Mais où est le génie des maths ?

par Roman Ikonikoff

Lauréat de la médaille Fields et considéré comme le plus grand génie mathématique de ce siècle, Alexandre Grothendieck disparaît en 1991. Déjà, en pleine gloire, il avait pris ses distances par rapport au monde des mathématiciens, jusqu'à se faire ermite. Pourquoi en est-il arrivé là ?

En mai 1988, Alexandre Grothendieck fait sa dernière « apparition » publique. Par l'intermédiaire d'une lettre publiée dans le Monde, il annonce qu'il refuse le prix Crafoord, décerné par l'Académie royale des sciences de Suède, et le 1,5 million de francs (français) qui l'accompagne. « Je ne souhaite pas recevoir ce prix, (...) la fécondité se reconnaît par la progéniture, et non par les honneurs. » Il ne s'agit que d'un début... Trois ans plus tard, il disparaît, il a 63 ans.

Avant cette disparition, Grothendieck vivait déjà reclus comme un ermite, ne jouissant d'aucun confort moderne et ne mangeant que les produits de son verger. Ceux qui l'ont fréquenté à cette époque parlent d'un homme perturbé, au délire messianique et aux crises d'abattement profondes, dialoguant avec... Dieu et des anges. C'est pourtant bien le même homme qui, en 1966, recevait la médaille Fields (équivalent du prix Nobel pour les mathématiciens), les honneurs et l'admiration de la communauté mathématique mondiale.

Où est-il aujourd'hui ? « Je ne sais pas, quelque part dans le sud », « depuis 1991, les lettres que je lui ai envoyées sont revenues avec la mention "n'habite pas à l'adresse indiquée" », déclarent, gênés, ses anciens amis, collègues ou élèves. Ce silence sur son sort se brise pourtant lorsqu'il s'agit de parler de son génie. Pierre Cartier, son collègue et ami, évoque « la puissance de l'imagination et des rêves». Pour Luc Illusie, un de ses élèves thésards à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), à Bures-sur-Yvette, de 1964 à 1970, « il avait une vision d'harmonie globale des mathématiques et l'intuition lui montrait le chemin le plus simple. Son but était de trouver "le ferment universel", l'unité profonde des mathématiques, en s'élevant de degré en degré. Une de ses dernières créations s'intitule "les motifs". Il s'agit d'une méta-théorie (c'est-à-dire englobant tout). Comment ne pas sentir derrière les "motifs" l'idée de Dieu ? »

C'est pour son apport au renouveau de la géométrie algébrique que Grothendieck reçoit la médaille Fields. Mais, si tous les projecteurs l'éclairent, lui brille déjà par son absence : il refuse de se rendre au Congrès international de mathématiques de Moscou pour y recevoir la médaille, « en protestation contre les traitements infligés par les Soviétiques aux écrivains Siniavski et Daniel». Le monde découvre le génie et l'enfant terrible au même moment. Mais chaque « attitude déplacée » de Grothendieck (et il y en aura beaucoup) répond à une profonde blessure personnelle, et l'enfant terrible cède la place à l'enfant victime. Le refus de Grothendieck s'expliquerait par son attachement à un père (juif lituanien) qui fut compagnon de Lénine lors de la révolution d'octobre 1917, mais qui tomba en disgrâce et dut s'exiler en Allemagne, avant de périr dans le camp de concentration de Dachau en 1942.

André Magnier, ancien inspecteur général des mathématiques, évoque ce jeune homme fraîchement débarqué de Montpellier (où sa mère et lui avaient trouvé refuge, fuyant l'Allemagne nazie). Il voulait poursuivre ses études de mathématiques à Paris et cherchait une bourse. « A l'époque, en 1948, je faisais partie de l'Entraide universitaire de France. Comme Grothendieck était dans une situation de dénuement total, nous lui avons proposé de présenter un projet d'études. Je le reçus chez moi. Je fus stupéfait. Au lieu d'un entretien de vingt minutes, il passa deux heures à m'expliquer comment il avait reconstruit, "avec les moyens du bord", des théories qui avaient mis des siècles à se construire. Il montrait une sagacité extraordinaire. Je lui accordai immédiatement la bourse et le mis en contact avec Henri Cartan, qui l'admit à son cours de l'Ecole normale supérieure (ENS). Grothendieck donnait l'impression d'un jeune homme extraordinaire mais déséquilibré par la souffrance et la privation. »

Grothendieck suivra pendant un an le séminaire d'Henri Cartan, pépinière des futurs talents mathématiques. D'après ce dernier, « il avait, sur l'intégration, des idées très générales, de nature abstraite, contre lesquelles Jean Dieudonné et moi-même nous le mîmes en garde. Dieudonné lui indiqua des problèmes d'analyse fonctionnelle que ni lui ni Laurent Schwartz n'avaient pu résoudre. [...] Grothendieck resta alors silencieux puis, au bout de deux mois, il vint apporter la solution de ces problèmes. » Il ne s'arrêtera pas là, en six mois le jeune Grothendieck résoudra quatorze problèmes qui auraient fait chacun un bon sujet de thèse !

Pour ceux qui le fréquentèrent entre 1950 et 1970, ce qui le caractérisait était son intuition géniale, sa puissance de travail, sa passion et son talent d'animateur. Il travaillait les mathématiques de seize à dix-huit heures par jour. Michel Demazure, actuel directeur du palais de la Découverte et ancien élève thésard de Grothendieck, s'en souvient : « Grothendieck avait une vision très forte qui en imposait, et un rythme infernal. Pour lui tout était lié dans les mathématiques, le chemin était donc aussi important que le but. La démonstration d'un théorème n'était qu'un sous-produit de la démarche suivie qui devait, elle, répondre à une vision globale et harmonieuse. Sa devise était : "Pas de concession, pas d'économie, pas de faux semblants, pas de raccourcis" ! »

Luc Illusie se souvient que Cartan l'a orienté vers Grothendieck : « C'était le pape, j'étais terrifié ! [...] Je le voyais tous les deux mois. Il corrigeait mon travail de la semaine sur le fond et la forme, en noircissant mes pauvres feuilles. Vers 19 heures on dînait, puis il improvisait des mathématiques jusqu'à 23 heures et me raccompagnait au métro. Il était une telle source d'intuitions que, par peur de perdre des idées, je l'enregistrais sur bande magnétique. A l'époque il était gai, optimiste, joyeux, généreux et chaleureux. »

Grothendieck était alors un volcan en éruption, chaque jet de lave montait plus haut dans le ciel de l'abstraction mathématique. Pour pouvoir exploiter toutes ses intuitions, il avait besoin de l'armée des plus brillants mathématiciens. Elèves et professeurs, tous « mettaient la main à la pâte ».

La collaboration Grothendieck-Dieudonné-Serre restera l'une des plus fructueuses de l'histoire des mathématiques, c'est elle qui a conduit à la rédaction des Eléments de géométrie algébrique. Une oeuvre colossale. L'image un peu caricaturale de cette collaboration est celle d'un Grothendieck geyser - explosant d'idées et d'intuitions -, d'un Dieudonné encyclopédie - canalisant l'explosion - et d'un Serre provocateur - cherchant le contre-exemple -, trois visages pour une même création.

Et ce fut la rupture. La source qui semblait intarissable implosa. En 1970, ayant appris que l'IHES (où il travaillait depuis dix ans) recevait des subventions du ministère de la Défense, Grothendieck démissionna sans autre forme de procès. Il se mit à prêcher la nécessité d'arrêter immédiatement toute recherche en mathématiques, car elles conduisaient inévitablement à des applications militaires. Toujours en 1970, au Congrès international de mathématiques qui avait lieu à Nice, il vint faire de la propagande anti-mathématique et distribuer des exemplaires du bulletin écologiste qu'il avait créé, Survivre et vivre. Dieudonné, qui présidait le congrès, expulsa Grothendieck. La brouille entre les deux amis était inévitable.

Serre, qui sait que depuis sa démission de l'IHES Grothendieck est « au chômage », lui obtient un poste de professeur temporaire au Collège de France. Grothendieck prévient qu'il fera aussi de la propagande écologiste : son contrat ne sera pas renouvelé. C'est la rupture Grothendieck-Serre...

Petit à petit, Grothendieck se coupe de plus en plus des mathématiciens et surtout des mathématiques : il n'en fait quasiment plus. Revenu à Montpellier, il enseigne mais le cœur n'y est plus. Toute sa force se concentre maintenant dans l'action militante, avec l'enthousiasme et la naïveté qui le caractérisent. Malheureusement, si la naïveté était un des moteurs de son efficacité mathématique, en politique elle fera son malheur. L'action tourne court.

Cependant, le « fils prodige et mal aimé des mathématiques » ne peut rien contre son génie... Il produit, entre la fin des années 70 et le milieux des années 80, trois textes visionnaires et quasiment non encore exploités : A la poursuite des champs, la Longue Marche vers Galois et surtout Esquisse d'un programme, où il indique le chemin que les mathématiciens devraient emprunter pour continuer le mouvement de synthèse de la géométrie algébrique. Ce texte lui servira de dossier de candidature pour une réintégration au Centre national de la recherche scientifique (CNRS) en 1984. « Dans des conditions humiliantes », d'après Pierre Cartier.

Mais Grothendieck est fatigué, seul et de plus en plus amer. Il vit isolé dans un petit village du Vaucluse, partageant son temps entre le soin à ses vignes et la rédaction d'un plaidoyer pour sa réhabilitation intitulé Récoltes et Semailles, Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien. Cette œuvre de plus de 1 000 pages mélange autobiographie et griefs contre ses anciens collègues et amis qu'il accuse de l'avoir trahi. La trahison est double : on lui a volé ses idées et on a abâtardi les voies qu'il avait tracées pour les générations futures de mathématiciens. Luc Illusie, qui a voulu lui rendre hommage en publiant, en 1990, The Grothendieck Festschrift, se souvient du dernier coup de fil qu'il ait reçu de son ancien professeur : « Je t'ai écrit une lettre qui ne te fera pas plaisir », sa voix était calme et douce, la lettre, elle, sera très dure.

Depuis son entrée au CNRS, Grothendieck ne fait plus de mathématiques (ou du moins il ne fait plus circuler de textes). Il continue à écrire Récoltes... et pratique aussi la méditation nocturne. De mathématiques, ses visions sont devenues mystiques puis religieuses, prophétisant la fin du monde pour octobre 1996. « Et puis, un jour, à l'occasion de la réimpression de ses ouvrages, on s'est rendu compte qu'on avait totalement perdu sa trace », se souvient Cartier : on était en 1991, Grothendieck avait 63 ans. Depuis, plus rien...

Au-delà de la supposée folie de Grothendieck, Michel Demazure tente d'expliquer le phénomène de rejet qui a pu heurter l'hypersensibilité de Grothendieck jusqu'à le jeter dans la paranoïa : « Comme dans les autres sciences, les avancées en mathématiques suivent des phases alternatives. Il y a d'abord une phase d'accumulation d'éléments ponctuels disparates (théorèmes, conjectures, etc.) qui peuvent paraître parfois contradictoires. Puis arrive le moment de la synthèse où il ne sert plus à rien de cumuler des nouveaux "faits". C'est là qu'interviennent de grands esprits comme Grothendieck, ils vont construire des systèmes englobant, reliant et expliquant tous ces événements isolés. Mais, si Grothendieck allait toujours plus haut dans le degré de synthèse, nous, nous n'avions pas d'éléments "concrets" pour appréhender ces visions... Aujourd'hui, hélas, nous manquons cruellement d'un Grothendieck ».

Son génie a créé des « objets » mathématiques qui aujourd'hui encore trouvent des « débouchés » imprévisibles. Précisons par exemple que le théorème de Fermat, récemment démontré par l'Anglais Wiles, n'aurait pas pu l'être sans la géométrie arithmétique (sous-produit de la géométrie algébrique). Bien d'autres problèmes intervenant dans notre vie de tous les jours font appel à ses mathématiques, comme le codage des voix. Enfin, la physique elle-même fait de plus en plus appel à la géométrie algébrique pour tenter de résoudre les grandes énigmes de notre Univers.

Aujourd'hui, une chasse risque de s'ouvrir : celle du trésor caché de Grothendieck. « Il a peut-être dans ses tiroirs des manuscrits inconnus », entend-on souvent. Le « trésor » fait rêver plus d'un mathématicien. Mais il se pourrait aussi que celui-ci soit enfoui non pas sur une île déserte mais au fin fond de l'esprit de Grothendieck. Nul ne le sait. On ignore même s'il est encore vivant...

La contribution de Grothendieck

C'est sur la géométrie algébrique qu'a porté l'essentiel du travail de Grothendieck. Lorsqu'il s'intéresse à cette discipline, celle-ci est en pleine stagnation, à peine a-t-elle été secouée par quelques assauts rénovateurs de deux mathématiciens, André Weil, en 1946, et Jean-Pierre Serre, en 1955 (nous en reparlerons plus loin).

Pour saisir la portée de sa contribution, il faut revenir sur quelques notions fondamentales. Chaque courbe est caractérisée par une équation. Ainsi, dans le plan (noté R^2), si on repère la position d'un point par ses coordonnées, l'abscisse « x » et l'ordonnée « y », un cercle de rayon « a » aura pour équation $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, une ellipse $ax^2 + by^2 + c = 0$. Dans l'espace (noté R^3), on ajoute, à l'abscisse et l'ordonnée, une troisième coordonnée, la cote « z ». Ainsi, l'équation de l'ellipsoïde (ballon de rugby) s'écrira $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$.

La géométrie algébrique tente de caractériser ces objets (comme les courbes) par des propriétés qui leur sont intrinsèques, c'est-à-dire qui ne vont pas varier lorsqu'on fera subir à ces objets des transformations (un déplacement par exemple). On appelle l'ensemble de ces propriétés l'ensemble des invariants de l'objet. Chaque type d'objet dans un espace donné est donc entièrement défini par son ensemble des invariants. Cette caractérisation semble superflue dans les exemples précédents, car notre intuition suffit. Ça ne sera plus le cas lorsque l'on travaillera sur d'autres espaces.

Il arrive qu'une équation n'ait pas de solution réelle, comme $x^2 = -1$ ou $x^2 + y^2 + 1 = 0$. C'est ainsi qu'au XIXe siècle, les mathématiciens ont inventé un nouveau corps appelé corps des complexes (noté C), où toutes les équations ont des solutions, il est dit « algébriquement clos ». On a créé le plan complexe C^2 et l'espace complexe C^3.

Puis, au début du XXe siècle, on s'est senti à l'étroit dans le plan et l'espace, qu'il soit réel ou complexe. L'école allemande de mathématiques a alors développé la théorie des « ensembles algébriques de dimension quelconque de l'espace affine K^n », un espace à n dimensions où K est un corps algébriquement clos. Comme le dit justement Christian Houzel, professeur d'histoire des sciences à Paris VII, « pour le profane, cet appareil mathématique peut sembler bien loin de l'intuition géométrique. »

Souffrant sans doute de claustrophobie mathématique, on s'est encore senti à l'étroit dans K^n et c'est à ce moment que l'histoire moderne de la géométrie algébrique commence. En 1946, André Weil ouvre le feu en définissant la notion de « variété algébrique » qui remplace celle de « courbe » lorsque le corps algébriquement clos de base est abstrait. Une définition plus simple des variétés algébriques sera établie par Serre en 1955 dans un article fondateur intitulé « Faisceaux algébriques cohérents ».

Nous en arrivons à Grothendieck. S'inspirant des idées de Serre, celui-ci va généraliser la notion de variété algébrique à des corps de base abstraits non algébriquement clos, puis à des ensembles encore plus « pauvres » comme des anneaux. L'exemple type de l'anneau est l'ensemble des entiers positifs et négatifs (noté Z). Alors que, dans l'ensemble des réels, tout élément non nul possède un inverse (pour la multiplication), ceci n'est pas le cas dans Z. Nous voyons comment la géométrie algébrique a rejoint la théorie des nombres (qui travaille sur Z).

Grothendieck renouvellera le concept d' « espace topologique » en l'étendant à Z. La topologie est l'étude « du terrain » sur lequel on va mener les expériences mathématiques (équations, etc.). Sur le corps des réels le terrain est intuitivement dense, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de trous entre deux réels quelconques. On pourra y mener toute sorte d'expérience. En revanche, l'ensemble Z est plus troué que le gruyère ! Les expériences seront plus hasardeuses mais bien plus intéressantes. Grothendieck, en munissant Z d'une topologie, rend possible l'étude des invariants (par exemple : la dimension) de leurs variétés algébriques (c'est ce qu'il appelle la « cohomologie étale »).

Grothendieck a donc créé une théorie globale de l'étude des invariants, généralisant le cas particulier « réel ». Ainsi, il a audacieusement regroupé les deux grandes théories, celle des groupes (théorie de Gallois) et celle de la topologie classique (théorie de Poincaré).

L'autre apport de son travail a été de « transporter » la notion de géométrie dans l'arithmétique, permettant ainsi la résolution de problèmes jusque-là insolubles (comme le théorème de Fermat) avec la théorie classique des nombres.