout Idéal de définition de* $\mathfrak{X}$ *induit un Idéal de définition de* $\mathfrak{D}(f)$.

Cela résulte de (10.3.1.1).

Proposition (10.3.5) *Si* A *est un anneau admissible, tout Idéal de définition de* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ *est de la forme* $\mathfrak{J}^{\Delta}$, *où* $\mathfrak{J}$ *est un idéal de définition de* A, *uniquement déterminé.*

En effet, soit $\mathscr{J}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$; par hypothèse, et puisque $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, il y a un nombre fini d'éléments $f_i \in A$ tels que les $\mathfrak{D}(f_i)$ recouvrent $\mathfrak{X}$ et que $\mathscr{J}|\mathfrak{D}(f_i) = \mathfrak{H}_i^{\Delta}$, où $\mathfrak{H}_i$ est un idéal de définition de $A_{(f_i)}$. Pour tout i, il existe donc un idéal ouvert $\mathfrak{K}_i$ de A tel que $(\mathfrak{K}_i)_{(f_i)} = \mathfrak{H}_i$ (**0**, 7.6.9); soit $\mathfrak{K}$ un idéal de définition de A contenu dans tous les $\mathfrak{K}_i$. L'image canonique de $\mathscr{J}/\mathfrak{K}^{\Delta}$ dans le faisceau structural $(A/\mathfrak{K})^{\sim}$ de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{K})$ (10.3.2) est donc telle que sa restriction à $\mathfrak{D}(f_i)$ soit égale à celle de $(\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K})^{\sim}$; on en conclut que cette image canonique est un Idéal *quasi-cohérent* sur $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{K})$, donc de la forme $(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})^{\sim}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de A contenant $\mathfrak{K}$ (1.4.1), d'où $\mathscr{J} = \mathfrak{J}^{\Delta}$ (10.3.2); en outre, comme pour tout i il existe un entier n_i tel que $\mathfrak{H}_i^{n_i} \subset \mathfrak{K}_{(f_i)}$, on aura, en désignant par n le plus grand des n_i, $(\mathscr{J}/\mathfrak{K}^{\Delta})^n = 0$, et par suite (10.3.2) $((\mathfrak{J}/\mathfrak{K})^{\sim})^n = 0$, d'où finalement $(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})^n = 0$ (1.3.13), ce qui prouve que $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition de A (**0**, 7.1.4).

Proposition (10.3.6) *Soient* A *un anneau adique,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A *tel que* $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ *soit un* $A/\mathfrak{J}$*-module de type fini. Pour tout entier* $n > 0$, *on a alors* $(\mathfrak{J}^{\Delta})^n = (\mathfrak{J}^n)^{\Delta}$.

En effet, pour tout $f \in A$, on a (puisque $\mathfrak{J}^n$ est un idéal ouvert)

$$(\Gamma(\mathfrak{D}(f), \mathfrak{J}^{\Delta}))^n = (\mathfrak{J}_{(f)})^n = (\mathfrak{J}^n)_{(f)} = \Gamma(\mathfrak{D}(f^n), (\mathfrak{J}^n)^{\Delta})$$

en vertu de (10.3.1.1) et de (**0**, 7.6.12). Comme $(\mathfrak{J}^{\Delta})^n$ est associé au préfaisceau $U \mapsto (\Gamma(U, \mathfrak{J}^{\Delta}))^n$ (**0**, 4.1.6), le corollaire en résulte, puisque les $\mathfrak{D}(f)$ forment une base de la topologie de X.

(10.3.7) On dit qu'une famille $(\mathscr{J}_{\lambda})$ d'Idéaux de définition de $\mathfrak{X}$ est un *système fondamental d'Idéaux de définition* si tout Idéal de définition de $\mathfrak{X}$ contient un des $\mathscr{J}_{\lambda}$; comme $\mathscr{J}_{\lambda} = \mathfrak{J}_{\lambda}^{\Delta}$, il revient au même de dire que les $\mathfrak{J}_{\lambda}$ forment un *système fondamental de voisinages de* 0 dans A. Soit (f_{α}) une famille d'éléments de A tels que les $\mathfrak{D}(f_{\alpha})$ recouvrent $\mathfrak{X}$. Si $(\mathscr{J}_{\lambda})$ est une famille filtrante décroissante d'Idéaux de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ telle que pour tout α, la famille $(\mathscr{J}_{\lambda}|\mathfrak{D}(f_{\alpha}))$ soit un système fondamental d'Idéaux de définition de $\mathfrak{D}(f_{\alpha})$, alors $(\mathscr{J}_{\lambda})$ est un système fondamental d'Idéaux de définition de $\mathfrak{X}$. En effet, pour tout Idéal de définition $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$, il y a un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des $\mathfrak{D}(f_i)$ tel que, pour tout i, $\mathscr{J}_{\lambda_i}|\mathfrak{D}(f_i)$ soit un Idéal de définition de $\mathfrak{D}(f_i)$ contenu dans $\mathscr{J}|\mathfrak{D}(f_i)$. Si μ est un indice tel que $\mathscr{J}_{\mu} \subset \mathscr{J}_{\lambda_i}$ pour tout i, il résulte de (10.3.3) que $\mathscr{J}_{\mu}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$, évidemment contenu dans $\mathscr{J}$, d'où notre assertion.

10.4. Schémas formels et morphismes de schémas formels

(10.4.1) Etant donné un espace topologiquement annelé $\mathfrak{X}$, on dit qu'un ouvert $U \subset \mathfrak{X}$ est un *ouvert formel affine* (resp. un *ouvert formel affine adique*, resp. un *ouvert formel affine noethérien*) si l'espace topologiquement annelé induit par $\mathfrak{X}$ sur U est un schéma formel affine (resp. un schéma formel affine adique, resp. un schéma formel affine noethérien (10.1.7)).

Définition (10.4.2) *On appelle schéma formel un espace topologiquement annelé $\mathfrak{X}$ dont tout point admet un voisinage ouvert formel affine. On dit que le schéma formel $\mathfrak{X}$ est adique* (resp. *localement noethérien*) *si tout point de $\mathfrak{X}$ admet un voisinage ouvert formel affine adique* (resp. *noethérien*) (10.1.7). *On dit que $\mathfrak{X}$ est noethérien s'il est localement noethérien et si son espace sous-jacent est quasi-compact (donc noethérien).*

Proposition (10.4.3) *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel* (resp. *localement noethérien*), *les ensembles ouverts formels affines* (resp. *affines noethériens*) *forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.*

Cela résulte de (10.4.2) et (10.1.4) en tenant compte de ce que si A est un anneau adique noethérien, il en est de même de $A_{\{f\}}$ pour tout $f \in A$ (**0**, 7.6.11).

Corollaire (10.4.4) *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel* (resp. *un schéma formel localement noethérien*, resp. *noethérien*), *l'espace topologiquement annelé induit sur tout ouvert de $\mathfrak{X}$ est encore un schéma formel* (resp. *un schéma formel localement noethérien*, resp. *noethérien*).

Définition (10.4.5) *Etant donnés deux schémas formels $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, on appelle morphisme (de schémas formels) de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ tout morphisme (ψ, θ) d'espaces topologiquement annelés tel que, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\theta_x^\sharp$ soit un homomorphisme local $\mathscr{O}_{\psi(x)} \to \mathscr{O}_x$.*

Il est immédiat que le composé de deux morphismes de schémas formels est encore un tel morphisme; les schémas formels forment donc une *catégorie*, et on notera $\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ l'ensemble des morphismes d'un schéma formel $\mathfrak{X}$ dans un schéma formel $\mathfrak{Y}$.

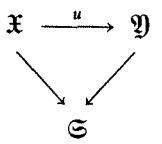
Si U est une partie ouverte de $\mathfrak{X}$, l'injection canonique dans $\mathfrak{X}$ du schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur U est un morphisme de schémas formels (et même un *monomorphisme* d'espaces topologiquement annelés (**0**, 4.1.1)).

Proposition (10.4.6) *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine. Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les morphismes du schéma formel $\mathfrak{X}$ dans le schéma formel $\mathfrak{Y}$ et les homomorphismes continus de l'anneau A dans l'anneau topologique $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$.*

Notons d'abord que, si $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ et $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ sont deux espaces topologiquement annelés quelconques, un morphisme (ψ, θ) de $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ dans $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ définit canoniquement un homomorphisme continu d'anneaux $\Gamma(\theta): \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ (**0**, 3.1.3). Dans le cas considéré, tout revient à voir qu'un homomorphisme continu quelconque $\varphi: A \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est de la forme $\Gamma(\theta)$ pour un morphisme (ψ, θ) et un seul. Or, il y a par hypothèse un recouvrement (V_α) de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines; par composition de φ avec l'homomorphisme de restriction $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(V_\alpha, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|V_\alpha)$, on obtient un homomorphisme continu $\varphi_\alpha: A \to \Gamma(V_\alpha, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|V_\alpha)$, qui correspond à un morphisme unique $(\psi_\alpha, \theta_\alpha)$ du schéma $(V_\alpha, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|V_\alpha)$ dans $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$, en vertu de (10.2.2). En outre, pour tout couple d'indices (α, β), tout point de $V_\alpha \cap V_\beta$ admet un voisinage ouvert formel affine W contenu dans $V_\alpha \cap V_\beta$ (10.4.3); il est clair qu'en composant φ_α et φ_β avec les homomorphismes de restriction à W, on obtient un même homomorphisme continu $\Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \to \Gamma(W, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|W)$, donc, en vertu des relations $(\theta_\alpha)^\#_x = (\tilde{\varphi}_\alpha)^\#_x$ pour tout $x \in V_\alpha$ et tout α (10.2.1), les restrictions à W des morphismes $(\psi_\alpha, \theta_\alpha)$ et $(\psi_\beta, \theta_\beta)$ coïncident. On en conclut qu'il y a un morphisme d'espaces topologiquement annelés $(\psi, \theta): (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ et un seul dont la restriction à chaque V_α est $(\psi_\alpha, \theta_\alpha)$, et il est clair que ce morphisme est un morphisme de schémas formels et est tel que $\Gamma(\theta) = \varphi$.

(10.4.7) Etant donné un schéma formel $\mathfrak{S}$, on dit que la donnée d'un schéma formel $\mathfrak{X}$ et d'un morphisme $\varphi: \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ définit un schéma formel $\mathfrak{X}$ *au-dessus de* $\mathfrak{S}$ ou un $\mathfrak{S}$-*schéma formel*, φ étant appelé le *morphisme structural* du $\mathfrak{S}$-schéma $\mathfrak{X}$. Si $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(A)$, où A est un anneau admissible, on dit aussi que le $\mathfrak{S}$-schéma formel $\mathfrak{X}$ est un A-*schéma formel* ou un schéma formel *au-dessus de* A. Un schéma formel quelconque peut toujours être considéré comme un schéma formel au-dessus de $\mathbf{Z}$ (muni de la topologie discrète).

Si $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ sont deux $\mathfrak{S}$-schémas formels, on dit qu'un morphisme $u: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un $\mathfrak{S}$-*morphisme* si le diagramme



(où les flèches obliques sont les morphismes structuraux) est commutatif (**0**, 1.1.10). Avec cette définition, les $\mathfrak{S}$-schémas formels (pour $\mathfrak{S}$ fixé) forment une *catégorie*. On désigne par $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ l'ensemble des $\mathfrak{S}$-morphismes du $\mathfrak{S}$-schéma formel $\mathfrak{X}$ dans le $\mathfrak{S}$-schéma formel $\mathfrak{Y}$. Lorsque $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(A)$, on dit aussi A-*morphisme* au lieu de $\mathfrak{S}$-*morphisme*.

(10.4.8) Comme tout schéma affine peut être considéré comme un schéma formel affine (10.1.2), tout schéma (usuel) peut être considéré comme un schéma formel. Il résulte en outre de (10.4.5) que pour les schémas *usuels*, les morphismes (resp. S-morphismes) de schémas *formels* coïncident avec les morphismes (resp. S-morphismes) définis au §2.

10.5. Idéaux de définition des schémas formels

(10.5.1) Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel; on dit qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Idéal $\mathscr{J}$ est un *Idéal de définition* de $\mathfrak{X}$ si tout $x \in \mathfrak{X}$ possède un voisinage ouvert formel affine U tel que $\mathscr{J}|U$ soit un Idéal de définition du schéma formel affine induit par $\mathfrak{X}$ sur U (10.3.3); en vertu de (10.3.1.1) et (10.4.3), pour tout ouvert $V \subset \mathfrak{X}$, $\mathscr{J}|V$ est alors un Idéal de définition du schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur V.

On dit qu'une famille $(\mathscr{J}_\lambda)$ d'Idéaux de définition de $\mathfrak{X}$ est un *système fondamental d'Idéaux de définition* s'il existe un recouvrement (U_α) de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines tel que, pour tout α, la famille des $\mathscr{J}_\lambda|U_\alpha$ soit un système fondamental d'Idéaux de définition (10.3.6) du schéma formel affine induit par $\mathfrak{X}$ sur U_α. Il résulte de la remarque finale de (10.3.7) que lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine, cette définition coïncide avec la définition donnée dans (10.3.7). Pour tout ouvert V de $\mathfrak{X}$, les restrictions $\mathscr{J}_\lambda|V$ forment alors un système fondamental d'Idéaux de définition du schéma formel induit sur V, en vertu de (10.3.1.1). Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel *localement noethérien*, et $\mathscr{J}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$, il résulte de (10.3.6) que les puissances $\mathscr{J}^n$ forment un système fondamental d'Idéaux de définition de $\mathfrak{X}$.

(10.5.2) Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathscr{J}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Alors l'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ est un *schéma* (usuel), qui est affine (resp. localement noethérien, resp. noethérien) lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine (resp. un schéma formel localement noethérien, resp. noethérien); on est en effet aussitôt ramené au cas affine, et alors la proposition a déjà été démontrée dans (10.3.2). En outre, si $\theta : \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$ est l'homomorphisme canonique, $u = (1_{\mathfrak{X}}, \theta)$ est un *morphisme* (dit *canonique*) de schémas formels $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, car ici encore, cela a été vu dans le cas affine (10.3.2), auquel on se ramène aussitôt.

Proposition (10.5.3) *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $(\mathscr{J}_\lambda)$ un système fondamental d'Idéaux de définition de $\mathfrak{X}$. Alors le faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets* (**0**, 3.8.1) $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda$.

Comme la topologie de $\mathfrak{X}$ admet une base d'ouverts formels affines quasi-compacts (10.4.3), on est ramené au cas affine, où la proposition est conséquence de (10.3.5), (10.3.2) et de la définition (10.1.1).

Il n'est pas certain que tout schéma formel admette des Idéaux de définition. Toutefois:

Proposition (10.5.4) *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien. Il existe un plus grand Idéal de définition $\mathscr{T}$ de $\mathfrak{X}$; c'est le seul Idéal de définition $\mathscr{J}$ tel que le schéma $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ soit réduit. Si $\mathscr{J}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{T}$ est l'image réciproque par $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$ du Nilradical de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$.*

Supposons d'abord que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, où A est un anneau adique noethérien. L'existence et les propriétés de $\mathscr{T}$ résultent immédiatement de (10.3.5) et (4.5.1), compte tenu de l'existence et des propriétés du plus grand idéal de définition de A ((**0**, 7.1.6) et (**0**, 7.1.7)).

Pour prouver l'existence et les propriétés de $\mathscr{T}$ dans le cas général, il suffit de montrer que si $U \supset V$ sont deux ouverts formels affines noethériens de X, le plus grand Idéal de définition $\mathscr{T}_U$ de U induit le plus grand Idéal de définition $\mathscr{T}_V$ de V; mais comme $(V, (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|V)/(\mathscr{T}_U|V))$ est réduit, cela résulte de ce qui précède.

On désigne par $\mathfrak{X}_{\mathrm{red}}$ le schéma (usuel) réduit $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{T})$.

Corollaire (10.5.5) *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, $\mathscr{T}$ le plus grand Idéal de définition de $\mathfrak{X}$; pour tout ouvert V de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{T}|V$ est le plus grand Idéal de définition du schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur V.*

Proposition (10.5.6) *Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deux schémas formels, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$), $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels.*

(i) *Si $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, il existe un unique morphisme*

$$f' : (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \to (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$$

de schémas usuels, rendant commutatif le diagramme

(10.5.6.1)
$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) & \xrightarrow{f} & (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) & \xrightarrow[f']{} & (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques.

(ii) *Supposons que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ soient des schémas formels affines, $\mathscr{J} = \mathfrak{J}^{\Delta}$, $\mathscr{K} = \mathfrak{K}^{\Delta}$, où $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{K}$) est un idéal de définition de A (resp. B), et $f = ({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$, où $\varphi : B \to A$ est un homomorphisme continu; pour que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, il faut et il suffit que $\varphi(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{J}$, et f' est alors le morphisme $({}^a\varphi', \tilde{\varphi}')$, où $\varphi' : B/\mathfrak{K} \to A/\mathfrak{J}$ est l'homomorphisme déduit de φ par passage aux quotients.*

(i) Si $f=(\psi,\theta)$, l'hypothèse entraîne que l'image par $\theta^{\#}: \psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})\to\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ du faisceau d'idéaux $\psi^{-1}(\mathscr{K})$ de $\psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est contenue dans $\mathscr{J}$ (**0**, 4.3.5). Par passage aux quotients, on déduit donc de $\theta^{\#}$ un homomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$\omega: \psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})=\psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})/\psi^{-1}(\mathscr{K})\to\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J};$$

en outre, comme pour tout $x\in\mathfrak{X}$, $\theta^{\#}_x$ est un homomorphisme *local*, il en est de même de ω_x. Le morphisme d'espaces annelés (ψ,ω^b) est donc l'unique morphisme f' d'espaces annelés répondant à la question.

(ii) La correspondance canonique fonctorielle entre morphismes de schémas formels affines et homomorphismes continus d'anneaux (10.2.2) montre que dans le cas considéré, la relation $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{J}$ entraîne que l'on a $f'=({}^a\varphi',\tilde{\varphi}')$, où $\varphi': B/\mathfrak{K}\to A/\mathfrak{J}$ est l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme

(10.5.6.2)
$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/\mathfrak{K} & \xrightarrow[\varphi']{} & A/\mathfrak{J} \end{array}$$

L'existence de φ' implique donc que $\varphi(\mathfrak{K})\subset\mathfrak{J}$. Inversement, si cette condition est vérifiée, en désignant par φ' l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme (10.5.6.2) et posant $f'=({}^a\varphi',\tilde{\varphi}')$, il est clair que le diagramme (10.5.6.1) est commutatif; la considération des homomorphismes ${}^a\varphi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})\to\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et ${}^a\varphi'^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})\to\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$ correspondant à f et f' respectivement, montre alors que cela entraîne la relation $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{J}$.

Il est clair que la correspondance $f\mapsto f'$ définie ci-dessus est *fonctorielle*.

10.6. Schémas formels comme limites inductives de schémas

(10.6.1) Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $(\mathscr{J}_\lambda)$ un système fondamental d'Idéaux de définition de $\mathfrak{X}$; pour tout λ, soit f_λ le morphisme canonique $(\mathfrak{X},\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda)\to\mathfrak{X}$ (10.5.2); pour $\mathscr{J}_\mu\subset\mathscr{J}_\lambda$, l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\mu\to\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda$ définit un morphisme canonique

$$f_{\mu\lambda}: (\mathfrak{X},\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda)\to(\mathfrak{X},\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\mu)$$

de schémas (usuels) tel que l'on ait $f_\lambda=f_\mu\circ f_{\mu\lambda}$. Les schémas $X_\lambda=(\mathfrak{X},\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda)$ et les morphismes $f_{\mu\lambda}$ constituent donc (en vertu de (10.4.8)) un *système inductif* dans la catégorie des schémas formels.

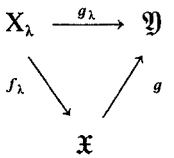
Proposition (10.6.2) *Avec les notations de* (10.6.1), *le schéma formel* $\mathfrak{X}$ *et les morphismes* f_λ *constituent une limite inductive* (T, I, 1.8) *du système* $(X_\lambda, f_{\mu\lambda})$ *dans la catégorie des schémas formels.*

Soit $\mathfrak{Y}$ un schéma formel, et pour chaque indice λ, soit

$$g_\lambda = (\psi_\lambda, \theta_\lambda) : X_\lambda \to \mathfrak{Y}$$

un morphisme, tel que l'on ait $g_\lambda = g_\mu \circ f_{\mu\lambda}$ pour $\mathscr{J}_\mu \subset \mathscr{J}_\lambda$. Cette dernière condition et la définition des X_λ entraînent d'abord que tous les ψ_λ sont identiques à une même application continue $\psi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ des espaces sous-jacents; en outre, les homomorphismes $\theta_\lambda^\# : \psi^{-1}(\mathscr{O}_\mathfrak{Y}) \to \mathscr{O}_{X_\lambda} = \mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J}_\lambda$ forment un *système projectif* d'homomorphismes de faisceaux d'anneaux. Par passage à la limite projective, on en déduit donc un homomorphisme $\omega : \psi^{-1}(\mathscr{O}_\mathfrak{Y}) \to \varprojlim \mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J}_\lambda = \mathscr{O}_\mathfrak{X}$, et il est clair que le morphisme $g = (\psi, \omega^\flat)$ d'*espaces annelés* est le *seul* rendant commutatif les diagrammes

(10.6.2.1)



Il reste donc à prouver que g est un morphisme de *schémas formels*; la question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, on peut donc supposer $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$, A et B étant des anneaux admissibles, avec $\mathscr{J}_\lambda = \mathfrak{J}_\lambda^\Delta$, où $(\mathfrak{J}_\lambda)$ est un système fondamental d'idéaux de définition de A (10.3.5); comme $A = \varprojlim A/\mathfrak{J}_\lambda$, l'existence d'un morphisme de schémas formels affines g rendant commutatifs les diagrammes (10.6.2.1) résulte alors de la correspondance biunivoque (10.2.2) entre morphismes de schémas formels affines et homomorphismes continus d'anneaux, et de la définition de la limite projective. Mais l'unicité de g en tant que morphisme d'espaces annelés montre qu'il coïncide avec le morphisme noté de même au début de la démonstration.

La proposition suivante établit, sous certaines conditions supplémentaires, l'existence de la limite inductive d'un système inductif donné de schémas (usuels) dans la catégorie des schémas formels:

Proposition (10.6.3) *Soient* $\mathfrak{X}$ *un espace topologique,* $(\mathscr{O}_i, u_{ji})$ *un système projectif de faisceaux d'anneaux sur* $\mathfrak{X}$, *ayant* $\mathbf{N}$ *pour ensemble d'indices. Soit* $\mathscr{J}_i$ *le noyau de* $u_{0i} : \mathscr{O}_i \to \mathscr{O}_0$. *On suppose que*:

a) *L'espace annelé* $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_i)$ *est un schéma* X_i.

b) *Pour tout* $x \in \mathfrak{X}$ *et tout* i, *il existe un voisinage ouvert* U_i *de* x *dans* $\mathfrak{X}$ *tel que la restriction* $\mathscr{J}_i | U_i$ *soit nilpotente.*

c) *Les homomorphismes* u_{ji} *sont surjectifs.*

Soit $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ le faisceau d'anneaux topologiques limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $\mathscr{O}_i$, et soit $u_i : \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_i$ l'homomorphisme canonique. Alors l'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un schéma formel; les homomorphismes u_i sont surjectifs; leurs noyaux $\mathscr{J}^{(i)}$ forment un système fondamental d'Idéaux de définition de $\mathfrak{X}$, et $\mathscr{J}^{(0)}$ est la limite projective des faisceaux d'idéaux $\mathscr{J}_i$.

Notons d'abord que sur chaque fibre, u_{ji} est un homomorphisme surjectif et *a fortiori* un homomorphisme local; donc $v_{ij} = (1_{\mathfrak{X}}, u_{ji})$ est un morphisme de schémas $X_j \to X_i$ $(i \geqslant j)$. Supposons d'abord que chaque X_i soit un schéma affine d'anneau A_i. Il existe un homomorphisme d'*anneaux* $\varphi_{ji} : A_i \to A_j$ tel que $u_{ji} = \tilde{\varphi}_{ji}$ (1.6.5); par suite, le faisceau $\mathscr{O}_j$ est un $\mathscr{O}_i$-Module quasi-cohérent sur X_i (pour la loi externe définie par u_{ji}), associé à A_j considéré comme A_i-module à l'aide de φ_{ji}. Pour tout $f \in A_i$, soit $f' = \varphi_{ji}(f)$; par hypothèse, les ouverts $D(f)$ et $D(f')$ sont identiques dans $\mathfrak{X}$, et l'homomorphisme de $\Gamma(D(f), \mathscr{O}_i) = (A_i)_f$ dans $\Gamma(D(f), \mathscr{O}_j) = (A_j)_{f'}$ correspondant à u_{ji} n'est autre que $(\varphi_{ji})_f$. Mais lorsqu'on considère A_j comme A_i-module, $(A_j)_{f'}$ est le $(A_i)_f$-module $(A_j)_f$, donc on a aussi $u_{ji} = \tilde{\varphi}_{ji}$, lorsque φ_{ji} est cette fois considéré comme homomorphisme de A_i-*modules*. Alors, comme u_{ji} est surjectif, on en conclut que φ_{ji} l'est aussi (1.3.9) et si $\mathfrak{J}_{ji}$ est le noyau de φ_{ji}, le noyau de u_{ji} est un $\mathscr{O}_i$-Module quasi-cohérent égal à $\tilde{\mathfrak{J}}_{ji}$. En particulier, on a $\mathscr{J}_i = \tilde{\mathfrak{J}}_i$, où $\mathfrak{J}_i$ est le noyau de $\varphi_{0i} : A_i \to A_0$. L'hypothèse b) entraîne que $\mathscr{J}_i$ est *nilpotent*: en effet, comme X est quasi-compact, on peut recouvrir X par un nombre fini d'ouverts U_k tels que $(\mathscr{J}_i | U_k)^{n_k} = 0$ et en prenant pour n le plus grand des n_k, on a $\mathscr{J}_i^n = 0$. On en conclut que $\mathfrak{J}_i$ est nilpotent (1.3.13). Alors l'anneau $A = \varprojlim A_i$ est admissible (**0**, 7.2.2), l'homomorphisme canonique $\varphi_i : A \to A_i$ est surjectif et son noyau $\mathfrak{J}^{(i)}$ est égal à la limite projective des $\mathfrak{J}_{ik}$ pour $k \geqslant i$; les $\mathfrak{J}^{(i)}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A. Les assertions de (10.6.3) résultent dans ce cas de (10.1.1) et (10.3.2), $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ n'étant autre que Spf(A).

Toujours dans ce même cas particulier, notons que si $f = (f_i)$ est un élément de la limite projective $A = \varprojlim A_i$, tous les ouverts $D(f_i)$ (ouvert affine dans X_i) s'identifient à l'ouvert $\mathfrak{D}(f)$ de $\mathfrak{X}$, le préschéma induit par X_i sur $\mathfrak{D}(f)$ s'identifiant donc au schéma affine $\mathrm{Spec}((A_i)_{f_i})$.

Dans le cas général, remarquons d'abord que pour tout ouvert quasi-compact U de $\mathfrak{X}$, chacun des $\mathscr{J}_i | U$ est nilpotent, comme le montre le raisonnement fait ci-dessus. Nous allons voir que pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il y a un voisinage ouvert U de x dans $\mathfrak{X}$ qui est un *ouvert affine* pour *tous* les X_i. En effet, prenons U ouvert affine pour X_0, et observons que $\mathscr{O}_{X_0} = \mathscr{O}_X / \mathscr{J}_i$. Comme $\mathscr{J}_i | U$ est nilpotent en vertu de ce qui précède, U est ouvert affine aussi pour chaque X_i en vertu de (2.3.6). Cela étant, pour tout U satisfaisant aux conditions précédentes, l'étude du cas

affine faite plus haut montre que $(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ est un schéma formel dont les $\mathscr{J}^{(i)}|U$ forment un système fondamental d'idéaux de définition et $\mathscr{J}^{(0)}|U$ est limite projective des $\mathscr{J}_i|U$; d'où la conclusion.

Corollaire (10.6.4) *Supposons que pour $i \geqslant j$, le noyau de u_{ji} soit $\mathscr{J}_1^{j+1}$ et que $\mathscr{J}_1/\mathscr{J}_1^2$ soit de type fini sur $\mathscr{O}_0 = \mathscr{O}_1/\mathscr{J}_1$. Alors $\mathfrak{X}$ est un schéma formel adique, et si $\mathscr{J}^{(n)}$ est le noyau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_n$, on a, en posant $\mathscr{J} = \mathscr{J}^{(0)}$, $\mathscr{J}^{(n)} = \mathscr{J}^{n+1}$ et $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est isomorphe à $\mathscr{J}_1$. Si en outre X_0 est localement noethérien* (resp. *noethérien*), *$\mathfrak{X}$ est localement noethérien* (resp. *noethérien*).

Comme les espaces sous-jacents à $\mathfrak{X}$ et X_0 sont les mêmes, la question est locale et l'on peut supposer tous les X_i affines; compte tenu des relations $\mathscr{J}_{ji} = \tilde{\mathfrak{J}}_{ji}$ (avec les notations de (10.6.3)), on est aussitôt ramené aux assertions correspondantes de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 11, prop. 12, en notant que $\mathfrak{J}_1/\mathfrak{J}_1^2$ est alors un A_0-module de type fini (1.3.9).

En particulier, *tout schéma formel localement noethérien* $\mathfrak{X}$ est limite inductive d'une suite (X_n) de schémas (usuels) localement noethériens vérifiant les conditions de (10.6.3) et (10.6.4): il suffit de considérer un Idéal de définition $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ (10.5.4) et de prendre $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ ((10.5.1) et (10.6.2)). Plus généralement, on a les mêmes propriétés si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel *adique* ayant un Idéal de définition $\mathscr{J}$ tel que $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ soit un $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$-Module de type fini.

Corollaire (10.6.5) *Soit* A *un anneau admissible. Pour que le schéma formel affine $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ soit noethérien, il faut et il suffit que* A *soit adique et noethérien.*

La condition est évidemment suffisante. Inversement, supposons que $\mathfrak{X}$ soit noethérien, et soient $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A, $\mathscr{J} = \mathfrak{J}^{\Delta}$ l'Idéal de définition correspondant de $\mathfrak{X}$. Les schémas (usuels) $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ sont alors affines et noethériens, donc les anneaux $A_n = A/\mathfrak{J}^{n+1}$ sont noethériens (2.7.3), d'où on conclut que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un $A/\mathfrak{J}$-module de type fini. Comme les $\mathscr{J}^n$ forment un système fondamental d'Idéaux de définition de $\mathfrak{X}$ (10.5.1), on a $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \varinjlim (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^n)$ (10.5.3); on en conclut (10.1.3) que A est topologiquement isomorphe à $\varprojlim A/\mathfrak{J}^n$, donc est adique et noethérien (Bourbaki, *loc. cit.*).

Remarque **(10.6.6)** Avec les notations de (10.6.3), soit $\mathscr{F}_i$ un $\mathscr{O}_i$-Module, et supposons donné, pour $i \geqslant j$, un v_{ij}-morphisme $\theta_{ji} : \mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_j$, de sorte que $\theta_{kj} \circ \theta_{ji} = \theta_{ki}$ pour $k \leqslant j \leqslant i$. Comme l'application continue sous-jacente à v_{ij} est l'identité, θ_{ji} est un homomorphisme de faisceaux de groupes abéliens sur l'espace $\mathfrak{X}$; en outre, si $\mathscr{F}$ est la limite projective

du système projectif $(\mathscr{F}_i)$ de faisceaux de groupes abéliens, le fait que les θ_{ji} sont des v_{ij}-morphismes permet de définir sur $\mathscr{F}$ une structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module par passage à la limite projective; muni de cette structure, nous dirons que $\mathscr{F}$ est la *limite projective* (pour les θ_{ji}) du système de $\mathscr{O}_i$-Modules $(\mathscr{F}_i)$. Dans le cas particulier où $v_{ij}^*(\mathscr{F}_i)=\mathscr{F}_j$ et où θ_{ji} est l'*identité*, nous dirons pour abréger, que $\mathscr{F}$ est la limite projective d'un système $(\mathscr{F}_i)$ tel que $v_{ij}^*(\mathscr{F}_i)=\mathscr{F}_j$ pour $j\leqslant i$ (sans mentionner les θ_{ji}).

(10.6.7) Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deux préschémas formels, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$), $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ un morphisme tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{J}$. On a alors pour tout entier $n>0$, $f^*(\mathscr{K}^n)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}=(f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^n\subset\mathscr{J}^n$; on peut donc (10.5.6) déduire de f un morphisme de schémas (usuels) $f_n:X_n\to Y_n$, en posant $X_n=(\mathfrak{X},\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $Y_n=(\mathfrak{Y},\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, et il résulte aussitôt des définitions que les diagrammes

(10.6.7.1)
$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{f_m} & Y_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \xrightarrow[f_n]{} & Y_n \end{array}$$

sont commutatifs pour $m\leqslant n$; autrement dit, (f_n) est un *système inductif* de morphismes.

(10.6.8) Inversement, soit (X_n) (resp. (Y_n)) un système inductif de schémas (usuels) satisfaisant aux conditions b) et c) de (10.6.3), et soit $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) sa limite inductive. Par définition des limites inductives, toute suite (f_n) de morphismes $X_n\to Y_n$ formant un système inductif admet une *limite inductive* $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, qui est l'unique morphisme de schémas formels rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow[f]{} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

Proposition (10.6.9) *Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deux schémas formels adiques, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$); l'application $f\mapsto(f_n)$ définie dans* (10.6.7) *est une bijection de l'ensemble des morphismes $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{J}$, sur l'ensemble des suites (f_n) de morphismes rendant commutatifs les diagrammes* (10.6.7.1).

Si f est la limite inductive d'une telle suite, il faut montrer que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{J}$. La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(B)$ sont affines, A et B étant adiques,

$\mathscr{J}=\mathfrak{J}^{\Delta}$, $\mathscr{K}=\mathfrak{K}^{\Delta}$, où $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{K}$) est un idéal de définition de A (resp. B). On a alors $X_n=\mathrm{Spec}(A_n)$, $Y_n=\mathrm{Spec}(B_n)$, avec $A_n=A/\mathfrak{J}^{n+1}$ et $B_n=B/\mathfrak{K}^{n+1}$, en vertu de (10.3.6) et (10.3.2); on a $f_n=({}^a\varphi_n, \tilde{\varphi}_n)$, où les homomorphismes $\varphi_n: B_n\to A_n$ forment un système projectif, donc $f=({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$, où $\varphi=\varprojlim \varphi_n$. La commutativité du diagramme (10.6.7.1) pour $m=0$ donne alors la condition $\varphi_n(\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^{n+1})\subset \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{n+1}$ pour tout n, donc, en passant à la limite projective, $\varphi(\mathfrak{K})\subset\mathfrak{J}$, et cela entraîne $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{J}$ (10.5.6,(ii)).

Corollaire (10.6.10) *Soient $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ deux schémas formels localement noethériens, $\mathscr{T}$ le plus grand Idéal de définition de $\mathfrak{X}$* (10.5.4).

(i) *Pour tout Idéal de définition $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ et tout morphisme $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, on a $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{T}$.*

(ii) *Il y a correspondance biunivoque canonique entre* $\mathrm{Hom}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *et l'ensemble des suites (f_n) de morphismes rendant commutatifs les diagrammes* (10.6.7.1), *où* $X_n=(\mathfrak{X},\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{T}^{n+1})$, $Y_n=(\mathfrak{Y},\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$.

(ii) résulte aussitôt de (i) et de (10.6.9). Pour démontrer (i), on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(B)$, A et B étant noethériens, $\mathscr{T}=\mathfrak{T}^{\Delta}$, $\mathscr{K}=\mathfrak{K}^{\Delta}$, où $\mathfrak{T}$ est le plus grand idéal de définition de A et $\mathfrak{K}$ un idéal de définition de B. Soit $f=({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, où $\varphi: B\to A$ est un homomorphisme continu; comme les éléments de $\mathfrak{K}$ sont topologiquement nilpotents (**0**, 7.1.4,(i)), il en est de même de ceux de $\varphi(\mathfrak{K})$, donc $\varphi(\mathfrak{K})\subset\mathfrak{T}$ puisque $\mathfrak{T}$ est l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de A (**0**, 7.1.6); d'où la conclusion en vertu de (10.5.6,(ii)).

Corollaire (10.6.11) *Soient $\mathfrak{S},\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ trois schémas formels adiques, $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{S}$, $g:\mathfrak{Y}\to\mathfrak{S}$ des morphismes faisant de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ des $\mathfrak{S}$-schémas formels. Soit $\mathscr{J}$* (resp. $\mathscr{K},\mathscr{L}$) *un Idéal de définition de $\mathfrak{S}$* (resp. $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$), *et supposons que $f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{K}$, $g^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}=\mathscr{L}$; posons $S_n=(\mathfrak{S},\mathscr{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $X_n=(\mathfrak{X},\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $Y_n=(\mathfrak{Y},\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{L}^{n+1})$. Il y a alors correspondance biunivoque canonique entre* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *et l'ensemble des suites (u_n) de S_n-morphismes $u_n: X_n\to Y_n$ rendant commutatifs les diagrammes* (10.6.7.1).

Pour tout $\mathfrak{S}$-morphisme $u:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, on a par définition $f=g\circ u$, donc

$$u^*(\mathscr{L})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}=u^*(g^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}=f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{K};$$

le corollaire découle donc de (10.6.9).

On notera que, pour $m\leqslant n$, la donnée d'un morphisme $f_n: X_n\to Y_n$ détermine un morphisme et un seul $f_m: X_m\to Y_m$ rendant commutatif le diagramme (10.6.7.1), comme on le voit aussitôt en se ramenant au cas affine; on a ainsi défini une application

$$\varphi_{mn}: \mathrm{Hom}_{S_n}(X_n,Y_n)\to\mathrm{Hom}_{S_m}(X_m,Y_m)$$

et les $\mathrm{Hom}_{S_n}(X_n,Y_n)$ forment pour les φ_{mn} un *système projectif d'ensembles*; (10.6.11) s'énonce encore en disant qu'il existe une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\simeq\varprojlim_n \mathrm{Hom}_{S_n}(X_n,Y_n).$$

10.7. Produit de schémas formels

(10.7.1) Soit $\mathfrak{S}$ un schéma formel; les $\mathfrak{S}$-schémas formels formant une catégorie, on peut définir la notion de *produit* de $\mathfrak{S}$-schémas formels (**0**, 1.2.1).

Proposition (10.7.2) *Soient* $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(C)$ *deux schémas formels affines au-dessus d'un schéma formel affine* $\mathfrak{S}=\mathrm{Spf}(A)$. *Soient* $\mathfrak{Z}=\mathrm{Spf}(B\hat{\otimes}_A C)$, p_1, p_2 *les* $\mathfrak{S}$*-morphismes correspondant* (10.2.2) *aux* A*-homomorphismes canoniques (continus)* ρ *et* σ *de* B *et* C *dans* $B\hat{\otimes}_A C$; *alors* $(\mathfrak{Z}, p_1, p_2)$ *est un produit des* $\mathfrak{S}$*-schémas formels affines* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{Y}$.

En vertu de (10.4.6), tout revient à vérifier que si, à tout A-homomorphisme continu $\varphi: B\hat{\otimes}_A C\to D$, où D est un anneau admissible qui est une A-algèbre topologique, on associe le couple $(\varphi\circ\rho, \varphi\circ\sigma)$, on définit une bijection

$$\mathrm{Hom}_A(B\hat{\otimes}_A C, D) \simeq \mathrm{Hom}_A(B, D)\times \mathrm{Hom}_A(C, D)$$

ce qui n'est autre que la propriété universelle du produit tensoriel complété (**0**, 7.7.6).

Proposition (10.7.3) *Etant donnés deux* $\mathfrak{S}$*-schémas formels* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, *le produit* $\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y}$ *existe.*

La démonstration est identique à celle de (3.2.1), en y remplaçant les schémas affines (resp. les ouverts affines) par les schémas formels affines (resp. les ouverts formels affines), et la prop. (3.2.1.3) par (10.7.2).

Toutes les propriétés formelles du produit dans une catégorie sont bien entendu valables pour le produit de schémas formels.

(10.7.4) Soient $\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ trois schémas formels et soient $f: \mathfrak{X}\to\mathfrak{S}$, $g: \mathfrak{Y}\to\mathfrak{S}$ deux morphismes. Supposons qu'il existe dans $\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ respectivement, trois systèmes fondamentaux d'Idéaux de définition $(\mathscr{J}_\lambda), (\mathscr{K}_\lambda), (\mathscr{L}_\lambda)$ respectivement, ayant même ensemble d'indices I, tels que $f^*(\mathscr{J}_\lambda)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{K}_\lambda$ et $g^*(\mathscr{J}_\lambda)\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}\subset\mathscr{L}_\lambda$ pour tout λ. Posons $S_\lambda=(\mathfrak{S}, \mathscr{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{J}_\lambda)$, $X_\lambda=(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}_\lambda)$, $Y_\lambda=(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{L}_\lambda)$; pour $\mathscr{J}_\mu\subset\mathscr{J}_\lambda$, $\mathscr{K}_\mu\subset\mathscr{K}_\lambda$, $\mathscr{L}_\mu\subset\mathscr{L}_\lambda$, notons que S_λ (resp. X_λ, Y_λ) est un sous-schéma fermé de S_μ (resp. X_μ, Y_μ) ayant *même* espace sous-jacent (10.6.1). Comme $S_\lambda\to S_\mu$ est un monomorphisme de schémas, on voit donc d'abord que les produits $X_\lambda\times_{S_\lambda}Y_\lambda$ et $X_\lambda\times_{S_\mu}Y_\lambda$ sont identiques (**0**, 1.2.14), puis que $X_\lambda\times_{S_\mu}Y_\lambda$ s'identifie à un sous-préschéma fermé de $X_\mu\times_{S_\mu}Y_\mu$ ayant *même* espace sous-jacent (4.3.6). Cela étant, le produit $\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y}$ est la *limite inductive* des schémas usuels $X_\lambda\times_{S_\lambda}Y_\lambda$: en effet, on voit comme dans (10.6.2) qu'on peut se ramener au cas où $\mathfrak{S}, \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont des schémas formels affines. Compte tenu de (10.5.6, (ii)) et de l'hypothèse sur les systèmes fondamentaux d'Idéaux de définition de $\mathfrak{S}, \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, on voit aussitôt que notre assertion

résulte de la définition du produit tensoriel complété de deux algèbres (**0**, 7.7.1).

En outre, soit $\mathfrak{Z}$ un $\mathfrak{S}$-schéma formel, $(\mathscr{M}_\lambda)$ un système fondamental d'Idéaux de définition de $\mathfrak{Z}$ ayant I comme ensemble d'indices, $u:\mathfrak{Z}\to\mathfrak{X}$, $v:\mathfrak{Z}\to\mathfrak{Y}$ deux $\mathfrak{S}$-morphismes tels que $u^*(\mathscr{K}_\lambda)\mathscr{O}_\mathfrak{Z}\subset\mathscr{M}_\lambda$ et $v^*(\mathscr{L}_\lambda)\mathscr{O}_\mathfrak{Z}\subset\mathscr{M}_\lambda$. Si l'on pose $Z_\lambda=(\mathfrak{Z},\mathscr{O}_\mathfrak{Z}/\mathscr{M}_\lambda)$, et si $u_\lambda:Z_\lambda\to X_\lambda$ et $v_\lambda:Z_\lambda\to Y_\lambda$ sont les S_λ-morphismes correspondant à u et v (10.5.6), on vérifie aussitôt que $(u,v)_\mathfrak{S}$ est la limite inductive des S_λ-morphismes $(u_\lambda,v_\lambda)_S$.

Les considérations de ce numéro s'appliquent en particulier lorsque $\mathfrak{S},\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont localement noethériens, en prenant comme systèmes fondamentaux d'Idéaux de définition les systèmes formés des puissances d'un Idéal de définition (10.5.1). Mais on notera que $\mathfrak{X}\times_\mathfrak{S}\mathfrak{Y}$ n'est pas nécessairement localement noethérien (voir toutefois (10.13.5)).

10.8. Complété formel d'un schéma le long d'un sous-schéma

(10.8.1) Soient X un schéma (usuel), X′ un *sous-schéma* de X, U un ouvert de X contenant X′ et tel que X′ soit un sous-schéma *fermé* du schéma induit par X sur l'ouvert U; X′ est donc défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}_U$ de $\mathscr{O}_U$. Pour tout entier $n>0$, et tout $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, $(\mathscr{F}|U)\otimes_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{O}_U/\mathscr{J}_U^n)$ est un $\mathscr{O}_U$-Module quasi-cohérent, de support contenu dans X′, que nous identifierons le plus souvent à sa restriction à X′. Lorsque n parcourt l'ensemble des entiers $\geqslant 1$, ces faisceaux forment un *système projectif* de faisceaux de groupes commutatifs.

Définition (10.8.2) *Etant donnés un sous-schéma* X′ *d'un schéma (usuel)* X *et un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$*, on appelle complété de* $\mathscr{F}$ *le long de* X′ *et on désigne par* $\mathscr{F}_{/X'}$ *ou par* $\hat{\mathscr{F}}$ *(lorsqu'aucune confusion n'est possible) la restriction à* X′ *du faisceau* $\varprojlim_n((\mathscr{F}|U)\otimes_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{O}_U/\mathscr{J}_U^n))$; *on dit que ses sections au-dessus de* X′ *sont les sections formelles de* $\mathscr{F}$ *le long de* X′.

Cette définition est justifiée par le fait qu'elle ne dépend évidemment pas de l'ouvert U choisi, car en tout point de $U-X'$, il y a un voisinage de ce point dans lequel $\mathscr{O}_U/\mathscr{J}_U^n$ est nul pour tout entier n. On pourra donc se borner au cas où X′ est un sous-schéma *fermé* de X, et c'est ce que nous supposerons toujours par la suite.

Il est immédiat que pour tout ouvert $U\subset X$, on a $(\mathscr{F}|U)_{/(U\cap X')}=(\mathscr{F}_{/X'})|(U\cap X')$.

Par passage à la limite projective, il est clair que $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$ est un faisceau d'anneaux, et que $\mathscr{F}_{/X'}$ peut être considéré comme un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-Module. En outre, comme il existe une base de la topologie de X′ formée

d'ouverts quasi-compacts, on peut considérer $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$ (resp. $\mathscr{F}_{/X'}$) comme un *faisceau d'anneaux topologiques* (resp. de *groupes topologiques*) limite projective des faisceaux d'anneaux (resp. groupes) *pseudo-discrets* $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n$ (resp. $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)=\mathscr{F}/\mathscr{J}^n\mathscr{F}$), et, par passage à la limite projective, $\mathscr{F}_{/X'}$ devient alors un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-*Module topologique* ((**0**, 3.8.1) et (3.8.2)); rappelons que pour tout ouvert *quasi-compact* $U\subset X$, $\Gamma(U\cap X',(\mathscr{O}_X)_{/X'})$ (resp. $\Gamma(U\cap X',\mathscr{F}_{/X'})$) est alors limite projective des anneaux (resp. groupes) discrets $\Gamma(U,\mathscr{O}_X/\mathscr{J})$ (resp. $\Gamma(U,\mathscr{F}/\mathscr{J}\mathscr{F})$).

Si maintenant $u:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ est un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-Modules, on en déduit canoniquement des homomorphismes

$$u_{\mathscr{J}^n}:\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)\to\mathscr{G}\otimes_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$$

pour tout n, et ces homomorphismes forment un système projectif. Par passage à la limite projective et restriction à X', ils donnent donc un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-homomorphisme continu $\mathscr{F}_{/X'}\to\mathscr{G}_{/X'}$, noté $u_{/X'}$ ou $\hat{u}$, et appelé le *complété* de l'homomorphisme u le long de X'. Il est clair que si $v:\mathscr{G}\to\mathscr{H}$ est un second homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-Modules, on a $(v\circ u)_{/X'}=(v_{/X'})\circ(u_{/X'})$, donc $\mathscr{F}_{/X'}$ est un *foncteur additif covariant* en $\mathscr{F}$, de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents, à valeurs dans la catégorie des $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-Modules topologiques.

Proposition (10.8.3) *Soit* X' *un sous-schéma fermé de* X, *défini par un Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de type fini. Le support de* $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$ *est* X'; *l'espace topologiquement annelé* $(X',(\mathscr{O}_X)_{/X'})$ *est un schéma formel adique, et* $\mathscr{J}_{/X'}$ *est un Idéal de définition de ce schéma formel. Si* $X=\mathrm{Spec}(A)$ *est un schéma affine,* $\mathscr{J}=\tilde{\mathfrak{J}}$, *où* $\mathfrak{J}$ *est un idéal de* A, *et* $X'=V(\mathfrak{J})$, $(X',(\mathscr{O}_X)_{/X'})$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Spf}(\hat{A})$, *où* $\hat{A}$ *est le séparé complété de* A *pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique.*

On peut évidemment se borner à prouver la dernière assertion. On sait (**0**, 7.2.7) que le séparé complété $\hat{\mathfrak{J}}$ de $\mathfrak{J}$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique s'identifie à l'idéal $\mathfrak{J}\hat{A}$ de $\hat{A}$, et que $\hat{A}$ est un anneau $\hat{\mathfrak{J}}$-adique tel que $\hat{A}/\hat{\mathfrak{J}}^n=A/\mathfrak{J}^n$. Cette dernière relation (pour $n=1$) montre que les idéaux premiers ouverts de $\hat{A}$ sont les idéaux $\hat{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}\hat{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A contenant $\mathfrak{J}$, d'où $\mathrm{Spf}(\hat{A})=X'$. Comme $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n=(A/\mathfrak{J}^n)^{\sim}$, la proposition découle aussitôt des définitions.

On dit que le schéma formel ainsi défini est le *complété de* X *le long de* X' et on le note $X_{/X'}$ ou $\hat{X}$ si aucune confusion n'est à craindre. Lorsque l'on prend $X'=X$, on peut prendre $\mathscr{J}=0$, et on a donc $X_{/X}=X$.

Il est clair que si U est un sous-schéma induit sur un ouvert de X, $U_{/(U\cap X')}$ s'identifie canoniquement au sous-schéma formel induit par $X_{/X'}$ sur l'ouvert $U\cap X'$ de X'.

Corollaire (10.8.4) *Sous les hypothèses de* (10.8.3), *le schéma (usuel)* $\hat{X}_{\mathrm{red}}$ *est l'unique sous-schéma réduit de* X *ayant pour espace sous-jacent*

X′ (4.6.1). *Pour que* $\hat{X}$ *soit noethérien, il faut et il suffit que* $\hat{X}_{red}$ *le soit, et il suffit que* X *le soit.*

La détermination de $\hat{X}_{red}$ étant locale (10.5.4), on peut encore supposer que X est un schéma affine; avec les notations de (10.8.3), l'idéal $\mathfrak{T}$ des éléments topologiquement nilpotents de $\hat{A}$ est l'image réciproque par l'application canonique $\hat{A} \to \hat{A}/\hat{\mathfrak{J}} = A/\mathfrak{J}$ du nilradical de $A/\mathfrak{J}$ (**0**, 7.1.3), donc $\hat{A}/\mathfrak{T}$ est isomorphe au quotient de $A/\mathfrak{J}$ par son nilradical. La première assertion résulte donc de (10.5.4) et (4.6.1). Si $\hat{X}_{red}$ est noethérien, son espace sous-jacent X′ l'est aussi, donc les $X'_n = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$ sont noethériens (2.7.2) et il en est de même de $\hat{X}$ (10.6.4); la réciproque est immédiate, en vertu de (2.7.2).

(10.8.5) Les homomorphismes canoniques $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n$ forment un système projectif et donnent donc, par passage à la limite projective, un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\theta : \mathscr{O}_X \to \psi_*((\mathscr{O}_X)_{/X'}) = \varprojlim(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$ en désignant par ψ l'injection canonique $X' \to X$ des espaces sous-jacents. Nous désignerons par i (ou i_X) le morphisme (dit *canonique*)

$$(\psi, \theta) : X_{/X'} \to X$$

d'espaces annelés.

Par tensorisation, pour tout $\mathscr{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les homomorphismes canoniques $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n$ donnent des homomorphismes $\mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$ de $\mathscr{O}_X$-Modules qui forment encore un système projectif, et donnent donc, par passage à la limite projective, un homomorphisme canonique fonctoriel $\gamma : \mathscr{F} \to \psi_*(\mathscr{F}_{/X'})$ de $\mathscr{O}_X$-Modules.

(10.8.6) Soient X′, X″ deux sous-schémas fermés d'un schéma (usuel) X, définis par des Idéaux quasi-cohérents $\mathscr{J}'$, $\mathscr{J}''$ de $\mathscr{O}_X$. Supposons que, pour tout ouvert affine U de X, les Idéaux $\mathscr{J}'|U$, $\mathscr{J}''|U$ de $\mathscr{O}_U$ soient tels qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $(\mathscr{J}'|U)^m \subset \mathscr{J}''|U$ et $(\mathscr{J}''|U)^m \subset \mathscr{J}'|U$. Il est clair que dans ces conditions, pour tout $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, les faisceaux de groupes commutatifs $\varprojlim(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}'^n))$ et $\varprojlim(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}''^n))$ sont canoniquement isomorphes, autrement dit $\mathscr{F}_{/X'} = \mathscr{F}_{/X''}$. On notera que cette condition sur X′ et X″ implique que ces deux sous-schémas fermés ont *même espace sous-jacent*, mais n'est pas en général équivalente à cette dernière propriété.

(10.8.7) Toutefois, si les Idéaux quasi-cohérents $\mathscr{J}'$ et $\mathscr{J}''$ sont *de type fini*, alors il résulte de (6.8.4) que lorsque les sous-schémas X′ et X″ ont même espace sous-jacent, la condition de (10.8.6) est vérifiée. En particulier, lorsque X est *localement noethérien*, tous les Idéaux quasi-cohérents de $\mathscr{O}_X$ sont de type fini, donc, pour toute *partie* fermée (ou localement fermée) X′ de X, on peut définir $\mathscr{F}_{/X'}$ comme égal à $\mathscr{F}_{/Y}$ pour *tout sous-schéma* Y de X ayant X′ pour espace sous-jacent (4.6.1).

Proposition (10.8.8) *Supposons* X *localement noethérien, et soient* X′ *une partie fermée de* X, $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent.*

(i) *Le foncteur* $\mathscr{F}_{/X'}$ *(en* $\mathscr{F}$*) est exact.*

(ii) *L'homomorphisme fonctoriel* $\gamma^\sharp : i^*(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_{/X'}$ *de* $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$*-Modules est un isomorphisme.*

(i) Il suffit de prouver que si $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents, et U un ouvert affine de X, d'anneau noethérien A, la suite

$$0 \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}'_{/X'}) \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}_{/X'}) \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}''_{/X'}) \to 0$$

est exacte. On a alors $\mathscr{F} \mid U = \tilde{M}$, $\mathscr{F}' \mid U = \tilde{M}'$, $\mathscr{F}'' \mid U = \tilde{M}''$, où M, M′, M″ sont trois A-modules de type fini tels que la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ soit exacte (1.3.11); soit $\mathscr{J}$ un Idéal de $\mathscr{O}_U$ définissant un sous-schéma de U d'espace sous-jacent X′ ∩ U, et soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A tel que $\mathscr{J} \mid U = \tilde{\mathfrak{J}}$. On a alors

$$\Gamma(U \cap X', \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) = M \otimes_A (A/\mathscr{J}^n)$$

(1.3.12); donc, par définition de la limite projective, on a

$$\Gamma(U \cap X', \mathscr{F}_{/X'}) = \varprojlim_n (M \otimes_A (A/\mathfrak{J}^n)) = \hat{M}$$

séparé complété de M pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, et de même

$$\Gamma(U \cap X', \mathscr{F}'_{/X'}) = \hat{M}', \qquad \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}''_{/X'}) = \hat{M}'';$$

notre assertion résulte alors de ce que lorsque A est noethérien, le foncteur $\hat{M}$ en M est exact dans la catégorie des A-modules de type fini (**0**, 7.3.1).

(ii) La question étant locale, on peut supposer que l'on a une suite exacte $\mathscr{O}_X^m \to \mathscr{O}_X^n \to \mathscr{F} \to 0$ (**0**, 5.3.9); comme $\gamma^\sharp$ est fonctoriel, et que les foncteurs $i^*(\mathscr{F})$ et $\mathscr{F}_{/X'}$ sont exacts à droite (d'après (i) et (**0**, 4.3.1)), on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} i^*(\mathscr{O}_X^m) & \longrightarrow & i^*(\mathscr{O}_X^n) & \longrightarrow & i^*(\mathscr{F}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma^\sharp} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma^\sharp} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma^\sharp} & & \\ (\mathscr{O}_X^m)_{/X'} & \longrightarrow & (\mathscr{O}_X^n)_{/X'} & \longrightarrow & \mathscr{F}_{/X'} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{10.8.8.1}$$

dont les lignes sont exactes. En outre, les deux foncteurs $i^*(\mathscr{F})$ et $\mathscr{F}_{/X'}$ commutent aux sommes directes finies ((**0**, 3.2.6) et (4.3.2)) et on est donc ramené à démontrer notre assertion pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$. On a alors $i^*(\mathscr{O}_X) = (\mathscr{O}_X)_{/X'} = \mathscr{O}_{\hat{X}}$ (**0**, 4.3.4), et $\gamma^\sharp$ est un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\hat{X}}$*-Modules;* il suffit donc de vérifier que $\gamma^\sharp$ transforme la section unité de $\mathscr{O}_{\hat{X}}$ au-dessus d'un ouvert de X′ en elle-même, ce qui est immédiat et montre donc que dans ce cas $\gamma^\sharp$ est l'identité.

Corollaire (10.8.9) *Sous les hypothèses de* (10.8.8), *le morphisme d'espaces annelés* $i : X_{/X'} \to X$ *est plat.*

Cela résulte en effet de (**0**, 5.7.3) et de (10.8.8, (i)).

Corollaire (10.8.10) *Soit* X *un schéma localement noethérien. Si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *sont des* $\mathscr{O}_X$*-Modules cohérents, il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels (en* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$*)*

$$(10.8.10.1) \qquad (\mathscr{F}_{/X'}) \otimes_{(\mathscr{O}_X)_{/X'}} (\mathscr{G}_{/X'}) \simeq (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G})_{/X'},$$

$$(10.8.10.2) \qquad (\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))_{/X'} \simeq \mathscr{H}om_{(\mathscr{O}_X)_{/X'}}(\mathscr{F}_{/X'}, \mathscr{G}_{/X'}).$$

Cela résulte de l'identification canonique de $i^*(\mathscr{F})$ et de $\mathscr{F}_{/X'}$; l'existence du premier isomorphisme est alors un résultat valable pour tous les morphismes d'espaces annelés (**0**, 4.3.3.1) et celle du second est un résultat valable pour tous les morphismes plats (**0**, 5.7.6), donc découle de (10.8.9).

Proposition (10.8.11) *Soit* X *un schéma localement noethérien. Pour tout* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$*, le noyau de l'homomorphisme canonique* $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$ *déduit de* $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{/X'}$ *est formé des sections nulles dans un voisinage de* X'.

Il résulte de la définition de $\mathscr{F}_{/X'}$ que l'image canonique d'une telle section est nulle. Réciproquement, si $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ a une image nulle dans $\Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$, il suffit de voir que tout $x \in X'$ admet un voisinage dans X dans lequel s est nulle, et on peut donc se ramener au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, A noethérien, $X' = V(\mathfrak{J})$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de A, et $\mathscr{F} = \tilde{M}$, où M est un A-module de type fini. Alors $\Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$ est le séparé complété $\hat{M}$ de M pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, et l'homomorphisme $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$ est l'homomorphisme canonique $M \to \hat{M}$. On sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 2, cor. de la prop. 5) que le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble des $z \in M$ annulés par un élément de $1 + \mathfrak{J}$. On a donc $(1+f)s = 0$ pour un $f \in \mathfrak{J}$; pour tout $x \in X'$ on en déduit $(1_x + f_x)s_x = 0$, et comme $1_x + f_x$ est inversible dans $\mathscr{O}_x$ ($\mathfrak{J}_x \mathscr{O}_x$ étant contenu dans l'idéal maximal de $\mathscr{O}_x$), on a $s_x = 0$, ce qui démontre la proposition.

Corollaire (10.8.12) *Sous les hypothèses de* (10.8.11), *le support de* $\mathscr{F}_{/X'}$ *est égal à* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \cap X'$. *En particulier, pour que* $\mathscr{F}_{/X'}$ *soit nul, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* X' *tel que* $\mathscr{F} \mid U = 0$.

Il est clair que $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-Module de type fini ((10.8.8, (ii)) et (**0**, 5.2.4)), donc son support est fermé (**0**, 5.2.2) et évidemment contenu dans $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \cap X'$. Pour montrer qu'il est égal à ce dernier ensemble, on est aussitôt ramené à prouver que la relation $\Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'}) = 0$ entraîne $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \cap X' = \emptyset$; or cela résulte de (10.8.11) et de (1.4.1).

Corollaire (10.8.13) *Soient* X *un schéma localement noethérien,* $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$*-Modules cohérents. Pour que* $u_{|X'} : \mathscr{F}_{|X'} \to \mathscr{G}_{|X'}$ *soit nul, il faut et il suffit que u soit nul dans un voisinage de* X'.

En effet, d'après (10.8.8, (ii)), $u_{|X'}$ s'identifie à $i^*(u)$, donc, si on considère u comme une section au-dessus de X du faisceau $\mathscr{H} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, $u_{|X'}$ est la section de $i^*(\mathscr{H}) = \mathscr{H}_{|X'}$ au-dessus de X' qui lui correspond canoniquement ((10.8.10.2) et (**0**, 4.4.6)). Il suffit donc d'appliquer (10.8.11) au $\mathscr{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{H}$.

Corollaire (10.8.14) *Soient* X *un schéma localement noethérien,* $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$*-Modules cohérents. Pour que* $u_{|X'}$ *soit un monomorphisme* (resp. *un épimorphisme*), *il faut et il suffit que u soit un monomorphisme* (resp. *un épimorphisme*) *dans un voisinage de* X'.

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{N}$ le conoyau et le noyau de u, de sorte qu'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N} \xrightarrow{v} \mathscr{F} \xrightarrow{u} \mathscr{G} \xrightarrow{w} \mathscr{P} \longrightarrow 0,$$

d'où (10.8.8, (i)) la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}_{|X'} \xrightarrow{v_{|X'}} \mathscr{F}_{|X'} \xrightarrow{u_{|X'}} \mathscr{G}_{|X'} \xrightarrow{w_{|X'}} \mathscr{P}_{|X'} \longrightarrow 0.$$

Si $u_{|X'}$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), on a $v_{|X'} = 0$ (resp. $w_{|X'} = 0$), donc il y a un voisinage de X' dans lequel $v = 0$ (resp. $w = 0$) en vertu de (10.8.13).

Corollaire (10.8.15) *Soient* X *un schéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent. Pour que* $\mathscr{F}_{|X'}$ *soit localement libre* (resp. *localement libre de rang n*), *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* X' *tel que* $\mathscr{F}|U$ *soit localement libre* (resp. *localement libre de rang n*).

En effet, dire que $\mathscr{F}_{|X'}$ est localement libre signifie que tout point $x \in X'$ possède un voisinage ouvert V dans X tel qu'il existe un isomorphisme $v : (\mathscr{O}_X^n)_{|X'}|(V \cap X') \simeq \mathscr{F}_{|X'}|(V \cap X')$. On peut évidemment se borner au cas où $V = X$, et alors il résulte de (10.8.10.2) que v est de la forme $u_{|X'}$, où u est un homomorphisme de $\mathscr{O}_X^n$ dans $\mathscr{F}$; en outre, en remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de X', on peut, en vertu de (10.8.14), supposer u bijectif, d'où le corollaire.

10.9. Prolongement d'un morphisme aux complétés

(10.9.1) Soient X, Y deux schémas (usuels), $f : X \to Y$ un morphisme, X' (resp. Y') un sous-schéma fermé de X (resp. Y), $i : X' \to X$, $j : Y' \to Y$ les injections canoniques. Supposons que $f \circ i$ soit majoré par j; si $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) est l'Idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_Y$) définissant X' (resp. Y'), il revient au même de dire que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}$ (4.3.2). On a

donc, pour tout entier $n>0$, $f^*(\mathscr{K}^n)\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}^n$ (**0**, 4.3.5); par suite (4.3.2), si l'on pose $X'_n=(X', \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1})$, $Y'_n=(Y', \mathscr{O}_Y/\mathscr{K}^{n+1})$, on déduit de f un morphisme $f_n : X'_n \to Y'_n$, et il est immédiat que les f_n forment un système inductif. Nous désignerons sa limite inductive (10.6.8) par $\hat{f} : X_{/X'} \to Y_{/Y'}$, et nous dirons (par abus de langage) que $\hat{f}$ est le *prolongement de f aux complétés de* X *et* Y *le long de* X′ *et* Y′. Lorsque X et Y sont des schémas affines d'anneaux respectifs A, B, on a $\mathscr{J}=\tilde{\mathfrak{J}}$, $\mathscr{K}=\tilde{\mathfrak{K}}$, où $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{K}$) est un idéal de A (resp. B), et f correspond à un homomorphisme d'anneaux $\varphi : B \to A$ tel que $\varphi(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{J}$; $\hat{f}$ est alors le morphisme qui correspond (10.2.2) à l'homomorphisme continu $\hat{\varphi} : \hat{B} \to \hat{A}$, où $\hat{A}$ (resp. $\hat{B}$) est le séparé complété de A (resp. B) pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique (resp. $\mathfrak{K}$-préadique) (10.6.8). On notera que, d'après cette définition, l'application continue $X' \to Y'$ des espaces sous-jacents à $X_{/X'}$ et $Y_{/Y'}$ respectivement, qui correspond à $\hat{f}$, n'est autre que la restriction de f à X′.

(10.9.2) Il résulte aussitôt de la définition précédente que le diagramme de morphismes d'espaces annelés

$$\begin{array}{ccc} X_{/X'} & \xrightarrow{\hat{f}} & Y_{/Y'} \\ {\scriptstyle i_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_Y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

est commutatif, les flèches verticales étant les morphismes canoniques.

Soient Z un troisième schéma, $g : Y \to Z$ un morphisme, Z′ un sous-schéma fermé de Z défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{M}$ de $\mathscr{O}_Z$, et supposons (avec les notations de (10.9.1)) que l'on ait $g^*(\mathscr{M})\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{K}$. Alors, si $\hat{g}$ désigne le complété de g le long de Y′ et Z′, il résulte aussitôt de (10.9.1) que l'on a $(g \circ f)\hat{} = \hat{g} \circ \hat{f}$.

(10.9.3) Supposons maintenant que X et Y soient des schémas *localement noethériens*, X′, Y′ des parties fermées de X et Y respectivement, et soit $f : X \to Y$ un morphisme tel que $f(X') \subset Y'$. Alors il existe un Idéal cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{K}$ de $\mathscr{O}_Y$) tel que le support de $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{O}_Y/\mathscr{K}$) soit X′ (resp. Y′) et que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}$: il suffit par exemple de prendre pour $\mathscr{J}$ l'Idéal de $\mathscr{O}_X$ définissant le sous-schéma *réduit* de X ayant X′ pour espace sous-jacent (4.6.1), pour $\mathscr{K}$ un Idéal de $\mathscr{O}_Y$ définissant un sous-schéma de Y ayant Y′ pour espace sous-jacent, et la relation $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}$ résulte alors de (4.6.4). On peut donc toujours définir le morphisme $\hat{f} : X_{/X'} \to Y_{Y'}$, et il résulte de (10.8.7) que cette définition ne dépend pas du choix des Idéaux $\mathscr{J}$ et $\mathscr{K}$ vérifiant les conditions précédentes.

Proposition (10.9.4) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas localement noethériens,* Y *étant de type fini sur* S. *Soient f, g, deux* S*-morphismes de* X *dans* Y *tels que* $f(X') \subset Y'$, $g(X') \subset Y'$. *Pour que* $\hat{f}=\hat{g}$, *il faut et il suffit que f et g coïncident dans un voisinage de* X'.

La condition est évidemment suffisante (sans hypothèse de finitude sur Y). Pour voir qu'elle est nécessaire, remarquons d'abord que l'hypothèse $\hat{f}=\hat{g}$ implique $f(x)=g(x)$ pour tout $x \in X'$. D'autre part, la question étant locale, on peut supposer que X et Y sont des voisinages ouverts affines respectifs de x et de $y=f(x)=g(x)$, d'anneaux noethériens, que S est affine et que $\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ est une $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$-algèbre de type fini (6.3.1). Alors f et g correspondent à deux $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$-homomorphismes ρ, σ de $\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ dans $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ (1.6.3), et par hypothèse, les prolongements par continuité de ces homomorphismes au séparé complété de $\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ sont les mêmes. On conclut de (10.8.11) que pour toute section $s \in \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$, les sections $\rho(s)$ et $\sigma(s)$ coïncident dans un voisinage de X' (dépendant de s); comme $\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ est une algèbre de type fini sur $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$, on en déduit aussitôt qu'il existe un voisinage V de X' tel que $\rho(s)$ et $\sigma(s)$ coïncident dans V pour *toute* section $s \in \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$. Si $h \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ est tel que $D(h)$ soit un voisinage de x contenu dans V, on conclut de ce qui précède et de (1.4.1) que f et g coïncident dans $D(h)$.

Proposition (10.9.5) *Soient* X, Y *deux schémas localement noethériens,* $f: X \to Y$ *un morphisme,* X' *une partie fermée de* X, Y' *une partie fermée de* Y *telles que* $f(X') \subset Y'$. *Alors, pour tout* $\mathscr{O}_Y$*-Module cohérent* $\mathscr{G}$, *il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de* $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$*-Modules*

$$(f^*(\mathscr{G}))_{/X'} \simeq \hat{f}^*(\mathscr{G}_{/Y'}).$$

Si on identifie canoniquement $(f^*(\mathscr{G}))_{/X'}$ à $i_X^*(f^*(\mathscr{G}))$ et $\hat{f}^*(\mathscr{G}_{/Y'})$ à $\hat{f}^*(i_Y^*(\mathscr{G}))$ (10.8.8), la proposition résulte aussitôt de la commutativité du diagramme de (10.9.2).

(10.9.6) Supposons vérifiées les hypothèses de (10.9.5), et soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_Y$-Module cohérent. Si $u: \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ est un f-morphisme de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$, il lui correspond un $\mathscr{O}_X$-homomorphisme $u^\# : f^*(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$, donc par complétion un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-homomorphisme continu $(u^\#)_{/X'} : (f^*(\mathscr{G}))_{/X'} \to \mathscr{F}_{/X'}$, et en vertu de (10.9.5) il existe un $\hat{f}$-morphisme $v: \mathscr{G}_{/Y'} \to \mathscr{F}_{/X'}$, et un seul, tel que $v^\# = (u^\#)_{/X'}$. Si on considère les triplets $(\mathscr{F}, X, X')$ ($\mathscr{F}$ étant un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent et X' une partie fermée de X) comme une *catégorie*, les morphismes $(\mathscr{F}, X, X') \to (\mathscr{G}, Y, Y')$ consistant en un morphisme de schémas $f: X \to Y$ tel que $f(X') \subset Y'$ et en un f-morphisme $u: \mathscr{G} \to \mathscr{F}$, on peut donc dire que $(X_{/X'}, \mathscr{F}_{/X'})$ est un *foncteur* en $(\mathscr{F}, X, X')$, prenant ses valeurs dans la catégorie des couples $(\mathfrak{Z}, \mathscr{H})$ formés d'un schéma formel localement noethérien $\mathfrak{Z}$ et d'un $\mathscr{O}_3$-Module

$\mathscr{H}$, les morphismes de cette dernière catégorie consistant en les couples formés d'un morphisme g de schémas formels et d'un g-morphisme.

Proposition (10.9.7) *Soient* S, X, Y *trois schémas,* $g: X \to S$, $h: Y \to S$ *deux morphismes,* S′ *un sous-schéma fermé de* S, X′ (resp. Y′) *un sous-schéma fermé de* X (resp. Y) *tels que, si* $\mathscr{J}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ *sont les Idéaux définissant* S′, X′, Y′, *on ait* $g^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{K}$ *et* $h^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{L}$; *soit* $Z = X \times_S Y$ *et soit* $Z' = p^{-1}(X') \cap q^{-1}(Y')$, *où* p *et* q *sont les projections de* $X \times_S Y$. *Dans ces conditions, le complété* $Z_{/Z'}$ *s'identifie au produit des* $S_{/S'}$*-schémas formels* $(X_{/X'}) \times_{S_{/S'}} (Y_{/Y'})$, *les morphismes structuraux s'identifiant à* $\hat{g}$ *et* $\hat{h}$, *et les projections à* $\hat{p}$ *et* $\hat{q}$.

Il est immédiat que la question est locale pour S, X et Y, et on est donc ramené au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(C)$, $S' = V(\mathfrak{J})$, $X' = V(\mathfrak{K})$, $Y' = V(\mathfrak{L})$, où $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ sont trois idéaux tels que $\varphi(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{K}$ et $\psi(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{L}$, en désignant par φ et ψ les homomorphismes $A \to B$ et $A \to C$ qui correspondent à g et h. Alors on sait que $Z = \mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$ et que $Z' = V(\mathfrak{M})$, où $\mathfrak{M}$ est l'idéal $\mathrm{Im}(\mathfrak{K} \otimes_A C) + \mathrm{Im}(B \otimes_A \mathfrak{L})$. La conclusion résulte (10.7.2) de ce que le produit tensoriel complété $(\hat{B} \otimes_{\hat{A}} \hat{C})\hat{}$ (où $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ sont respectivement les séparés complétés de A, B, C pour les topologies $\mathfrak{J}$-, $\mathfrak{K}$- et $\mathfrak{L}$-préadiques) est le séparé complété du produit tensoriel $B \otimes_A C$ pour la topologie $\mathfrak{M}$-préadique (**0**, 7.7.2).

On notera en outre que si T est un S schéma, $u: T \to X$, $v: T \to Y$ deux S-morphismes, T′ un sous-schéma fermé de T *tel que, si* $\mathscr{M}$ *est l'Idéal de* $\mathscr{O}_T$ *définissant* T′, *on ait* $u^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_T \subset \mathscr{M}$ *et* $v^*(\mathscr{L})\mathscr{O}_T \subset \mathscr{M}$, alors le prolongement aux complétés $((u,v)_S)\hat{}$ s'identifie à $(\hat{u},\hat{v})_{S_{/S'}}$.

Corollaire (10.9.8) *Soient* X, Y *deux* S*-schémas; soient* S′ *un sous-schéma fermé de* S, X′ (resp. Y′) *un sous-schéma fermé de* X (resp. Y) *vérifiant les hypothèses de* (10.9.7). *Pour tout* S*-morphisme* $f: X \to Y$ *tel que* $f^*(\mathscr{L})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{K}$, *le morphisme graphe* $\Gamma_{\hat{f}}$ *s'identifie au prolongement* $(\Gamma_f)\hat{}$ *du morphisme graphe de* f.

Corollaire (10.9.9) *Soient* X, Y *deux schémas,* $f: X \to Y$ *un morphisme,* Y′ *un sous-schéma fermé de* Y, $X' = f^{-1}(Y')$. *Alors le schéma* $X_{/X'}$ *s'identifie par le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_{/X'} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}} \\ Y & \longleftarrow & Y_{/Y'} \end{array}$$

au produit $X \times_Y (Y_{/Y'})$ *de schémas formels.*

Il suffit d'appliquer (10.9.7) en remplaçant S et S′ par Y, X et X′ par X.

Remarque **(10.9.10)** Si X est une somme $X_1 \amalg X_2$ de deux schémas (3.1), X'_i un sous-schéma fermé de X_i $(i=1,2)$, alors $X'=X'_1 \cup X'_2 = X'_1 \amalg X'_2$ est un sous-schéma fermé de X et on voit aussitôt que l'on a $X_{/X'} = X_{1/X'_1} \amalg X_{2/X'_2}$.

10.10. Modules de présentation finie sur les schémas formels affines adiques

(10.10.1) Dans tout ce paragraphe, A désignera un *anneau adique*, $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A. Soit $X=\mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$, qui en tant qu'espace topologique s'identifie à la partie fermée $V(\mathfrak{J})$ de X (10.1.2). Si $X'=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J})$ est le sous-schéma fermé de X défini par $\tilde{\mathfrak{J}}$, il résulte des définitions ((10.1.2) et (10.8.2)) que $\mathfrak{X}$ est identique à $X_{/X'}$; pour tout A-module M, $M^\Delta=(\tilde{M})_{/X'}$ est donc un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module. En outre, si $u: M \to N$ est un A-homomorphisme de A-modules, il lui correspond un homomorphisme $\tilde{u}: \tilde{M} \to \tilde{N}$ de $\mathscr{O}_X$-Modules, et par suite aussi un homomorphisme continu de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules $\tilde{u}_{/X'}: (\tilde{M})_{/X'} \to (\tilde{N})_{/X'}$ (10.8.2), que nous noterons u^Δ. On a évidemment $(v \circ u)^\Delta = v^\Delta \circ u^\Delta$; on a donc défini un *foncteur additif covariant*

$$\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\Delta \tag{10.10.1.1}$$

de la catégorie des A-modules dans celle des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules.

Comme A est un anneau adique, les $\mathfrak{J}^n$ sont ouverts dans A (**0**, 7.1.9), donc séparés et complets. L'Idéal $(\mathfrak{J}^n)^\Delta$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, suivant la définition précédente, est donc égal à l'Idéal déjà désigné par cette notation dans (10.3.1), et si on pose $\mathscr{J}=\mathfrak{J}^\Delta$, on a donc $(\mathfrak{J}^n)^\Delta=\mathscr{J}^n$ lorsque $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un A-module *de type fini* (10.3.6). Sous cette hypothèse, posons $A_n=A/\mathfrak{J}^{n+1}$, et soit X_n le schéma affine $\mathrm{Spec}(A_n)=(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. Si $u_{nm}: X_m \to X_n$ est le morphisme de schémas correspondant à l'homomorphisme canonique $A_n \to A_m$ pour $m \leqslant n$, le schéma formel $\mathfrak{X}$ est *limite inductive* des X_n pour les u_{nm} (10.6.3).

Théorème (10.10.2) *Soient* A *un anneau adique* noethérien. *Alors le foncteur* (10.10.1.1) *est une équivalence de catégories, de la catégorie des* A*-modules de type fini sur celle des* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-Modules cohérents.*

En premier lieu, on a la proposition suivante:

(10.10.2.1) *Soit* A *un anneau adique noethérien. Dans la catégorie des* A*-modules de type fini, le foncteur* (10.10.1.1) *est exact et on a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathrm{M}^\Delta) \simeq \mathrm{M}. \tag{10.10.2.2}$$

L'exactitude de (10.10.1.1) résulte de l'exactitude des foncteurs $M \mapsto \tilde{M}$ (1.3.5) et $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_{/X'}$ (10.8.8). Par définition, $\Gamma(\mathfrak{X}, M^\Delta)$ est le

séparé complété du A-module $\Gamma(X,\tilde{M})=M$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathfrak{J}$ étant un idéal de définition de A); mais comme A est complet et M de type fini, on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, th. 3) que M est séparé et complet, ce qui achève de prouver (10.10.2.1).

Montrons ensuite que le foncteur (10.10.1.1) est *pleinement fidèle*; celà résultera de la proposition suivante:

Proposition (10.10.2.3) *Soit* A *un anneau adique noethérien.*

(i) *Si* M *et* N *sont deux* A*-modules de type fini, il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$(M\otimes_A N)^\Delta \simeq M^\Delta\otimes_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}} N^\Delta, \tag{10.10.2.4}$$

$$(\mathrm{Hom}_A(M,N))^\Delta \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(M^\Delta,N^\Delta). \tag{10.10.2.5}$$

(ii) *L'application* $u\mapsto u^\Delta$ *est un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(M^\Delta,N^\Delta). \tag{10.10.2.6}$$

En effet, l'isomorphisme (10.10.2.4) provient de la composition des isomorphismes (1.3.12,(i)) et (10.8.10.1); de même l'isomorphisme (10.10.2.5) provient de la composition des isomorphismes (1.3.12,(ii)) et (10.8.10.2). Comme $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est un A-module de type fini, on peut lui appliquer (10.10.2.1), qui identifie $\Gamma(\mathfrak{X},(\mathrm{Hom}_A(M,N))^\Delta)$ à $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ et utiliser (10.10.2.5), qui prouve que (10.10.2.6) est un isomorphisme.

Notons que la propriété d'exactitude de M^Δ, appliquée à la suite exacte $0\to\mathfrak{J}\to A\to A/\mathfrak{J}\to 0$, montre que le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ désigné ici par $\mathfrak{J}^\Delta$ coïncide avec celui qui avait été noté de la même façon en (10.3.1), en vertu de (10.3.2).

Proposition (10.10.2.7) *Si* A *est un anneau adique noethérien,* $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ *est un faisceau cohérent d'anneaux.*

Si $f\in A$, on sait que $A_{\{f\}}$ est un anneau adique noethérien (**0**, 7.6.11) et comme la question est locale, on est ramené (10.1.4) à prouver que le noyau d'un homomorphisme $v:\mathscr{O}_\mathfrak{X}^n\to\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-Module de type fini. On a alors $v=u^\Delta$, où u est un A-homomorphisme $A^n\to A$ (10.10.2.3); comme A est noethérien, le noyau de u est de type fini, autrement dit on a un homomorphisme $A^m \xrightarrow{w} A^n$ tel que la suite

$$A^m \xrightarrow{w} A^n \xrightarrow{u} A$$

soit exacte. On en conclut (10.10.2.1) que la suite

$$\mathscr{O}_\mathfrak{X}^m \xrightarrow{w^\Delta} \mathscr{O}_\mathfrak{X}^n \xrightarrow{v} \mathscr{O}_\mathfrak{X}$$

est exacte, ce qui prouve que le noyau de v est de type fini.

(10.10.2.8) Avec les notations précédentes, posons $A_n = A/\mathfrak{J}^{n+1}$, et soit X_n le schéma affine $\mathrm{Spec}(A_n) = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathscr{J} = \mathfrak{J}^{\Delta}$ étant l'Idéal de définition de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ correspondant à l'idéal $\mathfrak{J}$. Soit u_{mn} le morphisme de schémas $X_m \to X_n$ correspondant à l'homomorphisme canonique $A_n \to A_m$ pour $m \leqslant n$; le schéma formel $\mathfrak{X}$ est limite inductive des X_n pour les u_{mn} (10.6.3).

Il reste à prouver la proposition suivante:

Proposition (10.10.2.9) *Supposons* A *adique noethérien, et soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-Module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-Module cohérent.*

b) *Il existe un* A*-module* M *de type fini (déterminé à un isomorphisme unique près par* (10.10.2.1)*) tel que* $\mathscr{F}$ *soit isomorphe à* M^{Δ}.

Montrons d'abord que b) implique a): en effet, on a par définition $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = A^{\Delta}$; M étant conoyau d'un homomorphisme $A^m \to A^n$, il résulte de (10.10.2.1) que M^{Δ} est conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^m \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n$, et comme le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est cohérent (10.10.2.7), il en est de même de M^{Δ} (**0**, 5.3.4).

Prouvons maintenant que a) entraîne b). Considéré comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module, on a $\mathscr{O}_{X_n} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1} = \tilde{A}_n$; $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{X_n}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent (**0**, 5.3.7), et comme c'est aussi un $\mathscr{O}_{X_n}$-Module et que $\mathscr{J}^{n+1}$ est cohérent ($\mathfrak{J}$ étant de type fini), on en conclut que $\mathscr{F}_n$ est un $\mathscr{O}_{X_n}$-Module cohérent (**0**, 5.3.13). On a donc $\mathscr{F}_n = \tilde{M}_n$, où M_n est un A_n-module de type fini; comme on a $u_{mn}^*(\mathscr{F}_n) = \mathscr{F}_m$ pour $m \leqslant n$ (l'application continue $X_m \to X_n$ des espaces sous-jacents étant l'identité de $\mathfrak{X}$), on a $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ (1.7.7). Les M_n forment donc un système projectif pour les di-homomorphismes canoniques $M_n \to M_m$ ($m \leqslant n$), et il résulte aussitôt de la définition des A_n que ce système projectif vérifie les conditions de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 11, prop. 14; sa limite projective M est par suite un A-module de type fini tel que $M_n = M \otimes_A A_n$ pour tout n. On en déduit que $\mathscr{F}_n$ est induit sur X_n par $\tilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, donc, si $\mathscr{G} = \varprojlim \mathscr{F}_n$, on a $\mathscr{G} = M^{\Delta}$ par définition (10.8.2). Il reste à prouver que $\mathscr{F}$ est isomorphe à $\mathscr{G}$. Or les homomorphismes canoniques $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_n$ forment un système projectif qui, par passage à la limite, donne un homomorphisme canonique $w : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, et tout revient à démontrer que w est un isomorphisme. Mais la question étant maintenant *locale*, on peut (en vertu de (10.1.4) et (**0**, 7.6.11)), se borner au cas où $\mathscr{F}$ est le conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^p \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^q$; cet homomorphisme est de la forme v^{Δ}, où v est un homomorphisme $A^p \to A^q$ de A-modules (10.10.2.6); donc $\mathscr{F}$ est isomorphe à M^{Δ}, où $M = \mathrm{Coker}\ v$. CQFD.

Remarque **(10.10.3)** Nous avons en fait prouvé que les conditions a) et b) de (10.10.2.9) équivalent aussi à la suivante:

a') *$\mathscr{F}$ est isomorphe à la limite projective* (10.6.6) *d'une suite $(\mathscr{F}_n)$ de $\mathscr{O}_{X_n}$-Modules cohérents tels que $u_{nm}^*(\mathscr{F}_n)=\mathscr{F}_m$ pour $m\leqslant n$, et le système projectif $(\mathscr{F}_n)$ est alors isomorphe au système des $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathscr{O}_{X_n}$.*

(10.10.4) Considérons maintenant deux anneaux adiques A, B et un homomorphisme continu $\varphi: B\to A$, tel que, si $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition de A et $\mathfrak{K}$ un idéal de définition de B, on ait $\varphi(\mathfrak{K})\subset\mathfrak{J}$; supposons $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ et $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2$ *de type fini.* Posons $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(B)$, $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(B)$. Soient $f: X\to Y$ le morphisme de schémas usuels correspondant à φ (1.6.3), $\hat{f}: \mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ son prolongement aux complétés (10.9.1), qui est aussi le morphisme de schémas formels correspondant à φ (10.2.2). On a un diagramme commutatif (10.9.2)

(10.10.4.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathfrak{Y} \\ {\scriptstyle i_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_Y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

Proposition (10.10.5) *Avec les notations de* (10.10.4), *supposons* A *et* B noethériens. *Alors, pour tout* B*-module de type fini* N, *il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules*

(10.10.5.1) $$\hat{f}^*(N^\Delta)\xrightarrow{\sim}(N\otimes_B A)^\Delta.$$

En effet, en désignant par $i_X: \mathfrak{X}\to X$ et $i_Y: \mathfrak{Y}\to Y$ les morphismes canoniques, on a (10.8.8), à des isomorphismes canoniques fonctoriels près, $N^\Delta=i_Y^*(\tilde{N})$ et

$$(N\otimes_B A)^\Delta=i_X^*((N\otimes_B A)\tilde{\ })=i_X^*(f^*(\tilde{N}))$$

(1.7.7); la proposition résulte donc de la commutativité du diagramme de (10.9.2).

Corollaire (10.10.6) *Sous les hypothèses de* (10.10.5), *pour tout idéal* $\mathfrak{b}$ *de* B, *on a*

(10.10.6.1) $$\hat{f}^*(\mathfrak{b}^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}=(\mathfrak{b}A)^\Delta.$$

En effet, soit j l'injection canonique $\mathfrak{b}\to B$, à laquelle correspond l'injection canonique $j^\Delta: \mathfrak{b}^\Delta\to\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules; par définition, $\hat{f}^*(\mathfrak{b}^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est l'image de l'homomorphisme $\hat{f}^*(j^\Delta): \hat{f}^*(\mathfrak{b}^\Delta)\to\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}=\hat{f}^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$; mais cet homomorphisme s'identifie à $(j\otimes 1)^\Delta: (\mathfrak{b}\otimes_B A)^\Delta\to\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}=(B\otimes_B A)^\Delta$ d'après (10.10.5). Comme l'image de $j\otimes 1$ est l'idéal $\mathfrak{b}A$ de A, l'image de $(j\otimes 1)^\Delta$ est donc $(\mathfrak{b}A)^\Delta$ en vertu de (10.10.2), d'où la conclusion.

(10.10.7) On ignore si, lorsque A est un anneau $\mathfrak{J}$-adique, avec $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ de type fini, le théorème (10.10.2) s'étend aux A-modules *de pré-*

sentation finie (on ignore même si le foncteur (10.10.1.1) est alors pleinement fidèle dans la catégorie des A-modules de présentation finie). Toutefois on a alors le résultat suivant:

Proposition (10.10.8) *Soient* A *un anneau* $\mathfrak{J}$*-adique,* $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ *étant de type fini. Alors le foncteur* (10.10.1.1) *est une équivalence de la catégorie des* A*-modules* projectifs de type fini *sur celle des* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-Modules localement libres de type fini.*

Suivant la même marche que dans (10.10.2), démontrons d'abord la

Proposition (10.10.8.1) *Le foncteur* (10.10.1.1) *transforme toute suite exacte de* A*-modules projectifs de type fini en une suite exacte, et on a un isomorphisme canonique fonctoriel de* A*-modules*

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathrm{M}^{\Delta}) \simeq \mathrm{M}. \tag{10.10.8.2}$$

Il s'agit ici de voir que le foncteur $\mathrm{M} \mapsto (\tilde{\mathrm{M}})_{|\mathrm{X}'}$ transforme toute suite exacte de A-modules projectifs de type fini en une suite exacte; or, on sait qu'un tel A-module M est *séparé et complet* pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique (**0**, 7.2.10). Par suite $\mathrm{M} \mapsto \Gamma(\mathrm{X}', (\tilde{\mathrm{M}})_{|\mathrm{X}'})$ est un isomorphisme fonctoriel dans la catégorie des A-modules projectifs de type fini, ce qui n'est autre que (10.10.8.2); l'exactitude de $\mathrm{M} \mapsto (\tilde{\mathrm{M}})_{|\mathrm{X}'}$ se prouve alors comme dans (10.8.8).

On montre ensuite que (10.10.1.1) est *pleinement fidèle* dans la catégorie des A-modules projectifs de type fini:

Proposition (10.10.8.3) *Si* M *et* N *sont des* A*-modules projectifs de type fini, l'application* $u \mapsto u^{\Delta}$ *est un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathrm{M}^{\Delta}, \mathrm{N}^{\Delta}). \tag{10.10.8.4}$$

On sait qu'un A-module projectif de type fini est de présentation finie (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8, lemme 3). On a donc une suite exacte

$$\mathrm{A}^m \to \mathrm{A}^n \to \mathrm{M} \to 0,$$

de A-modules projectifs de type fini, d'où, par (10.10.8.1), une suite exacte

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^m \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n \to \mathrm{M}^{\Delta} \to 0.$$

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}^n, \mathrm{N}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}^m, \mathrm{N}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathrm{M}^{\Delta}, \mathrm{N}^{\Delta}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n, \mathrm{N}^{\Delta}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^m, \mathrm{N}^{\Delta})
\end{array}$$

où les lignes sont exactes et les flèches verticales sont les homomorphismes de groupes additifs $u \mapsto u^{\Delta}$. Ce diagramme s'écrit aussi, en vertu de (**0**, 5.1.1).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & N^n & \longrightarrow & N^m \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(M^{\Delta},N^{\Delta}) & \longrightarrow & \Gamma(X,N^{\Delta})^n & \longrightarrow & \Gamma(X,N^{\Delta})^m \end{array}$$

et il résulte de (10.10.8.2) que les deux dernières flèches verticales sont bijectives, donc il en est de même de la première.

Notons encore l'analogue de (10.8.8, (ii)):

Proposition (10.10.8.5) *Pour tout* A*-module projectif de type fini* M, *l'homomorphisme canonique* $\gamma^{\sharp} : i^*(\tilde{M}) \to M^{\Delta}$ (10.8.5) *est bijectif.*

Il suffit en effet de reproduire le raisonnement de (10.8.8, (ii)), qui n'utilise que l'hypothèse de présentation finie (mais aucune hypothèse noethérienne) et l'exactitude du foncteur $M \mapsto M^{\Delta}$ prouvée en (10.10.8.1).

On achève de démontrer (10.10.8) en établissant l'analogue de (10.10.2.9):

Proposition (10.10.8.6) *Sous les hypothèses de* (10.10.8), *et avec les notations de* (10.10.2.8), *soit* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-Module. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $\mathscr{E}$ *est localement libre de type fini.*

b) $\mathscr{E}$ *est isomorphe à la limite projective* (10.6.6) *d'une suite* $(\mathscr{E}_n)$ *de* $\mathscr{O}_{X_n}$*-Modules localement libres de type fini tels que* $u_{nm}^*(\mathscr{E}_n) = \mathscr{E}_m$.

c) *Il existe un* A*-module projectif de type fini* P *tel que* $\mathscr{E}$ *soit isomorphe à* $\tilde{P}^{\Delta}$.

On peut reprendre pas à pas la démonstration de (10.10.2.9).

Pour la démonstration de l'implication b) $\Rightarrow$ c), on a $\mathscr{E}_n = \tilde{P}_n$ où P_n est un A_n-module projectif de type fini (1.4.4), et on a $P_m = P_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leqslant n$; $P = \varprojlim P_n$ est alors un A-module projectif de type fini en vertu de (**0**, 7.2.10).

Dans la démonstration de c) $\Rightarrow$ b), il suffit de remarquer que si P est un A-module projectif de type fini, $P \otimes_A A_n$ est un A_n-module projectif de type fini (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 1, cor. de la prop. 4) et d'utiliser (1.4.4).

Le fait que c) implique a) résulte de (10.10.8.5), $\tilde{P}$ étant un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de type fini (1.4.4), en utilisant (**0**, 5.4.5).

Enfin, pour montrer que a) entraîne c), on note que $\mathscr{E}_n = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{X_n}$ est un $\mathscr{O}_{X_n}$-Module localement libre de type fini, puisque $\mathfrak{X}$ et X_n ont même espace topologique sous-jacent. Comme on sait déjà que b) entraîne a), $\mathscr{G} = \varprojlim \mathscr{E}_n$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module localement libre de type fini;

on définit de façon naturelle un homomorphisme canonique $w : \mathscr{G} \to \mathscr{E}$, et tout revient à voir que w est bijectif. Mais comme la question est *locale*, on peut supposer (en vertu de (10.1.4) et de (**0**, 7.6.11)) que $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^p$, et alors $\mathscr{E} = (A^p)^\Delta$.

Corollaire (10.10.9) (i) *Si* M *et* N *sont deux* A*-modules projectifs de type fini, il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N})^\Delta \simeq \mathrm{M}^\Delta \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{N}^\Delta, \tag{10.10.9.1}$$

$$(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}))^\Delta \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathrm{M}^\Delta, \mathrm{N}^\Delta). \tag{10.10.9.2}$$

Notons que $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ sont des A-modules projectifs de type fini (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2, cor. 2 de la prop. 4 et § 3, n° 7, cor. 7 de la prop. 7). La définition de l'homomorphisme (10.10.9.1) et la preuve qu'il est bijectif se font comme pour (10.10.2.4), en tenant compte de (10.10.8.5). Quant à la définition de l'homomorphisme (10.10.9.2), elle résulte de (**0**, 4.4.6) et de (10.10.8.5). Pour prouver que cet homomorphisme est bijectif, notons que l'on a une suite exacte

$$\mathrm{A}^m \to \mathrm{A}^n \to \mathrm{N} \to 0,$$

d'où l'on déduit une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}^m) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}^n) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \to 0$$

puis un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
(\check{\mathrm{M}}^\Delta)^m & \longrightarrow & (\check{\mathrm{M}}^\Delta)^n & \longrightarrow & (\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}))^\Delta & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathrm{M}^\Delta, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^m) & \longrightarrow & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathrm{M}^\Delta, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n) & \longrightarrow & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathrm{M}^\Delta, \mathrm{N}^\Delta) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où, en vertu de l'exactitude du foncteur (10.10.1.1) prouvée dans (10.10.8.1), les deux lignes sont exactes. On est donc ramené à prouver que (10.10.9.2) est bijectif lorsque M est projectif de type fini et $\mathrm{N} = \mathrm{A}$; mais alors il existe un A-module projectif de type fini P tel que $\mathrm{M} \oplus \mathrm{P} = \mathrm{A}^r$; comme les foncteurs $\mathrm{M} \mapsto \check{\mathrm{M}}$ et $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{N}^\Delta$ commutent aux sommes directes finies, on peut se borner au cas où $\mathrm{M} = \mathrm{A}^r$, et le résultat est alors évident.

10.11. Modules de présentation finie sur les schémas formels adiques

(10.11.1) Dans toute cette section, $\mathfrak{X}$ désignera un schéma formel *adique* (10.4.2); nous *supposerons* qu'il existe un Idéal de définition $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$, et que $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est un $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$-Module *de type fini*; X_n désignera le

schéma (usuel) $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, de sorte que $\mathfrak{X}$ est *limite inductive* de la suite (X_n) pour les morphismes canoniques $u_{mn}: X_m \to X_n$ (10.6.3); nous désignerons par u_n le morphisme canonique $X_n \to \mathfrak{X}$ (10.5.2).

Proposition (10.11.2) *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel localement noethérien, le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est cohérent et tout Idéal de définition* (10.5.1) *de $\mathfrak{X}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent.*

En effet, la question étant locale, on est ramené au cas d'un schéma formel affine noethérien, et la proposition résulte alors de (10.10.2.7) et de (10.10.2.9).

Rappelons que lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel localement noethérien, l'existence d'un Idéal de définition $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ vérifiant (10.11.1) a été prouvée en (10.5.4); les $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules de présentation finie sont en outre identiques aux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules cohérents en vertu de (10.11.2) et (**0**, 5.3.9).

Théorème (10.11.3) *Soit X un schéma formel localement noethérien. Pour qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module $\mathscr{F}$ soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à une limite projective d'une suite $(\mathscr{F}_n)$, où $\mathscr{F}_n$ est un $\mathscr{O}_{X_n}$-Module cohérent, tel que $u_{mn}^*(\mathscr{F}_n) = \mathscr{F}_n$ pour $m \leqslant n$* (10.6.6). *Le système projectif $(\mathscr{F}_n)$ est alors isomorphe au système des $u_n^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{X_n}$, u_n étant le morphisme canonique $X_n \to \mathfrak{X}$.*

La question étant locale, on est ramené au cas où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine noethérien, et le théorème est alors conséquence de (10.10.3).

On peut donc dire que *la donnée d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent équivaut à celle d'un système projectif $(\mathscr{F}_n)$ de $\mathscr{O}_{X_n}$-Modules cohérents tels que $u_{nm}^*(\mathscr{F}_n) = \mathscr{F}_m$ pour $m \leqslant n$.*

Corollaire (10.11.4) *Sous les hypothèses de* (10.11.3), *si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules cohérents, on peut* (avec les notations de (10.11.3)) *définir un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\text{(10.11.4.1)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_n}}(\mathscr{F}_n, \mathscr{G}_n).$$

La limite projective du second membre doit s'entendre pour les applications $\theta_n \mapsto u_{mn}^*(\theta_n)$ $(m \leqslant n)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_n}}(\mathscr{F}_n, \mathscr{G}_n)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_m}}(\mathscr{F}_m, \mathscr{G}_m)$. L'homomorphisme (10.11.4.1) fait correspondre à un élément $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ la suite $(u_n^*(\theta))$; on voit aussitôt qu'on définit un homomorphisme réciproque du précédent en faisant correspondre au système projectif $(\theta_n) \in \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_n}}(\mathscr{F}_n, \mathscr{G}_n)$ sa limite projective dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, compte tenu de (10.11.3).

Corollaire (10.11.5) *Sous les hypothèses de* (10.11.4), *pour qu'un homomorphisme $\theta: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ soit un épimorphisme, il faut et il suffit que l'homomorphisme correspondant $\theta_0 = u_0^*(\theta): \mathscr{F}_0 \to \mathscr{G}_0$ le soit.*

La question étant locale, on est ramené au cas où $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$, A étant adique noethérien, $\mathscr{F}=M^{\Delta}$, $\mathscr{G}=N^{\Delta}$ et $\theta=u^{\Delta}$, où M et N sont des A-modules de type fini et u un homomorphisme $M\to N$; on a en outre alors $\theta_0=\tilde{u}_0$, où u_0 est l'homomorphisme

$$u\otimes 1 : M\otimes_A A/\mathfrak{J}\to N\otimes_A A/\mathfrak{J};$$

la conclusion résulte de ce que θ et u (resp. θ_0 et u_0) sont surjectifs ((1.3.9) et (10.10.1)) et de ce que u et u_0 sont simultanément surjectifs (**0**, 7.1.14).

(10.11.6) Le th. (10.11.3) montre qu'on peut considérer tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$ comme un *$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module topologique*, en le considérant comme limite projective des faisceaux de groupes *pseudo-discrets* $\mathscr{F}_n$ (**0**, 3.9.1). Il résulte alors de (10.11.4) que tout homomorphisme $u:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules cohérents est automatiquement *continu* (**0**, 3.9.2). En outre, si $\mathscr{H}$ est un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, pour tout ouvert $U\subset\mathfrak{X}$, $\Gamma(U,\mathscr{H})$ est un sous-groupe *fermé* du groupe topologique $\Gamma(U,\mathscr{F})$, car le foncteur Γ étant exact à gauche, $\Gamma(U,\mathscr{H})$ est le noyau de l'homomorphisme $\Gamma(U,\mathscr{F})\to\Gamma(U,\mathscr{F}/\mathscr{H})$, qui est *continu* d'après ce qui précède, puisque $\mathscr{F}/\mathscr{H}$ est cohérent (**0**, 5.3.2); notre assertion résulte de ce que $\Gamma(U,\mathscr{F}/\mathscr{H})$ est un groupe topologique séparé.

Proposition (10.11.7) *Soient* X *un schéma formel localement noethérien, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules cohérents. On peut définir* (avec les notations de (10.11.3)) *des isomorphismes canoniques fonctoriels de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules topologiques* (10.11.6)

$$\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathscr{G}\simeq\varprojlim_n(\mathscr{F}_n\otimes_{\mathscr{O}_{X_n}}\mathscr{G}_n), \tag{10.11.7.1}$$

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G})\simeq\varprojlim_n\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X_n}}(\mathscr{F}_n,\mathscr{G}_n). \tag{10.11.7.2}$$

L'existence de l'isomorphisme (10.11.7.1) résulte de la formule

$$\mathscr{F}_n\otimes_{\mathscr{O}_{X_n}}\mathscr{G}_n=(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathscr{O}_{X_n})\otimes_{\mathscr{O}_{X_n}}(\mathscr{G}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathscr{O}_{X_n})=(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathscr{G})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathscr{O}_{X_n}$$

et de (10.11.3). L'isomorphisme (10.11.7.2) où les deux membres sont considérés comme faisceaux de modules sans topologie, résulte de la définition des sections de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ et $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X_n}}(\mathscr{F}_n,\mathscr{G}_n)$ et de l'existence de l'isomorphisme (10.11.4.1), appliqué au schéma formel induit sur un ouvert formel affine noethérien arbitraire de $\mathfrak{X}$. Reste à prouver que l'isomorphisme (10.11.7.2) est bicontinu au-dessus d'un ensemble quasi-compact, et on est donc ramené au cas ou $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(A)$, A étant adique noethérien, d'où (10.10.2) $\mathscr{F}=M^{\Delta}$, $\mathscr{G}=N^{\Delta}$, M, N étant des A-modules de type fini; compte tenu de (10.10.2.1), (10.10.2.6) et (1.3.12, (ii)), on est ramené à montrer que l'isomorphisme canonique

$\mathrm{Hom}_A(M,N) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{A_n}(M_n,N_n)$ (avec $M_n = M \otimes_A A_n$, $N_n = N \otimes_A A_n$) est continu, ce qui a été prouvé dans (**0**, 7.8.2).

(10.11.8) Comme $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ est le groupe des sections du faisceau de groupes topologiques $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, il est muni d'une topologie de groupe. Si $\mathfrak{X}$ est *noethérien*, il résulte de (10.11.7.2) qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans ce groupe s'obtient en prenant les sous-groupes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{J}^n\mathscr{G})$ (n arbitraire).

Proposition (10.11.9) *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel noethérien, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules cohérents. Dans le groupe topologique* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ *les homomorphismes surjectifs* (resp. *injectifs, bijectifs*) *forment une partie ouverte.*

En vertu de (10.11.5), l'ensemble des homomorphismes surjectifs dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ est l'image réciproque par l'application continue $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\mathscr{F}_0,\mathscr{G}_0)$ d'une partie du groupe discret $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}}(\mathscr{F}_0,\mathscr{G}_0)$, d'où la première assertion. Pour démontrer la seconde, recouvrons $\mathfrak{X}$ par un nombre fini d'ouverts formels affines noethériens U_i. Pour que $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ soit injectif, il faut et il suffit que toutes ses images par les applications (continues) de restriction $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}|U_i}}(\mathscr{F}|U_i;\mathscr{G}|U_i)$ le soient, on est donc ramené au cas affine, et alors cela a déjà été prouvé dans (**0**, 7.8.3).

Proposition (10.11.10) *Sous les hypothèses de* (10.11.1), *pour qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module $\mathscr{F}$ soit localement libre de type fini, il faut et il suffit qu'il soit limite projective d'une suite $(\mathscr{E}_n)$, où $\mathscr{E}_n$ est un $\mathscr{O}_{X_n}$-Module localement libre de type fini et $u_{nm}^*(\mathscr{E}_n) = \mathscr{E}_m$ pour $m \leqslant n$.*

Supposons $\mathscr{F}$ localement libre de type fini, et posons $\mathscr{F}_n = u_n^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{X_n}$. Les homomorphismes canoniques $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_n$ forment un système projectif, qui par passage à la limite donne un homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to \varprojlim \mathscr{F}_n$; pour prouver que cet homomorphisme est bijectif, on peut (puisque la question est locale) se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathscr{J} = \mathfrak{J}^{\Delta}$, A étant un anneau adique ayant $\mathfrak{J}$ pour idéal de définition, et $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ étant de type fini; l'assertion résulte alors de ce qu'on peut supposer de plus que $\mathscr{F}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n$.

Inversement, pour montrer que la limite projective de la suite $(\mathscr{E}_n)$ est localement libre de type fini, la question est encore locale; on peut donc appliquer (10.10.8).

10.12. Morphismes adiques de schémas formels

(10.12.1) Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}$ deux schémas formels *localement noethériens*; nous dirons qu'un morphisme $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ est *adique* s'il existe un Idéal de définition $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{S}$ tel que $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit un Idéal de définition

de $\mathfrak{X}$; on dit aussi alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{S}$-*schéma adique* (pour f). Lorsqu'il en est ainsi, pour *tout* Idéal de définition $\mathscr{J}_1$ de $\mathfrak{S}$, $\mathscr{K}_1 = f^*(\mathscr{J}_1)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$. En effet, la question étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{S}$ affines noethériens; il existe donc un entier n tel que $\mathscr{J}^n \subset \mathscr{J}_1$ et $\mathscr{J}_1^n \subset \mathscr{J}$ ((10.3.6) et (**0**, 7.1.4)), d'où $\mathscr{K}^n \subset \mathscr{K}_1$ et $\mathscr{K}_1^n \subset \mathscr{K}$. La première de ces relations prouve que $\mathscr{K}_1 = \mathfrak{K}_1^{\Delta}$, où $\mathfrak{K}_1$ est un idéal ouvert de $A = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, et la seconde prouve que $\mathfrak{K}_1$ est un idéal de définition de A (**0**, 7.1.4), d'où notre assertion.

Il résulte aussitôt de ce qui précède que si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont deux $\mathfrak{S}$-schémas adiques, *tout* $\mathfrak{S}$-*morphisme* $u : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *est adique*: en effet, si $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$, $g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{S}$ sont les morphismes structuraux, et $\mathscr{J}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{S}$, on a $f = g \circ u$, donc $u^*(g^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$, et par hypothèse $g^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{Y}$.

(10.12.2) Dans ce qui suit, nous supposerons fixé un schéma formel localement noethérien $\mathfrak{S}$ et un Idéal de définition $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{S}$; nous poserons $S_n = (\mathfrak{S}, \mathscr{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{J}^{n+1})$. Les $\mathfrak{S}$-schémas adiques (localement noethériens) forment évidemment une *catégorie*. Nous dirons qu'un système inductif (X_n) de S_n-schémas (usuels) localement noethériens est un (S_n)-*système inductif adique* si les morphismes structuraux $f_n : X_n \to S_n$ sont tels que, pour $m \leqslant n$, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X_n & \longleftarrow & X_m \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_m} \\ S_n & \longleftarrow & S_m \end{array} \qquad (10.12.2.1)$$

soient des carrés cartésiens, de sorte (**0**, 1.2.4) que X_m est *identifié au produit* $X_n \times_{S_n} S_m = (X_n)_{(S_m)}$. Les systèmes inductifs adiques forment une *catégorie*: il suffit en effet de définir un morphisme $(X_n) \to (Y_n)$ de tels systèmes comme un *système inductif de* S_n-*morphismes* $u_n : X_n \to Y_n$ tel que u_m s'identifie à $(u_n)_{(S_m)}$ pour $m \leqslant n$. Cela étant:

Théorème (10.12.3) *Sous les hypothèses de* (10.12.1), *il y a équivalence canonique entre la catégorie de* $\mathfrak{S}$-*schémas adiques et la catégorie des* (S_n)-*systèmes inductifs adiques.*

L'équivalence en question s'obtient de la façon suivante: si $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{S}$-schéma adique, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ le morphisme structural, $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et on fait correspondre à $\mathfrak{X}$ le système inductif des $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme structural $f_n : X_n \to S_n$ correspondant à f (10.5.6). Montrons d'abord que (X_n) est un *système inductif adique*: si $f = (\psi, \theta)$, on a $\psi^{-1}(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{K}$, donc $\psi^{-1}(\mathscr{J}^n)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{K}^n$ pour tout n, et (par l'exactitude du foncteur ψ^{-1}) $\mathscr{K}^{m+1}/\mathscr{K}^{n+1} = \psi^{-1}(\mathscr{J}^{m+1}/\mathscr{J}^{n+1})(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}^{n+1})$ pour $m \leqslant n$; notre conclusion résulte

donc de (4.3.1). Il est immédiat en outre de vérifier qu'à un $\mathfrak{S}$-morphisme $u : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{S}$-schémas adiques correspond (avec des notations évidentes) un système inductif de S_n-morphismes $u_n : X_n \to Y_n$ tel que u_m s'identifie à $(u_n)_{(S_m)}$ pour $m \leqslant n$.

Le fait qu'on a bien défini ainsi une équivalence résultera de la proposition plus précise suivante:

Proposition (10.12.3.1) *Soit* (X_n) *un système inductif de* S_n*-schémas; on suppose que les morphismes structuraux* $f_n : X_n \to S_n$ *sont tels que les diagrammes* (10.12.2.1) *soient des carrés cartésiens. Alors le système inductif* (X_n) *vérifie les conditions* a), b) *et* c) *de* (10.6.3); *soient* $\mathfrak{X}$ *sa limite inductive,* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ *le morphisme limite inductive du système inductif* (f_n). *Si* X_0 *est localement noethérien,* $\mathfrak{X}$ *est localement noethérien et* f *est un morphisme adique.*

Comme l'Idéal de $\mathscr{O}_{S_n}$ qui définit le sous-schéma S_m de S_n est nilpotent, il en est de même, en vertu de (4.3.1), de l'Idéal de $\mathscr{O}_{X_n}$ définissant le sous-schéma X_m de X_n, donc les conditions de (10.6.3) sont bien vérifiées. La question est par suite locale sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{S}$ et on peut supposer que $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{J} = \mathfrak{J}^{\Delta}$, A étant un anneau $\mathfrak{J}$-adique noethérien, et $X_n = \mathrm{Spec}(B_n)$; si $A_n = A/\mathfrak{J}^{n+1}$, l'hypothèse entraîne que B_0 est noethérien et que si on pose $\mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{n+1}$, $B_m = B_n/\mathfrak{J}_n^{m+1} B_n$. Le noyau de $B_n \to B_0$ est donc $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{J}_n B_n$ et le noyau de $B_n \to B_m$ est $\mathfrak{K}_n^{m+1}$ pour $m \leqslant n$; en outre, comme A_1 est noethérien, $\mathfrak{J}_1$ est de type fini sur A_1, donc $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_1^2$ est de type fini sur B_1, et *a fortiori* sur $B_0 = B_1/\mathfrak{K}_1$; le fait que $\mathfrak{X}$ soit noethérien résulte alors de (10.6.4); si $B = \varprojlim B_n$, on a $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, et si $\mathfrak{K}$ est le noyau de $B \to B_0$, $B_n = B/\mathfrak{K}^{n+1}$. Si $\rho_n : A/\mathfrak{J}^{n+1} \to B/\mathfrak{K}^{n+1}$ est l'homomorphisme correspondant à f_n, on a donc

$$\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^{n+1} = (B/\mathfrak{K}^{n+1})\rho_n(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{n+1});$$

comme l'homomorphisme $\rho : A \to B$ correspondant à f est égal à $\varprojlim \rho_n$, l'idéal $\mathfrak{J}B$ de B est dense dans $\mathfrak{K}$, et comme tout idéal de B est fermé (**0**, 7.3.5), on a $\mathfrak{K} = \mathfrak{J}B$. Si $\mathscr{K} = \mathfrak{K}^{\Delta}$, la relation $f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{K}$ résulte alors de (10.10.6) et achève la démonstration.

(10.12.3.2) L'équivalence précédente fournit, pour deux $\mathfrak{S}$-schémas adiques $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, une *bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{S_n}(X_n, Y_n)$$

la limite projective étant relative aux applications $u_n \mapsto (u_n)_{(S_m)}$ pour $m \leqslant n$.

10.13. Morphismes de type fini

Proposition (10.13.1) *Soient* $\mathfrak{Y}$ *un schéma formel localement noethérien,* $\mathscr{K}$ *un Idéal de définition de* $\mathfrak{Y}$, $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme de schémas formels. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $\mathfrak{X}$ *est localement noethérien,* f *est un morphisme adique* (10.12.1) *et si l'on pose* $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, *le morphisme* $f_0 : (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \to (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$ *déduit de* f *est de type fini.*

b) $\mathfrak{X}$ *est localement noethérien, et est limite inductive d'un* (Y_n)*-système inductif adique* (X_n) *tel que le morphisme* $X_0 \to Y_0$ *soit de type fini.*

c) *Tout point de* $\mathfrak{Y}$ *possède un voisinage ouvert formel affine noethérien* V *ayant la propriété suivante*:

(Q) $f^{-1}(V)$ *est réunion d'une famille finie d'ouverts formels affines noethériens* U_i *tels que l'anneau adique noethérien* $\Gamma(U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *soit topologiquement isomorphe au quotient d'une algèbre de séries formelles restreintes* (**0**, 7.5.1) *sur* $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$, *par un idéal (nécessairement fermé).*

Il est immédiat que a) entraîne b) en vertu de (10.12.3).

Pour montrer que b) entraîne c), on peut, puisque la question est locale sur $\mathfrak{Y}$, supposer que $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$, où B est adique noethérien; soit $\mathscr{K} = \mathfrak{K}^{\Delta}$, $\mathfrak{K}$ étant un idéal de définition de B. Comme, par hypothèse, X_0 est de type fini sur Y_0, X_0 est réunion finie d'ouverts affines U_i tels que l'anneau A_{i0} du schéma affine induit par X_0 sur U_i soit une algèbre de type fini sur l'anneau $B/\mathfrak{K}$ de Y_0 (6.3.1). En vertu de (2.3.6), U_i est aussi un ouvert affine dans chacun des schémas noethériens X_n, et si A_{in} est l'anneau du schéma affine induit par X_n sur U_i, l'hypothèse b) entraîne que pour $m \leqslant n$, A_{im} est isomorphe à $A_{in}/\mathfrak{K}^{m+1}A_{in}$. Par suite, le schéma formel induit sur U_i par $\mathfrak{X}$ est isomorphe à $\mathrm{Spf}(A_i)$, où $A_i = \varprojlim_n A_{in}$ (10.6.4); A_i est un anneau $\mathfrak{K}A_i$-adique, et $A_i/\mathfrak{K}A_i$, isomorphe à A_{i0}, est une algèbre de type fini sur $B/\mathfrak{K}$. On en conclut (**0**, 7.5.5) que A_i est topologiquement isomorphe à un quotient d'une algèbre de séries formelles restreintes sur B (par un idéal nécessairement fermé, puisqu'une telle algèbre est noethérienne (**0**, 7.5.4)).

Pour démontrer que c) entraîne a), on peut se limiter au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est aussi affine, A étant un anneau adique noethérien, isomorphe au quotient d'une algèbre de séries formelles restreintes sur B par un idéal fermé. Alors (**0**, 7.5.5), $A/\mathfrak{K}A$ est une algèbre de type fini sur $B/\mathfrak{K}$, et $\mathfrak{K}A = \mathfrak{J}$ est un idéal de définition de A, donc, en vertu de (10.10.6), les conditions de a) sont satisfaites.

On notera que si les conditions de la prop. (10.13.1) sont remplies, la propriété a) est valable pour *tout* Idéal de définition $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ (en vertu de c)), et par suite, dans la propriété b), *tous* les f_n sont des morphismes de type fini.

Corollaire (10.13.2) *Si les conditions de* (10.13.1) *sont vérifiées, tout ouvert formel affine noethérien* V *de* $\mathfrak{Y}$ *possède la propriété* (Q), *et si* $\mathfrak{Y}$ *est noethérien, il en est de même de* $\mathfrak{X}$.

Cela résulte aussitôt de (10.13.1) et de (6.3.1).

Définition (10.13.3) *Lorsque les propriétés équivalentes* a), b), c) *de* (10.13.1) *sont vérifiées, on dit que le morphisme f est de type fini, ou que* $\mathfrak{X}$ *est un* $\mathfrak{Y}$*-schéma formel de type fini, ou un schéma formel de type fini au-dessus de* $\mathfrak{Y}$.

Corollaire (10.13.4) *Soient* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ *deux schémas formels affines noethériens; pour que* $\mathfrak{X}$ *soit de type fini sur* $\mathfrak{Y}$, *il faut et il suffit que l'anneau adique noethérien* A *soit isomorphe au quotient d'une algèbre de séries formelles restreintes sur* B *par un idéal fermé.*

En effet, avec les notations de (10.13.1), si $\mathfrak{X}$ est de type fini sur $\mathfrak{Y}$, $A/\mathfrak{R}A$ est alors une $(B/\mathfrak{R})$-algèbre de type fini en vertu de (6.2.5) et $\mathfrak{R}A$ est un idéal de définition de A (10.10.8). On conclut donc par (**0**, 7.5.5).

Proposition (10.13.5) (i) *Le composé de deux morphismes de schémas formels qui sont de type fini est de type fini.*

(ii) *Soient* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ *trois schémas formels localement noethériens* (resp. *noethériens*), $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$, $g : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ *deux morphismes. Si f est de type fini,* $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}'$ *est localement noethérien* (resp. *noethérien*) *et est de type fini sur* $\mathfrak{S}'$.

(iii) *Soient* $\mathfrak{S}$ *un schéma formel localement noethérien,* $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ *deux* $\mathfrak{S}$*-schémas formels localement noethériens tels que* $\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}'$ *soit localement noethérien. Si* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *sont des* $\mathfrak{S}$*-schémas formels localement noethériens,* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$, $g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}'$ *deux* $\mathfrak{S}$*-morphismes de type fini,* $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$ *est localement noethérien et* $f \times_{\mathfrak{S}} g$ *est un* $\mathfrak{S}$*-morphisme de type fini.*

(iii) se déduit de (i) et (ii) par le raisonnement formel de (**0**, 1.3.9) et il suffit donc de prouver (i) et (ii).

Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ trois schémas formels localement noethériens, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de type fini. Si $\mathscr{L}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{Z}$, $\mathscr{K} = g^*(\mathscr{L})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ en est un pour $\mathfrak{Y}$ et $\mathscr{J} = f^*(g^*(\mathscr{L}))\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ en est un pour $\mathfrak{X}$. Posons $X_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $Y_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, $Z_0 = (\mathfrak{Z}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Z}}/\mathscr{L})$ et soient $f_0 : X_0 \to Y_0$, $g_0 : Y_0 \to Z_0$ les morphismes correspondant à f et g. Comme par hypothèse f_0 et g_0 sont de type fini, il en est de même de $g_0 \circ f_0$ (6.3.4) qui correspond à $g \circ f$; donc $g \circ f$ est de type fini par (10.13.1).

Sous les conditions de (ii), $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}'$) est limite inductive d'une suite (S_n) (resp. (X_n), (S'_n)) de schémas localement noethériens et on peut supposer (10.13.1) que $X_m = X_n \times_{S_n} S_m$ pour $m \leqslant n$. Le schéma formel $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}'$ est alors limite inductive des schémas $X_n \times_{S_n} S'_n$ (10.7.4), et on a

$$X_m \times_{S_m} S'_m = (X_n \times_{S_n} S_m) \times_{S_m} S'_m = (X_n \times_{S_n} S'_n) \times_{S'_n} S'_m.$$

En outre, $X_0 \times_{S_0} S'_0$ est localement noethérien puisque X_0 est de type fini sur S_0 (6.2.4). On en conclut d'abord (10.12.3.1) que $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}'$ est localement noethérien; en outre, comme $X_0 \times_{S_0} S'_0$ est de type fini sur S'_0 (6.3.4), il résulte de (10.12.3.1) et de (10.13.1) que $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}'$ est de type fini sur $\mathfrak{S}'$, ce qui achève de prouver (ii) (l'assertion relative aux schémas noethériens étant conséquence immédiate de (6.2.4)).

Corollaire (10.13.6) *Sous les hypothèses de* (10.9.9), *si f est un morphisme de type fini, il en est de même de son prolongement $\hat{f}$ aux complétés.*

10.14. Sous-schémas fermés des schémas formels

Proposition (10.14.1) *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, $\mathscr{A}$ un Idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Si $\mathfrak{Y}$ est le support (fermé) de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$, l'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{Y}, (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})|\mathfrak{Y})$ est un schéma formel localement noethérien, qui est noethérien si $\mathfrak{X}$ l'est.*

Notons que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ est cohérent en vertu de (10.11.2) et (**0**, 5.3.4), donc son support $\mathfrak{Y}$ est fermé (**0**, 5.2.2). Soit $\mathscr{J}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{X}$, et soit $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$; le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ est limite projective des faisceaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathscr{A}+\mathscr{J}^{n+1}) = (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ (10.11.2), qui ont tous pour support $\mathfrak{Y}$. Le faisceau $(\mathscr{A}+\mathscr{J}^{n+1})/\mathscr{J}^{n+1}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent, puisque $\mathscr{J}^{n+1}$ est cohérent, donc $(\mathscr{A}+\mathscr{J}^{n+1})/\mathscr{J}^{n+1}$ est aussi un $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$-Module cohérent (**0**, 5.3.13); si Y_n est le sous-schéma fermé de X_n défini par cet Idéal, il est immédiat que $(\mathfrak{Y}, (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})|\mathfrak{Y})$ est le schéma formel limite inductive des Y_n, et comme les conditions de (10.6.4) sont satisfaites, cela prouve que ce schéma formel est localement noethérien, et noethérien si $\mathfrak{X}$ l'est (puisque alors Y_0 l'est en vertu de (6.1.4)).

Définition (10.14.2) *On appelle sous-schéma fermé d'un schéma formel localement noethérien $\mathfrak{X}$ tout schéma formel $(\mathfrak{Y}, (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})|\mathfrak{Y})$ où $\mathscr{A}$ est un Idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$; on dit que ce schéma est le sous-schéma fermé défini par $\mathscr{A}$.*

Il est clair que la correspondance ainsi définie entre Idéaux cohérents de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et sous-schémas fermés de $\mathfrak{X}$ est biunivoque.

Le morphisme d'espaces topologiquement annelés $j = (\psi, \theta) : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, où ψ est l'injection $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et $\theta^{\#}$ l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$, est évidemment (10.4.5) un morphisme de schémas formels, qu'on appelle l'*injection canonique* de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{X}$. On notera que si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, où A est adique noethérien, on a $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A (10.10.2.7), et il résulte aussitôt de ce qui précède que l'on a alors $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$ à un isomorphisme près, et que j correspond (10.2.2) à l'homomorphisme canonique $A \to A/\mathfrak{a}$.

On dit qu'un morphisme $f: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ de schémas formels localement noethériens est une *immersion fermée* si elle se factorise en $\mathfrak{Z} \xrightarrow{g} \mathfrak{Y} \xrightarrow{j} \mathfrak{X}$, où g est un isomorphisme de $\mathfrak{Z}$ sur un sous-schéma fermé $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$ et j l'injection canonique. Comme j est un monomorphisme d'espaces annelés, g et $\mathfrak{Y}$ sont nécessairement *uniques*.

Proposition (10.14.3) *Une immersion fermée est un morphisme de type fini.*

On se ramène aussitôt au cas où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine $\mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$; la proposition résulte de (10.13.1, c)).

Lemme (10.14.4) *Soit $f: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de schémas formels localement noethériens, et soit (U_α) un recouvrement de $f(\mathfrak{Y})$ par des ouverts formels affines noethériens de $\mathfrak{X}$, tels que les $f^{-1}(U_\alpha)$ soient des ouverts formels affines noethériens de Y. Pour que f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que $f(\mathfrak{Y})$ soit une partie fermée de $\mathfrak{X}$ et que, pour tout α, la restriction de f à $f^{-1}(U_\alpha)$ corresponde* (10.4.6) *à un homomorphisme surjectif $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(f^{-1}(U_\alpha), \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

Les conditions sont évidemment nécessaires. Inversement, si elles sont remplies, et si on désigne par $\mathfrak{a}_\alpha$ le noyau de $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(f^{-1}(U_\alpha), \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$, on définit un Idéal cohérent $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ en prenant $\mathscr{A}|U_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha^\Delta$, et en prenant $\mathscr{A}$ nul dans le complémentaire de la réunion des U_α. En effet, puisque $f(\mathfrak{Y})$ est fermé et que le support de $\mathfrak{a}_\alpha^\Delta$ est $U_\alpha \cap f(\mathfrak{Y})$, tout revient à vérifier que $\mathfrak{a}_\alpha^\Delta$ et $\mathfrak{a}_\beta^\Delta$ induisent le même faisceau sur un ouvert formel affine noethérien $V \subset U_\alpha \cap U_\beta$. Or, la restriction de f à $f^{-1}(U_\alpha)$ étant une immersion fermée de ce schéma formel dans U_α, $f^{-1}(V)$ est un ouvert formel affine noethérien dans $f^{-1}(U_\alpha)$ et la restriction de f à $f^{-1}(V)$ est une immersion fermée; si $\mathfrak{b}$ est le noyau de l'homomorphisme surjectif $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ correspondant à cette restriction, il est immédiat (10.10.2.1) que $\mathfrak{a}_\alpha^\Delta$ induit $\mathfrak{b}^\Delta$ sur V. L'Idéal $\mathscr{A}$ étant ainsi défini, il est alors clair que $f = g \circ j$, où $j: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est l'injection canonique du sous-schéma fermé $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{X}$ défini par $\mathscr{A}$, et g un isomorphisme de $\mathfrak{Y}$ sur $\mathfrak{Z}$.

Proposition (10.14.5) (i) *Si $f: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$, $g: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ sont des immersions fermées de schémas formels localement noethériens, $g \circ f$ est une immersion fermée.*

(ii) *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{S}$ trois schémas formels localement noethériens, $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ une immersion fermée, $g: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{S}$ un morphisme. Alors le morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$ est une immersion fermée.*

(iii) *Soient $\mathfrak{S}$ un schéma formel localement noethérien, $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'$ deux $\mathfrak{S}$-schémas formels localement noethériens tels que $\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}'$ soit localement noethérien. Si $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ sont des $\mathfrak{S}$-schémas formels localement noethériens, $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$, $g: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}'$ deux $\mathfrak{S}$-morphismes qui sont des immersions fermées, alors $f \times_{\mathfrak{S}} g$ est une immersion fermée.*

En vertu de (**0**, 1.3.9), il suffit encore de prouver (i) et (ii).

Pour démontrer (i), on peut supposer que $\mathfrak{Y}$ (resp. $\mathfrak{Z}$) est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) défini par un Idéal cohérent $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$); si ψ est l'injection $\mathfrak{Y}\to\mathfrak{X}$ des espaces sous-jacents, $\psi_*(\mathscr{K})$ est un Idéal cohérent de $\psi_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})=\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$ (**0**, 5.3.15), donc aussi un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent (**0**, 5.3.13); le noyau $\mathscr{K}_1$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\to(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})/\psi_*(\mathscr{K})$ est donc un Idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (**0**, 5.3.4), et $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}_1$ est isomorphe à $\psi_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, ce qui prouve que $\mathfrak{Z}$ est isomorphe à un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$.

Pour démontrer (ii), il est immédiat qu'on peut se limiter au cas où $\mathfrak{S}=\mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(C)$, A étant un anneau $\mathfrak{I}$-adique noethérien, $B=A/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, C une A-algèbre topologique adique et noethérienne. Tout revient à prouver que l'homomorphisme $C\to C\,\hat{\otimes}_A(A/\mathfrak{a})$ est *surjectif*: or, $A/\mathfrak{a}$ est un A-module de type fini, et sa topologie est la topologie $\mathfrak{I}$-adique; il résulte alors de (**0**, 7.7.8) que $C\,\hat{\otimes}_A(A/\mathfrak{a})$ s'identifie à $C\otimes_A(A/\mathfrak{a})=C/\mathfrak{a}C$, d'où notre assertion.

Corollaire (10.14.6) *Sous les hypothèses de* (10.14.5, (ii)), *soient* $p:\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y}\to\mathfrak{X}$, $q:\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y}\to\mathfrak{Y}$ *les projections, de sorte que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xleftarrow{\ p\ } & \mathfrak{X}\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathfrak{S} & \xleftarrow[\ g\ ]{} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

est commutatif. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, on a alors un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules

$$u:\ g^*(f_*(\mathscr{F}))\xrightarrow{\sim} q_*(p^*(\mathscr{F})). \tag{10.14.6.1}$$

Pour définir un homomorphisme $g^*(f_*(\mathscr{F}))\to q_*(p^*(\mathscr{F}))$, on sait qu'il revient au même de définir un homomorphisme $f_*(\mathscr{F})\to g_*(q_*(p^*(\mathscr{F})))=f_*(p_*(p^*(\mathscr{F})))$ (**0**, 4.4.3): nous prendrons $u=f_*(\rho)$, où ρ est l'homomorphisme canonique $\mathscr{F}\to p_*(p^*(\mathscr{F}))$ (**0**, 4.4.3). Pour voir que u est un isomorphisme, on se ramène aussitôt au cas où $\mathfrak{S},\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ sont des spectres formels d'anneaux adiques noethériens A, B, C, avec les conditions vues ci-dessus dans (10.14.5, (ii)); on a alors $\mathscr{F}=M^{\Delta}$, où M est un $(A/\mathfrak{a})$-module de type fini (10.10.2.9), et les deux membres de (10.14.6.1) s'identifient respectivement, en vertu de (10.10.5), à $(C\otimes_A M)^{\Delta}$ et à $((C/\mathfrak{a}C)\otimes_{A/\mathfrak{a}}M)^{\Delta}$, d'où le corollaire, puisque $(C/\mathfrak{a}C)\otimes_{A/\mathfrak{a}}M=(C\otimes_A(A/\mathfrak{a}))\otimes_{A/\mathfrak{a}}M$ s'identifie canoniquement à $C\otimes_A M$.

Corollaire (10.14.7) *Soient* X *un schéma usuel localement noethérien,* Y *un sous-schéma fermé de* X, *j l'injection canonique* $Y\to X$, X′ *une partie*

fermée de X *et* $Y' = Y \cap X'$; *alors* $\hat{f}: Y_{/Y'} \to X_{/X'}$ *est une immersion fermée, et pour tout* $\mathscr{O}_Y$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *on a*

$$\hat{f}_*(\mathscr{F}_{/Y'}) = (f_*(\mathscr{F}))_{/X'}.$$

Comme $Y' = f^{-1}(X')$, il suffit d'utiliser (10.9.9) et d'appliquer (10.14.5) et (10.14.6).

10.15. Schémas formels séparés

Définition (10.15.1) *Soient* $\mathfrak{S}$ *un schéma formel,* $\mathfrak{X}$ *un* $\mathfrak{S}$*-schéma formel,* $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ *le morphisme structural. On appelle morphisme diagonal* $\Delta_{\mathfrak{X}|\mathfrak{S}}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{X}$ *(noté aussi* $\Delta_{\mathfrak{X}}$*) le morphisme* $(1_{\mathfrak{X}}, 1_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{S}}$. *On dit que* $\mathfrak{X}$ *est séparé sur* $\mathfrak{S}$, *ou un* $\mathfrak{S}$*-schéma formel séparé, ou que* f *est un morphisme séparé, si l'image par* $\Delta_{\mathfrak{X}}$ *de l'espace sous-jacent* $\mathfrak{X}$ *est une partie fermée de l'espace sous-jacent à* $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{X}$. *On dit qu'un schéma formel* $\mathfrak{X}$ *est séparé s'il est séparé sur* $\mathbf{Z}$.

Proposition (10.15.2) *Supposons que les schémas formels* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{X}$ *soient respectivement limites inductives de suites* (S_n), (X_n) *de schémas usuels, et que le morphisme* $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ *soit limite inductive d'une suite de morphismes* $f_n: X_n \to S_n$. *Pour que* f *soit séparé, il faut et il suffit que le morphisme* $f_0: X_0 \to S_0$ *le soit.*

En effet, $\Delta_{\mathfrak{X}|\mathfrak{S}}$ est alors limite inductive de la suite de morphismes $\Delta_{X_n|S_n}$ (10.7.4), et l'image par $\Delta_{\mathfrak{X}|\mathfrak{S}}$ de l'espace sous-jacent $\mathfrak{X}$ (resp. l'espace sous-jacent $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{X}$) est identique à l'image par $\Delta_{X_0|S_0}$ de l'espace sous-jacent X_0 (resp. à l'espace sous-jacent $X_0 \times_{S_0} X_0$); d'où la conclusion.

Proposition (10.15.3) *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels* (resp. *morphismes de schémas formels*) *considérés soient limites inductives de suites de schémas usuels* (resp. *de morphismes de schémas usuels*).

(i) *Le composé de deux morphismes séparés est séparé.*

(ii) *Si* $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$, $g: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}'$ *sont deux* $\mathfrak{S}$*-morphismes séparés,* $f \times_{\mathfrak{S}} g$ *est séparé.*

(iii) *Si* $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *est un* $\mathfrak{S}$*-morphisme séparé, le* $\mathfrak{S}'$*-morphisme* $f_{(\mathfrak{S}')}$ *est séparé pour toute extension* $\mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ *du préschéma formel de base.*

(iv) *Si le composé* $g \circ f$ *de deux morphismes est séparé,* f *est séparé.*

(On sous-entend dans cet énoncé que si un même schéma formel $\mathfrak{Z}$ intervient plusieurs fois dans une même proposition, on le considère comme limite inductive de la *même* suite (Z_n) de schémas usuels partout où il figure, et les morphismes de $\mathfrak{Z}$ dans un schéma formel (resp. d'un schéma formel dans $\mathfrak{Z}$) comme limites inductives de morphismes des Z_n dans des schémas usuels (resp. de schémas usuels dans les Z_n)).

Avec les notations de (10.15.2), on a en effet $(g\circ f)_0 = g_0 \circ f_0$, et $(f \times_{\mathfrak{S}} g)_0 = f_0 \times_{S_0} g_0$; les assertions de (10.15.3) sont alors conséquences immédiates de (10.15.2) et des assertions correspondantes de (5.3.1) pour les schémas usuels.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer pour la même espèce de schémas formels et de morphismes que dans (10.15.3) les propositions correspondant à (5.3.5), (5.3.9) et (5.3.10) (en y remplaçant «ouvert affine» par «ouvert formel affine vérifiant la condition b) de (10.6.3)»).

Un raisonnement analogue montre aussi que tout schéma formel affine *noethérien* est séparé.

Proposition (10.15.4) *Soient $\mathfrak{S}$ un schéma formel localement noethérien, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deux $\mathfrak{S}$-schémas formels localement noethériens, tels que $\mathfrak{X}$ ou $\mathfrak{Y}$ soit de type fini sur $\mathfrak{S}$ (de sorte que $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$ est localement noethérien) et que $\mathfrak{Y}$ soit séparé sur $\mathfrak{S}$. Soit $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un $\mathfrak{S}$-morphisme; alors le morphisme graphe $\Gamma_f = (1_{\mathfrak{X}}, f)_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$ est une immersion fermée.*

On peut supposer que $\mathfrak{S}$ est limite inductive d'une suite (S_n) de schémas localement noethériens, $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) limite inductive d'une suite (X_n) (resp. (Y_n)) de S_n-schémas, f limite inductive d'une suite de S_n-morphismes $f_n : X_n \to Y_n$; alors $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$ est limite inductive de la suite $(X_n \times_{S_n} Y_n)$ et Γ_f de la suite (Γ_{f_n}) (10.7.4); par hypothèse, Y_0 est séparé sur S_0 (10.15.2), donc l'espace $\Gamma_{f_0}(X_0)$ est un sous-espace fermé de $X_0 \times_{S_0} Y_0$; comme les espaces sous-jacents de $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$ (resp. $\Gamma_f(\mathfrak{X})$) et $X_0 \times_{S_0} Y_0$ (resp. $\Gamma_{f_0}(X_0)$) sont les mêmes, on voit déjà que $\Gamma_f(\mathfrak{X})$ est un sous-espace *fermé* de $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$. Remarquons maintenant que lorsque (U, V) parcourt l'ensemble des couples formés d'un ouvert formel affine noethérien U (resp. V) de $\mathfrak{X}$ (resp. Y) tels que $f(U) \subset V$, les ouverts $U \times_S V$ forment un recouvrement de $\Gamma_f(\mathfrak{X})$ dans $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$, et si $f_U : U \to V$ est la restriction de f à U, $\Gamma_{f_U} : U \to U \times_{\mathfrak{S}} V$ est la restriction de Γ_f à U. Si nous montrons que Γ_{f_U} est une immersion fermée, il en sera donc de même de Γ_f (10.14.4), autrement dit, on est ramené au cas où $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(C)$ sont affines (A, B, C adiques noethériens), f correspondant à un A-homomorphisme continu $\varphi : C \to B$; Γ_f correspond alors à l'unique homomorphisme continu $\omega : B \hat{\otimes}_A C \to B$ qui, composé avec les homomorphismes canoniques $B \to B \hat{\otimes}_A C$ et $C \to B \hat{\otimes}_A C$, donne respectivement l'identité et φ. Or, il est clair que ω est *surjectif*, d'où notre assertion.

Corollaire (10.15.5) *Soient $\mathfrak{S}$ un schéma formel localement noethérien, $\mathfrak{X}$ un $\mathfrak{S}$-schéma de type fini; pour que $\mathfrak{X}$ soit séparé sur $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que le morphisme diagonal $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{X}$ soit une immersion fermée.*

Proposition (10.15.6) *Une immersion fermée $j : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ de schémas formels localement noethériens est un morphisme séparé.*

Avec les notations de (10.14.2), $j_0 : Y_0 \to X_0$ est une immersion fermée, donc un morphisme séparé, et il suffit d'appliquer (10.15.2).

Proposition (10.15.7) *Soient* X *un schéma (usuel) localement noethérien,* X′ *une partie fermée de* X *et* $\hat{X} = X_{/X'}$. *Pour que* $\hat{X}$ *soit séparé, il faut et il suffit que* $\hat{X}_{red}$ *le soit, et il suffit que* X *le soit.*

En effet, avec les notations de (10.8.5), pour que $\hat{X}$ soit séparé, il faut et il suffit que X'_0 le soit (10.15.2), et comme $\hat{X}_{red} = (X'_0)_{red}$, il est équivalent de dire que $\hat{X}_{red}$ l'est (5.3.1, (vi)).

10.16. Morphismes affines de schémas formels

Définition (10.16.1) *On dit qu'un morphisme de schémas formels* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *est affine* (ou que $\mathfrak{X}$ est *affine sur* $\mathfrak{Y}$) *si* $\mathfrak{Y}$ *est réunion d'ouverts formels affines* V_α *tels que, pour tout* α, *le schéma formel induit sur l'ouvert* $f^{-1}(V_\alpha)$ *de* $\mathfrak{X}$ *soit un schéma formel affine.*

Si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont des schémas formels affines, *tout* morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est donc affine. Le même raisonnement que dans (9.1.2), où l'on remplace $D(g)$ par $\mathfrak{D}(g)$ et où l'on tient compte de (10.2.1), montre que si $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme affine de schémas formels, alors, pour tout ouvert $U \subset \mathfrak{Y}$, le morphisme $f^{-1}(U) \to U$, restriction de f, est affine.

Proposition (10.16.2) *Soient* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ *deux schémas formels, limites inductives de suites* (X_n), (Y_n) *de schémas usuels vérifiant les conditions de* (10.6.3). *Soit* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme de schémas formels limite inductive d'une suite de morphismes* $f_n : X_n \to Y_n$ *de schémas usuels. Alors, pour que* f *soit un morphisme affine, il faut et il suffit que* $f_0 : X_0 \to Y_0$ *soit un morphisme affine.*

Comme les ouverts formels affines de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) sont exactement les ouverts affines de X_0 (resp. Y_0) (10.6.3), la proposition résulte des définitions.

Corollaire (10.16.3) *Sous les hypothèses de* (10.16.2), *si* f *est un morphisme affine de schémas formels, il est séparé.*

Cela résulte de (10.16.2), (10.15.2) et (9.1.3).

Corollaire (10.16.4) *Sous les hypothèses de* (10.16.2), *si* f *est un morphisme affine, alors, pour tout ouvert formel affine* U *de* $\mathfrak{Y}$, $f^{-1}(U)$ *est un ouvert formel affine de* $\mathfrak{X}$.

Cela résulte de (10.16.2) et (9.1.10).

Proposition (10.16.5) *On suppose que tous les schémas formels et tous les morphismes de schémas formels considérés dans ce qui suit vérifient les hypothèses générales de* (10.16.2).

(i) *Le composé de deux morphismes affines est affine.*

(ii) *Si* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *est un* $\mathfrak{S}$*-morphisme affine, le* $\mathfrak{S}'$*-morphisme* $f_{(\mathfrak{S}')}$ *est affine pour tout changement de base* $\mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$.

(iii) *Si* $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ *et* $g:\mathfrak{X}'\to\mathfrak{Y}'$ *sont deux* $\mathfrak{S}$*-morphismes affines, le morphisme* $f\times_{\mathfrak{S}}g$ *est affine.*

(iv) *Si* $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ *et* $g:\mathfrak{Y}\to\mathfrak{Z}$ *sont deux morphismes tels que* $g\circ f$ *soit affine et* g *séparé, alors* f *est affine.*

Cela résulte aussitôt de (10.16.2) et des assertions correspondantes de (9.1.16), compte tenu de ce que $(g\circ f)_0=g_0\circ f_0$ et $(f\times_{\mathfrak{S}}g)_0=f_0\times_{S_0}g_0$.

(10.16.6) Supposons toujours vérifiées les hypothèses de (10.16.2), et supposons que $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ soit un morphisme affine. Les ouverts affines étant les mêmes dans tous les schémas X_n (resp. Y_n), il est clair que chacun des morphismes f_n est affine. Posons $\mathscr{B}_n=(f_n)_*(\mathscr{O}_{X_n})=\psi_*(\mathscr{O}_{X_n})$, ψ étant l'application continue sous-jacente à f et à tous les f_n; $\mathscr{B}_n$ est une $\mathscr{O}_{Y_n}$-Algèbre quasi-cohérente. En outre, pour tout ouvert formel affine $V=\mathrm{Spf}(A)$ de $\mathfrak{Y}$, $U=f^{-1}(V)$ est un ouvert formel affine Spf(B) de $\mathfrak{X}$, avec $B=\Gamma(V,\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})=\Gamma(U,f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))$; si l'on pose $B_n=\Gamma(V,\mathscr{O}_{X_n})=\Gamma(U,\mathscr{B}_n)$, on a $\mathscr{B}_n=\tilde{B}_n$ et B est limite projective du système projectif des B_n; en outre, il résulte aussitôt des hypothèses faites que tout homomorphisme $B_n\to B_m$ pour $m\leqslant n$ est surjectif et a un noyau nilpotent. Le système projectif $(\mathscr{B}_n)$ de faisceaux d'anneaux sur l'espace topologique $\mathfrak{Y}$ vérifie donc les conditions de (10.6.3), et a évidemment pour limite projective le faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{B}=f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$.

Inversement, supposons donné sur $\mathfrak{Y}$ un systéme projectif de faisceaux d'anneaux $(\mathscr{B}_n)$ verifiant les conditions de (10.6.3) et tel que chaque $\mathscr{B}_n$ soit une $\mathscr{O}_{Y_n}$-Algèbre quasi-cohérénte, les homomorphismes structuraux $\mathscr{O}_{Y_n}\to\mathscr{B}_n$ formant un système projectif d'homomorphismes de faisceaux. Soit $X_n=\mathrm{Spec}(\mathscr{B}_n)$, et soit $f_n:X_n\to Y_n$ le morphisme structural (9.18); l'hypothese b) de (10.6.3) permet d'*identifier* les espaces topologiques sous-jacents aux X_n, au moyen des morphismes $X_m\to X_n$ correspondant aux homomorphismes $\mathscr{B}_n\to\mathscr{B}_m$ pour $m\leqslant n$; il est clair alors que sur cet espace topologique, les faisceaux d'anneaux $\mathscr{O}_{X_n}$ vérifient les conditions de (10.6.3), donc ont pour limite projective le faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ d'un schéma formel $\mathfrak{X}$. On appelle encore *spectre formel* du faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{B}$ le schéma formel $\mathfrak{X}$, limite inductive de la suite (X_n) de schèmas, et on le note $\mathrm{Spf}(\mathscr{B})$; le morphisme $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, limite inductive du système inductif (f_n), est affine en vertu de (10.16.2).

(10.16.7) Soit $\mathfrak{X}'$ un troisième schéma formel, limite inductive de la suite (X'_n) de schémas usuels, vérifiant les conditions de (10.6.3), et soit $f':\mathfrak{X}'\to\mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, limite inductive d'une suite de morphismes $f'_n:X'_n\to Y_n$. Supposons que f soit un morphisme affine, et formons les $\mathscr{O}_{Y_n}$-Algèbres quasi-cohérentes $\mathscr{B}'_n=(f'_n)_*(\mathscr{O}_{X'_n})$ correspondantes. Pour chaque n, il y a correspondance biunivoque canonique entre les Y_n-morphismes $g_n:X_n\to X'_n$ et les $\mathscr{O}_{Y_n}$-homomorphismes d'Algèbres quasi-cohérentes $\mathscr{A}(g_n):\mathscr{B}'_n\to\mathscr{B}_n$ (9.1.5), donc aussi entre

systèmes inductifs de Y_n-morphismes $X_n \to X'_n$ et systèmes projectifs de $\mathscr{O}_{Y_n}$-homomorphismes $\mathscr{B}'_n \to \mathscr{B}_n$.

On peut donc dire qu'il y a une *équivalence* canonique entre deux catégories; l'une a pour objets les $\mathfrak{Y}$-schémas formels $\mathfrak{X}$ affines sur $\mathfrak{Y}$, limites inductives de suites de Y_n-schémas X_n affines sur Y_n et vérifiant les conditions de (10.6.3), et pour morphismes les systèmes inductifs de Y_n-morphismes $X_n \to X'_n$; l'autre a pour objets les $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Algèbres topologiques $\mathscr{B}$, limites projectives de systèmes projectifs de $\mathscr{O}_{Y_n}$-Algèbres quasi-cohérentes $\mathscr{B}_n$ vérifiant les conditions de (10.6.3) et pour morphismes les systèmes projectifs de $\mathscr{O}_{Y_n}$-homomorphismes d'Algèbres $\mathscr{B}'_n \to \mathscr{B}_n$.

(10.16.8) Bornons-nous maintenant aux schémas formels *localement noethériens*. Alors, si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont deux tels schémas, $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{J}$) le *plus grand* Idéal de définition de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) (10.5.4), *tout* morphisme $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est limite inductive d'une suite de morphismes $f_n: X_n \to Y_n$, où $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}^{n+1})$ et $Y_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_Y/\mathscr{J}^{n+1})$ (10.6.10). Supposons f *affine*, et soit $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{O}_X)$ et $\mathscr{H} = f_*(\mathscr{K})$. Alors $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbre topologique telle que: 1° $\mathscr{B}/\mathscr{H}$ soit une $\mathscr{O}_{Y_0}$-Algèbre quasi-cohérente et $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}/\mathscr{H})$ un Y_0-schéma localement noethérien réduit; 2° $\mathscr{H}/\mathscr{H}^2$ soit de type fini sur $\mathscr{B}/\mathscr{H}$; 3° $\mathscr{B}$ soit limite projective des $\mathscr{B}_n = \mathscr{B}/\mathscr{H}^{n+1}$. En effet, on se ramène aussitôt au cas où $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, A et B étant adiques et noethériens, et $\mathscr{J} = \mathfrak{J}^{\Delta}$, $\mathscr{K} = \mathfrak{K}^{\Delta}$, $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$ étant les plus grands idéaux de définition de A et B respectivement, l'homomorphisme structural $\varphi: A \to B$ étant continu (autrement dit $\varphi(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{K}$). Comme alors $\mathscr{B} = \tilde{B}$, $\mathscr{H} = \tilde{\mathfrak{K}}$ et $\mathscr{B}_n = (B/\mathfrak{K}^{n+1})^{\sim}$ sur l'espace topologique $\mathfrak{Y}$, les propriétés énoncées ci-dessus sont immédiates. *Réciproquement*, elles caractérisent les $\mathfrak{Y}$-schémas formels affines sur $\mathfrak{Y}$ et localement noethériens, comme il résulte du raisonnement de (10.16.6) et de (10.6.4). En outre, avec les notations de (10.16.7), si $\mathfrak{X}'$ est aussi un schéma formel affine sur $\mathfrak{Y}$ et localement noethérien et $\mathscr{B}' = f'_*(\mathscr{O}_{X'})$, il résulte de (10.6.10, (ii)) qu'il y a correspondance biunivoque canonique entre $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}')$ et l'ensemble des $\mathscr{O}_Y$-homomorphismes *continus* $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$; on le voit aussitôt en se ramenant au cas où $\mathfrak{Y}$ est affine.

Proposition (10.16.9) *Si $\mathfrak{Y}$ est un schéma formel localement noethérien, toute immersion fermée* (10.14.2) *est un morphisme affine.*

Cela résulte aussitôt des définitions.

Proposition (10.16.10) *Si $f: X \to Y$ est un morphisme affine de schémas (usuels) localement noethériens, Y' une partie fermée de Y et $X' = f^{-1}(Y')$, le prolongement $\hat{f}: X_{/X'} \to Y_{/Y'}$ aux complétés le long de X' et Y' est un morphisme affine de schémas formels.*

Cela résulte aussitôt de (10.16.2), de la définition de $\hat{f}$ (10.9.1) et de l'invariance de la notion de morphisme affine par changement de base (9.1.16, (iii)).

APPENDICE

Ultraschémas et espaces algébriques de Serre

1. Spectres maximaux et ultraschémas

(1.1) Soit X un *schéma de Jacobson* (6.4.1), et soit S(X) l'*espace annelé* dont l'espace sous-jacent est le sous-ensemble des points *fermés* de X, et le faisceau d'anneaux le faisceau *induit* sur ce sous-espace par $\mathscr{O}_X$, autrement dit le faisceau d'anneaux $\psi^{-1}(\mathscr{O}_X)$, en désignant par $\psi : S(X) \to X$ l'injection canonique. Comme ψ est un quasi-homéomorphisme (**0**, 2.6.2), on a vu que si $\theta : \mathscr{O}_X \to \psi_*(\mathscr{O}_{S(X)})$ est l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux tel que $\theta^\# : \psi^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_{S(X)}$ soit l'identité, alors $j_X = (\psi, \theta)$ est un *quasi-isomorphisme* d'espaces annelés, et $\mathscr{F} \mapsto j_X^*(\mathscr{F})$ une équivalence de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules et de celle des $\mathscr{O}_{S(X)}$-Modules. Il est clair que dans cette équivalence, aux $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres (resp. cohérents) correspondent les $\mathscr{O}_{S(X)}$-Modules localement libres (resp. cohérents); en outre, si $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre et si U est un ouvert de X tel que $\mathscr{L}|U$ soit isomorphe à $(\mathscr{O}_X|U)^n$, $j_X^*(\mathscr{L})$ est tel que $j_X^*(\mathscr{L})|(U \cap S(X))$ soit isomorphe à $(\mathscr{O}_{S(X)}|(U \cap S(X)))^n$.

(1.2) Soient X, Y deux schémas de Jacobson et $f = (\rho, \lambda) : X \to Y$ un morphisme *localement de type fini*. On a vu (6.4.7) que l'on a $\rho(S(X)) \subset S(Y)$ et par restriction de ρ à S(X), on définit donc une application continue $S(\rho) : S(X) \to S(Y)$. D'autre part, pour tout ouvert V de Y, on définit par composition un homomorphisme d'anneaux

$$\Gamma(V \cap S(Y), \mathscr{O}_{S(Y)}) \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{O}_Y) \xrightarrow{\lambda_V} \Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{O}_X) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V) \cap S(X), \mathscr{O}_{S(X)})$$

où les deux isomorphismes extrêmes ont été définis dans (1.1); il est clair que cela définit un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $S(\lambda) : \mathscr{O}_{S(Y)} \to \rho_*(\mathscr{O}_{S(X)})$ (en se rappelant que les ouverts de S(X) (resp. S(Y)) correspondent biunivoquement à ceux de X (resp. Y) (**0**, 2.6.1)); on obtient ainsi un morphisme d'espaces annelés $S(f) = (S(\rho), S(\lambda)) : (S(X), \mathscr{O}_{S(X)}) \to (S(Y), \mathscr{O}_{S(Y)})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{S(f)} & S(Y) \\ {\scriptstyle j_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_Y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

soit commutatif; en outre, si Z est un troisième schéma de Jacobson et $g : Y \to Z$ un morphisme localement de type fini, il est clair que $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$. On a ainsi défini un *foncteur covariant* $S : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}'$, où $\boldsymbol{C}'$ est la catégorie des *espaces localement annelés* et $\boldsymbol{C}$ la catégorie dont les objets sont les *schémas de Jacobson* et les morphismes sont les morphismes *localement de type fini* entre schémas de Jacobson.

(1.3) Proposons-nous de déterminer la sous-catégorie $\boldsymbol{C}''$ de $\boldsymbol{C}'$ formée des espaces annelés isomorphes aux S(X) et dont les morphismes proviennent des $S(f)$. Supposons d'abord que $X=\mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau de Jacobson; alors S(X) est l'ensemble des *idéaux maximaux* de A, muni: 1° de la topologie induite par celle de X, de sorte qu'une base de cette topologie est formée des $D^m(h)=D(h)\cap S(X)$ (ensemble des idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de A tels que $h\notin\mathfrak{m}$, où h parcourt A); 2° du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{S(X)}$ tel que $\Gamma(D^m(h),\mathscr{O}_{S(X)})=A_f$. Nous dirons que cet espace annelé est le *spectre maximal* de l'anneau de Jacobson A et nous le noterons Spm(A).

On notera que si $j: D(h)\to X$ est l'injection canonique, l'espace annelé induit sur $D^m(h)$ par S(X) est $S(D(h))$ et l'injection canonique $D^m(h)\to S(X)$ d'espaces annelés est égale à $S(j)$.

Soient B un second anneau de Jacobson, $Y=\mathrm{Spec}(B)$, $\varphi: B\to A$ un homomorphisme d'anneaux faissant de A une B-algèbre *de type fini*, $f=({}^a\varphi,\tilde{\varphi}): X\to Y$ le morphisme correspondant de schémas, et

$$S(f): \mathrm{Spm}(A)\to\mathrm{Spm}(B)$$

le morphisme d'espaces annelés correspondant à f. Il est clair que $S(f)=(\psi,\theta)$ est un morphisme d'espaces localement annelés, c'est-à-dire (**0**, 4.1.12) que pour tout $x\in\mathrm{Spm}(A)$, $\theta_x^\sharp$ est un homomorphisme *local*. Réciproquement:

Proposition (1.4) *Soient* A, B *deux anneaux de Jacobson. Si*

$$u=(\psi,\theta):\mathrm{Spm}(A)\to\mathrm{Spm}(B)$$

est un morphisme d'espaces localement annelés tel que $\Gamma(\theta)$: B→A *fasse de* A *une* B*-algèbre de type fini, il existe un morphisme de schémas* $f:\mathrm{Spec}(A)\to\mathrm{Spec}(B)$ *et un seul tel que* $u=S(f)$.

L'unicité de f est évidente, puisque si $f=({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, on doit avoir $\varphi=\Gamma(\theta)$; il reste à voir que $S(f)$ est défini et qu'on a bien $u=S(f)$. Or, la première assertion résulte de ce que φ est supposé faire de A une B-algèbre de type fini, et par suite $f(\mathrm{Spm}(A))\subset\mathrm{Spm}(B)$; le fait que $\theta_x^\sharp$ est un homomorphisme local pour tout $x\in\mathrm{Spm}(A)$ permet alors de répéter le raisonnement de (1.6.3) en se bornant aux points x de Spm(A); on montre ainsi successivement que $\psi(x)={}^a\varphi(x)$ pour tout $x\in\mathrm{Spm}(A)$, puis que $\theta_x^\sharp=\varphi_x: B_{\psi(x)}\to A_x$, ce qui achève de prouver que $u=S(f)$.

(1.5) Considérons maintenant un espace annelé $(X,\mathscr{O}_X)$; nous dirons qu'une partie ouverte U de X est *ultra-affine* si l'espace annelé induit $(U,\mathscr{O}_X|U)$ est isomorphe à un spectre maximal Spm(A), où A est un *anneau de Jacobson*. Nous dirons que X est un *ultra-schéma* si tout point de X admet un voisinage ouvert ultra-affine. On montre, comme dans (2.1.3) et (2.1.4), que les ouverts ultra-affines forment une *base* de la topologie de X et que X est un espace de Kolmogoroff. Si Y est un second ultra-schéma, nous dirons qu'un morphisme d'espaces annelés $f: X\to Y$ est un *morphisme d'ultra-schémas* s'il vérifie les conditions suivantes: 1° f est un morphisme d'*espaces localement annelés*; 2° pour tout $x\in X$, il y a un voisinage ouvert ultra-affine V de $f(x)$ dans Y et un voisinage ouvert ultra-affine U de x dans X tels que $f(U)\subset V$ et que l'homomorphisme $\Gamma(V,\mathscr{O}_Y)\to\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ correspondant à f fasse de $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ une $\Gamma(V,\mathscr{O}_Y)$*-algèbre de type fini.*

Il est immédiat qu'on définit bien ainsi des morphismes, le composé de deux morphismes en étant un troisième grâce à la remarque finale de (1.3). Il est clair que la catégorie $\boldsymbol{C}_0''$ ainsi définie est une sous-catégorie de $\boldsymbol{C}'$ qui contient $\boldsymbol{C}''$; nous nous proposons de montrer que $\boldsymbol{C}''=\boldsymbol{C}_0''$, autrement dit:

Proposition (1.6) *Le foncteur* $X\mapsto S(X)$ *de* $\boldsymbol{C}$ *dans* $\boldsymbol{C}_0''$ *est une équivalence de catégories.*

1° Montrons d'abord que le foncteur $X \mapsto S(X)$ est *pleinement fidèle*, autrement dit que pour X, Y dans $\boldsymbol{C}$, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'_0}(S(X), S(Y))$$

est *bijective*. En premier lieu elle est *injective*: soient en effet f, g deux morphismes localement de type fini de X dans Y et supposons que $S(f)=S(g)$. Cela entraîne d'abord que pour tout ouvert V de Y, on a $f^{-1}(V)\cap S(X)=g^{-1}(V)\cap S(X)$, donc ((**0**, 2.7.1) et (**0**, 2.6.7)) $f^{-1}(V)=g^{-1}(V)$; il suffit donc de prouver que pour tout ouvert affine V de Y, f et g coïncident dans $f^{-1}(V)=g^{-1}(V)$, autrement dit, on est ramené au cas où $Y=\mathrm{Spec}(B)$ est le spectre d'un anneau de Jacobson B. Il suffit (2.3.2) de montrer que les homomorphismes d'anneaux $B\to\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ correspondant à f et g sont alors les mêmes. Or, pour tout $s\in B$, les images de s par ces homomorphismes sont deux sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de X qui, par hypothèse, induisent la *même* section au-dessus de S(X); on sait donc (**0**, 3.8.1) que ces sections sont identiques, d'où notre assertion. Prouvons en second lieu que tout morphisme $h: S(X)\to S(Y)$ (pour la catégorie $\boldsymbol{C}'_0$) est de la forme $S(f)$, où $f: X\to Y$ est un morphisme localement de type fini. Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert ultra-affine (U'_λ) (resp. (V'_μ)) de S(X) (resp. S(Y)) tel que, pour tout λ, $h(U'_\lambda)$ soit contenu dans un V'_μ et qu'il corresponde au morphisme $h_\lambda : U'_\lambda\to V'_\mu$, restriction de h, un homomorphisme d'anneaux $\Gamma(V'_\mu, \mathscr{O}_{S(Y)})\to\Gamma(U'_\lambda, \mathscr{O}_{S(X)})$ faisant du second anneau une algèbre de type fini sur le premier. On peut supposer que $U'_\lambda=U_\lambda\cap S(X)$ et $V'_\mu=V_\mu\cap S(Y)$, où U_λ et V_μ sont des ouverts affines *uniquement déterminés* dans X et Y respectivement; si l'on prouve que, pour tout λ, $h_\lambda=S(f_\lambda)$, où $f_\lambda : U_\lambda\to V_\mu$ est un morphisme de type fini, alors il résulte de la première partie du raisonnement, appliquée aux restrictions de f_α et f_β à $U_\alpha\cap U_\beta$, que les f_λ sont les restrictions d'un même morphisme $f: X\to Y$, et on aura évidemment $h=S(f)$. On est ainsi ramené au cas où X et Y sont affines, et la conclusion résulte alors de (1.4).

2° Il reste à prouver que tout ultra-schéma X' est de la forme S(X) pour un schéma de Jacobson X (qui sera nécessairement unique à isomorphisme près, en vertu de 1°). Il y a un recouvrement (U'_α) de X' par des ouverts ultra-affines, dont chacun est de la forme $S(U_\alpha)$, U_α étant le spectre d'un anneau de Jacobson. Pour tout couple d'indices α, β, considérons l'unique ouvert $U_{\alpha\beta}$ de U_α dont la trace sur U'_α est $U'_\alpha\cap U'_\beta$; en vertu de 1°, l'automorphisme identique de $U'_\alpha\cap U'_\beta$ est de la forme $S(\theta_{\alpha\beta})$, où $\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta}\to U_{\beta\alpha}$ est un isomorphisme de schémas. On constate aussitôt (en vertu du 1°) que la famille $(\theta_{\alpha\beta})$ vérifie la condition de recollement (**0**, 4.1.7), et que cette famille définit donc un schéma X, tel que les U_α s'identifient à des ouverts affines de X; il est clair alors que l'on a $X'=S(X)$, ce qui achève la démonstration.

2. Espaces algébriques de Serre

(2.1) Le langage introduit par Serre dans (FAC) est parfois commode, notamment dans les questions où l'intérêt majeur s'attache aux points rationnels sur le corps de base k (algébriquement clos par hypothèse) des «variétés algébriques» sur k que l'on considère. Nous allons esquisser ici ce langage en le rattachant aux considérations qui précèdent, pour permettre au lecteur de traduire les énoncés de Serre en langage des schémas. Il est d'ailleurs possible de développer le langage de Serre également pour des schémas sur un corps non algébriquement clos (et même sur un anneau artinien) (2.5); mais cela introduit des complications techniques considérables, et d'ailleurs, sur un corps de base arbitraire, les avantages (surtout psychologiques) du point de vue de Serre disparaissent; aussi nous tiendrons-nous dans le cadre fixé par Serre. Le présent numéro, tout comme le pré-

cédent, ne sera d'ailleurs pas utilisé dans la suite de ce Traité, et nous nous bornerons donc à de brèves indications.

(2.2) Étant donné un ultra-schéma fixe R, on peut naturellement (comme dans toute catégorie) définir la notion de R-*ultra-schéma*. Considérons en particulier un *corps algébriquement clos* k; $\mathrm{Spm}(k)$ est alors identique à $\mathrm{Spec}(k)$; nous dirons qu'un $\mathrm{Spm}(k)$-ultra-schéma X′ est un *espace préalgébrique sur* k: c'est donc un espace k-annelé en anneaux locaux dont tout point a un voisinage ouvert isomorphe au spectre maximal d'une k-algèbre de type fini; il revient au même de dire (par (1.6)) que $X' = S(X)$, où X est un schéma localement de type fini sur k. Si X, Y, Z sont trois k-schémas localement de type fini, il en est de même de $X \times_Z Y$ (6.2.3), donc en vertu de (10.9.6), la notion de produit existe dans la catégorie des espaces préalgébriques sur k (aussi bien le produit «sur k» $X' \times_k Y'$ que le «produit fibré» $X' \times_{Z'} Y'$, où X′, Y′, Z′ sont trois espaces préalgébriques sur k). On peut donc définir le morphisme diagonal $\Delta_{X'}: X' \to X' \times_k X'$ (qui n'est autre d'ailleurs que $S(\Delta_X)$); on dit que X′ est un *espace algébrique sur* k si X est un schéma séparé, et il revient au même de dire que l'image de $\Delta_{X'}$ est une partie *fermée* de $X' \times_k X'$.

(2.3) Les simplifications qui proviennent de l'hypothèse que k est algébriquement clos tiennent d'abord à ce que, pour un k-schéma X, localement de type fini, il y a correspondance biunivoque entre *points fermés* de X, *points de* X *à valeurs dans* k (3.5.3) et *points de* X *rationnels sur* k (3.5.4), en vertu de (6.5.3). Cela montre en particulier (en vertu de (3.5.2.1)) que pour deux espaces k-préalgébriques X′, Y′, l'ensemble sous-jacent au produit $X' \times_k Y'$ *est identique à l'ensemble produit* $X' \times Y'$ des ensembles sous-jacents (mais bien entendu la topologie de l'espace sous-jacent à $X' \times_k Y'$ *n'est pas la topologie produit* des topologies des espaces sous-jacents à X′ et Y′, elle est en général strictement plus fine que cette dernière).

D'autre part, les anneaux locaux $\mathscr{O}_x$ aux points d'un espace préalgébrique X′ sur k sont des k-algèbres dont on vient de voir que le corps résiduel est *isomorphe à* k; si A et B sont deux telles k-algèbres locales, tout k-homomorphisme $\varphi: A \to B$ est nécessairement *local*: en effet, si un élément x de l'idéal maximal de A était tel que $\varphi(x)$ soit inversible, il existerait $\lambda \in k$ non nul tel que $\varphi(x - \lambda.1)$ appartienne à l'idéal maximal de B, ce qui est absurde puisque $x - \lambda.1$ est inversible dans A. On conclut aussitôt de là que si $X' = S(X)$, $Y' = S(Y)$ sont deux espaces préalgébriques sur k, tout morphisme $X' \to Y'$ d'*espaces* k*-annelés* est aussi un morphisme d'*espaces localement* k*-annelés* (**0**, 4.1.12). D'ailleurs, avec les notations précédentes, si A et B sont des k-algèbres de type fini, φ fait de B une A-algèbre de type fini; donc *tout* morphisme $X' \to Y'$ de k-espaces annelés est, en vertu de (1.6), de la forme $S(f)$, où $f: X \to Y$ est un *morphisme de* k*-schémas*.

Enfin, pour tout ouvert U de X′, toute section $s \in \Gamma(U, \mathscr{O}_{X'})$, et tout $x \in U$, $s(x)$ (**0**, 4.1.9) s'identifie à un élément de k, et l'on a ainsi associé à s une application $\tilde{s}: x \mapsto s(x)$ de U dans k, autrement dit une section au-dessus de U du *faisceau* $\mathscr{A}(X')$ *des germes d'applications de* X′ *dans* k; comme l'application $h_U: s \mapsto \tilde{s}$ est évidemment un homomorphisme d'anneaux $\Gamma(U, \mathscr{O}_{X'}) \to \Gamma(U, \mathscr{A}(X'))$ et commute aux restrictions à un ouvert $V \subset U$, les h_U définissent un homomorphisme de *faisceaux d'anneaux* $h: \mathscr{O}_{X'} \to \mathscr{A}(X')$. Si l'on prend pour U un ouvert ultra-affine Spm(A), où A est anneau de Jacobson, dire que $\tilde{s} = 0$ signifie que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, s appartient à $\mathfrak{m}$, ou encore que s est dans le *radical* de A; mais comme A est un anneau de Jacobson, son radical est égal à son nilradical: pour que h_U soit injectif, il faut et il suffit par suite que A soit *réduit*.

(2.4) On dit que l'espace k-préalgébrique $X' = S(X)$ est *réduit* s'il en est ainsi de X; comme l'ensemble des points $x \in X$ où X est réduit est ouvert (**0**, 5.2.2), son complémentaire contient au moins un point fermé s'il est non vide (**IV***, 5.1.11), et

il revient donc au même de dire que X′ est réduit ou que chacun de ses anneaux locaux $\mathcal{O}_x$ (pour $x \in X'$) est *réduit*. On vient de voir dans (2.3) que pour que l'homomorphisme $h: \mathcal{O}_{X'} \to \mathscr{A}(X')$ soit *injectif*, il faut et il suffit que X′ soit *réduit*. Dans (FAC), Serre se borne en fait aux espaces préalgébriques *réduits*, ce qui lui permet de définir $\mathcal{O}_{X'}$ comme un *sous-faisceau* de $\mathscr{A}(X')$. On notera que si X′ et Y′ sont des k-espaces préalgébriques réduits, il en est de même de $X' \times_k Y'$: en effet, tout revient à voir que si A et B sont deux k-algèbres de type fini réduites, il en est de même de $A \otimes_k B$; mais nous avons vu que les radicaux de A et B sont alors réduits à 0, et comme k est algébriquement clos, A et B sont des algèbres «séparables» sur k au sens de Bourbaki (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 5, prop. 5); donc $A \otimes_k B$ est sans radical (*loc. cit.*, n° 6, cor. 3 du th. 3), et puisque c'est un anneau de Jacobson, il est réduit. Toutefois, si Z′ est un troisième espace préalgébrique sur k, le «produit fibré» $X' \times_{Z'} Y'$ de deux espaces préalgébriques réduits sur Z′ n'est pas réduit en général, ce qui implique que la catégorie de ces espaces est insuffisante dans de nombreuses questions (notamment dans la théorie des groupes algébriques). Mais comme on l'a vu ci-dessus, on peut garder le langage de Serre sans se limiter, comme ce dernier (qui en outre ne considère que des espaces préalgébriques *quasi-compacts*), au cas des espaces préalgébriques réduits.

(2.5) Enfin, on peut aussi considérer des ultra-schémas sur un corps k *quelconque* en conservant un langage qui reste proche de celui de Serre, et en introduisant, comme chez Weil, une extension algébriquement close *fixe* K de k (choisie assez grande, par exemple de degré de transcendance infini sur k, pour avoir suffisamment de «points génériques» au sens de Weil). A tout schéma X localement de type fini sur k, on associe alors l'ensemble $S_K(X) = S(X \otimes_k K)$ des points de X à valeurs dans K; on a une application canonique $j: S_K(X) \to X$ que l'on démontre être un quasi-homéomorphisme quand on munit $S_K(X)$ de la topologie image réciproque de celle de X par j; on munit $S_K(X)$ du faisceau de k-algèbres $j^{-1}(\mathcal{O}_X)$, et on obtient ainsi une sous-catégorie de la catégorie des espaces localement k-annelés, que l'on pourrait appeler catégorie des (k, K)-espaces préalgébriques. On peut montrer qu'on y peut encore définir des produits et généraliser les résultats de (2.3) et (2.4) ($\mathscr{A}(X')$ étant ici remplacé par le faisceau $\mathscr{A}_K(X')$ des germes d'applications de X′ *dans* K). Toutefois ce point de vue fait jouer un rôle artificiel à un surcorps arbitrairement choisi de k, et nous ne le signalons que pour le rejeter.

Bibliographie

[1] Bourbaki, N.: Eléments de Mathématique: Algèbre commutative, chap. I—VII (Actual. Scient. et Industr., n°s 1290, 1293, 1308, 1314), Paris: Hermann 1961—1965.

[2] Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological algebra, Princeton Math. Series. Princeton: University Press 1956.

[3] Demazure, M., Gabriel, P.: Groupes algébriques. Amsterdam: North-Holland; Paris: Masson 1970.

[4] Giraud, J.: Cohomologie non abélienne, Paris: Thèse.

[4 bis] — Cohomologie non abélienne. Heidelberg: Springer 1970.

[5] Godement, R.: Théorie des faisceaux. Actual. Scient. et Industr., n° 1252, Paris: Hermann 1958.

[6] Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. Journ., t. IX (1957), p. 119—221.

[7] — Fondements de la géométrie algébrique. Extraits du Séminaire Bourbaki 1957—1962. Paris: Secrétariat math., 11, R. Pierre Curie, 5 .

[8] Kähler, E.: Geometria arithmetica, Ann. di Mat. (4), t. XLV (1958), p. 1—368.

[9] Mac Lane, S.: Homology: Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.

[10] Mitchell, B.: Theory of Categories. New York: Academie Press 1965.

[11] Mumford, D.: Geometric invariant theory. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

[12] — Lectures on curves on an algebraic surface. Annals of Math. Studies, n° 59. Princeton: University Press 1966.

[13] — Introduction to algebraic geometry (Mimeographed Notes, Harvard University, s. d.).

[14] Néron, A.: Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux (Publ. math. I.H.E.S., n° 21, 1964).

[15] Serre, J. P.: Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math., t. LXI (1955), p. 197—278.

[16] Dix exposés sur la cohomologie des schémas par J. Giraud, A. Grothendieck, S. L. Kleiman, M. Raynaud et J. Tate. Amsterdam: North-Holland; Paris: Masson 1968.

[SGA] Séminaire de géométrie algébrique: 1: 1960—61 (A. Grothendieck); 2: 1962 (A. Grothendieck) (édité séparément par North-Holland et Masson, 1968); 3: 1963—64 (M. Demazure et A. Grothendieck); 4: 1963—64 (M. Artin et A. Grothendieck); 5: 1965—66 (A. Grothendieck et al.); 6: 1966—67 (P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie); 7: 1967—68 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures s/Yvette).

Index des notations

Ens (catégorie des ensembles): **0**, 1.1.1

$\mathbf{h}_X(Y)$, $\mathbf{h}_X(u)$ (X, Y objets d'une catégorie C, u morphisme de C): **0**, 1.1.1

$\boldsymbol{Hom}(C^\circ, \boldsymbol{Ens})$ (catégorie des morphismes fonctoriels de C° dans ***Ens***): **0**, 1.1.2

$C_{/S}$ (catégorie des S-objets de C): **0**, 1.1.11

$\Gamma(X/S)$ (ensemble des S-sections de $u: X \to S$): **0**, 1.1.11

$\mathbf{h}'_X(Y)$, $\mathbf{h}'_X(u)$ (X, Y objets d'une catégorie C, u morphisme de C): **0**, 1.1.12

$X \times Y$ (produit dans une catégorie C): **0**, 1.2.1

$X \times_S Y$ (produit fibré sur S des objets X, Y): **0**, 1.2.2

$\mathrm{Hom}_S(U, V)$ (ensemble des S-morphismes $U \to V$): **0**, 1.2.2

$(f, g)_S$, (f, g) (S-morphisme $T \to X \times_S Y$ correspondant à $f: T \to X$ et $g: T \to Y$): **0**, 1.2.3

$u \times_S v$ (S-morphisme $X' \times_S Y' \to X \times_S Y$ correspondant à $u: X' \to X$ et $v: Y' \to Y$): **0**, 1.2.4

Γ_f (morphisme graphe de f): **0**, 1.2.11

$X_1 \times_S X_2 \times_S \cdots \times_S X_n$, $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n}{}_S\, X_i$ (produit fibré de n objets): **0**, 1.2.13

$f_1 \times_S f_2 \times_S \cdots \times_S f_n$, $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n}{}_S\, f_i$ (S-morphisme correspondant aux S-morphismes $f_i: X_i \to Y_i$): **0**, 1.2.13

$X \amalg_S Y$ (somme amalgamée sur S des objets X, Y): **0**, 1.2.16

$X_{(\varphi)}$, $X_{(S')}$ (image réciproque du S-objet X par le changement de base $\varphi: S' \to S$): **0**, 1.3.1

$f_{(S')}$ (image réciproque du S-morphisme f par le changement de base $S' \to S$): **0**, 1.3.1

$\mathrm{Ker}(f_1, f_2)$ (noyau de deux morphismes $X \to Y$): **0**, 1.4.2

$N \xrightarrow[j]{} X \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightrightarrows}} Y$ (diagramme de morphismes): **0**, 1.4.2

$\Delta_{X|S}$, Δ_φ, Δ_X, Δ (morphisme diagonal $X \to X \times_S X$): **0**, 1.4.3

$\mathrm{Ker}(u_1, u_2, u_3)$ (objet des coïncidences de trois morphismes): **0**, 1.4.13

$u^\#$ (objet de $\mathrm{Hom}_{C'}(F(T), X')$ correspondant à $u \in \mathrm{Hom}_C(T, F^{ad}(X'))$): **0**, 1.5.2

$u'^\flat$ (objet de $\mathrm{Hom}_C(T, F^{ad}(X'))$ correspondant à $u' \in \mathrm{Hom}_{C'}(F(T), X')$): **0**, 1.5.2

F^{ad} (foncteur adjoint à droite): **0**, 1.5.2

$v^\flat$ (objet de $\mathrm{Hom}_{C'}(X', F(T))$ correspondant à $v \in \mathrm{Hom}_C({}^{ad}F(X'), T)$): **0**, 1.5.3

$v'^\#$ (objet de $\mathrm{Hom}_C({}^{ad}F(X'), T)$ correspondant à $u \in \mathrm{Hom}_{C'}(X', F(T))$): **0**, 1.5.3

${}^{ad}F$ (foncteur adjoint à gauche): **0**, 1.5.3

$\sigma_{X'}$, $\rho_{X'}$ (morphismes canoniques $F(F^{ad}(X')) \to X'$, $X' \to F({}^{ad}F(X'))$): **0**, 1.5.1 et **0**, 1.5.3

$\mathfrak{O}(X)$, $\mathfrak{F}(X)$, $\mathfrak{Zf}(X)$, $\mathfrak{C}(X)$, $\mathfrak{Gc}(X)$, $\mathfrak{Qc}(X)$, $\mathfrak{Gqc}(X)$ (X espace topologique): **0**, 2.6.1

Top (catégorie des espaces topologiques): **0**, 2.9.1

Sob (catégorie des espaces sobres): **0**, 2.9.1

${}^sX$ (espace sobre associé à un espace topologique X): **0**, 2.9.2

$\boldsymbol{Ouv}_X$ (catégorie des ouverts d'un espace topologique X): **0**, 3.1.1

$\mathscr{F}|U$, $u|U$ (préfaisceau induit par un préfaisceau $\mathscr{F}$, morphisme induit par un morphisme u, sur un ouvert U): **0**, 3.1.4
$\mathscr{F}_x$ (fibre en x d'un préfaisceau $\mathscr{F}$): **0**, 3.1.5
u_x (morphisme $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ correspondant en x à un morphisme de préfaisceaux $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$): **0**, 3.1.5
$\Gamma(U, \mathscr{F})$ (ensemble des sections de $\mathscr{F}$ au-dessus de U): **0**, 3.1.5
$s|V$ (restriction à $V \subset U$ d'une section $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$): **0**, 3.1.5
s_x (germe en x d'une section s): **0**, 3.1.5
$u(s)$ (image d'une section par un morphisme): **0**, 3.1.5
Supp($\mathscr{F}$) (support d'un faisceau $\mathscr{F}$): **0**, 3.1.5
$\psi_*(\mathscr{F})$ (image directe d'un pré faisceau $\mathscr{F}$ par une application continue ψ): **0**, 3.4.1
$\psi_*(u)$ (u morphisme de préfaisceaux): **0**, 3.4.2
ψ_x (morphisme $(\psi_*(\mathscr{F}))_{\psi(x)} \to \mathscr{F}_x$ en un point x): **0**, 3.4.4
$\mathrm{Hom}_\psi(\mathscr{G}, \mathscr{F})$ (ensemble des ψ-morphismes $\mathscr{G} \to \psi_*(\mathscr{F})$): **0**, 3.5.1
$\psi^{-1}(\mathscr{G})$ (image réciproque d'un préfaisceau $\mathscr{G}$): **0**, 3.5.3
$v \mapsto v^\flat$, $u \mapsto u^\#$ (isomorphisme de $\mathrm{Hom}_X(\psi^{-1}(\mathscr{G}), \mathscr{F})$ sur $\mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, \psi_*(\mathscr{F}))$ et son réciproque: **0**, 3.5.3
$\psi^{-1}(w)$ (w morphisme de préfaisceaux): **0**, 3.5.4
$\rho_\mathscr{G}, \sigma_\mathscr{F}$ (morphismes canoniques $\mathscr{G} \to \psi_*(\psi^{-1}(\mathscr{G}))$, $\psi^{-1}(\psi_*(\mathscr{F})) \to \mathscr{F}$): **0**, 3.5.3 et **0**, 3.5.4
$\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_{X,x}, \mathscr{O}_x$ (faisceau structural d'un espace annelé X, fibre de ce faisceau en $x \in X$): **0**, 4.1.1
$1, e$ (section unité du faisceau structural): **0**, 4.1.1
$\mathscr{F}, \wedge^p \mathscr{F}$ ($\mathscr{F}$ $\mathscr{O}_X$-Module): **0**, 4.1.5
$\mathscr{J}\mathscr{F}$ ($\mathscr{J}$ $\mathscr{O}_X$-Idéal, $\mathscr{F}$ $\mathscr{O}_X$-Module): **0**, 4.1.6
$\mathscr{O}_X^*$ (sous-faisceau de groupes multiplicatifs de $\mathscr{O}_X$): **0**, 4.1.8
$\mathscr{S}(\mathscr{O}_X)$ (faisceau des germes de sections régulières de $\mathscr{O}_X$): **0**, 4.1.8
$\mathfrak{m}_x$, $\kappa(x)$ (idéal maximal et corps résiduel de $\mathscr{O}_{X,x}$): **0**, 4.1.9
$f(x)$ (valeur d'une section en x): **0**, 4.1.9
X_f (ensemble des $x \in X$ où $f(x) \neq 0$): **0**, 4.1.9
$\Psi_*(\mathscr{F}), \Psi_*(u), \Psi_*(\mathscr{B})$ (image directe par $\Psi : X \to Y$ d'un $\mathscr{O}_X$-Module, d'un $\mathscr{O}_X$-homomorphisme, d'une $\mathscr{O}_X$-Algèbre): **0**, 4.2.1 et **0**, 4.2.4
$\mathscr{A}(X), \mathscr{A}(\mathscr{F}), \mathscr{A}(\mathscr{B})$ (image directe par $f : X \to S$, morphisme structural, de $\mathscr{O}_X$, d'une $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, d'une $\mathscr{O}_X$-Algèbre $\mathscr{B}$): **0**, 4.2.7
$\mathscr{A}(h)$ (image d'un S-morphisme $h : X \to Y$): **0**, 4.2.7
$\mathscr{A}(u)$ (image d'un $\mathscr{O}_Y$-homomorphisme $u : \mathscr{G} \to h_*(F)$): **0**, 4.2.7
$\Psi^*(\mathscr{G})$ (image réciproque d'un $\mathscr{O}_Y$-Module): **0**, 4.3.1
$\Psi^*(v)$ (image réciproque d'un $\mathscr{O}_Y$-homomorphisme): **0**, 4.3.1
$\Psi^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_X, \mathscr{J}\mathscr{O}_X, \mathscr{J}\mathscr{F}$ ($\mathscr{J}$ $\mathscr{O}_Y$-Idéal, $\mathscr{F}$ $\mathscr{O}_X$-Module): **0**, 4.3.5
$v_\mathscr{G}^\flat, v^\flat, u_\mathscr{G}^\#, u^\#$ ($v : \Psi^*(\mathscr{G}) \to \mathscr{F}$ $\mathscr{O}_X$-homomorphisme, $u : \mathscr{G} \to \Psi_*(\mathscr{F})$ $\mathscr{O}_Y$-homomorphisme): **0**, 4.4.3
$\rho_\mathscr{G}, \sigma_\mathscr{F}$ (homomorphismes canoniques): **0**, 4.4.3
Esp. ann, ***Esp. ann***$_{/S}$ (catégorie des espaces annelés, des S-espaces annelés): **0**, 4.5.3
Fais$_{\textbf{\textit{Esp. ann}}_{/S}}$ (catégorie des faisceaux d'ensembles sur la catégorie ***Esp. ann***$_{/S}$): **0**, 4.5.6
$\mathscr{L}^{-1}$ ($\mathscr{L}$ $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang 1): **0**, 5.4.3
$\Gamma_*(X, \mathscr{L}), \Gamma_*(\mathscr{L}), \Gamma_*(\mathscr{L}, \mathscr{F})$ ($\mathscr{L}$ $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang 1, $\mathscr{F}$ $\mathscr{O}_X$-Module): **0**, 5.4.6
$\mathfrak{M}(X), \mathfrak{M}_n(X)$ (ensemble de représentants de $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres de rang n): **0**, 5.6.1
$\mathrm{cl}(\mathscr{E})$ (classe d'un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre): **0**, 5.6.1
Pic(X) (groupe de Picard de X): **0**, 5.6.2
Pic(u) (homomorphisme de groupes de Picard): **0**, 5.6.4

$A\{T_1,\ldots,T_r\}$ (anneau de séries formelles restreintes): **0**, 7.5.1
$A\{S^{-1}\}$ (anneau complet de fractions): **0**, 7.6.1
$\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ ($\mathfrak{a}$ idéal ouvert de A): **0**, 7.6.9
$A_{\{f\}}, \mathfrak{a}_{\{f\}}, A_{\{S\}}$ (f élément de A, $\mathfrak{a}$ idéal ouvert de A, S ensemble multiplicatif d'éléments de A): **0**, 7.6.15)
$(M\otimes_A N)\hat{}$, $\tilde{M}\hat{\otimes}_{\tilde{A}}\tilde{N}$ (produit tensoriel complété): **0**, 7.7.1
$u\hat{\otimes}v$ (produit tensoriel complété d'homomorphismes): **0**, 7.7.3
Spec(A), $\mathfrak{j}_x$, $\mathfrak{m}_x$, $\kappa(x)$ (A anneau, $x\in$Spec(A)): **I**, 1.1.1
$f(x)$, M_x ($x\in$Spec(A), $f\in$A, M A-module): **I**, 1.1.1
r(E) (radical de l'idéal engendré par $E\subset A$): **I**, 1.1.1
V(E) (ensemble des $x\in$Spec(A) tels que $E\subset\mathfrak{j}_x$): **I**, 1.1.1
$V(f)$, $D(f)$, X_f ($f\in$A): **I**, 1.1.1
${}^a\varphi$, φ^x (φ homomorphisme d'anneaux): **I**, 1.2.1
S_f, A_f, M_f ($f\in$A, M A-module): **I**, 1.3.1
$\rho_{g,f}$, ρ^f_x ($D(f)\supset D(g)$, $x\in$Spec(A): **I**, 1.3.3
$\tilde{A}$, $\mathcal{O}_X$, $\tilde{M}$ (A anneau, X=Spec(A), M A-module): **I**, 1.3.4
θ_f ($f\in$A): **I**, 1.3.4
$\tilde{u}$ (u A-homomorphisme de A-modules): **I**, 1.3.5
Idem(A) (ensemble des idempotents de A): **I**, 1.3.15
A(X) (X schéma affine): **I**, 1.6.1
$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(X,Y)$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{loc}}(X,Y)$ (X,Y espaces localement annelés): **I**, 1.6.2
ρ_{loc}, ${}^a\varphi$ (φ homomorphisme d'anneaux): **I**, 1.6.3
$\mathcal{O}_{X/Y}$ (Y partie fermée irréductible d'un schéma): **I**, 2.1.6
Sch (catégorie des schémas): **I**, 2.3.1
$\mathfrak{J}$ $\mathscr{J}$ ($\mathfrak{J}$ idéal de A, X A-schéma, $\mathscr{F}$ $\mathcal{O}_X$-Module): **I**, 2.3.2
$\boldsymbol{Sch}_S$ (catégorie des S-schémas): **I**, 2.3.6
Aff (catégorie des schémas affines): **I**, 2.3.6
$\boldsymbol{Fais}_{/Sch}$, $\boldsymbol{Fais}_{/Aff}$ (catégories des faisceaux d'ensembles sur ***Sch*** et ***Aff***): **I**, 2.3.6
$\{y\}$ (Spec($\kappa(y)$) par abus de langage): **I**, 2.5.5
$\{y\}\to Y$, $y\to Y$ (morphisme canonique pour $y\in Y$): **I**, 2.5.5
$\mathrm{Hom}_S(X,Y)$ (ensemble des S-morphismes $X\to Y$): **I**, 2.6.2
$\coprod_\alpha X_\alpha$, $X_1\amalg X_2\amalg\cdots\amalg X_n$ (somme de schémas): **I**, 3.1
$X\times_S Y$, $X\times_A Y$ (produit de S-schémas, de A-schémas (A anneau)): **I**, 3.2.2
$X\otimes_S B$, $X\otimes_A B$ (Spec(B) S-schéma, B A-algèbre): **I**, 3.2.2
$(g,h)_S$ ($g:T\to X$, $h:T\to Y$, S-morphismes): **I**, 3.2.2
$u\times_S v$ ($u:X'\to X$, $v:Y'\to X$ S-morphismes): **I**, 3.2.2
$(g,h)_A$, $u\times_A v$ (g,h,u,v A-morphismes): **I**, 3.2.2
$\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathscr{G}$, $\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G}$ ($\mathscr{F}$ $\mathcal{O}_X$-Module, $\mathscr{G}$ $\mathcal{O}_Y$-Module): **I**, 3.3.1
$f^{-1}(s)$, X_s (fibre en un point $s\in S$ d'un morphisme $f:X\to S$): **I**, 3.4.7
f_s ($f:X\to Y$ S-morphisme, $s\in S$): **I**, 3.4.8
X(T) (X,T schémas): **I**, 3.5.1
$X(T)_S$ (X,T S-schémas): **I**, 3.5.2
X(B), $X(B)_A$ (A,B anneaux): **I**, 3.5.3
$f^{-1}(Y')$ ($f:X\to Y$ morphisme, Y' sous-schéma de Y): **I**, 4.3.1
$Z\leqslant Y$ (Y,Z sous-schémas de X): **I**, 4.3.8
$\mathcal{N}_X$ (nilradical du schéma X): **I**, 4.5.1
X_{red} (schéma réduit associé à X): **I**, 4.5.3
f_{red} (f morphisme): **I**, 4.5.10
rg(X) (X schéma fini sur un corps K): **I**, 6.5.6
n(X) (nombre géométrique de points d'un schéma X fini sur un corps K): **I**, 6.5.9
$\overline{\mathscr{G}}$ (prolongement en un sous-faisceau de $\mathscr{F}$ d'un sous-faisceau $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}|U$): **I**, 6.9.1
$\mathscr{F}^{\mathrm{cons}}$ (topologie constructible sur un schéma): **I**, 7.2.11

X^{cons} (schéma X muni de la topologie constructible): **I**, 7.2.11
f^{cons} (f morphisme): **I**, 7.2.12
$f|U$ (restriction à un ouvert U d'une application rationnelle): **I**, 8.1.2
R(X) (anneau des fonctions rationnelles sur un schéma X): **I**, 8.1.3
$\mathrm{codim}_Y F$ (codimension d'une partie F d'un schéma Y): **I**, 8.2.10
$\mathscr{R}(X)$ (faisceau des fonctions rationnelles sur un schéma X): **I**, 8.3.2
Spec($\mathscr{B}$) (spectre d'une $\mathscr{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$): **I**, 9.1.8
Aff(X/S), X^0 (enveloppe affine d'un S-schéma X): **I**, 9.1.21
g^0 (g S-morphisme): **I**, 9.1.21.5
$\tilde{\mathscr{M}}$ ($\mathscr{M}$ $\mathscr{B}$-Module quasi-cohérent): **I**, 9.2.4
Daf(U/S) (défaut d'affinité d'un ouvert U de S): **I**, 9.3.7
S(E), $S_A(E)$ (algèbre symétrique d'un A-module E): **I**, 9.4.1
$\mathbf{S}(\mathscr{E})$, $\mathbf{S}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E})$ (Algèbre symétrique d'un $\mathscr{A}$-Module $\mathscr{E}$): **I**, 9.4.4
S(u) (u homomorphisme de A-Modules): **I**, 9.4.4
V($\mathscr{E}$) (fibré vectoriel sur S défini par un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$): **I**, 9.4.9
Al($\mathscr{E}$, $\mathscr{J}$) (foncteur ensembles algébriques défini par l'Idéal $\mathscr{J}$ de $S(\mathscr{E})$): **I**, 9.5.2
Al($\mathscr{E}$, $\mathscr{J}$) (S-schéma en ensembles algébriques défini par $\mathscr{J}$): **I**, 9.5.3
Hom($\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$) ($\mathscr{E}$ $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent, $\mathscr{F}$ $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang fini): **I**, 9.6.1
End($\mathscr{E}$) ($\mathscr{E}$ $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang fini): **I**, 9.6.2
GL(E) (groupe d'automorphismes d'un A-module E): **I**, 9.6.3
GL(n,A) (groupe d'automorphismes du A-module A^n): **I**, 9.6.3
GL($\mathscr{E}$) ($\mathscr{E}$ $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang fini): **I**, 9.6.4
$\mathbf{G}^n$(E) (grassmannienne d'un espace vectoriel E): **I**, 9.7.1
P(E) (espace projectif associé à l'espace vectoriel E): **I**, 9.7.1
$\mathrm{Grass}_n(\mathscr{E})$ (foncteur grassmannienne d'un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$): **I**, 9.7.3
$\mathrm{Grass}_n(g)$ (g S-morphisme): **I**, 9.7.3
$\mathbf{Grass}_n(\mathscr{E})$ (grassmannienne d'un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$): **I**, 9.7.5
$\mathbf{P}(\mathscr{E})$ (fibré projectif défini par un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$): **I**, 9.7.5
$\mathbf{Grass}_n(g)$ (g épimorphisme de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents): **I**, 9.7.8
$\omega_{\mathscr{E}}$ (morphisme de Plücker): **I**, 9.8.1
$\varsigma_{\mathscr{E},\mathscr{F}}, \varsigma$ (morphisme de Segre): **I**, 9.8.6
$\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(E)$ (ensemble des drapeaux de type **m** d'un espace vectoriel E): **I**, 9.9.1
$\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$ (ensemble des drapeaux de type **m** dans un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$): **I**, 9.9.2
$\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(g)$ (g S-morphisme): **I**, 9.9.2
$i_{\mathscr{E}}$ (immersion d'un fibré en drapeaux dans un produit de grassmanniennes): **I**, 9.9.3
$\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$ (fibré en drapeaux de type $\boldsymbol{m}$ d'un $\mathscr{O}_S$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$): **I**, 9.9.4
$\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(u)$ (u épimorphisme de $\mathscr{O}_S$-Modules quasi-cohérents): **I**, 9.9.6
$\mathrm{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E})$ (ensemble des décompositions de Stiefel de type $\boldsymbol{p}$ d'un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang fini $\mathscr{E}$): **I**, 9.10.1
$\mathbf{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E})$ (fibré en variétés de Stiefel d'un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang fini $\mathscr{E}$): **I**, 9.10.2
Spf(A) (spectre formel d'un anneau topologique admissible A): **I**, 10.1.2
$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (faisceau structural sur le spectre formel $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$): **I**, 10.1.2
$\mathfrak{D}(f)$ ($f \in A$, A anneau topologique admissible): **I**, 10.1.4
$\tilde{\varphi}$ ($\varphi : B \to A$ homomorphisme continu d'anneaux admissibles): **I**, 10.2.1
$\mathfrak{J}^{\Delta}$ ($\mathfrak{J}$ idéal ouvert d'un anneau admissible): **I**, 10.3.1
$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ (ensemble des $\mathfrak{S}$-morphismes $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{S}$-schémas formels): **I**, 10.4.7
$\mathfrak{X}_{\mathrm{red}}$ ($\mathfrak{X}$ schéma formel): **I**, 10.5.4
$\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$ (produit de $\mathfrak{S}$-schémas formels): **I**, 10.7.3

$\mathscr{F}_{/X'}$, $\hat{\mathscr{F}}$ (complété d'un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ le long d'un sous-schéma X′ de X): **I**, 10.8.2
$u_{/X'}$ $\hat{u}$ (u homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents): **I**, 10.8.2
$X_{/X'}$, $\hat{X}$ (X schéma, X′ partie fermée de X): **I**, 10.8.3
i_X (morphisme canonique $X_{/X'} \to X$): **I**, 10.8.5
γ (homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to \psi_*(\mathscr{F}_{/X'})$): **I**, 10.8.5
$\hat{f}$ (f morphisme de schémas usuels): **I**, 10.9.1
M^Δ, u^Δ (M A-module, u A-homomorphisme de A-modules, A anneau adique): **I**, 10.10.1
$\Delta_{\mathfrak{X}|\mathfrak{S}}$, $\Delta_{\mathfrak{X}}$ ($\mathfrak{X}$ schéma formel): **I**, 10.15.1
$S(\mathfrak{X})$ (espace annelé associé à un schéma de Jacobson): **App.**, 1.1
$S(f)$ (f morphisme localement de type fini de schémas de Jacobson): **App.**, 1.2
Spm(A) (spectre maximal d'un anneau de Jacobson A): **App.**, 1.3
$D^m(h)$ (h élément d'un anneau de Jacobson): **App.**, 1.3

Index terminologique

Adhérence schématique d'un sous-schéma: **I**, 6.10.2
$\mathscr{A}$-Algèbre ($\mathscr{A}$ faisceau d'anneaux commutatifs): **0**, 4.1.3
A-algèbre topologique: **0**, 7.1.1
Anneau adique, $\mathfrak{J}$-adique: **0**, 7.1.9
— admissible: **0**, 7.1.2
— complet de fractions d'un anneau linéairement topologisé: **0**, 7.6.5
— de Jacobson: **I**, 6.4.1
— des fonctions rationnelles sur un schéma irréductible: **I**, 2.1.6
— de valuation: **0**, 6.5.6
— d'un schéma affine: **I**, 1.6.1
— formellement intègre: **0**, 6.5.14
— linéairement topologisé: **0**, 7.1.1
— local de dimension 1: **0**, 6.5.7
— — d'une partie fermée irréductible Y dans un schéma X, anneau local de X le long de Y: **I**, 2.1.6
— — unibranche, géométriquement unibranche: **0**, 6.5.10
— normal: **0**, 6.5.1
— préadique, $\mathfrak{J}$-préadique: **0**, 7.1.9
— préadmissible: **0**, 7.1.2
Annulateur d'un $\mathscr{O}_X$-Module: **0**, 5.3.10
Antifiltre: **0**, 2.1.8
Apparentés (sous-anneaux locaux —): **I**, 8.5.3
Application constructible: **0**, 2.5.1
— de Plücker: **I**, 9.8.1
— dominante: **0**, 2.1.12
— globalement constructible: **0**, 2.5.1
— ouverte en un point: **0**, 2.10.1
— rationnelle, S-application rationnelle: **I**, 8.1.2
— — définie en un point: **I**, 8.2.1
— — induite sur un ouvert: **I**, 8.1.2
— — — sur Spec($\mathscr{O}_{X,x}$): **I**, 8.2.8
Associé ($\mathscr{O}_X$-Module —) à un $\mathscr{A}$(X)-Module: **I**, 9.2.4
Calcul argument par argument: **0**, 1.1.13
Carré cartésien: **0**, 1.2.4
Centre d'un schéma local: **I**, 2.5.1
— d'un trait: **I**, 5.5.1
Codimension d'une partie d'un schéma: **I**, 8.2.10
Cohérent ($\mathscr{O}_X$-Module —): **0**, 5.3.1
Cohérente ($\mathscr{O}_X$-Algèbre —): **0**, 5.3.9
Complété d'un $\mathscr{O}_X$-Module, d'un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-Modules, le long d'une partie fermée: **I**, 10.8.2
— d'un schéma le long d'une partie fermée: **I**, 10.8.3
Composé d'un ψ-morphisme et d'un ψ'-morphisme de préfaisceaux: **0**, 3.5.2
— d'un Ψ-morphisme et d'un Ψ'-morphisme de Modules: **0**, 4.4.2
— de morphismes d'espaces annelés: **0**, 4.1.1
Condition de recollement: **0**, 3.3.1 et **0**, 4.1.7
Conoyau de deux morphismes: **0**, 1.4.14
Corps de base d'un schéma algébrique ou localement algébrique: **I**, 6.5.1
C-anneau, *C*-groupe, *C*-module, etc.: **0**, 1.6.3

Décomposition de Stiefel de type **p**: **I**, 9.10.1
Défaut d'affinité d'un ouvert dans un schéma: **I**, 9.3.7
Déterminant (section —): **I**, 9.6.4
Diagonale d'un schéma: **I**, 5.1.2
Diagramme exact d'applications: **0**, 1.4.1
— — de morphismes: **0**, 1.4.2
Di-homomorphisme de *C*-objets: **0**, 1.6.2
Domaine de définition d'une application rationnelle: **I**, 8.2.1
Drapeau de type m dans un espace vectoriel: **I**, 9.9.1

Drapeau de type **m** dans un Module quasi-cohérent: **I**, 9.9.2
Dual d'un $\mathcal{O}_X$-Module: **0**, 4.1.5

Elément topologiquement nilpotent d'un anneau topologique: **0**, 7.1.1
Engendré par une famille de sections ($\mathcal{O}_X$-Module —): **0**, 5.1.1
Endomorphisme universel: **I**, 9.6.4
Ensemble algébrique défini par un idéal $\mathfrak{I}$: **I**, 9.5.1
— — sur S défini par un Idéal $\mathscr{J}$: **I**, 9.5.2
— constructible: **0**, 2.3.10
— des coïncidences de deux applications: **0**, 1.4.1
— des coïncidences de plusieurs applications: **0**, 1.4.13
— globalement constructible, globalement quasi-constructible: **0**, 2.3.2
— ind-constructible: **I**, 7.2.2
— où s'annule une section d'un Module: **0**, 4.1.9
— pro-constructible: **I**, 7.2.2
— quasi-constructible: **0**, 2.3.10
— rétrocompact: **0**, 2.3.1
— submersif sur son image, universellement submersif sur son image: **I**, 3.10.2
— très dense: **0**, 2.6.3
Enveloppe affine d'un S-schéma: **I**, 9.1.21
Espace algébrique sur un corps algébriquement clos: **App.**, 2.2
— affine de dimension n sur un anneau: **I**, 9.5.1
— annelé: **0**, 4.1.1
— — induit sur une partie de l'espace sous-jacent: **0**, 4.1.2
— — intègre en un point, — normal en un point, — réduit en un point, — régulier en un point: **0**, 4.1.4
— — normal, — réduit, — régulier: **0**, 4.1.4
— — obtenu par recollement: **0**, 4.1.7
— — plat sur un espace annelé Y, espace annelé Y-plat: **0**, 5.7.1
— commutativement annelé: **0**, 4.1.1
— de Jacobson: **0**, 2.8.1
— de Kolmogoroff: **0**, 2.1.2
— dominant un autre espace: **0**, 2.1.12
— localement annelé: **0**, 4.1.9
— — irréductible: **0**, 2.1.6
Espace localement noetherien: **0**, 2.2.1
— préalgébrique sur un corps algébriquement clos: **App.**, 2.2
— — réduit: **App.**, 2.4
— projectif d'un espace vectoriel: **I**, 9.7.1
— sobre: **0**, 2.1.1
— sous-jacent à un espace annelé: **0**, 4.1.1
— topologiquement annelé: **0**, 4.1.1
Essentiellement de type fini (A-algèbre —): **0**, 6.3.14

Factorisation canonique d'une immersion: **I**, 4.2.1
Faisceau associé à un préfaisceau: **0**, 3.5.6
— à valeurs dans une catégorie: **0**, 3.1.1
— cohérent d'anneaux: **0**, 5.3.9
— d'anneaux intègre en un point, — normal en un point, — réduit en un point, — régulier en un point: **0**, 4.1.4
— — normal, — réduit, — régulier: **0**, 4.1.4
— — gradués: **0**, 4.1.4
— défini sur une base d'ouverts: **0**, 3.2.2
— des fonctions rationnelles sur un schéma: **I**, 8.3.2
— de torsion d'un $\mathcal{O}_X$-Module: **I**, 8.4.1
— d'idéaux: **0**, 4.1.3
— induit sur un sous-ensemble:
— localement simple: **0**, 3.6.1
— obtenu par recollement: **0**, 3.3.1
— pseudo-discret: **0**, 3.9.1
— simple: **0**, 3.6.1
— structural d'un espace annelé: **0**, 4.1.1
— — sur Spec(A): **I**, 1.3.4
— sur Spec(A) associé à un A-module: **I**, 1.3.4
— sur la catégorie $\boldsymbol{Esp}_{\boldsymbol{ann}/S}$: **0**, 4.5.6
Fibre d'un faisceau: **0**, 3.1.5
— d'un morphisme de schémas (en tant que schéma): **I**, 3.4.7
— rationnelle sur K du fibré $V(\mathscr{E})$, au-dessus d'un point s: **I**, 9.4.10
Fibré en drapeaux de type **m** d'un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent: **I**, 9.9.4
— en variétés de Stiefel de type **p** d'un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre: **I**, 9.10.2

Fibré projectif défini par un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent: **I**, 9.7.5
— vectoriel défini par un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent: **I**, 9.4.9
Filtration $\mathfrak{J}$-préadique: **0**, 7.1.9
Foncteur adjoint à droite: **0**, 1.5.2
— — à gauche: **0**, 1.5.3
— pleinement fidèle: **0**, 1.1.5
— représentable: **0**, 1.1.8 et 1.1.12
— «ensemble algébrique défini par un Idéal»: **I**, 9.5.2
Fonction rationnelle sur un schéma: **I**, 8.1.2
Fondamental ($\mathcal{O}_X$-Module) sur une grassmannienne: **I**, 9.7.5

Générisation d'un point: **0**, 2.1.1
Gradué ($\mathcal{O}_X$-Module —): **0**, 4.1.4
Graphe d'un morphisme (en tant que schéma): **I**, 5.1.4
Grassmannienne d'un espace vectoriel: **I**, 9.7.1
— d'un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent: **I**, 9.7.5
Groupe de Picard d'un espace annelé: **0**, 5.6.2
— linéaire relatif à un A-module: **I**, 9.6.3

Homéomorphisme universel de schémas: **I**, 3.8.1
Homomorphisme canonique $\mathscr{G}' \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} g^*(f_*(\mathscr{F})) \to f'_*(\mathscr{G}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{F})$: **I**, 9.3.1
— continu de faisceaux d'anneaux topologiques: **0**, 3.1.3
— d'un $\mathcal{O}_Y$-Module dans un $\mathcal{O}_X$-Module: **0**, 4.4.1
— défini par une famille de sections d'un $\mathcal{O}_X$-Module: **0**, 5.1.1
— universellement injectif de $\mathcal{O}_X$-Modules libres: **0**, 5.5.5
Homomorphismes canoniques dans un produit tensoriel complété: **0**, 7.7.6
— d'objets d'une catégorie munis de lois de composition: **0**, 1.6.2

Idéal de définition d'un anneau admissible: **0**, 7.1.2
— de définition d'un schéma formel: **I**, 10.5.1
— de définition d'un schéma formel affine: **I**, 10.3.3
Ideal d'un faisceau d'anneaux: **0**, 4.1.3
Image directe d'un $\mathcal{O}_X$-Module: **0**, 4.2.1
— — d'un préfaisceau: **0**, 3.4.1
— d'une S-section: **I**, 5.1.4
— réciproque d'un $\mathcal{O}_Y$-Module: **0**, 4.3.1
— — d'un S-objet, d'un S-morphisme, par changement de base: **0**, 1.3.1
— — d'un préfaisceau: **0**, 3.5.3
— — d'un sous-schéma par un morphisme: **I**, 4.3.1
— réciproque d'une section d'un $\mathcal{O}_Y$-Module: **0**, 4.4.3
Image schématique d'un schéma par un morphisme: **I**, 6.10.1
Immersion canonique $X \times_S Y \to X \times_T Y$: **I**, 5.1.3
Immersion, immersion fermée, immersion ouverte de schémas: **I**, 4.2.1
—, immersion fermée d'espaces annelés **I**, 4.2.5
— fermée de schémas formels: **I**, 10.14.2
— locale en un point, immersion locale: **I**, 4.4.1
— ouverte d'espaces annelés: **0**, 4.5.1
Injection canonique d'un espace annelé induit sur un ouvert: **0**, 4.1.2
— — d'un sous-schéma: **I**, 4.1.4
— — d'un sous-schéma formel: **I**, 10.14.2
Inverse d'un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang 1: **0**, 5.4.3
Inversible ($\mathcal{O}_X$-Module —): **0**, 5.5.9
Isomorphisme associé à une immersion: **I**, 4.2.1
— d'objets d'une catégorie munis de lois de composition: **0**, 1.6.2
— local en un point, isomorphisme local: **I**, 4.4.2

Limite inductive dans une catégorie: **0**, 1.1.12
— projective dans une catégorie: **0**, 1.1.9
— — de $\mathcal{O}_X$-Modules: **I**, 10.6.6
Localement libre, localement libre de rang fini, localement libre de rang n ($\mathcal{O}_X$-Module —): **0**, 5.4.1
Localité d'un point à valeurs dans un anneau local: **I**, 3.5.4
Loi de composition interne, loi de composition externe sur un objet d'une catégorie: **0**, 1.6.1

Module ($\mathscr{O}_X$ —) sur un espace annelé: **0**, 4.1.3
A-module linéairement topologisé (A anneau linéairement topologisé): **0**, 7.1.1
— quasi-fini (A anneau local): **0**, 7.4.1
S-morphisme dans une catégorie $\boldsymbol{C}_{/S}$: **0**, 1.1.11
Morphisme codiagonal dans une catégorie: **0**, 1.4.14
— diagonal dans une catégorie: **0**, 1.4.3
Morphisme fonctoriel représentable dans une catégorie: **0**, 1.7.4
— — — par un morphisme appartenant à un ensemble $\mathscr{P}$ de morphismes d'une catégorie: **0**, 1.7.7
— graphe dans une catégorie: **0**, 1.2.11
— structural dans une catégorie $\boldsymbol{C}_{/S}$: **0**, 1.1.11
ψ-morphisme de préfaisceaux: **0**, 3.5.1
Morphisme d'espaces annelés: **0**, 4.1.1
— fidèlement plat d'espaces annelés: **0**, 5.7.7
— plat en un point, morphisme plat au-dessus d'un point, morphisme plat d'espaces annelés: **0**, 5.7.1
— d'espaces localement annelés: **0**, 4.1.12
Ψ-Morphisme de Modules: **0**, 4.4.1
Morphisme de préfaisceaux définis sur une base d'ouverts: **0**, 3.2.3
— de schémas affines: **I**, 1.6.5
— de schémas: **I**, 2.3.1
— de schémas au-dessus de S, S-morphisme de S-schémas A-morphisme (pour $S = \mathrm{Spec}(A)$): **I**, 2.6.1
— affine de schémas: **I**, 9.1.1
— birationnel de schémas: **I**, 2.3.4
— canonique $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_y/\mathfrak{a}_y) \to Y$ (Y schéma, $y \in Y$): **I**, 2.5.1 et 2.5.4
— canonique $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) \to \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} {}_S\mathbf{Grass}_{m_i}(\mathscr{E})$: **I**, 9.9.3
— — $\mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E}) \to \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}'}(\mathscr{E})$: **I**, 9.9.8
— — $\mathbf{Stief}_{\mathbf{p}}(\mathscr{E}) \to \mathbf{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathscr{E})$: **I**, 9.10.3
— de Plücker: **I**, 9.8.2
— de Segre: **I**, 9.8.6
— (de schémas) de présentation finie en un point, localement de présentation finie: **I**, 6.2.1
— (de schémas) de présentation finie: **I**, 6.3.7
Morphisme (de schémas) de type fini en un point, localement de type fini: **I**, 6.2.1
— (de schémas) de type fini: **I**, 6.3.2
— dominant de schémas: **I**, 2.3.3
— fermé de schémas: **I**, 2.3.3
— générisant en un point, morphisme générisant de schémas: **I**, 3.9.2
— injectif de schémas: **I**, 2.3.3
— (de schémas) majoré par une injection canonique: **I**, 4.1.5
— ouvert de schémas: **I**, 2.3.3
— (de schémas) ouvert en un point: **I**, 2.3.3
— de schémas possédant la propriété $\boldsymbol{P}$ universelle: **I**, 3.4.3
— quasi-compact de schémas: **I**, 6.1.1
— (de schémas) quasi-fini en un point, localement quasi-fini, quasi-fini: **I**, 6.11.3
— quasi-séparé de schémas: **I**, 6.1.3
— radiciel de schémas: **I**, 3.7.2
— (de schémas) radiciel en un point: **I**, 3.7.4
— (de schémas) schématiquement dominant: **I**, 5.4.2
— séparé de schémas: **I**, 5.2.1
— structural d'un S-schéma: **I**, 2.6.1
— submersif de schémas: **I**, 3.10.1
— surjectif de schémas: **I**, 2.3.3
— (de schémas) universellement bicontinu: **I**, 3.8.1
— (de schémas) universellement fermé: **I**, 3.8.1
— (de schémas) universellement générisant en un point, universellement générisant: **I**, 3.9.2
— (de schémas) universellement ouvert: **I**, 3.8.1
— (de schémas) universellement ouvert en un point: **I**, 3.8.5
— (de schémas) universellement submersif: **I**, 3.10.1
— de schémas formels affines: **I**, 10.2.2
— de schémas formels: **I**, 10.4.5
$\mathfrak{S}$-morphisme de $\mathfrak{S}$-schémas formels, A-morphisme (pour $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(A)$): **I**, 10.4.7
Morphisme adique de schémas formels: **I**, 10.12.1
— affine de schémas formels: **I**, 10.16.1
— de type fini de schémas formels: **I**, 10.13.3

Morphisme séparé de schémas formels: **I**, 10.15.1
— structural d'un $\mathfrak{S}$-schéma formel: **I**, 10.4.7
— d'ultraschéma: **App.**, 1.5

Nilidéal d'un faisceau d'anneaux: **0**, 4.1.3
Nilimmersion, nilimmersion localement nilpotente, nilimmersion nilpotente, nilimmersion nilpotente d'ordre n: **I**, 4.5.16
Nilradical d'une $\mathcal{O}_X$-Algèbre: **I**, 4.5.1
Nombre géométrique de points d'un K-schéma fini (K corps): **I**, 6.5.9
Noyau de deux applications: **0**, 1.4.1
— de deux morphismes: **0**, 1.4.2

Objet associé à un objet X′ relativement à un foncteur F: **0**, 1.5.1
— des coïncidences de deux morphismes: **0**, 1.4.2
— des coïncidences de plusieurs morphismes: **0**, 1.4.13
— final: **0**, 1.1.10
— initial: **0**, 1.1.12
S-objet dans une catégorie $C_{/S}$: **0**, 1.1.11
S′-objet déduit par changement de base d'un S-objet: **0**, 1.3.1
Ouvert affine: **I**, 2.1.1
— formel affine, ouvert formel affine adique, ouvert formel affine noethérien: **I**, 10.4.1
— ultra-affine: **App.**, 1.5

f-plat en un point, Y-plat en un point, f-plat au-dessus d'un point de Y, f-plat ($\mathcal{O}_X$-Module —): **0**, 5.7.1
Point de X à valeurs dans un anneau local, localisé en un point $x \in X$: **I**, 3.5.4
— d'un schéma à valeurs dans un anneau: **I**, 3.5.3
— d'un schéma à valeurs dans un schéma: **I**, 3.5.1
— (ou A-point) d'un A-schéma à valeurs dans une A-algèbre: **I**, 3.5.3
— (ou S-point) d'un S-schéma à valeurs dans un S-schéma: **I**, 3.5.2
— d'un S-schéma au-dessus de $s \in S$: **I**, 2.6.1
Point d'un S-schéma au-dessus d'un point $s \in S$ à valeurs dans un corps K: **I**, 3.5.4
— d'un S-schema au-dessus d'un point $s \in S$ à valeurs dans un corps K: **I**, 3.5.4
— fermé: **0**, 2.1.12
— générique: **0**, 2.1.1
— géométrique au-dessus d'un point de S: **I**. 3.5.4
— maximal: **0**, 2.1.1
— rationnel sur un corps: **I**, 3.5.5
Préfaisceau à valeurs dans une catégorie: **0**, 3.1.1
— constant: **0**, 3.6.1
— défini sur une base d'ouverts: **0**, 3.2.1
Présentation finie (A-algèbre de —): **0**, 6.3.5
— — ($\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente de —): **I**, 2.2.5
— — ($\mathcal{O}_X$-Module de —): **0**. 5.2.5
Produit dans une catégorie: **0**, 1.2.1
— de S-schémas: **I**, 3.2.2
— de $\mathfrak{S}$-schémas formels: **I**, 10.7.3
— fibré dans une catégorie: **0**, 1.2.2
— — de foncteurs: **0**, 1.7.2
— tensoriel de Modules sur des schémas différents: **I**, 3.3.1
— — complété d'algèbres: **0**, 7.7.5
— — — de modules: **0**, 7.7.1
— — de deux topologies de module: **0**, 7.7.2
Projections (première et seconde) d'un produit dans une catégorie: **0**, 1.2.1 et 1.2.2
Prolongement d'un morphisme de schémas aux complétés le long de parties fermées: **I**, 10.9.1
— canonique d'un sous-faisceau de la restriction d'un faisceau à un ouvert: **I**, 6.9.1
Puissance extérieure p-ème d'un $\mathcal{O}_X$-Module: **0**, 4.1.5

Quasi-cohérent ($\mathcal{O}_X$-Module —): **0**, 5.1.3
Quasi-cohérente ($\mathcal{O}_X$-Algèbre —): **0**, 5.1.3
Quasi-homéomorphisme: **0**, 2.7.2
Quasi-isomorphisme d'espaces annelés: **0**, 4.3.7
Quasi-section d'un morphisme de schémas: **I**, 6.11.4

Rang d'un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre: **0**, 5.4.1
— d'un $\mathcal{O}_X$-Module sans torsion: **I**, 8.4.2
— d'un K-schéma fini (K corps): **I**, 6.5.6
— séparable d'une K-algèbre finie, d'un K-schéma fini (K corps): **I**, 6.5.9
Rendre un point rationnel: **I**, 3.5.5
Restriction d'un espace annelé à un ouvert: **0**, 4.1.2
— d'un morphisme d'espaces annelés à un ouvert: **0**, 4.1.2
— d'un schéma à un ouvert: **I**, 2.1.7
— d'un morphisme à l'image réciproque d'un sous-schéma: **I**, 4.3.1
— d'une application rationnelle à un ouvert: **I**, 8.1.2

Sans torsion ($\mathcal{O}_X$-Module —): **I**, 8.4.1
Schéma: **I**, 2.1.2
— affine: **I**, 1.6.1
— artinien: **I**, 2.8.1
— connexe: **I**, 2.1.8
— de base: **I**, 2.6.1
— de Jacobson: **I**, 6.4.1
— induit sur un ouvert: **I**, 2.1.7
— intègre: **I**, 2.1.8
— irréductible: **I**, 2.1.8
— local, schéma local complet, schéma local en un point d'un schéma: **I**, 2.5.1
— localement intègre: **I**, 2.1.8
— — noethérien: **I**, 2.7.1
— noethérien: **I**, 2.7.1
— quasi-séparé: **I**, 6.1.3
— réduit associé à un schéma: **I**, 4.5.3
— semi-local, schéma semi-local complet: **I**, 2.5.1
— séparé: **I**, 5.2.1
A-schéma, schéma au-dessus d'un anneau A: **I**, 2.6.1
K-schéma algébrique sur K, localement algébrique sur K (K corps): **I**, 6.5.1
K-schéma fini sur K (K corps): **I**, 6.5.6
S-schéma, schéma au-dessus d'un schéma S: **I**, 2.6.1
— affine sur S, affine relativement à S: **I**, 9.1.1
— de présentation finie sur S: **I**, 6.3.7
— de type fini sur S: **I**, 6.3.2
S-schéma dominant S: **I**, 2.6.1
— en ensembles algébriques défini par un Idéal: **I**, 9.5.3
— en espaces affines défini par un Module localement libre: **I**, 9.5.3
— en groupes linéaires: **I**, 9.6.4
— en groupes orthogonaux, en groupes symplectiques: **I**, 9.6.6
— localement de presentation finie sur S: **I**, 6.2.1
— — de type fini sur S: **I**, 6.2.1
— quasi-compact sur S: **I**, 6.1.1
— quasi-fini sur S: **I**, 6.11.3
— quasi-séparé sur S: **I**, 6.1.3
— séparé sur S: **I**, 5.2.1
Schéma formel: **I**, 10.4.2
— — adique: **I**, 10.4.2
— — affine, schéma formel affine adique, schéma formel affine noethérien: **I**, 10.1.2 et 10.1.7
— — localement noethérien, schéma formel noethérien: **I**, 10.4.2
A-schéma formel, schéma formel au-dessus d'un anneau admissible A: **I**, 10.4.7
$\mathfrak{S}$-schéma formel, schéma formel au-dessus d'un schéma formel S: **I**, 10.4.7
— — adique: **I**, 10.12.1
— — affine sur $\mathfrak{S}$: **I**, 10.16.1
— — de type fini sur $\mathfrak{S}$: **I**, 10.13.3
— — séparé sur $\mathfrak{S}$: **I**, 10,15,1
Schémas (catégorie des —): **I**, 2.3.1
— affines (catégorie des —): **I**, 1.6.5
— formels (catégorie des —): **I**, 10.4.5
Section d'un faisceau au-dessus d'un ouvert: **0**, 3.1.5
S-section d'un objet de C_S: **0**, 1.1.11
— d'un S-schéma (en tant que sous-schéma): **I**, 5.1.4
Section formelle d'un Module au-dessus d'une partie fermée: **I**, 10.8.2
S-section rationnelle d'un S-schéma: **I**, 8.1.2
Section unité d'un faisceau d'anneaux: **0**, 4.1.1
— universelle de $\mathscr{E}_{(V(\mathscr{E}))}$ sur $V(\mathscr{E})$: **I**, 9.4.9
S-section universelle: **0**, 1.4.9
Somme amalgamée d'objets d'une catégorie: **0**, 1.2.16
— de schémas: **I**, 3.1

Sous-$\mathcal{O}_X$-Algèbre engendrée par un sous-Module: **0**, 4.1.3
Sous-catégorie, sous-catégorie pleine: **0**, 1.1.5
Sous-foncteur: **0**, 1.7.1
Sous-espace annelé: **I**, 4.2.5
Sous-schéma: **I**, 4.1.2
— associé à une immersion: **I**, 4.2.1
— défini par un Idéal: **I**, 4.1.1
— des coincidences de deux morphismes: **I**, 5.1.5
— fermé: **I**, 4.1.2
— schématiquement dense: **I**, 5.4.2
— formel fermé d'un schéma formel: **I**, 10.14.2
Spécialisation d'un point: **0**, 2.1.1
Spectre, spectre premier d'un anneau: **I**, 1.1.1
— d'une $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente: **I**, 9.1.8
— formel d'un anneau admissible: **I**, 10.1.2
— maximal d'un anneau de Jacobson: **App.**, 1.3
Support d'un faisceau de groupes: **0**, 3.1.5
— d'une section d'un faisceau de groupes, support fermé d'une section d'un faisceau de groupes: **0**, 3.1.5
Symétrique ($\mathcal{O}_X$-Algèbre — d'un Module): **I**, 9.4.4
Système fondamental d'idéaux ouverts, de sous-modules ouverts: **0**, 7.1.1
— — — de définition d'un schéma formel affine: **I**, 10.3.7
— — — de definition d'un schema formel: **I**, 10.5.1

Théorème de Chevalley: **I**, 7.1.4
Théorème de Krull-Akizuki: **0**, 6.4
Topologie $\mathfrak{J}$-adique sur un anneau admissible: **0**, 7.1.9
— canonique sur un anneau semi-local noethérien: **0**, 7.3.1
— constructible sur un schéma: **I**, 7.2.11
— déduite d'une topologie linéaire d'anneau sur un module: **0**, 7.1.1
— $\mathfrak{J}$-préadique sur un anneau préadmissible: **0**, 7.1.9 et 7.2.3
— spectrale: **I**, 1.1.2
Trait: **I**, 5.5.1
Type fini ($\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente de —): **I**, 2.2.5
— — ($\mathcal{O}_X$-Module de —): **0**, 5.2.1

Ultraschéma: **App.**, 1.5
R-ultraschéma: **App.**, 2.2

Valeur d'une section en un point: **0**, 4.1.9
Voisinage infinitésimal, voisinage infinitésimal d'ordre n d'un sous-schéma: **I**, 4.5.16