A letter from Grothendieck to Illusie

Buffalo le 3.5.1973

Cher Illusie,

Je t'envoie quelques afterthoughts de notre conversation mathématique sur les motifs. J'avais dit à tort que les isomotifs n'ont pas de "modules infinitésimaux", c'est-à-dire que si $i : S_0 \to S$ est une immersion nilpotente, le foncteur image inverse de motifs est une équivalence de catégories. Cela doit être vrai en car. $p > 0$ (plus généralement si $\mathcal{O}_S$ est annulé par une puissance de p), pour la raison heuristique (qu'on peut expliciter entièrement lorsqu'on travaille dans le contexte bien assis des schémas abéliens, ou des groupes de Barsotti-Tate) que lorsqu'on se ramène par dévissage au cas d'une nilimmersion d'ordre 1 ($J^2 = 0$), on peut définir une obstruction à la déformation sur S d'un homomorphisme (ou isomorphisme) de (pas iso) motif sur S_0, qui sera tué par p^i si p^i tue J, donc qui sera tué lorsqu'on passe aux *iso*motifs. Par contre, en caractéristique nulle, les schémas abéliens à isogénie près ont la même théorie des modules infinitésimaux que les schémas abéliens tout court, et il faut s'attendre à la même chose pour les motifs et isomotifs. En termes des théories de systèmes de coefficients de de Rham ou de Hodge, l'élément de structure "filtration de DR" introduit bel et bien un élément de continuité, qui a pour effet de rendre faux le fait que pour ces coefficients, le foncteur image inverse par nilimmersion soit une équivalence. Il semble que donc qu'il faille bannir cette propriété (hors du cas des schémas de torsion) du yoga des "coefficients discrets". À moins qu'il se trouve que les besoins du formalisme (construction de foncteurs adjoints du type Rf_* etc.) nous impose de modifier la notion de faisceau de Hodge ou de DR sur un schéma X, en partant du genre de notion que nous avions regardée ensemble, et en passant ensuite au catégories $Lim_{\to}$ des catégories correspondantes associées à X', où X' est réduit et $X' \to X$ est fini radiciel surjectif. Mais j'espère qu'il ne sera pas nécessaire de canuler ces notions ainsi. une question liée est celle-ci: si X est de car. 0, un motif serein sur X qui est "effectif de poids 1" définit-il bien un schéma abélien à isogénie près, ou seulement un schéma abélien à isogénie près au-dessus d'un X' comme ci-dessus? Ce dernier devrait être le cas en tout cas en car. $p > 0$, si on veut qu'un morphisme fini surjectif soit un morphisme de descente effective pour les isomotifs (et cela à son tour doit être vrai, étant vrai pour les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux, si on veut que le foncteur isomotifs $\to \mathbb{Q}_\ell$-faisceaux commute aux opérations habituelles et est fidèle–et on le veut à tout prix). Ainsi, en car. $p > 0$, si k est un corps, un isomotif effectif de poids 1 sur k devrait être, non un schéma abélien à isogénie près sur k, mais sur la clôture parfaite de k!

Je n'ai pas le cœur net non plus sur la nécessité de mettre du "iso" partout dans la théorie des motifs. Je ne serais pas tellement étonné qu'il y a en caractéristique nulle une théorie des motifs (et *pas* iso), qui s'envoie dans les théories ℓ-adiques (sur $\mathbb{Z}_\ell$, pas $\mathbb{Q}_\ell$) pour tout ℓ. Pour ce qui est des coefficients de Hodge, il devrait être assez trivial de les définir "pas iso", de telle façon que les $\mathbb{Z}$-faisceau de torsion algébriquement constructibles (sur X de type fini sur $\mathbb{C}$) en forment une sous-catégorie pleine, et avec un foncteur vers les $\mathbb{Z}$-faisceau algébriquement constructibles ("foncteur de Betti"). En caractéristique $p > 0$, j'ai des doutes très sérieux pour l'existence d'une théorie des motifs pas iso du tout, à cause des phénomènes de p-torsion (surtout pour les schémas qui ne sont pas projectifs et lisses). Ainsi, si on admet la description de Deligne des "motifs mixtes" de niveau 1 comme le genre de choses permettant de définir un H^1 motivique d'un schéma pas pas projectif ou pas lisse, on voit que déjà pour une courbe algébrique sur un corps imparfait k, la construction ne peut fournir en général qu'un objet du type voulu sur la clôture parfaite de k. par contre, il pourrait être vrai que seul la p-torsion canule, et qu'il suffise de localiser par tuage de p-torsion, c'est-à-dire moralement de travailler avec des catégories $\frac{\mathbb{Z}[1}{p]}$-linéaires. On aurait alors encore des foncteurs allant des "motifs" (pas iso) vers les $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux (quel que soit $\ell \neq p$) mais pas vers les F-cristaux, mais seulement vers les F-isocristaux. Dans cette théorie, on renoncerait donc simplement à regarder en car. p des phénomènes de p-torsion. Pourtant il est "clair" que ceux-ci existent et sont fort intéressants, tout au moins pour les morphismes propres et lisses, et on a bien l'impression que la cohomologie crystalline (plus fine que DR) pas iso en donne la clef. (Au fait, Berthelot est-il parvenu à des conjectures plausibles à ce sujet?) On peut donc espérer que pour les motifs sereins et semi-simples fibre par fibre, on a des catégories sur $\mathbb{Z}$, pas seulement sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, les Hom étant des $\mathbb{Z}$-modules de type fini. Cette impression peut être fondée par exemple sur le joli comportement des schémas abéliens sur les corps des fractions d'un anneau de val. discrète: dans la théorie de spécialisation, il se trouve qu'à aucun moment la p-torsion ne canule.

Bien sûr, alors même qu'on arriverait à travailler avec des catégories de motifs pas iso, dans "l'état actuel de la science", pour en déduire une théorie de groupes de Galois motiviques, étant obligé de s'appuyer sur ce que Saavedra a rédigé, on est obligé à tensoriser tout par $\mathbb{Q}$, et on ne trouve que des groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$ ou des extensions de $\mathbb{Q}$. Néanmoins, on a certainement dans l'idée que les "vrais" groupes de Galois motiviques (associés à des foncteurs-fibres comme la cohomologie ℓ-adique, ou la cohomologie de Betti) sont des schémas en groupes sur $\mathbb{Z}_\ell$ et sur $\mathbb{Z}$ plutôt que sur $\mathbb{Q}_\ell$ et sur $\mathbb{Q}$, et par là on devrait rejoindre le point de vue des groupes de type arithmétique de gens comme Borel, Griffiths, etc.

Encore une remarque: alors même qu'on travaille avec des isomotifs, on peut associer à un tel M quelque chose de mieux qu'une suite infinie de $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux (lorsqu'il y a une infinité de ℓ premiers aux car. résiduelles). En fait, on a ce qu'on pourrait appeler un faisceau "adélique", i.e. un faisceau de modules (moralement) sur l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. De façon précise, on peut considérer tous les $T_\ell(M)$ sauf un nombre fini comme étant des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux (pas seulement des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux). Éliminant toute métaphysique motivique, on peut dire que la théorie de Jouanolou écrite en fixant un ℓ, pourrait être développée avec des modifications techniques mineures pour avoir une théorie des "A-faisceaux", où A est l'anneau des adèles, ou un facteur direct A' de celui-ci obtenu en ne prenant qu'un paquet de nombres premiers (pas nécessairement tous). On obtient ainsi une théorie de coefficients (au sens technique dont nous avions discuté) ayant comme anneau de coefficients la $\mathbb{Q}$-algèbre A resp. A'. Comme A et A' sont "absolument plats", il n'y a pas introduction de $\underline{Tor}_i$ gênants et de canulars de degrés infinis dans cette théorie.

Pour en revenir au yoga des coefficients "discrets", où j'avais énoncé une propriété de trop apparemment, par contre il y en a une autre que nous n'avions pas explicitée. Il s'agit de la définition de l'objet de Tate sur S comme l'inverse de l'objet (inversible pour $\otimes$)

$$T(-1) = R^2 f_*(1_P) = R^2 g_!(1_E),$$

où $f : P \to S$ resp. $g : E \to S$ sont les projections de la droite projective resp. la droite affine sur

S. D'autre part, les objets (définis en fait sur le schéma de base S_0 de la théorie de coefficients) interviennent également dans la formulation des théorèmes de pureté relative ou absolue et la définition des classes fondamentales locales (qui, j'espère, doit être possible en termes des données initiales de la théorie de coefficients envisagée, sans constituer une donnée supplémentaire), et dans le calcul de $f^!$ pour f lisse (donc pour f lissifiable), pour ne parler que du démarrage du formalisme cohomologique. En fait, on les retrouve ensuite à chaque pas.

Une dernière remarque. Je crois qu'il vaudrait la peine de formaliser, dans le cadre d'une théorie de coefficients plus ou moins arbitraires, les arguments de dévissage qui ont conduit, dans le cas des coefficients étales, aux théorèmes de finitude pour Rf_* pour f propre, puis pour f séparé de type fini seulement (moyennant résolution des singularités). Ces dévissages apparaitraient maintenant comme des pas detinés à prouver *l'existence* de Rf_* (en même temps, s'il y a lieu, que sa commutation aux changements de base). À vrai dire, il n'est pas clair pour moi que l'on arrivera à des formulations qui s'appliqueraient directement aux $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux, disons; en fait, ce n'est pas ainsi que procède Jouanolou dans ce cas, qui au contraire se ramène aux énoncés déjà connus dans le cas des coefficients de torsion (procédé qui n'a guère de chance de s'axiomatiser dans le cas qui nous intéresse). Par contre, pensant directement au cas des motifs, on peut songer à utiliser un dévissage qui s'appuie entre autres sur les propriétés suivantes (quitte à se tirer par les lacets de souliers pour les établir chemin faisant): (a) un (iso)motif se dévisse en motifs sereins sur des schémas irréd. normaux (NB on suppose qu'on travaille sur des schémas excellents); (b) un motif serein sur un schéma normal irréductible se dévisse en motifs sereins "simples"–en fait, il suffit de faire le dévissage en le point générique; (c) un motif simple (pourvu qu'on remplace la base S par un voisinage ouvert assez petit du point générique) est un facteur direct d'un $R^if_*(1_X)$, où $f : X \to S$ est propre et lisse, tout du moins moyennant tensorisation par un objet de Tate $T(j)$ convenable. Ainsi, moyennant au moins deux gros grains de sel qu'il faudrait essayer d'expliciter un jour, les motifs généraux (toujours iso, bien sûr) se ramènent aux motifs plus ou moins naïfs tels qu'ils sont décrits notamment dans Manin et Demazure. Cela s'applique tout aux moins aux objets–quant aux morphismes, c'est une autre paire de manches– et encore pire pour les Ext^i... .

À ce propos, on peut se convaincre que l'application qui va des classes d'extension de deux motifs (dans la catégorie abélienne des motifs) vers le Ext^1 défini comme $Hom(M, N[1])$ (Hom dans la catégorie triangulée) ne devrait pas être bijective (mais sans doute injective). Plaçons-nous en effet sur une basse S spectre d'un corps fini, prenons pour M et N le motif unité $1_S = T_S(0) = T(0)$, de sorte que le Ext^1 n'est autre que $H^1(S, T(0))$. Les calculs ℓ-adiques du H^1 nous suggèrent fortement que le H^1 absolu motivique est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Q}$. Mais d'autre part les classes d'extension de $T(0)$ par $T(0)$ doivent être nulles (sur tout corps K) si M et N sont des motifs de poids r et s avec $r \neq s$, si on admet le yoga de la filtration d'un motif par poids croissants, avec gradué associé semi-simple. (NB En fait, sur un corps fini, la catégorie des motifs devrait être tout entière semi-simple, i.e. toute extension devrait être triviale, i.e. la filtration croissante précédente devrait splitter canoniquement: cela résulte du fait que l'endomorphisme de Frobenius du motif opère avec des "poids" différents sur les composantes des différents poids–plus un petit exercice de catégories tannakiennes.)

Bien cordialement

Alexandre