DIX EXPOSES

SUR LA

COHOMOLOGIE DES SCHEMAS

Exposés de

J. GIRAUD
A. GROTHENDIECK
S. L. KLEIMAN
M. RAYNAUD
J. TATE

1968

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY - AMSTERDAM
MASSON & CIE, EDITEUR - PARIS

AVERTISSEMENT

Le présent fascicule réunit six exposés faits au Séminaire Bourbaki entre 1963 et 1966 (*), plus quatre autres exposés, qui n'avaient été accessibles jusqu'à présent que sous forme de "preprints". Les six exposés Bourbaki occupent un peu plus du quart du présent volume.

La motivation pour une telle publication séparée est la même que celle qui est exposée dans l'Avertissement à la collection analogue "Fondements de la Géométrie Algébrique" (Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie, Paris), consistant en des extraits du Séminaire Bourbaki de 1957 à 1962, dont le présent fascicule peut être considéré comme le prolongement naturel. Un trait distinctif du présent recueil par rapport au précédent, dont il est permis sans doute de se réjouir, est la multiplicité des auteurs contributeurs. Un autre est la différence dans le thème principal, qui est celui de la cohomologie des schémas dans le présent recueil (alors que c'était la technique de constructions de schémas dans le précédent). En fait tous les exposés présentés dans le présent recueil exposent, ou utilisent d'une façon essentielle, la théorie de la cohomologie étale (à l'exception de l'exposé IX (de A. Grothendieck), qui introduit une autre théorie cohomologique, inspirée par des idées de Manin et de Monsky et Washnitzer).
A ce titre le présent volume peut être utilisé comme une introduction à, et une motivation pour, l'étude de cette théorie. Il est destiné évidemment en premier lieu aux géomètres algébristes, ou tout au moins aux mathématiciens au courant de certaines notions de base de la géométrie algébrique, et dis-

(*) avec la gracieuse autorisation de Mr. N. Bourbaki, que je suis heureux d'en remercier ici.

posés à suppléer par l'imagination à celles qui pourraient leur manquer. L'exposé I (de J. GIRAUD) ne demande cependant aucune connaissance spéciale ; il présente les notions de site et de faisceau sur un site, sur lesquelles reposent tous les exposés suivants, et qui doivent pouvoir rendre des services analogues aux géomètres analystes et topologues. Les exposés III (de A. GROTHENDIECK), VII (de J. TATE) et X (de S. KLEIMAN) intéresseront plus particulièrement les arithméticiens ; l'exposé IX (de A. GROTHENDIECK), les topologues et les théoriciens des groupes. Signalons que le présent recueil n'a pas la prétention de donner un aperçu de tous les travaux récents intéressants concernant la cohomologie, ou plus généralement, la topologie des schémas. Parmi ces travaux mentionnons notamment ceux de M. Artin et B. Mazur sur la théorie homotopique des schémas, et ceux de D. Quillen appliquant leurs résultats à une conjecture bien connue de Adams en K-théorie, qu'il n'a malheureusement pas été possible d'inclure dans ce volume.

Bures-sur-Yvette, Septembre 1968

A. GROTHENDIECK

TABLE DES MATIERES

FORMULE DE LEFSCHETZ ET RATIONALITÉ DES FONCTIONS L

par Alexander GROTHENDIECK

1° Définitions des fonctions Z et L .

Soit X un schéma de type fini sur le corps premier $\underset{\sim}{F}_p$ (p nombre premier fixe). On définit avec A. WEIL la fonction $Z_X(t)$ par

$$Z_X(t) = \prod_{x \in X^0} \frac{1}{1 - t^{d(x)}} , \tag{1}$$

où x parcourt l'ensemble X^0 des points fermés de X , et $d(x)$ désigne le degré du corps résiduel $\kappa(x)$ sur $\underset{\sim}{F}_p$. C'est un produit infini dans l'anneau de séries formelles $\Omega[[t]]$, convergeant grâce au fait que X^0 ne contient qu'un nombre fini de points x avec $d(x)$ donné :

$$Z_X(t) = 1 + b_1 t + \ldots \quad .$$

Rappelons la formule (calcul immédiat)

$$\left\{ \begin{aligned} & \log Z_X(t) = \sum_1^\infty c_\nu(x) t^\nu / \nu \\ \text{i. e. :} \quad & \\ & t \frac{Z'_X(t)}{Z_X(t)} = \sum_1^\infty c_\nu(x) t^\nu , \end{aligned} \right. \tag{2}$$

où

$$c_\nu(x) = \operatorname{card} X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu}) \tag{3}$$

est le nombre des points de X à valeur dans l'extension $\underset{\sim}{F}_{p^\nu}$ de degré ν de $\underset{\sim}{F}_p$.

Ainsi, (c'est là son premier et principal intérêt) la connaissance de $Z_X(t)$ équivaut à celle des c_ν , i. e. à la connaissance de X du point de vue diophantien. A. WEIL avait conjecturé que cette fonction est rationelle, et cette conjecture a été prouvée par DWORK ([3], [6]), par une méthode "élémentaire" n'utilisant pas la cohomologie.

Si G est un groupe fini opérant sur X (à droite), M une représentation linéaire de G dans un vectoriel de dimension finie V sur un corps Ω de caractéristique 0 (on prenait classiquement $\Omega = \underset{\sim}{C}$), supposant que $Y = X/G$ existe, on définit plus généralement, avec E. ARTIN, une fonction

(4) $$L_{X,G,M}(t) = \prod_{y\in Y^0} \frac{1}{\text{dét}(1 - M^{\natural}(y)t^{d(y)})} ,$$

où

(5) $$M^{\natural}(y) = \frac{1}{\text{card } I_x} \sum_{\substack{g\in D_x \\ g\to f_x}} M(g) ,$$

x étant un point de X au-dessus de y , D_x le "groupe de décomposition" formé des $g \in G$ tels que $gx = x$, I_x le sous-groupe d'inertie de $g \in D_x$ opérant trivialement sur $\varkappa(x)$, f_x l'élément de Frobenius de $D_x/I_x \simeq \text{Gal}(\varkappa(x)/\varkappa(y))$:

$$f_x(\lambda) = \lambda^{p^{d(x)}} ,$$

(L'expression obtenue de $M^{\natural}(y)$ ne dépend manifestement pas du choix de x .) Ici il s'agit d'un produit infini convergeant dans $\Omega[[t]]$, et on obtient par un calcul immédiat

(6) $$\left\{\begin{array}{l} \log L_{X,G,M}(t) = \sum_1^\infty c_\nu(X , G , M)t^\nu/\nu \\ \text{i. e. : } \quad t\,\dfrac{L'_{X,G,M}(t)}{L_{X,G,M}(t)} = \sum_1^\infty c_\nu(X , G , M)t^\nu , \end{array}\right.$$

avec

(7) $$c_\nu(X , G , M) = \sum_{y\in Y(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})} \text{Tr}_M^{\natural} f_y ,$$

où on pose

(8) $$\text{Tr}_M^{\natural}(f_y) = \frac{1}{\text{card } I_x} \sum_{\substack{g\in D_x \\ g\to f_y}} \text{Tr}_M(g) ,$$

x étant un point de $X_{\underset{\sim}{F}_{p^\nu}}$ au-dessus du point y (rationnel sur $\underset{\sim}{F}_{p^\nu}$), f_y l'élément de Frobenius $f_y(\lambda) = \lambda^{p^\nu}$ de

$$D_x/I_x \simeq \text{Gal}(\varkappa(x)/\varkappa(y)) , \qquad (\varkappa(y) = \underset{\sim}{F}_{p^\nu}) .$$

Lorsque $G =$ groupe unité, $\dim V = 1$, on retrouve la fonction $Z_X(t)$.

2. Les conjectures de Weil.

WEIL avait conjecturé également que les fonctions L précédentes sont rationnelles. Comme il l'a montré dans [8], lorque X est projective et lisse sur $\underset{\sim}{F}_p$, la rationalité des fonctions L relatives à X serait une conséquence formelle de la formule de Lefschetz des points fixes, une fois qu'on disposerait d'une théorie de la cohomologie des variétés algébriques (sur un corps de définition k algébriquement clos) à coefficient dans le corps Ω de caractéristique 0 , satisfaisant aux propriétés formelles habituelles (théorème de finitude, formule de Künneth, dualité), permettant de déduire la formule de Lefschetz. Prenons pour simplifier le cas de la fonction Z ordinaire, et notant que $X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})$ n'est autre que l'ensemble des points fixes de f_X^ν dans $X(\overline{\underset{\sim}{F}}_p)$ (où $\overline{\underset{\sim}{F}}_p$ désigne une clôture algébrique de $\underset{\sim}{F}_p$), la formule de Lefschetz appliquée à f donnera en effet (X étant complète et lisse sur $\underset{\sim}{F}_p$, de dim n) :

$$c_\nu(X) = \sum_0^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr} f_i^\nu , \tag{9}$$

où f_i désigne l'endomorphisme de $H^i(\overline{X})$ induit par l'endomorphisme de Frobenius f_X de X , opérant sur $\overline{X} = X_{\overline{\underset{\sim}{F}}_p}$. Or cette formule équivaut, par un calcul formel immédiat, à la formule

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t)\ P_3(t)\ \dots}{P_0(t)\ P_2(t)\ \dots} , \tag{10}$$

où

$$P_i(t) = \text{dét}(1 - f_i\ t)$$

est le polynôme caractéristique de $f_i = f_X$ opérant sur $H^i(X)$. La formule (10) et son interprétation "cohomologique" forment le (1°) des célèbres "conjectures de Weil" [8]. Ces conjectures affirment de plus : (2°) que les coefficients des $P_i(t)$ sont des entiers rationnels, i. e. les racines inverses de P_i (i. e. les valeurs propres de f_i) sont des entiers algébriques, (3°) que la valeur absolue de ces entiers algébriques est $p^{i/2}$, et affirment enfin (4°) "l'invariance des nombres de Betti par spécialisation", notamment pour un schéma projectif lisse sur un corps de nombres.

Pour les fonctions L , la même méthode donnerait essentiellement une expression

$$L_{X,G,M}(t) = \frac{P_1^M(t)\ P_3^M(t)\ \dots}{P_0^M(t)\ P_2^M(t)\ \dots} , \tag{11}$$

avec

$$\begin{cases} P_i^M(t) = \text{dét}(1 - tf_{iM}) \\ f_{iM} = \text{opération induite par } f_X \text{ sur } H^i(X , V)^G = H^i(X) \otimes_G V , \end{cases}$$

(N. B. - On fait opérer G sur $H^i(X , V)$ via ses opérations sur X et sur V ...), et on a à cet égard des conjectures (1°) à (4°) analogues.

D'ailleurs, dans le cas où $\dim X = 1$, toutes les conjectures de Weil avaient été prouvées par WEIL lui-même [8], grâce au fait que la jacobienne de X fournit alors un substitut suffisant pour la cohomologie.

Grâce aux travaux de M. ARTIN et du conférencier ([2], [5]), nous disposons maintenant d'une théorie cohomologique des schémas satisfaisante, permettant de transposer en géométrie algébrique la formule de Lefschetz, et permettant de répondre par l'affirmative aux parties (1°) et (4°) des conjectures de Weil ([1]) (les conjectures (2°) et (3°) restant d'ailleurs non démontrées à l'heure actuelle). Cela établit donc en particulier la rationalité des fonctions L dans le cas d'un schéma X propre et lisse sur $\mathbb{F}_p$. Faute de disposer de la résolution des singularités en caractéristique $p > 0$, ce résultat ne contient d'ailleurs pas le résultat de DWORK, qui ne fait aucune hypothèse de lissité ou de propreté, mais doit en revanche se restreindre à la fonction Z_X , ou du moins doit faire des restrictions sur la représentation de G qui définit la fonction L envisagée.

Le but de cet exposé est de prouver le résultat de rationalité pour toutes les fonctions L envisagées au § 1, et même pour un type de fonctions L beaucoup plus général, associées à des faisceaux ℓ-adiques sur X . Nous donnerons en effet une expression explicite du style Lefschetz-Weil de ces fonctions. Les outils essentiels sont de deux sortes :

(a) Le formalisme de la "cohomologie à supports compacts" d'un schéma algébrique sur un corps k (qui avait été introduite par le conférencier tout d'abord pour les besoins d'une formulation satisfaisante du théorème de dualité en cohomologie étale). On peut dire, de façon générale, que les propriétés fonctorielles de la "cohomologie à supports compacts" sont exactement analogues à celles des fonctions L , ce qui permet de donner une formulation suffisamment générale et précise du théorème de rationalité (cf. § 5), pour réduire ce dernier au cas où X est une courbe projective et complète, mais pour un faisceau de coefficients arbitraire.

(b) Une formule de Lefschetz généralisée, due à J.-L. VERDIER, valable pour

([1]) Ce résultat avait été établi en avril 1963.

des variétés complètes et des faisceaux ayant des singularités plus ou moins arbitraires. Cette formule, dans le cas où X est de dim 1, donne directement l'expression explicite voulue.

Remarque. - La démonstration est valable modulo la vérification d'une forme particulière du théorème de Verdier que nous aurons à utiliser. Cette vérification n'a pas été faite à l'heure d'écrire cet exposé, mais me parait une pure question de routine, et nous la supposerons faite dans la suite de cet exposé ([2]).

3. Cohomologie étale à supports compacts et faisceaux ℓ-adiques.

Pour la notion d'espaces topologiques généralisés ("sites" et "topos"), de cohomologie des faisceaux sur de tels "espaces", et plus particulièrement pour la définition de la topologie étale d'un préschéma, des faisceaux pour icelle, et de la cohomologie étale pour ces faisceaux, je renvoie à [2] (cf. aussi [1], [4]). Les résultats établis dans [2] peuvent se résumer en disant que, à condition de se borner à des faisceaux de torsion sur le préschéma X, premier aux caractéristiques résiduelles de X, le formalisme habituel de la cohomologie des faisceaux est également valable dans le contexte présent, en utilisant toujours la topologie étale (ce que nous sous-entendrons par la suite). Je renvoie également au loco citato pour la définition et les propriétés des foncteurs $R^i_! f_*(F)$, cohomologie "à support propre sur S", qui est définie chaque fois qu'on a un morphisme $f : X \to S$ de type fini "compactifiable" (par exemple quasi-projectif) et que F est un faisceau de torsion. Ils coïncident avec les $R^i f_*(F)$ habituels lorsque f est propre. La notion naturelle de finitude de la théorie est celle de "faisceaux de torsion constructibles", ces faisceaux n'étant autres, lorsque X est noethérien, que les faisceaux de torsion sur X qui sont des objets noethériens de la catégorie des faisceaux.

Parmi les propriétés des $R^i_! f_*$, signalons :

(3.1) La formation des $R^i_! f_*(F)$ commute à tout changement de base.

(3.2) $R^i_! f_*(F)$ est constructible si F l'est.

(3.3) Pour un composé de deux morphismes compactifiables, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a la suite spectrale de Leray

$$R^*_!(gf)_* \Longleftarrow R^i_! g_*(R^j_! f_*) .$$

(3.4) Si U est un ouvert de X, Z son complémentaire, on a une suite exacte de cohomologie :

([2]) Voir la Note placée après la Bibliographie.

$$\dots \to R^i_! \, f_{U_*}(F|U) \to R^i_! \, f_*(F) \to R^i_! \, f_{Z_*}(F|Z) \to \dots .$$

(3.5) On a $R^i_! \, f_*(F) = 0$ si $i > 2n$, $n =$ dimension des fibres de $f : X \to S$.

Lorsque S est le spectre d'un corps k [3], et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, posons $\overline{X} = X_{\overline{k}}$, alors la connaissance de $R^i_! \, f_*(F)$, faisceau sur k, est équivalente à celle de sa "fibre" $R^i_! \, f_*(F)_{\overline{S}}$ relativement à $\overline{k}$, qui est un groupe abélien ordinaire sur lequel $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ opère continûment. Ce π-module sera noté $H^i_!(\overline{X}, F)$. Il est fini si F est constructible.

Pour la plupart des applications, on ne peut se limiter à des faisceaux de coefficient qui sont de torsion. Soit ℓ un nombre premier, nous appellerons faisceau ℓ-adique, ou $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau, sur le préschéma X, la donnée d'un système projectif $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de faisceaux, tels que, pour tout n, l'homomorphisme de transition $F_{n+1} \to F_n$ soit isomorphe au morphisme canonique $F_{n+1} \to F_{n+1} \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$, ce qui implique que chaque F_n est annulé par ℓ^n, i. e. est un $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$-module. Les faisceaux ℓ-adiques sur X forment une catégorie abélienne de façon évidente contenant les faisceaux de ℓ-torsion comme sous-catégorie pleine. C'est même une catégorie $\mathbb{Z}_\ell$-abélienne, i. e. on a un homomorphisme naturel de $\mathbb{Z}_\ell$ dans l'anneau des endomorphismes du foncteur identique de cette catégorie.

On dit que le faisceau ℓ-adique $F = (F_n)$ est constructible si tout ouvert affine U de X peut se décomposer en union de parties constructibles localement fermées Z_i, telles que les $F_n|Z_i$ soient tous localement constants, et constructibles (i. e. à fibres finies). Si X est localement noethérien, il (faut et) suffit pour cela que les F_n soient localement constructibles. On dit que le faisceau ℓ-adique $F = (F_n)$ est constant tordu constructible si les F_n sont localement constants et constructibles. Lorsque X est connexe, si a en est un point géométrique, alors on a une équivalence canonique entre la catégorie des faisceaux ℓ-adiques constants-tordus constructibles F sur X, et la catégorie des $\mathbb{Z}_\ell$-modules E de type fini sur lesquels $\pi_1(X, a)$ opère continûment à gauche, i. e. muni d'un homomorphisme continu de groupes compacts totalement discontinus :

$$(*) \qquad \pi_1(X, a) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(E) .$$

On fera attention qu'un tel F n'est généralement pas localement constant (même si X est le spectre d'un corps) en d'autres termes que l'homomorphisme $(*)$ ne se factorise pas en général à travers un groupe quotient fini de $\pi_1(X, a)$.

---

(3) Dans ce cas, un théorème de Nagata affirme d'ailleurs que tout schéma de type fini sur k est compactifiable.

Soient $F = (F_n)$ un faisceau ℓ-adique sur X, $f : X \to Y$ un morphisme compactifiable, avec Y localement noethérien, enfin $i \in \mathbb{Z}$, alors $(R^i_! f_*(F_n))_{n\in N}$ forme un système projectif de faisceaux de ℓ-torsion constructibles sur Y, dont nous admettrons ici (cf. [5]) qu'il satisfait la "condition de Mittag-Leffler", et admet une limite projective, notée $R^i_! f_*(F)$, dans la catégorie des faisceaux ℓ-adiques constructibles sur Y. Il y a lieu alors, par passage à la limite à partir du cas des coefficients de torsion, d'étendre tout le formalisme de la cohomologie aux faisceaux ℓ-adiques. Nous supposerons fait ce travail de fondements, et utiliserons librement le formulaire (3.1) à (3.5) pour les $R^i_! f_*(F)$, F faisceau ℓ-adique.

Il y a lieu également dans certaines questions de considérer la catégorie quotient de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques sur le préschéma X, par la sous-catégorie épaisse des faisceaux de ℓ-torsion (les objets de la catégorie sont appelés $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux). C'est une catégorie $\mathbb{Q}_\ell$-abélienne. Le formalisme des $R^i_! f_*$ s'étend aussitôt, par passage au quotient à cette catégorie. Si X est un schéma algébrique sur le corps k, F un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur X, alors $H^i_!(\overline{X}, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$, sur lequel π opère continûment.

Enfin, si A est une algèbre sur $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell$, resp. $\mathbb{Q}_\ell$, on définit les A-faisceaux constructibles sur X comme étant les Λ-faisceaux constructibles sur X, munis d'un homomorphisme de Λ-algèbres

$$A \to \mathrm{End}(F) .$$

Cette notion sera surtout utile quand A est fini sur Λ, en particulier quand $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$ et A est une extension finie de Λ.

4. Fonctions L généralisées.

Fixons le corps premier $\mathbb{F}_p$ $(p > 0)$, un nombre premier $\ell \neq p$, et une extension finie Ω de $\mathbb{Q}_\ell$. Les lettres X, Y, S, ... désignent des préschémas de type fini sur $\mathbb{F}_p$. Soit d'abord $X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_q$ le spectre d'une extension finie de $\mathbb{F}_p$ $(q = p^d$, $d = d(x) = \deg \varkappa(x) : \mathbb{F}_p)$. Alors la donnée d'un Ω-faisceau sur X équivaut à la donnée d'un vectoriel de dimension finie $V = F_{\overline{x}}$ sur Ω, sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{\varkappa}(x)/\varkappa(x)) = \pi_x$ opère continûment. On a un isomorphisme canonique

$$\pi_x = \mathrm{Gal}(\overline{\varkappa(x)}/\varkappa(x)) \simeq \hat{\mathbb{Z}} ,$$

défini à l'aide de l'élément de Frobenius

$$f_x \in \mathrm{Gal}(\overline{\varkappa(x)}/\varkappa(x)) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q) , \qquad f_x(\lambda) = \lambda^{p^d} ,$$

de sorte que l'opération de π_x sur $V = F_{\bar{x}}$ est connue quand on connaît l'automorphisme $(f_x)_V$ (soumis à la seule condition que $(f_x)_V^n \to \mathrm{id}_V$ quand $n \to 0$ multiplicativement). D'ailleurs, si

$$\mathrm{pr}_x : \quad X = \mathrm{Spec}\, \underset{\sim}{F}_q \to \mathrm{Spec}\, \underset{\sim}{F}_p = e$$

est le morphisme canonique, π_x s'identifie de la façon habituelle, via pr_{x*}, à un sous-groupe du groupe de Galois analogue π_e pour $e = \mathrm{Spec}(\underset{\sim}{F}_p)$, engendré topologiquement par le "frobenius absolu" f, et on aura avec cette identification

$$f_x = f^{d(x)} .$$

D'ailleurs, le faisceau $\mathrm{pr}_{x*}(F)$ sera défini par le "module induit"

$$\mathrm{pr}_{x*}(F)_{\bar{e}} \simeq F_{\bar{x}} \otimes_{\pi_x} \pi_e ,$$

d'où on conclut immédiatement la formule

$$\mathrm{d\acute{e}t}(1 - (f)^{-1}_{\mathrm{pr}_{x*}(F)_{\bar{e}}}\, t) = \mathrm{d\acute{e}t}(1 - (f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}}\, t^{d(x)}) .$$

On posera alors

(12) $$Z_F(t) = \frac{1}{\mathrm{d\acute{e}t}(1 - (f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}}\, t^{d(x)})} .$$

Si X est un préschéma de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$, F un Ω-faisceau constructible sur X, on posera (en notant $F_x = F|\mathrm{Spec}\, \varkappa(x)$) :

(13) $$Z_F(t) = \prod_{x \in X^0} Z_{F_x}(t)$$

i. e.

(14) $$Z_F(t) = \prod_{x \in X^0} \frac{1}{\mathrm{d\acute{e}t}(1 - (f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}}\, t^{d(x)})} .$$

Il s'agit encore ici d'un produit infini convergeant dans $\Omega[[t]]$, de terme constant 1. Notons d'ailleurs la formule essentiellement équivalente

(15) $$\begin{cases} \log Z_F(t) = \sum_1^\infty c_\nu(F) t^\nu/\nu \\ \text{i. e.} \quad t\, \dfrac{Z'_F(t)}{Z_F(t)} = \sum_1^\infty c_\nu(F) t^\nu , \end{cases}$$

avec

$$c_\nu(F) = \sum_{x\in X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})} \mathrm{Tr}\left((f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}}\right), \tag{16}$$

où, dans (16), x est considéré comme un élément de $X_{\underset{\sim}{F}_{p^\nu}}$, ce qui précise le sens de f_x comme égal à $f^\nu_{\bar{e}}$ ...

On déduit aussitôt de la définition (14) les propriétés formelles suivantes

(4.1) <u>Multiplicativité en</u> F :

$$Z_F(t) = Z_{F'}(t)\ Z_{F''}(t)$$

pour toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$.

(4.2) <u>Multiplicativité en</u> X : Si U est un ouvert de X , Y le fermé complémentaire, on a

$$Z_F(t) = Z_{F|U}(t)\ Z_{F|Y}(t) .$$

(4.3) <u>Multiplicativité par fibration</u> : Si $f : X \to S$ est un morphisme (de préschémas de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$) on a

$$Z_F(t) = \prod_{s\in S^0} Z_{F|X_s} ,$$

où X_s est la fibre $f^{-1}(s)$, et où le produit du deuxième membre est convergeant.

Lorsque F est le Ω-faisceau constant Ω_X , on trouve d'ailleurs la fonction $Z_X(t)$ du § 1 :

$$Z_{\Omega_X}(t) = Z_X(t) . \tag{17}$$

Montrons comment on retrouve également les fonctions L du § 1. Avec les notations du loco citato, on peut toujours supposer d'abord que le corps Ω est une extension <u>finie</u> de $\underset{\sim}{Q}$, puis, quitte à prendre une extension composée de cette dernière et de $\underset{\sim}{Q}_\ell$, que Ω est une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_\ell$. Soit $W = \check{V}$ le dual de V , sur lequel G opère **à droite par** transposition. Les opérations de G sur W et sur X permettent alors de définir les opérations de G sur le faisceau constant W_X , d'où un faisceau sur $Y = X/G$:

$$W_X^G = F , \qquad (W = \check{V}) , \tag{18}$$

dont la fibre en tout point géométrique $\bar{y}$ de Y n'est autre que

$$F_{\bar{y}} = W^{I_{\bar{x}}} \simeq (V^{I_{\bar{x}}})^\vee , \tag{19}$$

où $\bar{x}$ est un point géométrique de X sur $\bar{y}$, et $I_{\bar{x}}$ son groupe d'inertie. Cela posé, on voit aussitôt que

(20) $$L_{X,G,M}(t) = Z_F(t) ,$$

les produits infinis représentés par les deux membres étant égaux terme à terme.

5. Énoncé de la formule fondamentale. Réduction au cas des courbes.

THÉORÈME 5.1. - Soient $\underset{\sim}{F}_p$ le corps premier de caractéristique $p > 0$, ℓ un nombre premier $\neq p$, Ω une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_\ell$, X un schéma algébrique compactifiable (par exemple quasi-projectif) sur le corps $\underset{\sim}{F}_p$, F un Ω-faisceau constructible sur X, $g : X \to \operatorname{Spec} \underset{\sim}{F}_p$ le morphisme structural. Alors on a

(21) $$Z_F(t) = \prod_i Z_{R^i_! g_*(F)}(t)^{(-1)^i} .$$

Pour mémoire, rappelons

(22) $$Z_{R^i_! g_*(F)}(t) = \frac{1}{\operatorname{dét}(1 - (f)^{-1}_{H^i_!(\bar{X},F)}\, t)} ,$$

donc la formule fondamentale s'écrit aussi

(23) $$\begin{cases} Z_F(t) = \dfrac{P^F_1(t)\ P^F_3(t)\ \cdots}{P^F_0(t)\ P^F_2(t)\ \cdots} \\[2ex] P^F_i(t) = \dfrac{1}{Z_{R^i_! g_*(F)}(t)} = \operatorname{dét}(1 - (f)^{-1}_{H^i_!(\bar{X},F)}\, t) . \end{cases}$$

Les produits envisagés dans (21) et (23) ont un sens grâce à (3.5).

COROLLAIRE 5.2. - Sous les conditions précédentes, mais supposant seulement X un préschéma de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$ (pas nécessairement compactifiable), $Z_F(t)$ est une fonction rationnelle.

En effet, grâce à la formule (4.2) de multiplicativité, on se ramène aussitôt au cas où X est affine, donc compactifiable, et alors l'assertion résulte de la formule explicite (21) de 5.1.

Réduction au cas des courbes.

LEMME 5.3. - Soient $g : X \to Y$ un morphisme compactifiable de préschémas de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$, F un Ω-faisceau constructible sur X . Si le théorème 5.1 est vrai pour les couples $(X_y , F|X_y)$, où $y \to Y^0$, alors on a

$$(24) \qquad Z_F(t) = \prod_i Z_{R^i_! g_*(F)}(t)^{(-1)^i} .$$

En effet, soit $g_y : X_y \to \operatorname{Spec} k(y)$ le morphisme structural, on aura

$$Z_F(t) = \prod_{y\in Y^0} Z_{F|X_y}(t) = \prod_{y\in Y^0} \prod_i Z_{R^i_! g_{y*}(F|X_y)}(t)^{(-1)^i}$$

par (4.3), et l'hypothèse sur les $F|X_y$; d'ailleurs

$$R^i_! \, g_{y*}(F|X_y) = R^i_! \, g_*(F)_y$$

par (3.1), d'où en changeant l'ordre des signes $\prod$ la formule (où l'on pose $F^i = R^i_! \, g_*(F)$) :

$$Z_F(t) = \prod_i \Big(\prod_{y\in Y^0} Z_{F^i_y}(t)\Big)^{(-1)^i} = \prod_i Z_{F^i}(t)^{(-1)^i} ,$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 5.4. - Supposons de plus que le théorème 5.1 soit vrai pour les couples $(Y , R^i_! \, g_*(F))$. Alors il est vrai pour (X , F) .

En effet, avec les notations précédentes, on aura par hypothèse (où $h : Y \to \operatorname{Spec} \underset{\sim}{F}_p$)

$$Z_{F^i}(t) = \prod_j Z_{R^j_! h_*(F^i)}(t)^{(-1)^j} ,$$

d'où, en vertu de (24),

$$(*) \qquad Z_F(t) = \prod_{i,j} Z_{R^j_! h_*(F^i)}(t)^{(-1)^{i+j}} .$$

Or, en vertu de (3.3), on a, si $\varphi : X \to \operatorname{Spec} \underset{\sim}{F}_p$,

$$R^*_! \, \varphi_*(F) \Longleftarrow R^j_! \, h_*(R^i_! \, g_*(F)) ,$$

d'où en vertu de (4.1),

$$(**) \qquad \prod_k Z_{R^k_! \varphi_*(F)}(t)^{(-1)^k} = \prod_{i,j} Z_{R^j_! h_*(R^i_! g_*(F))}(t)^{(-1)^{i+j}} .$$

La comparaison de ($\star$) et ($\star\star$) donne la conclusion voulue.

COROLLAIRE 5.5. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme fini, F un Ω-faisceau constructible sur X, alors, 5.1 est vrai pour (X, F) si, et seulement si, il l'est pour $(Y, f_*(F))$.

LEMME 5.6.

(a) Sous les conditions préliminaires de 5.1, soient U un ouvert de X, Y son complémentaire, F un Ω-faisceau constructible sur X. Alors si le théorème 5.1 est valable pour deux parmi les trois couples (X, F), $(U, F|U)$, $(Y, F|Y)$, il l'est pour le troisième.

(b) Soit $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ une suite exacte de Ω-faisceaux constructibles sur X. Alors si 5.1 est vrai pour deux des trois couples (X, F'), ..., il l'est pour le troisième.

L'assertion (a) par exemple résulte aussitôt de (3.4) et (4.2), qui impliquent que les deux membres de 5.1 sont "multiplicatifs en X".

Utilisant 5.6(b), pour prouver 5.1, on est ramené en général d'abord au cas où X est affine. Pour $\dim X = 0$, on est ramené par 5.6(b) au cas $X = \operatorname{Spec} \underset{\sim}{F}_q$, où c'est trivial par définition. Supposons que ce soit prouvé pour $\dim X = 1$, prouvons alors le cas général, par récurrence sur $n = \dim X$. Comme X est affine, il existe un morphisme $X \to Y$ avec $\dim Y \leq n-1$, à fibres de $\dim \leq 1$. En vertu de 5.4 on aura terminé.

On est donc ramené au cas où X est affine de $\dim 1$. On peut supposer X réduit, soit X' le normalisé, $g : X' \to X$ la projection, on a un morphisme canonique $u : F \to g_* F'$, (où $F' = g^* F$), dont le noyau et conoyau sont à support de $\dim \leq 0$. Utilisant 5.6 (b) et 5.5, on est ramené à prouver 5.1 pour (X', F'), i. e. on peut supposer X affine normale. Alors il existe une immersion ouverte $i : X \to \hat{X}$, avec $\hat{X}$ courbe projective normale, donc lisse sur $\underset{\sim}{F}_p$, telle que $\dim(\hat{X} - i(X)) = 0$. Utilisant encore 5.6(a), on est ramené à prouver 5.1 pour $(\hat{X}, i_!(F))$. En fin de compte, on s'est ramené au cas où X est une courbe projective et lisse sur $\underset{\sim}{F}_p$.

Avant d'aller plus loin, signalons la formulation équivalente de (22), obtenue en prenant les logarithmes des deux membres, et en égalant les coefficients :

$$(25) \qquad \sum_{x \in X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})} \operatorname{Tr}(f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}} = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} f_i^{-\nu},$$

où f_i est l'endomorphisme de $H^i_!(\bar{X}, F)$ défini par le frobenius "absolu". Nous inspirant de WEIL, cette formule peut être interprétée comme une formule "purement géométrique", du type de Lefschetz, portant sur $\bar{X}$ et le faisceau induit $\bar{F}$ sur $\bar{X}$. Pour ceci, remarquons que si f_X est l'endomorphisme de Frobenius de X, alors pour tout faisceau étale F sur X, on a un isomorphisme canonique

$$f_{F/X} : F \xrightarrow{\sim} f_X^*(F) , \tag{26}$$

d'où en prenant l'image inverse sur $\bar{X}$, un isomorphisme canonique

$$\overline{f_{F/X}} : \bar{F} \to \overline{f_X}^*(F) .$$

De ce fait, $\overline{f_{F/X}}$ "opère" sur la cohomologie $H^i_!(\bar{X}, \bar{F})$, i. e. on a un isomorphisme

$$\overline{f_{F/X}}^{(i)} : H^i_!(\bar{X}, \bar{F}) \xrightarrow{\sim} H^i_!(\bar{X}, \bar{F}) .$$

Ceci posé, on vérifie que l'on a

$$f_i \, \overline{f_{F/X}}^{(i)} = \text{identité}. \tag{27}$$

D'ailleurs, les $x \in X(\mathbb{F}_{p^\nu})$ ne sont autres que les points fixes de $\overline{f_X}^\nu$, et si, pour tout tel point, on désigne par $(\overline{f_X}^\nu)_x$ l'endomorphisme induit par $\overline{f_X}^\nu$ dans la fibre $\bar{F}_x$, on constate également

$$f_x^\nu (\overline{f_X}^\nu)_x = \text{identité}.$$

Ainsi la formule (25) prend la forme typique d'une formule de Lefschetz de nature géométrique :

$$\sum_{x \in X(\bar{\mathbb{F}}_p)^g} \operatorname{Tr} g_x = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} , \tag{25 bis}$$

où $g = \overline{f_X}^\nu$ est un endomorphisme de $\bar{X}$ sur $\bar{\mathbb{F}}_p$, opérant également sur $\bar{F}$, et $g^* = (g^{(i)})$. est l'endomorphisme qu'il définit sur la cohomologie $H^*_!(\bar{X}, \bar{F})$.

Notons encore que, dans le cas qui nous occupe, et lorsque X est lisse sur $\mathbb{F}_p$, les points fixes de $g = \overline{f_X}^\nu$ sont tous "transversaux".

6. La formule de Verdier.

Soient X un espace topologique compact, Ω un corps, F un faisceau de Ω-espaces vectoriels sur X, tel que les fibres F_x soient de dimension finie, et g une "<u>classe de correspondance dans</u> (X, F) " (cf. papiers futurs de J.-L. VERDIER), définie par exemple (pour fixer les idées) par un endomorphisme g de X et un homomorphisme $u : g^*(F) \to F$. Alors g définit des endomorphismes $g^{(i)}$ dans les $H^i(X, F)$, et il y a lieu de considérer la somme de Lefschetz

$$\nu(X, F, g) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} .$$

Sous des conditions de nature locale très générales (assurant que X et F ne sont pas "trop mauvais" localement), cette somme est définie, et VERDIER l'interprète comme un cup-produit, de telle façon que toute décomposition de l'ensemble X^g des points fixes de g en n parties compactes disjointes Z_α définit une décomposition de ce cup-produit en des invariants $\nu(X, F, g, Z_\alpha)$ jouant le rôle de "traces locales" :

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} = \sum_\alpha \nu(X, F, g, Z_\alpha) . \tag{28}$$

Le cas le plus intéressant est celui où X^g est formé de points isolés, et où on peut prendre pour Z_α les points x de X^g, de sorte qu'on obtient

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} = \sum_{x \in X^g} \nu(X, F, g, x) . \tag{28 bis}$$

Les arguments de VERDIER sont essentiellement "formels" à partir de deux théorèmes de dualité (dualité globale et dualité locale), dus à VERDIER, dont le deuxième nécessite les hypothèses locales restrictives auxquelles il a été fait allusion. Elles sont vérifiées par exemple dans le cas où X est un espace analytique complexe et F est "analytiquement constructible", par exemple lorsque X provient d'un schéma algébrique sur $\underset{\sim}{C}$, et F d'un Ω-faisceau constructible sur X, comme on peut le montrer en utilisant la <u>résolution des singularités</u> de HIRONAKA. En fait, la démonstration montre qu'il suffit ici de connaître la résolution des singularités pour les schémas finis au-dessus de $X \times X$ (4),et moyennant cette hypothèse, les résultats de VERDIER se transportent également mutatis mutandis au cas où X est un schéma propre au-dessus d'un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque (compte tenu toujours des théorèmes de dualité, prouvés par le conférencier dans le cas de la topologie étale). Compte tenu de la résolution des singularités des <u>surfaces</u> (ABHYANKAR), ceci s'applique notamment au cas où $\dim X = 1$.

La détermination explicite des $\nu(X, F, g, x)$ en termes d'invariants locaux connus, notamment dans le cas où X est de $\dim 1$, n'a pas encore été faite par VERDIER à l'heure où ces lignes sont écrites (4), mais comme il a été dit, nous admettrons le résultat suivant :

(4) Voir la Note placée après la Bibliographie.

(Futur) THÉORÈME 6.1 (VERDIER). - Soient X une courbe algébrique projective lisse sur un corps algébriquement clos, g un endomorphisme de X dont tous les points fixes sont de multiplicité 1, F un Ω-faisceau constructible sur X, $u : g^*(F) \xrightarrow{\sim} F$ un homomorphisme, $g^{(i)}$ les homomorphismes induits dans les $H^i_!(X , F)$. Pour tout $x \in X^g$, soit g_x l'endomorphisme correspondant de F_x. Alors

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} = \sum_{x \in X^g} \operatorname{Tr} g_x . \tag{29}$$

Compte tenu du § 5, ce théorème achève la démonstration de 5.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (M.). - Grothendieck topologies. Notes on a Seminar. Spring 1962. - Cambridge, Harvard University, 1962 (multigraphié).

[2] ARTIN (M.) et GROTHENDIECK (A.). - Cohomologie étale des schémas, Séminaire de l'Institut des hautes Etudes scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1963/64.

[3] DWORK (Bernard). - On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 631-648.

[4] GIRAUD (Jean). - Analysis situs, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 256, 11 p.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, Séminaire de l'Institut des hautes Etudes scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1964/65.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Rationalité des fonctions zeta des variétés algébriques, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 198, 11 p.

[7] VERDIER (Jean-Louis). - Papiers secrets (à paraître dans divers périodiques).

[8] WEIL (André). - Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 497-508.

NOTE [Juin 1965]

Comme prévu, le théorème 6.1 a été prouvé, peu de temps après l'exposé, par J.-L. VERDIER et M. ARTIN, de sorte que le résultat 5.1 du présent exposé est effectivement prouvé. D'autre part, la méthode de VERDIER du n° 6, contrairement à ce que nous avons dit, ne nécessite d'hypothèse de résolution que pour les schémas finis sur X (ce qui rend inutile, pour la preuve de 5.1, le délicat théorème de résolution de Abbyankar. Enfin, une méthode toute différente de celle de VERDIER permet de donner une formule de Lefschetz explicite du type 6.1 sans hypothèse de "multiplicité 1" pour les points fixes, en faisant intervenir des "représentations d'Artin" relatives aux points fixes de g (cf. [5]).

LE GROUPE DE BRAUER

par Alexander GROTHENDIECK

I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses.

Introduction.

On sait que le groupe de Brauer des classes d'algèbres centrales simples sur un corps k (cf. [10]) joue un rôle de premier plan dans l'étude arithmétique du corps k. La notion a été étendue en 1951 par AZUMAYA [3] au cas d'un anneau de base local, et reprise en 1960 par AUSLANDER-GOLDMAN [2] dans le cas d'un anneau de base quelconque. Les développements de AZUMAYA-AUSLANDER-GOLDMAN peuvent se généraliser d'ailleurs de façon essentiellement triviale au cas des préschémas de base généraux, ce qui est un des buts du présent exposé.

Cependant, l'interprétation cohomologique du groupe de Brauer, qui a joué un rôle important dans le cas classique, ne pouvait être développée dans [3] et [2], faute de disposer d'une théorie de la cohomologie étale, développée dans [1] et [11]. C'est elle qui donne tout son charme à la variante "globale" du groupe de Brauer. Par exemple, le groupe de Brauer global d'une variété algébrique complète non singulière apparaît comme un invariant birationnel global, intimement lié au classique "nombre de Picard" $B_2 - \rho$ des "classes de 2-cohomologie transcendantes" sur une variété algébrique, et lié également (comme l'a remarqué ARTIN) à certaines conjectures récentes et profondes de BIRCH-SWINNERTON-DYER et TATE sur les cycles algébriques sur X. D'autre part, les méthodes cohomologiques permettent de répondre, au moins partiellement, à certaines questions laissées en suspens dans [2]. Le conférencier compte exposer ces questions proprement cohomologiques dans deux exposés ultérieurs, et se bornera ici aux premières variations sur le thème asumayen.

1. Groupe de Brauer d'un espace topologique (*).

1.1. - Soit X un espace topologique, qu'on munit du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ des fonctions continues à valeurs complexes. Pour tout entier $n \geqslant 1$, considérons $P_n(X)$ = l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, de fibrés en algèbres localement triviaux sur X, à fibres isomorphes à l'algèbre de matrices $M_n(\underset{\sim}{C})$. On peut l'interpréter aussi, par le dictionnaire bien connu, comme l'ensemble des

(*) Le lecteur est invité à rétablir dans ce texte les expressions "à isomorphisme près" et "à homotopie près", qui font partie du style personnel auquel tient l'auteur.

classes, à un isomorphisme près, de faisceaux d'algèbres $\mathcal{A}$ sur X, qui sont localement isomorphes au faisceau $M_n(\mathcal{O}_X)$ (ou, ce qui revient au même, qui sont localement libres en tant que faisceaux de modules, et tels que, pour tout $x \in X$, la "fibre réduite" $A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$ soit isomorphe à $M_n(\underset{\sim}{C})$, i. e. soit une algèbre simple centrale de rang n^2 sur $\underset{\sim}{C}$). Un autre dictionnaire connu nous fournit l'interprétation suivante. Désignons par $GP(n)$ le "groupe projectif à n variables sur $\underset{\sim}{C}$ ",

$$\underset{\sim}{GP}(n) = \underset{\sim}{G\ell}(n , \underset{\sim}{C})/\underset{\sim}{C}^* = M_n(\underset{\sim}{C})^*/\underset{\sim}{C}^* ,$$

qui s'identifie aussi au groupe des automorphismes (tous intérieurs par SKOLEM-NOETHER ([6], VIII, § 10) de l'algèbre $M_n(\underset{\sim}{C})$. Alors, $P_n(X)$ s'identifie à l'ensemble $H^1\big(X , \underset{\sim}{GP}(n)\big)$ des classes, à un isomorphisme près, de fibrés principaux sous $\underset{\sim}{GP}(n)$, de base X . Lorsque X est par exemple un CW-complexe, alors le point de vue homotopique conduit à regarder $P_n(X)$ comme l'ensemble des classes d'applications (à une homotopie près) de X dans un espace classifiant $B_{\underset{\sim}{GP}(n)}$.

1.2. - Le "groupe de Brauer" de X s'obtient à partir de la collection des $P_n(X)$, en regardant comme "triviaux" les fibrés en algèbres qui sont de la forme $\underset{\sim}{\mathrm{End}}(E)$, où E est un fibré vectoriel de rang n sur X . En termes de faisceaux, ce sont les faisceaux de la forme $\underset{\sim}{\mathrm{End}}(E)$, E un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang n ; en termes de fibrés principaux, ce sont les éléments de $H^1\big(X , \underset{\sim}{GP}(n)\big)$ qui peuvent se remonter en des éléments de $H^1\big(X , \underset{\sim}{GL}(n)\big)$; en termes homotopiques, les classes d'applications $X \to B_{\underset{\sim}{GP}(n)}$ qui se factorisent à travers $B_{\underset{\sim}{G\ell}(n)} \to B_{\underset{\sim}{GP}(n)}$.
De façon précise, appelons <u>Algèbre d'Azumaya</u> une algèbre sur X localement isomorphe à une Algèbre de la forme $M_n(\mathcal{O}_X)$. Deux telles Algèbres $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ sont dites <u>équivalentes</u> si on peut trouver deux faisceaux localement libres $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sur X , et un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{A} \otimes \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{A}' \otimes \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}') .$$

En vertu de l'isomorphisme d'Algèbres $\underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}) \otimes \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}') \simeq \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$, on voit qu'on a bien là une relation d'équivalence entre Algèbres d'Azumaya, d'ailleurs compatible avec l'opération $\otimes$. L'ensemble des classes d'Algèbres d'Azumaya devient ainsi un monoïde commutatif, et même un groupe, car l'algèbre opposée $\mathcal{A}^o$ de $\mathcal{A}$ définit une classe inverse, grâce à l'isomorphisme canonique bien connu

$$\mathcal{A}^o \otimes \mathcal{A} \simeq \underset{\sim}{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}(\mathcal{A}) .$$

Le groupe ainsi obtenu s'appelle <u>groupe de Brauer de</u> X , et se note $Br(X)$.

1.3. - Soit $\mathcal{O}_X^*$ ou $\underset{\sim}{G}_{m_X}$ le faisceau des unités du faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$ (i. e. des applications continues de X dans $\mathbb{C}^*$). La suite exacte de groupes

$$1 \to \underset{\sim}{G}_m \to \underset{\sim}{G\ell}(n) \to \underset{\sim}{GP}(n) \to 1$$

définit une suite exacte de faisceaux sur X , en prenant les faisceaux d'applications continues dans les trois termes, d'où une suite exacte de cohomologie (cf., par exemple, [13] pour X paracompact, [12] en général) :

$$1 \to H^1\left(X , \underset{\sim}{G}_{m_X}\right) \to H^1\left(X , \underset{\sim}{G\ell}(n)_X\right) \to H^1\left(X , \underset{\sim}{GP}(n)_X\right) \xrightarrow{\delta} H^2(X , \underset{\sim}{G}_m) ,$$

où, pour $\xi \in H^1\left(X , \underset{\sim}{GP}(n)\right) = P_n(X)$, $\delta\xi \in H^2\left(X , \underset{\sim}{G}_{m_X}\right)$ est "l'obstruction à relever ξ en un élément de $H^1\left(X , \underset{\sim}{G\ell}(n)_X\right)$ ". Un calcul facile montre que, pour deux Algèbres d'Azumaya, on a

$$\delta(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}') = \delta(\mathfrak{a}).\delta(\mathfrak{a}') ,$$

ce qui implique de façon à peu près formelle les conditions 1° à 3° de la proposition suivante.

PROPOSITION 1.4.

1° Si $\mathfrak{a}$ est une Algèbre d'Azumaya, $\delta(\mathfrak{a})$ ne dépend que de la classe de $\mathfrak{a}$ dans $Br(X)$.

2° L'application

$$(\star) \qquad \delta : \ Br(X) \to H^2\left(X , G_{m_X}\right) ,$$

obtenue de cette façon, est un homomorphisme de groupes.

3° Cet homomorphisme est injectif.

4° L'image de $P_n(X) = H^1\left(X , \underset{\sim}{GP}(n)\right)$ dans $Br(X)$ est annulée par n .

Le 4° peut se prouver en considérant la suite exacte

$$1 \to \mu_{n_X} \to \underset{\sim}{S\ell}(n)_X \to \underset{\sim}{GP}(n)_X \to 1$$

(où $\underset{\sim}{S\ell}(n)$ est le groupe spécial linéaire, μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité, isomorphe au centre de $\underset{\sim}{S\ell}(n)$, formé des matrices diagonales de $\underset{\sim}{S\ell}(n)$). On en déduit encore une application cobord

$$\delta' : \ H^1\left(X , \underset{\sim}{GP}(n)_X\right) = P_n(X) \to H^2\left(X ; \mu_{n_X}\right) ,$$

et on voit aussitôt que l'homomorphisme δ est le composé

$$P_n(X) \xrightarrow{\delta'} H^2(X, \mu_{n_X}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{G}_{m_X}),$$

où la deuxième flèche provient de l'inclusion canonique $(\mu_n)_X \to (\mathbb{G}_m)_X$. Comme $H^2(X, \mu_{n_X})$ est évidemment annulé par n, cela entraîne le 4°.

Une autre façon de procéder (qui restera valable dans le contexte plus général du n° 2) consiste à noter que $\underline{GP}(n) = \underline{S\ell}(n)/\mu_n$ opère de façon évidente sur $\mathcal{M}_o = \mathcal{E}_o \otimes \underbrace{\cdots}_{n} \otimes \mathcal{E}_o$, où $\mathcal{E}_o$ est le faisceau localement libre de rang n trivial sur X, sur lequel $\underline{S\ell}(n)$ opère de la façon naturelle (noter que $\underline{S\ell}(n)$ opère sur $\mathcal{M}_o$ avec opérations triviales de μ_n). On a alors, en posant $\mathcal{A}_o = \underline{\mathrm{End}}(\mathcal{E}_o)$, un isomorphisme de faisceaux d'Algèbres, compatible avec les opérations de $\underline{GP}(n)$:

$$\mathcal{A}_o \otimes \underbrace{\cdots}_{n} \otimes \mathcal{A}_o \simeq \underline{\mathrm{End}}(\mathcal{M}_o) .$$

On peut alors, à tout fibré principal P de groupe $\underline{GP}(n)$, de base X, associer le faisceau localement libre "tordu" $\mathcal{M}_o^P = \mathcal{M}$, et si $\mathcal{A}$ est l'Algèbre d'Azumaya associée à P, on aura

$$\mathcal{A} \otimes \underbrace{\cdots}_{n} \otimes \mathcal{A} \simeq \underline{\mathrm{End}}(\mathcal{M}) ,$$

ce qui prouve la proposition 1.4, 4°.

COROLLAIRE 1.5. - L'image de $\mathrm{Br}(X)$ dans $H^2(X, \mathbb{G}_{m_X})$ est formée d'éléments de torsion (du moins si X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, ou est compact).

On peut, dans le cas topologique envisagé ici, donner une interprétation topologique de $H^2(X, \mathbb{G}_{m_X})$, en utilisant la suite exacte exponentielle bien connue,

$$0 \longrightarrow \underline{Z} \longrightarrow \underline{C} \xrightarrow{x \mapsto \exp(2i\pi x)} \underline{C}^* \longrightarrow 1 ,$$

qui fournit la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \underline{Z}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathbb{G}_{m_X} \to 0 ,$$

d'où, si X est paracompact (donc $\mathcal{O}_X$ "fin"), les isomorphismes

$$H^i(X, \mathbb{G}_{m_X}) \simeq H^{i+1}(X, \underline{Z}) , \qquad i \geqslant 1 ,$$

en particulier $H^2(X, \underset{\sim}{G}_{m_X}) \simeq H^3(X, \underset{\sim}{Z})$, et l'homomorphisme δ de 1.1 peut être interprété comme un homomorphisme

$$(\ast\ast) \qquad c : \mathrm{Br}(X) \to H^3(X, \underset{\sim}{Z}) ,$$

dont l'image est contenue dans le sous-groupe de torsion. On a ici :

THÉORÈME 1.6 (SERRE). - Si X est un CW-complexe fini, l'homomorphisme $(\ast)$ de 1.1 induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}(X)$ avec le sous-groupe de torsion de $H^2(X, \underset{\sim}{G}_{m_X})$.

En d'autres termes :

COROLLAIRE 1.7. - L'homomorphisme $(\ast\ast)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}(X)$ avec le sous-groupe de torsion de $H^3(X, \underset{\sim}{Z})$. En particulier, $\mathrm{Br}(X)$ est un groupe fini.

Cela donne donc une détermination complète, en termes homologiques, de $\mathrm{Br}(X)$. La démonstration de 1.6 se fait par de la technique homotopique standard : on calcule, grâce à BOTT [5], les groupes d'homotopie de la "limite inductive" $B_{\underset{\sim}{GP}(\infty)}$ des $B_{\underset{\sim}{GP}(n)}$, s'envoyant les uns dans les autres par "tensorisation" par des matrices unité ; on trouve 0 en dimension impaire, $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$ en dimension 2 , et $\underset{\sim}{Q}$ en dimension $2i$ $(i \geqslant 2)$, d'où s'ensuit que $B_{\underset{\sim}{GP}(\infty)}$ est homotopiquement équivalent au produit $B = K(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}, 2) \times K(\underset{\sim}{Q}, 4) \times K(\underset{\sim}{Q}, 6) \times \dots$. Si alors $x \in H^3(X, \underset{\sim}{Z})$ est de torsion, il est de la forme dy , $y \in H^2(X, \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z})$, d'où une application $X \to K(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}, 2)$, d'où une application $X \to B$, définissant le fibré cherché d'obstruction x .

REMARQUE 1.8. - On peut introduire également une relation d'équivalence moins grossière parmi les Algèbres d'Azumaya, en disant que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ (sur X connexe) sont <u>stablement isomorphes</u> si on peut trouver des entiers n , m tels que $M_n(\mathfrak{A}) \simeq M_m(\mathfrak{A}')$. Si $\mathrm{KP}(X)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence stable, $\mathrm{KP}(X)$ est un monoïde commutatif, et on a un homomorphisme naturel,

$$\mathrm{KP}(X) \to H^2(X, \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) ,$$

(où $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$ est considéré comme limite inductive des $\mu_n \simeq \underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}$). L'argument de SERRE montre que, si X est un CW-complexe fini, cet homomorphisme est surjectif, et qu'on a même un isomorphisme de foncteurs en X ,

$$(1.1) \qquad \mathrm{KP}(X) \simeq H^2(X, \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) \times \prod_{i \geqslant 2} H^{2i}(X, \underset{\sim}{Q}) .$$

De façon plus précise, associons à tout $\xi \in H^1(X, \underset{\sim}{GP}(n))$ ses deux classes caractéristiques (où $\mu_\infty = \varinjlim \mu_n$ est le groupe des racines de l'unité, isomorphe ici par l'exponentielle à $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$) :

$$\theta\xi \in H^2(X , \mu_\infty) , \qquad \text{où} \quad \theta\xi = \text{image de} \quad \delta\xi \in H^2(X , \mu_n) \quad \text{dans} \quad H^2(X , \mu_\infty) ,$$

et

$$ch^{\natural}(\xi) = \frac{1}{n}\, \dot{ch}(\xi) \in H^{**}(X , \underset{\sim}{Q}) , \qquad \text{où} \qquad \dot{ch}(\xi) = 1 + \beta^4(\xi) + \beta^6(\xi) + \dots ,$$

où $\dot{ch}(\xi)$ désigne le "caractère de Chern" de ξ (qui, lorsque ξ provient d'un $\xi_o \in H^1\big(X , \underset{\sim}{S\ell}(n)\big)$, coïncide avec le caractère de Chern habituel). On obtient ainsi des homomorphismes

$$\theta : KP(X) \to H^2(X , \mu_\infty) , \qquad ch^{\natural} : KP(X) \to H^{**}(X , \underset{\sim}{Q})$$

(où $\theta(\xi\xi') = \theta(\xi) + \theta(\xi')$, $ch^{\natural}(\xi\xi') = ch^{\natural}(\xi)\, ch^{\natural}(\xi')$) qui, pour X un CW-complexe fini, fournissent une <u>bijection</u> de la forme (1.1) (ce qui précise, en même temps, quelle est la structure de groupe qu'il convient de mettre au deuxième membre de (1.1)).

1.9. - Il résulte en particulier de ceci que le monoïde $KP(X)$ est un <u>groupe</u>. D'après SERRE et BASS, ce résultat s'étend au cas où on remplace X par un schéma de base <u>affine</u>, et, pour un tel X , le noyau de $KP(X) \to Br(X)$ s'interprète comme le quotient du sous-groupe multiplicatif de $K(X) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{Q}$ des éléments d'augmentation 1 (isomorphe par l'exponentielle au sous-groupe $\tilde{K}(X)$ de $K(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ des éléments d'augmentation nulle) par le sous-groupe image de $Pic(X)$ dans $K(X) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{Q}$ ($K(X)$ désignant l'anneau des classes de faisceaux localement libres sur X). Ceci résulte formellement des théorèmes de stabilité de BASS [4].

2. <u>Généralisation à un topos localement annelé</u>.

Soit U un univers fixé, et soit $\mathfrak{X}$ un " U-topos" ([17], II) qu'on peut considérer comme le topos des faisceaux d'ensembles sur un site $\mathfrak{C}$. Soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ un Anneau commutatif dans $\mathfrak{X}$, grâce auquel $\mathfrak{X}$ sera considéré comme un topos annelé $X = (\mathfrak{X} , \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. Nous supposerons $\mathfrak{X}$ "localement annelé", i. e. que, pour tout $U \in \mathrm{Ob}\mathfrak{X}$ et $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$, on a $U_f \cup U_{1-f} = U$ (où U_f désigne le plus grand sous-objet de U sur lequel f soit inversible). Alors, on peut encore définir les <u>Algèbres d'Azumaya</u> dans $\mathfrak{X}$ comme les Algèbres $\mathcal{A}$ sur $\mathfrak{X}$, qui sont "localement isomorphes" à une Algèbre de la forme $M_n(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. Procédant comme au n° 1, on introduit une relation d'équivalence entre Algèbres d'Azumaya, d'où un groupe de classes d'Algèbres d'Azumaya, noté $Br(X)$. On définit encore un homomorphisme canonique injectif

(2.1) $$\delta : Br(X) \to H^2\big(X , \underset{\sim}{G}_{m_X}\big) ,$$

en utilisant ici la théorie de l'opération cobord de [12]. Si $\mathfrak{A}$ est une Algèbre d'Azumaya partout de rang n^2, on trouve que $\delta(\mathfrak{A}) \in H^2(X, \underset{\sim}{G}_{m_X})$ est annulé par n ; lorsque la puissance n-ième dans $\underset{\sim}{G}_{m_X}$ est un épimorphisme, on peut même préciser que $\delta(\mathfrak{A})$ provient d'un élément canonique $\delta_n(\mathfrak{A}) \in H^2(X, \mu_{m_X})$. En tous cas, si X est connexe, ou si l'objet final e de $\mathfrak{X}$ est quasi compact (i. e. toute famille couvrante de e admet une sous-famille couvrante finie), alors l'image de $Br(X)$ dans $H^2(X, \underset{\sim}{G}_{m_X})$ est formée d'éléments de torsion. Mais il n'y a plus, en général, de théorème analogue au théorème de Serre, 1.6.

3. Algèbres centrales simples sur un corps.

Dans ce numéro, k désigne un corps, A une k-algèbre de rang fini sur k. Rappelons ([6], VIII, § 7 et 10) :

PROPOSITION 3.1. - Soit Ω une extension algébriquement close de k, A_Ω la Ω-algèbre $A \otimes_k \Omega$. Conditions équivalentes :

(i) Il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que A_Ω soit isomorphe à l'algèbre de matrices $M_r(\Omega)$.

(ii) A est un anneau simple de centre k.

(ii) bis A est de centre k, et sans radical.

(iii) L'homomorphisme canonique $A \otimes A^o \to \mathrm{End}_{k\text{-mod}}(A)$ est bijectif.

Nous dirons, sous les conditions de 3.1, que A est une Algèbre d'Azumaya sur k. Il est immédiat que, si k' est une extension de k, alors A est une Algèbre d'Azumaya sur k si et seulement si $A \otimes_k k'$ en est une sur k'.

PROPOSITION 3.2. - Supposons les conditions équivalentes de 3.1 vérifiées, ce qui implique que $[A:k]$ est de la forme r^2. Soit L une sous-algèbre de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L est étale sur k (i. e. composée finie d'extensions finies séparables de k) de rang r.

(i) bis L est étale sur k, et est son propre commutant.

(i) ter L est une sous-algèbre commutative étale maximale de A.

(ii) Il existe un isomorphisme $A_\Omega \simeq M_r(\Omega)$ qui transforme L_Ω en la sous-algèbre de $M_r(\Omega)$, formée des matrices diagonales.

Cet énoncé est une conséquence facile du suivant :

LEMME 3.3. - Soient k un corps, A une k-algèbre qui est absolument semi-simple, L une sous-algèbre de A. Conditions équivalentes :

(i) L est étale sur k, et égale à son propre commutant.

(ii) L est une sous-algèbre étale <u>maximale</u> de A.

On a trivialement (i) $\Longrightarrow$ (ii), prouvons (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit B le commutant de L dans A ; on voit facilement, en utilisant le fait que L est étale et passant à la clôture algébrique Ω de k, que B est encore absolument semi-simple sur k. On est donc ramené au cas où L est contenu dans le centre Z de A, et à prouver alors $L = A$. Comme le centre Z de A est encore étale sur k, on a $L = Z$, et en décomposant L en ses corps composants, on peut supposer L un corps, donc A simple de centre L. On peut supposer alors $L = k$, et on est ramené à prouver que, si A est centrale simple sur k, $A \neq k$, alors A contient une algèbre étale L sur k, $L \neq k$, ce qui est contenu dans le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.4. - Avec les conditions de 3.2, il existe toujours un $x \in A$ tel que la sous-algèbre $L = k[x]$ de A ait les propriétés envisagées dans 3.2.

Si k est infini, la considération du discriminant du "polynôme caractéristique réduit" d'un élément variable x de A, jointe au "principe du prolongement des identités algébriques", montre que, pour x "assez général", $k[x]$ est étale sur k de degré r. Si k est fini, on sait, grâce au théorème de Wedderburn ([6], VIII, § 11, n° 1, théorème 1), que A est isomorphe à $M_r(k)$, mais une telle algèbre contient comme sous-algèbre <u>toute</u> algèbre L de rang r sur k. Prenant pour L l'extension de degré r de k ([6], V, § 11, prop. 3), la conclusion s'ensuit, grâce au théorème de l'élément primitif (ibid, prop. 4).

PROPOSITION 3.5. - Soit A centrale simple sur k de rang r^2, et soit L une sous-algèbre étale maximale de A. Alors A est un L-module libre de rang r, pour ses structures de L-module à gauche ou à droite.

Par descente, on peut supposer k algébriquement clos, $A = M_r(k)$, L la sous-algèbre diagonale, et alors la vérification est triviale.

PROPOSITION 3.6. - Soit A comme dans 3.1, et soit L une sous-k-algèbre telle que A soit libre de rang r, pour sa structure naturelle de L-module à droite (ce qui implique que L est de rang r sur k, la réciproque étant vraie si L est un corps). Désignons par V le L-espace vectoriel de dimension r sous-jacent à A, et considérons l'homomorphisme de L-algèbres

$$(3.1) \qquad v : A \otimes_k L \to \mathrm{End}_L(V) ,$$

qui, sur $A \otimes_k 1_L$, se réduit à l'homomorphisme de k-algèbres $u : A \to \mathrm{End}_L(V)$, donné par la représentation régulière de A : $u(x)(y) = xy$. Alors, v est un isomorphisme (donc, $A \otimes_k L$ est isomorphe à $M_r(L)$).

En effet, les deux membres de 3.1 étant libres de même rang, il suffit de prouver que, pour tout corps résiduel L_i de L, l'homomorphisme

$$v \otimes \varphi_i : A \otimes_k L_i \to \mathrm{End}_{L_i}\left(V \otimes_L L_i\right)$$

(où $\varphi_i : L \to L_i$ est l'homomorphisme canonique) est un isomorphisme. Or, cela résulte du fait que c'est un homomorphisme de L_i-algèbres de même rang, dont la première est simple.

Conjugant 3.5 et 3.6, on trouve :

COROLLAIRE 3.7. - Soit L une sous-algèbre étale maximale de l'algèbre centrale simple A sur k ; alors, l'homomorphisme canonique (3.1) est un isomorphisme, et A_L est isomorphe à la L-algèbre $M_r(L)$.

COROLLAIRE 3.8. - Soit A une algèbre centrale simple sur k ; alors, il existe une extension finie séparable de k (de degré divisant r, si on veut, où $[A:k] = r^2$) qui neutralise A. En particulier, si k est séparablement clos, A est isomorphe à l'algèbre $M_r(k)$.

Cela implique, en particulier, que, dans 3.1, on peut se borner à supposer Ω séparablement clos.

REMARQUE 3.9. - L'énoncé 3.6 nous donne un moyen de trouver des corps neutralisants pour une algèbre centrale simple A. En fait, on montre ([6], VIII, § 10, prop. 7) que, quitte à se permettre de considérer, en même temps que A, toutes les algèbres de la forme $A \otimes M_r(k)$ (qui, a priori, ont même corps neutralisant que A), on les trouve tous de cette façon. (Pour une généralisation aux Algèbres d'Azumaya, cf. [2], théorème 5.7.) En particulier, si A est un corps gauche sur k de degré r^2, L un corps neutralisant de A, alors $[L:k]$ est un multiple de r.

4. Variations infinitésimales d'algèbres et d'automorphismes d'algèbres.

Soient Λ un anneau commutatif, $\Lambda_o = \Lambda/J$ un quotient de Λ par un idéal J, $\Lambda_\nu = \Lambda/J_\nu$ un quotient par un idéal $J_\nu \subset J$ tel que $J.J_\nu = 0$ (donc J_ν de carré nul), A_ν une Λ_ν-algèbre plate, associative (pas nécessairement commutative, ni unitaire). On se propose de classer, à un isomorphisme près, les structures (A , φ) , où A est une Λ-algèbre plate, et φ un isomorphisme

$$\varphi : A \otimes_\Lambda \Lambda_\nu \xrightarrow{\sim} A_\nu .$$

On suppose qu'on se donne déjà, à un isomorphisme près, la structure de module étendue A ; cela ne modifie d'ailleurs pas le problème initial, si A_ν est (en tant que module) libre, ou projectif de type fini (ce qui implique que A doit avoir la même propriété, et est déterminé, comme module, à un isomorphisme près respectant φ). On doit donc déterminer (à Λ-isomorphisme près induisant l'identité sur $A \otimes_\Lambda \Lambda_\nu$) les structures multiplicatives

$$A \otimes_\Lambda A \to A ,$$

étendant la structure donnée

$$A_\nu \otimes_{\Lambda_\nu} A_\nu \to A_\nu ,$$

et qui soit associative.

Supposons déjà qu'on dispose d'une telle structure multiplicative, soit p . Alors, tout autre q peut s'écrire sous la forme

$$q = p + C ,$$

où $C : A \otimes_\Lambda A \to \mathrm{Ker}(A \to A_\nu) \simeq A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu$, et C se factorise nécessairement par

$$c : A_o \otimes_{\Lambda_o} A_o \to A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu .$$

En exprimant que q définit bien une loi associative, on trouve la condition

$$c(x_o , y_o)z_o + c(x_o y_o , z_o) - x_o c(y_o , z_o) + c(x_o , y_o z_o) = 0 ,$$

qui s'écrit aussi (cf. [8], chapitre IX, § 6)

$$\delta c = 0 ,$$

i. e. c est un 2-cocycle de l'algèbre associative A_o à valeur dans le A_o-bimodule $A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu$. Pour deux c , c' , dire que les algèbres associatives correspondantes sont isomorphes au sens précisé, revient, comme on le voit facilement, à dire que les cocycles sont cohomologues. On trouve ainsi aisément :

PROPOSITION 4.1. - Supposons A_o projectif comme Λ_o-module. L'ensemble des structures, à un isomorphisme près, des Λ-algèbres associatives plates A qui prolongent A_ν (pour une extension donnée de la structure de module) est vide ou est un ensemble principal homogène sous $H^2(A_o, A_o \otimes J_\nu)$ (cohomologie de Hochschild).

Lorsque Λ_o est un corps, A_o une algèbre centrale simple sur le corps, on sait que $H^i(A_o, M_o) = 0$ pour tout $i \geq 1$ (pour $i = 1$, c'est essentiellement la forme infinitésimale du théorème de Skolem-Noether). On trouve alors :

COROLLAIRE 4.2. - Soient Λ un anneau local artinien, de corps résiduel $k = \Lambda_o$, A_o une algèbre centrale simple sur k ; alors, il existe (à un isomorphisme près) au plus une algèbre associative sur k, qui soit libre comme Λ-module, et telle que $A \otimes_\Lambda k \simeq A_o$. En particulier, si $A_o \simeq M_r(k)$, alors $A \simeq M_r(\Lambda)$.

REMARQUES 4.3. - Sous les conditions générales de 4.1, si A_o est libre, ou projectif de type fini sur Λ_o, alors on définit par la méthode habituelle une classe canonique

$$\delta(A_o) \in H^3(A_o, A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu),$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une Λ-algèbre plate A prolongeant A_ν. Cela implique que, sous les conditions de 4.2, il existe effectivement une algèbre A relevant A_ν. Le résultat 4.2 ainsi complété sera d'ailleurs généralisé dans 6.1 par une autre méthode.

4.4. - Un argument facile montre que, lorsqu'une algèbre associative A sur Λ est telle que A_ν soit unitaire, alors A est elle-même unitaire.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 4.5. - Avec les notations du début du numéro pour Λ, Λ_o, Λ_ν, soit A une Λ-algèbre associative unitaire, plate sur Λ, telle que $A_o = A \otimes_\Lambda \Lambda_o$ soit un Λ_o-module projectif. Soit G le groupe des automorphismes de la Λ-algèbre A induisant l'identité sur $A_\nu = A \otimes_\Lambda \Lambda_\nu$, et soit G' le sous-groupe des automorphismes de A de la forme $x \mapsto a\,x\,a^{-1}$, où a est un élément de A dont l'image dans A_ν est égale à 1. Alors, D est isomorphe au groupe des Λ_o-dérivations de A_o dans $A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu$, et cet isomorphisme transforme G' en le sous-groupe H_o' de H' formé des dérivations intérieures. En particulier, si A_o est un Λ_o-module projectif, alors

$$G/G' \simeq H_o/H_o' \simeq H^1(A_o, A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu).$$

On en conclut comme plus haut le résultat suivant, qui n'est qu'une autre façon d'énoncer le classique théorème de Skolem-Noether :

COROLLAIRE 4.6. - Soient Λ un anneau local artinien, de corps résiduel k , A une Λ-algèbre qui est un Λ-module libre de type fini, et tel que $A_o = A \otimes_\Lambda k$ soit une algèbre centrale simple sur k . Alors, tout Λ-automorphisme de A est intérieur.

REMARQUE 4.7. - On comparera les résultats du présent numéro avec les résultats de SGAD ([9], III), sur les extensions infinitésimales de groupes et homomorphismes de groupes, et les résultats plus spécifiques dans le cas semi-simple (SGAD [9], XXIII, XXIV), notamment à la lumière du n° 7 ci-dessous.

5. Algèbres d'Azumaya sur un préschéma.

THÉORÈME 5.1. - Soient X un préschéma, $\mathcal{A}$ une algèbre sur X qui est un $\mathcal{O}_X$-Module de présentation finie. Conditions équivalentes :

(i) $\mathcal{A}$ est localement libre comme $\mathcal{O}_X$-Module, et, pour tout $x \in X$, $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_x \otimes k(x)$ est une algèbre centrale simple sur $k(x)$, i. e. (cf. 3.1) $\mathcal{A}(x) \otimes_{k(x)} \overline{k(x)}$ est isomorphe à une algèbre de matrices sur $\overline{k(x)}$.

(ii) $\mathcal{A}$ est localement libre comme $\mathcal{O}_X$-Module, et l'homomorphisme naturel $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^o \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}(\mathcal{A})$ est bijectif.

(iii) Pour tout $x \in X$, il existe un entier $r \geqslant 1$, un voisinage ouvert U de x , et un morphisme <u>fini étale surjectif</u> $U' \to U$, tels que $\mathcal{A}_{U'}$ soit isomorphe à $M_r(\mathcal{O}_{U'})$.

(iii) <u>bis</u> Comme (iii), avec $U' \to U$ simplement surjectif.

L'équivalence de (i) et (ii) et l'implication (iii) <u>bis</u> $\Longrightarrow$ (i) résultent trivialement de 3.1 ; il reste à prouver que (i) $\Longrightarrow$ (iii) . Cela va résulter des propositions plus précises qui vont suivre. Notons, dès maintenant, que 5.1 impliquera le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.2. - Désignons encore par $\mathcal{A}$ l'Algèbre sur le site étale de X définie par $\mathcal{A}$. Alors, les conditions de 4.1 équivalent à dire que $\mathcal{A}$ est une Algèbre d'Azumaya sur $X_{\text{ét}}$ (au sens du n° 2).

REMARQUE 5.3. - Compte tenu de la théorie de la descente fidèlement plate, qui implique que la catégorie des Modules de présentation finie sur X (pour la topologie de Zariski) est équivalente à celle des Modules de présentation finie sur $X_{\text{ét}}$, on voit donc que la classification des Algèbres d'Azumaya du topos annelé étale de X équivaut à celle des algèbres sur X satisfaisant aux conditions de 4.1, qu'on appellera pour simplifier, et par abus de langage, Algèbres d'Azumaya sur X (notion qu'on se gardera de confondre avec celle d'Algèbre d'Azumaya au sens de la topologie de Zariski de X, qui correspond au cas où dans 4.1 (iii) on peut prendre $U' = U$). [Pour d'autres caractérisations des Algèbres d'Azumaya, cf. [17], II, § 5, ex. 14 ; et [2], 2.1 et 4.7.]

PROPOSITION 5.4. - Supposons que $\mathcal{A}$ satisfasse aux conditions équivalentes (i), (ii), de 5.1, et soit de rang constant (nécessairement de la forme r^2). Soit $\mathcal{L}$ une algèbre finie étale sur X (i. e. une algèbre qui, en tant que $\mathcal{O}_X$-Module, est localement libre de rang fini, est commutative et à fibres des algèbres étales sur les $k(x)$, $x \in X$), partout de rang r, et soit

$$u : \mathcal{L} \to \mathcal{A}$$

un homomorphisme d'algèbres, injectif sur les fibres, i. e. qui induit localement un isomorphisme de $\mathcal{L}$ sur un Module facteur direct de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{L}$-Module localement libre de rang r pour sa structure naturelle de $\mathcal{L}$-Module à droite, et l'homomorphisme naturel

$$\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{V}) ,$$

où $\mathcal{V}$ est le $\mathcal{L}$-Module sous-jacent à $\mathcal{A}$, est un isomorphisme.

On se ramène trivialement au cas où X est le spectre d'un corps, qui est traité dans 3.8. Ceci posé, le dictionnaire bien connu nous fournit :

COROLLAIRE 5.5. - Sous les conditions de 4.4, posons $X' = \mathrm{Spec}\, \mathcal{L}$, et soit $\mathcal{E}'$ le Module sur X' défini par le $\mathcal{L}$-Module $\mathcal{V}$. Alors $\mathcal{A}_{X'}$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}')$.

En analogie avec la terminologie "tore maximal" pour un schéma en groupes sur X, on pose par abus de langage la définition suivante :

DÉFINITION 5.6. - Soit $\mathcal{A}$ une Algèbre d'Azumaya sur X. Une sous-Algèbre $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{L}$ soit étale sur X et que l'inclusion $\mathcal{L} \to \mathcal{A}$ satisfasse, en tout point de X, aux conditions de 5.4, est appelée une sous-Algèbre étale maximale de $\mathcal{A}$. Une section ξ de $\mathcal{A}$ est dite régulière si elle engendre une sous-Algèbre étale maximale.

Compte tenu de 5.5, l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii) de 5.1 sera conséquence du résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 5.7 (AUSLANDER-GOLDMAN). - Soit $\mathfrak{A}$ une Algèbre d'Azumaya sur X. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x, et une sous-Algèbre étale maximale $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{A}|U$.

C'est une conséquence immédiate de 3.4 et du lemme suivant :

LEMME 5.8. - Soient X un préschéma, $\mathfrak{A}$ une Algèbre d'Azumaya sur X, ξ une section de $\mathfrak{A}$, $x \in X$; supposons que $\xi(x) \in \mathfrak{A}(x) = \mathfrak{A} \otimes k(x)$ soit régulier (déf. 5.6). Alors, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\xi|U$ soit régulière.

Par la technique habituelle, on se ramène au cas où $X = \mathrm{Spec}(\Lambda)$ est local, x son point fermé, puis au cas où X est de plus noethérien. Si A est de rang r^2 sur Λ, il suffit de prouver que le sous-Λ-module engendré par les ξ^i $(0\leqslant i<r)$ est un sous-anneau, i. e. que ξ^r se trouve dans ce sous-module. On se ramène immédiatement au cas où Λ est artinien, et par descente plate au cas où $A_0 = A \otimes_\Lambda k$ est une algèbre de matrices. Alors, en vertu de 4.2, A est isomorphe lui-même à $M_r(\Lambda)$, ce qui implique que <u>tout</u> élément de A, et en particulier ξ, satisfait une équation de dépendance intégrale de degré r sur Λ (<u>polynôme de Hamilton-Cayley</u>).

C. Q. F. D.

REMARQUE 5.9. - Une autre démonstration, n'utilisant pas la méthode de réduction au cas artinien et les résultats du n° 4, consiste à définir directement le polynôme de Hamilton-Cayley d'un élément de A (Algèbre d'Azumaya sur l'anneau local Λ), par "descente" à partir du cas où $A = M_r(\Lambda)$. Pour ceci, il faut montrer que A devient isomorphe à une algèbre de matrices, après extension fidèlement plate $\Lambda \to \Lambda'$ de la base. Or, on peut montrer qu'il suffit en fait de prendre pour Λ' le <u>hensélisé strict</u> de Λ, comme on le voit par une méthode de relèvement d'idempotents (cf. [7], III, § 4, ex. 5).

Nous aurons besoin de la généralisation suivante du théorème de Skolem-Noether :

THÉORÈME 5.10 (AUSLANDER-GOLDMAN). - Soient $\mathfrak{A}$ une Algèbre d'Azumaya sur X, u un automorphisme de $\mathfrak{A}$; alors, localement pour la topologie de Zariski (et a fortiori localement pour la topologie étale !), u est intérieur, i. e. de la forme $u\,x = a\,x\,a^{-1}$, où a est une section inversible de $\mathfrak{A}$, déterminée d'ailleurs de façon unique modulo multiplication par une section de $\mathcal{O}_X^*$.

On se ramène, par les méthodes standard, au cas où X est local artinien, justiciable de 4.5.

Voici une autre façon d'exprimer 5.10 :

COROLLAIRE 5.11. - Le <u>schéma des automorphismes</u> de l'algèbre associative $\underset{\sim}{M}_r(\mathcal{O}_X)$ est canoniquement isomorphe au groupe projectif $\underset{\sim}{GP}(r)_X$. La classification des Algèbres d'Azumaya de rang r^2 sur X équivaut à celle des torseurs (= fibrés principaux homogènes) sur X de groupe $\underset{\sim}{GP}(r)_X$, au sens de la topologie étale ou f. p. q. c. indifféremment.

La deuxième assertion résulte formellement de la première et de la théorie de la descente fidèlement plate quasi compacte [16].

REMARQUE 5.12. - Le théorème 5.10 fournit la justification du fait (admis implicitement au n° 2) que la classification des Algèbres d'Azumaya de rang r^2 sur un topos annelé en anneaux locaux X, est la même que celle des torseurs sous le faisceau en groupes $\underset{\sim}{GP}(r)_X$. D'autre part, 5.1 implique que, lorsque le topos localement annelé X est tel que toute algèbre finie étale sur un $U \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{X}$ est splittée localement, alors les Algèbres d'Azumaya sur X sont exactement les algèbres qui satisfont la condition 5.1, (ii). La condition envisagée sur X est vérifiée dans le cas du topos associé à un espace topologique ordinaire muni du faisceau des fonctions complexes continues, ou à un préschéma pour la topologie étale ou f. p. q. c., mais non en général pour un préschéma muni de sa topologie de Zariski (par exemple, le spectre d'un corps k tel que $\mathrm{Br}(k) \neq 0$!). Il s'ensuit bien, dans le cas envisagé au n° 1, que les Algèbres d'Azumaya sur X sont simplement celles qui satisfont la condition 5.1, (i) (où $k(x) = \underset{\sim}{C}$ pour tout $x \in X$!).

5.13. - Le théorème 5.10 (pour le cas $\mathcal{A} = \underset{\sim}{M}_r(\mathcal{O}_X)$) permet, grâce à la théorie de la descente (SGA, [9], VIII), de définir, pour toute Algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ de rang r^2 et toute section ξ de $\mathcal{A}$, le "polynôme de Hamilton-Cayley" de ξ :

$$P(\xi\ ,\ t) = t^r + c_1(\xi)t^{r-1} + \dots + c_r(\xi)\ ,$$

avec les propriétés habituelles ([6], VIII, § 10). En particulier, $c_1(\xi)$ est appelé <u>trace réduite</u>, $c_r(\xi)$ <u>norme réduite</u>. La section ξ est régulière (définition 5.6) si et seulement si le polynôme $P(\xi\ ,\ t) \in \Gamma(\mathcal{O}_X)[t]$ est étale sur $\mathcal{O}_X$, ce qui s'exprime par le fait que son <u>discriminant</u>, qui est une fonction polynômiale $D(\xi)$ en ξ à valeur dans $\mathcal{O}_X$, est inversible.

5.14. - Le résultat 5.11 prouve que tout <u>torseur</u> sous $\underset{\sim}{GP}(r)_X$, localement trivial pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, est "localement isotrivial", i. e. splitté, localement pour la topologie de Zariski, par un revêtement fini étale. On retrouve ainsi dans un cas particulier un résultat général sur les schémas en groupes semi-simples (SGAA, [1], XXIV).

6. Cas d'un schéma de base local hensélien.

THÉORÈME 6.1 (AZUMAYA). - Soient A un anneau local hensélien (EGA, [14], IV, 18), de corps résiduel k, $X = \mathrm{Spec}\, A$, $x = \mathrm{Spec}\, k$. Soit $P_r(X)$ l'ensemble des classes à un isomorphisme près d'Algèbres d'Azumaya sur X. Alors l'application de restriction

$$(6.1) \qquad P_r(X) \to P_r(x)$$

est bijective.

Compte tenu que $P_r(X) \simeq H^1\big(X , \underset{\sim}{GP}(r)_X\big)$, et que $\underset{\sim}{GP}(r)_X$ est lisse et quasi-projectif sur X, le résultat précédent est un cas particulier d'un résultat général de cohomologie galoisienne non commutative (SGAD, [9], XXIV, Appendice). Pour l'injectivité, l'argument général revient à noter que, si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ sont telles que l'on ait un isomorphisme

$$u_o : \mathfrak{a} \otimes k \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}' \otimes k ,$$

comme le schéma

$$P = \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{O}_X\text{-Alg}}(\mathfrak{a} , \mathfrak{a}')$$

est localement isomorphe (ét) à $\underset{\sim}{GP}(n)$, donc lisse sur X, u_o se relève en une section u de P par le "lemme de Hensel" (SGAD, [9], XI, 1.11). La surjectivité peut d'ailleurs, dans le cas actuel, s'obtenir par un argument tout analogue, qui consiste à noter que "le schéma Σ des structures multiplicatives sur $\mathcal{O}_X^{r^2}$ qui en font une Algèbre d'Azumaya" est lisse sur X.

COROLLAIRE 6.2. - Sous les conditions de 6.1, l'application $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(x)$ est bijective.

7. Algèbres d'Azumaya et formes du groupe linéaire.

7.1. - Considérons les schémas en groupes sur $\underset{\sim}{Z}$ suivants G_i $(i = 1, 2, 3)$,

$$(7.1) \qquad \underset{\sim}{G\ell}(r) , \underset{\sim}{S\ell}(r) , \underset{\sim}{GP}(r) \sim \underset{\sim}{G\ell}(r)/\underset{\sim}{G}_m \sim \underset{\sim}{S\ell}(r)/\mu_r .$$

Comme $\underset{\sim}{G\ell}(r)$ opère sur lui-même par automorphismes intérieurs, en laissant invariants le sous-groupe $\underset{\sim}{S\ell}(r)$ et le centre $\underset{\sim}{G}_m$, ces opérations passent au quotient, et de cette façon $\underset{\sim}{GP}(r)$ opère par automorphismes sur les trois groupes (7.1). En fait, on vérifie (SGAD, [9], XXIV) que les schémas en groupes des automorphismes $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}_{gr}\big(G_i(r)\big)$ $(i = 1 , 2 , 3)$ sont affines et lisses sur $\underset{\sim}{Z}$, et

$\underset{\sim}{GP}(r)$ s'identifie au sous-groupe $\mathrm{Aut}(G_i)^o$ des composantes connexes. D'ailleurs, pour $r \geqslant 3$, les trois groupes $\underset{\approx}{\mathrm{Aut}}\big(G_i(r)\big)$ sont isomorphes par les homomorphismes naturels

$$\underset{\approx}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{G\ell}(r)\big) \to \underset{\approx}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{GP}(r)\big) , \qquad \underset{\approx}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{S\ell}(r)\big) \to \underset{\approx}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{GP}(r)\big) ,$$

et sont isomorphes à un produit semi-direct $(\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z})_{\mathrm{Spec}\ \underset{\sim}{Z}} \cdot \underset{\sim}{GP}(r)$, tandis que, pour $r = 1$, 2, $\underset{\approx}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{S\ell}(r)\big)$ et $\underset{\approx}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{GP}(r)\big)$ sont à fibres connexes, tandis que $\underset{\approx}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{G\ell}(r)\big)$ est encore un produit semi-direct $(\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z})_{\mathrm{Spec}\ \underset{\sim}{Z}} \cdot \underset{\sim}{GP}(r)$. En tous cas, le schéma en groupes des automorphismes extérieurs de $\underset{\sim}{G\ell}(r)$ est isomorphe à $(\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z})_{\mathrm{Spec}\ \underset{\sim}{Z}}$, l'élément non trivial de $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$ correspondant à l'automorphisme "contragrédient" $u \rightsquigarrow {}^t u^{-1}$.

7.2. - De ce fait, pour tout préschéma X, la donnée d'un torseur sous $\underset{\sim}{GP}(r)_X$ (pour la topologie étale, disons) définit une <u>forme</u> de chacun des groupes (7.1), et de façon plus précise une "forme intérieure" (i. e. déduit du groupe "déployé" en tordant, à l'aide du faisceau des automorphismes <u>intérieurs</u>). De façon précise, G_i $(i = 1, 2, 3)$ étant l'un des trois groupes envisagés dans (7.1), et $\Gamma_i = \underset{\approx}{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G_i)$ son schéma en groupes des automorphismes, nous appellerons <u>forme intérieure</u> de G_i sur le préschéma X, un couple (G, φ) d'un schéma en groupes G sur X, localement isomorphe au sens de la topologie étale (ou, ce qui revient au même comme on le constate aisément, au sens de la topologie f. p. q. c.) à G_i, muni d'une section φ du revêtement principal galoisien de groupe Γ_i/Γ_i^o (i. e. $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$, sauf lorsque $r \leqslant 2$ et $i = 2, 3$)

$$P = \underset{\approx}{\mathrm{Isom}}_{X\text{-}gr}\big(G_{iX}, G\big)/\Gamma_i^o \simeq \underset{\approx}{\mathrm{Isom\ ext}}_{X\text{-}gr}\big(G_{iX}, G\big) .$$

Ceci posé, la catégorie fibrée des formes intérieures d'un déterminé des groupes G_i de (7.1) $(i = 1, 2, 3)$, sur des préschémas de base quelconques X, est équivalente à la catégorie fibrée des torseurs sous $\underset{\sim}{GP}(r)$, équivalente elle-même, comme nous l'avons vu au n° 5, à celle des Algèbres d'Azumaya.

7.3. - La forme de $\underset{\sim}{G\ell}(r)$., associée à l'Algèbre d'Azumaya $\mathfrak{a}$, n'est autre que le schéma $W(\mathfrak{a})^*$ des <u>unités</u> de $\mathfrak{a}$, défini par

$$W(\mathfrak{a})^* \ (X') = \Gamma\big(X', \mathfrak{a}_{X'}\big)^*$$

pour tout X' sur X ; de même, la forme de $\underset{\sim}{S\ell}(r)$, associée à $\mathfrak{a}$, est le "groupe spécial linéaire de $\mathfrak{a}$", noyau de la "<u>norme réduite</u>" (5.13)

$$W(\mathfrak{a})^* \to \underset{\sim}{G}_{m_X} ;$$

enfin, la forme tordue de $\underset{\sim}{GP}(r)$ est $W(\mathfrak{A})^*/\underset{\sim}{G}_{m_X}$, isomorphe aussi au schéma en groupes des automorphismes de l'Algèbre $\mathfrak{A}$.

7.4. - On fera attention que deux Algèbres d'Azumaya non isomorphes peuvent définir des formes isomorphes de $\underset{\sim}{GP}(r)$, ce qui signifie que

$$H^1\left(X\ ,\ \underset{\sim}{GP}(r)\right) = H^1\left(X\ ,\ \Gamma_i^o\right) \to H^1\left(X\ ,\ \Gamma_i\right)$$

n'est pas toujours injectif. De façon précise, pour deux Algèbres d'Azumaya $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ de rang r^2 , $W(\mathfrak{A})^*$ et $W(\mathfrak{B})^*$ sont isomorphes si et seulement si $\mathfrak{B}$ est isomorphe à $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{A}^o$ (en supposant, pour simplifier, X connexe). Le passage de $\mathfrak{A}$ à $\mathfrak{A}^o$ se traduit par le passage de $(G\ ,\ \varphi)$ à $(G\ ,\ \varphi^o)$, où φ^o est l'isomorphisme extérieur "opposé" de φ .

7.5. - Si G est une forme intérieure de $\underset{\sim}{G\ell}(r)_X$, correspondant à l'Algèbre d'Azumaya $\mathfrak{A}$, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{G} = \underset{\sim}{\underline{Lie}}\ G$ de G (SGAD, [9], II) est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie associée à $\mathfrak{A}$ (par $[X\ ,\ Y] = xy - yx$). Ceci posé, on prouve facilement que les sections régulières de $\mathfrak{A}$, au sens de 5.6, sont les sections régulières, au sens de la théorie des algèbres de Lie (SGAD [9], XIII), et les sous-algèbres étales maximales $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ correspondent biunivoquement aux "tores maximaux" T (SGAD, [9], XII) de G , en associant à tout T son algèbre de Lie, et à tout L , le sous-groupe $W(\mathfrak{L})^*$ de $G = W(\mathfrak{A})^*$. La construction locale d'une sous-algèbre étale maximale de $\mathfrak{A}$ (5.7 et 5.8) est essentiellement la même que la construction locale des tores maximaux des schémas en groupes réductifs à l'aide d'un élément régulier de son algèbre de Lie (SGAD, [9], XIV). (Le fait que, pour une telle $\mathfrak{L}$, $X' = \operatorname{Spec} \underset{\sim}{\mathfrak{L}}$ "splitte" $\mathfrak{A}$ au sens de Brauer, et en particulier que $\mathfrak{A}_{X'}$ soit localement constant au sens de Zariski, ne semble pas par contre avoir été généralisé en termes généraux de formes de groupes semi-simples.)

8. Relations avec les schémas de Brauer-Severi.

8.1. - $\underset{\sim}{GP}(r)_X$ s'identifie également au faisceau de X-automorphismes du fibré projectif $\underset{\sim}{P}_X^{r-1}$ (EGA, [14], IV, § 21 ; ou [15], corollaire à la proposition 2). Donc, par les principes généraux [12], $H^1\left(X\ ,\ \underset{\sim}{GP}(r)_X\right)$ donne aussi la classification, à un isomorphisme près, des schémas P sur X qui sont isomorphes, localement pour la topologie étale, au fibré projectif $\underset{\sim}{P}_X^{r-1}$. (Il faut utiliser le fait que, pour toute famille couvrante $X_i \to X$ pour la topologie étale, ou seulement pour la topologie f. p. q. c., toute donnée de descente sur la famille des

$\underset{\sim}{P}^{r-1}_{X_1}$ est effective, ce qui résulte de [16], 7.8, et du fait que le faisceau $\Omega^{r-1}_{\underset{\sim}{P}_X/X}(\otimes -1)$ sur $\underset{\sim}{P}^{r-1}_X$ est ample relativement à X .) Un tel préschéma s'appellera <u>préschéma de Brauer-Severi</u> sur X . La technique de géométrie formelle [15] permet de prouver l'énoncé suivant, jouant un rôle analogue à 5.1.

THÉORÈME 8.2. - Soit $f : P \to X$ un morphisme propre plat et de présentation finie, et soit $x \in X$ tel que la fibre géométrique $P_{\bar{x}}$ soit isomorphe à l'espace projectif $P^{r-1}_{\overline{k(x)}}$. Alors, il existe un voisinage ouvert U de x , et un morphisme fini étale surjectif $U' \to U$, tel que $P \times_X U'$ soit U'-isomorphe à $\underset{\sim}{P}^{r-1}_{U'}$.

COROLLAIRE 8.3. - Soit P un préschéma sur X . Pour que P soit un préschéma de Brauer-Severi sur X , il faut et il suffit qu'il soit propre, plat, de présentation finie sur X , et que ses fibres géométriques soient des espaces projectifs.

8.4. - La notion de schéma de Brauer-Severi étant ainsi clarifiée, on voit que l'opération de produit tensoriel d'Algèbres se traduit, via les fibrés principaux projectifs, en une opération $P \star Q$ sur les fibrés projectifs, que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter. L'opération de passage à l'algèbre opposée se traduit de même par le passage au fibré de Severi-Brauer <u>dual</u> P^o de P (correspondant à la notion d'espace projectif dual d'un espace projectif donné). De cette façon, le groupe de Brauer $Br(X)$ peut aussi se décrire en termes de classes d'équivalence de fibrés de Brauer-Severi (P et P' étant équivalents s'il existe des fibrés Q , Q' de Brauer-Severi "<u>banaux</u>", i. e. qui sont des fibrés projectifs associés à des faisceaux localement libres $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, tels que $P \star Q \simeq P' \star Q'$). Retenir surtout qu'à un fibré de Brauer-Severi P est associé une classe

$$\delta P \in Br(X) \subset H^2\left(X , \underset{\sim}{G}_m\right)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que P soit un fibré projectif.

REMARQUE 8.5. - 8.2 peut aussi s'exprimer en disant que l'espace projectif P^{r-1}_k sur un corps k "n'a pas de déformation de structure non triviale", i. e. que

$$H^1\left(P_k , \mathfrak{G}_{P_k}\right) = 0 ,$$

où $\mathfrak{G}_{P_k}$ est le faisceau tangent à P_k . D'ailleurs, le fait que

$$\underset{\sim}{G}P(r) \xrightarrow{\sim} \underset{\sim}{\mathrm{Aut}}_{gr}\left(P^{r-1}\right)$$

se traduit infinitésimalement par le fait que l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{Lie}\ \underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r) \simeq \mathfrak{Gl}(r)_k/k \to H^0\left(P_k , \mathfrak{G}_k\right)$$

est un isomorphisme pour tout corps k , où $\mathfrak{Gl}(r)_k \simeq M_r(K)$ est l'algèbre de Lie de $\underset{\sim}{\mathrm{Gl}}(r)_k$. Il est plausible que, sous cette forme, les résultats précédents se généralisent au cas des espaces homogènes propres de groupes semi-simples, et notamment à la "variété des Borels" (ou "variété des drapeaux") de tels groupes. Cela permettrait d'établir une correspondance parfaite entre "fibrés en variétés de drapeaux" (jouant le rôle des schémas de Brauer-Severi dans le présent numéro) et schémas en groupes semi-simples.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (M.) et GROTHENDIECK (A.). - Séminaire de Géométrie algébrique, 1963/64 (SGAA) : Cohomologie étale des schémas. - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques [multigr., à paraître].

[2] AUSLANDER (M.) and GOLDMAN (O.). - The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 367-409.

[3] AZUMAYA (G.). - On maximally central algebras, Nagoya math. J., t. 2, 1951, p. 119-150.

[4] BASS (Hyman). - K-theory and stable algebra. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, n° 22, p. 5-60).

[5] BOTT (Raoul). - The stable homotopy of the classical groups, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 933-935.

[6] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chap. 4-5 et 8. - Paris, Hermann, 1950 et 1958 (Act. scient. et ind., 1102 et 1261 ; Bourbaki, 11 et 23).

[7] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 1-2 et 3-4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 et 1293 ; Bourbaki, 27 et 28).

[8] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[9] DEMAZURE (M.) et GROTHENDIECK (A.). - Séminaire de Géométrie algébrique, 1963 et 1964 (SGAD) : Schémas en groupes. - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques [multigr., 4 fasc. parus, 3 fasc. à paraître].

[10] DEURING (Max). - Algebren. - Berlin, J. Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik, 4, 1).

[11] GIRAUD (Jean). - Analysis situs, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 256, 11 p.

[12] GIRAUD (Jean). - Thèse, en préparation.

[13] GROTHENDIECK (Alexander). - A general theory of fibre spaces with structure sheaf. - Lawrence, University of Kansas, Department of Mathematics, 1955 (National Science Foundation Research Project on Geometry of Function Space, Report n° 4).

[14] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de Géométrie algébrique, Chapitre 4. - Paris, Presses universitaires de France, 1964-1965 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, n° 20 et 24). [Chap. 5, à paraître.]

[15] GROTHENDIECK (Alexander). - Géométrie formelle et géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 182, 28 p.

[16] GROTHENDIECK (Alexander). - Descente fidèlement plate, Séminaire de Géométrie algébrique, 1961 (SGA), exposé VIII. - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (multigr.).

[17] VERDIER (Jean-Louis). - Topologie et faisceaux, Séminaire de Géométrie algébrique, 1963/64 (SGAA) : Cohomologie étale des schémas, fasc. 1 (exposés I à VI). - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques [multigr., exposés I-III parus, exposés IV-VI à paraître].

LE GROUPE DE BRAUER

par Alexander GROTHENDIECK

II. Théorie cohomologique.

Nous continuons l'étude [5], cité dans la suite comme GB I.

0. Compléments à l'exposé précédent.

Comme résultat spécifique, dans l'interprétation du groupe de Brauer d'un préschéma X en termes de formes tordues des groupes linéaires $\underline{Gl}(n)_X$ sur X (GB I, n° 7), signalons le résultat suivant dû essentiellement à CHEVALLEY, et qu'il convient de rapprocher de GB I 4.2, 5.1 et 8.2 (qui donnent les résultats spécifiques correspondants, pour l'interprétation du groupe de Brauer en termes d'Algèbres d'Azumaya, resp. en termes de schémas de Severi-Brauer) : les schémas en groupes G sur X, localement isomorphes pour la topologie étale (ou pour la topologie fpqc, cela revient au même) à $\underline{Gl}(n)_X$, sont exactement ceux qui sont affines et lisses sur X, et dont les fibres géométriques sont isomorphes au groupe $\underline{Gl}(n)$. La forme infinitésimale de ce résultat s'écrit simplement

$$H^2(G,\underline{g}) = 0 ,$$

où G est un groupe $\underline{Gl}(n)$ sur un corps algébriquement clos, et $\underline{g}$ son algèbre de Lie sur laquelle G opère par la représentation adjointe, le H^2 étant celui de (SGAD I [4]). Le fait que le sous-schéma en groupes des composantes connexes de $\underline{Aut}\ \underline{gr}_X(\underline{Gl}(n)_X)$ ne soit autre que le groupe $\underline{GP}(n)_X$ des automorphismes intérieurs, s'interprète sous forme infinitésimale par la formule

$$H^1(G,\underline{g}) = 0 .$$

Ces résultats sont en fait valables pour tous les "schémas en groupes réductifs", comme il a été établi par CHEVALLEY et DEMAZURE (SGAD XXIII et XXIV).

Signalons un autre résultat spécifique dans l'interprétation de $Br(X)$ en termes de formes des $\underline{Gl}(n)_X$, savoir un critère pour qu'une telle forme G soit localement triviale au sens de Zariski, (c'est-à-dire triviale, si X est un schéma local) : il faut et il suffit pour cela que G admette, localement pour la topologie de Zariski, un tore maximal "trivial" i.e. isomorphe à $(\underline{G}_{m\,X})^n$. C'est également là un résultat valable pour tous les schémas en groupes réductifs (SGAD XXIV), mais qui se réduit pour des formes <u>intérieures</u> de $\underline{Gl}(n)_X$, à l'aide du dictionnaire donné dans GB I 7.5, à la remarque évidente qu'une algèbre d'Azumaya $\underline{A}$ sur X est triviale au voisinage d'un point x si et seulement si elle admet au voisinage de ce point une sous-Algèbre étale maximale $\underline{L}$ triviale, ce qui résulte aussitôt de GB I 5.4 (en fait il suffit que $\mathrm{Spec}(\underline{L})$ admette une section).

On a également un résultat de locale trivialité en termes de fibrés de Severi-Brauer : si un tel fibré admet une section, il est "banal" i.e. associé à un Module localement libre sur X , ce qui montre que P est localement trivial au sens de Zariski si et seulement si il admet une section localement au sens de Zariski. Pour montrer que si P admet une section, il est banal, on note qu'une section de P peut s'interpréter comme un diviseur de Cartier relatif, de degré projectif 1 sur toutes les fibres, du fibré de Severi-Brauer dual P^o de P . Ce diviseur relatif définit un Module inversible $\underline{L}$ sur P^o , et si $g : P^o \longrightarrow X$ est la projection, on vérifie aisément, par les techniques standard, que $g_*(\underline{L}) = \underline{E}$ est un Module localement libre sur X , et que P^o est canoniquement isomorphe au fibré projectif $P(\underline{E})$, donc P est isomorphe à $P(\check{\underline{E}})$. On prouve de la même façon que P est banal si et seulement si il existe sur P un Module inversible $\underline{L}$ tel que $\underline{L}$ induise sur les fibres géométriques le fibré inversible standard de degré 1 .

Signalons que la notion et le nom de variété de Severi-Brauer sur un corps sont dus à F. CHATELET [3], qui a mis en évidence le lien de ces variétés avec le groupe de Brauer. Il convient également d'indiquer le lien du groupe de Brauer avec la théorie des représentations des groupes, qui a joué un rôle important dans des recherches classiques sur cette notion. Soient G un groupe, k un corps, k' une extension galoisienne de k (par exemple la clôture séparable de k), V un vectoriel de dimension finie sur k , donnons-nous une représentation <u>absolument irréductible</u> de G par des automorphismes de $V' = V \otimes_k k'$, et supposons que cette représentation soit équivalente à celles qu'on en déduit par des opérations du groupe de Galois de k' sur k (ce qui s'exprime simplement par le fait que le caractère de la représentation considérée est à valeurs dans k , lorsque k est de caractéristique nulle). On se demande sous quelle condition la représentation donnée est équivalente à la représentation déduite par extension du corps de base d'une représentation de G par automorphismes de V . Introduisant l'algèbre A du groupe G , à coefficients dans k , la donnée de la classe de la représentation linéaire absolument irréductible u équivaut, grâce au théorème de Wedderburn, à la donnée d'une algèbre quotient B' de $A' = A \otimes_k k'$ qui soit isomorphe à une algèbre de matrices $M_n(k')$; l'hypothèse d'invariance signifie que ce quotient est stable par les opérations du groupe de Galois $Gal(k'/k)$ sur A' , ou ce qui revient au même, provient d'une algèbre quotient B de A . Comme $B \otimes_k k' \simeq B'$, B' est nécessairement une algèbre d'Azumaya, et on constate aussitôt que le problème posé a une solution si et seulement si cette dernière est triviale, i.e. si sa classe dans $Br(k)$ est nulle. Bien entendu, on pourrait se débarrasser de l'hypothèse que k'/k soit galoisienne, et remplacer k par une base quelconque, en reformulant le problème en termes de faisceaux fpqc ; on laisse ce plaisant exercice au soin du lecteur.

1. Résultats préliminaires sur les $H^i(X,\underline{G}_m)$.

LEMME 1.1.- Soient X un préschéma quasi-compact et quasi-séparé (par exemple un préschéma noethérien), $x \in X$, F_x un faisceau sur $x = \operatorname{Spec} k(x)$ (au sens de la topologie étale SGAA VII [2]), $i_x : x \longrightarrow X$ le morphisme canonique. Alors les faisceaux $R^q i_{x*}(F_x)$ sur X sont des faisceaux de torsion pour $q \geqslant 1$, et les groupes $H^q(X,i_{x*}(F_x))$ sont des groupes de torsion pour $q \geqslant 1$.

On utilise simplement le fait que la cohomologie du spectre d'un corps, et plus généralement d'un schéma dont l'espace sous-jacent est fini et discret, est de torsion en dimension $\geqslant 1$. Ceci, et le calcul des fibres des $R^q i_{x*}(F_x)$ (SGAA VIII 5.2) prouve que ces faisceaux sont des faisceaux de torsion pour $q \geqslant 1$. Il s'ensuit alors que $H^p(X,R^q i_{x*}(F_x))$ est un groupe de torsion pour tout p , compte tenu de l'hypothèse sur X (SGAA IX), et la deuxième assertion du lemme résulte alors de la suite spectrale de Leray

(1) $$E_2^{p,q} = H^p(X,R^q i_{x*}(F_x)) \Longrightarrow H^*(x,F_x) .$$

COROLLAIRE 1.2.- Sous les conditions de 1.1 sur X , soit $\underline{R}_X^*$ le faisceau des fonctions rationnelles inversibles sur X . Supposons que X n'ait qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors les groupes $H^q(X,\underline{R}_X^*)$ sont de torsion pour $q \geqslant 1$.

On applique 1.1 aux points maximaux x de X, et aux faisceaux des fonctions rationnelles inversibles sur $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x})$.

Supposons de plus que X soit réduit, ou noethérien et sans cycles associés immergés, de sorte que l'homomorphisme canonique $\underline{G}_{m\,X} \longrightarrow \underline{R}_X^*$ de faisceaux étales sur X est injectif. On a donc une suite exacte

(2) $$0 \longrightarrow \underline{G}_{m\,X} \longrightarrow \underline{R}_X^* \longrightarrow \underline{\mathrm{Div}}_X \longrightarrow 0 ,$$

où $\underline{\mathrm{Div}}_X$ (faisceau des diviseurs de Cartier) est défini comme le faisceau quotient. Alors la suite exacte de cohomologie et 1.2 donnent :

COROLLAIRE 1.3.- Supposons X noethérien sans cycle premier immergé, ou X quasi-compact, quasi-séparé, réduit et n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors pour $q \geqslant 1$, l'homomorphisme

$$H^q(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(X,\underline{G}_{m\,X})$$

est un isomorphisme mod groupes de torsion.

PROPOSITION 1.4.- Soit X un préschéma noethérien. Supposons que les anneaux hensélisés stricts (SGAA VIII 4.4) des anneaux locaux de X soient factoriels, en d'autres termes que pour tout X' étale sur X, les anneaux locaux de X' soient factoriels (hypothèse satisfaite, en vertu de Auslander-Buchsbaum, si X est régulier). Alors les groupes $H^q(X,\underline{G}_m)$ sont des groupes de torsion pour $q \geqslant 2$.

En vertu de 1.3 il revient au même de dire que les $H^q(X,\underline{\mathrm{Div}}_X)$ sont des groupes de torsion pour $q \geqslant 1$. Or l'hypothèse faite sur X peut aussi s'exprimer en disant que le faisceau $\underline{\mathrm{Div}}_X$ des diviseurs de Cartier coïncide avec le faisceau $\underline{Z}_X^1$ des diviseurs de Weil, lequel peut s'écrire

(3) $$\underline{Z}^1 = \coprod_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(\underline{Z}_x) ,$$

où $X^{(1)}$ désigne la partie de X formée des $x \in X$ tels que $\dim \underline{O}_{X,x} = 1$, i.e. formée des points génériques des parties fermées irréductibles de codimension 1 de X, et $\underline{Z}_x$ désigne le faisceau constant $\underline{Z}$ sur x. Comme la formation des $H^q(X, \ )$ commute aux sommes directes quelconques (SGAA VII 3.3), la conclusion résulte de 1.1.

COROLLAIRE 1.5.- La conclusion de 1.4 reste valable si on remplace l'hypothèse de factorialité par celle que $\dim X \leq 1$.

En effet, dans ce cas on voit immédiatement que l'on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Div}}_X = \coprod_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(\underline{\mathrm{Div}}_{X,x}) , \tag{3 bis}$$

où $\underline{\mathrm{Div}}_{X,x} = i_x(\underline{\mathrm{Div}}_X)$, et la conclusion résulte encore de 1.1 comme ci-dessus.

LEMME 1.6.- Sous les conditions de 1.2 on a

$$H^1(X, \underline{R}_X^*) = 0 ,$$

et l'application canonique

$$H^2(X, \underline{R}_X^*) \longrightarrow \coprod_i H^2(x_i, \underline{R}_{x_i}^*)$$

(où les x_i sont les points maximaux de X) est injective.

Cela résulte en effet aussitôt de la suite spectrale (1) et du théorème 90 de Hilbert, qui implique que

$$R^1 i_{x*}(\underline{R}_x^*) = 0 \quad , \quad H^1(x, \underline{R}_x^*) = 0$$

pour tout $x \in X$, et en particulier pour tout point maximal de X.

On en conclut, grâce à la suite exacte de cohomologie déduite de (2) :

PROPOSITION 1.7.- Sous les conditions de 1.3, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^2(X,\underline{R}_X^*) \longrightarrow H^2(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) \quad \ldots\ ,$$

et l'application de restriction

$$(4) \qquad H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow \coprod_i H^2(\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x_i}),\underline{G}_m)$$

a comme noyau $H^1(X,\underline{\mathrm{Div}}_X)$, (où les x_i sont les points maximaux de X).

COROLLAIRE 1.8.- Sous les conditions de 1.4 l'application (4) est injective. Même conclusion sous les conditions de 1.5, si on suppose de plus que pour tout point fermé x de X , $k(x)$ est séparablement clos.

Il revient au même de prouver que $H^1(X,\underline{\mathrm{Div}}_X)$ est nul, ce qui résulte de la forme (3) resp. (3 bis) du faisceau $\underline{\mathrm{Div}}_X$ et du

LEMME 1.9.- Sous les conditions de 1.1, supposons de plus que F_x soit le faisceau constant défini par un groupe sans torsion M . Alors on a $H^1(X,i_{x*}(F_x)) = 0$.

En effet, en vertu de (1) ce groupe est isomorphe à un sous-groupe de $H^1(x,M)$, qui est nul comme on constate aussitôt par l'interprétation de ce groupe en termes de cohomologie galoisienne (SGAA VIII 2.3).

Utilisant l'inclusion canonique $\mathrm{Br}(X) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)$ (GB I, n° 2), et le fait que $\mathrm{Br}(\underline{O}_{X,x_i}) \simeq \mathrm{Br}(k(x_i))$ (cas particulier du théorème d'Azumaya pour un anneau local hensélien GB I 6.1), on trouve :

COROLLAIRE 1.10.- Sous les conditions de 1.8, si (x_i) est la famille des points maximaux de X , l'application canonique

$$\mathrm{Br}(X) \longrightarrow \coprod_i \mathrm{Br}(X_i)$$

est injective.

REMARQUES 1.11.- a) Lorsque X est régulier, 1.9 est dû à AUSLANDER-GOLDMAN. D'autre part, d'après le dictionnaire GB I 5,11, le résultat 1.10 implique que tout torseur (= fibré principal homogène) sur X, de groupe le groupe projectif $\underline{GP}(r)_X$, qui est trivial aux points maximaux de X, i.e. qui admet une section rationnelle, est localement trivial. On peut conjecturer que la même propriété est vraie, sur tout préschéma localement noethérien régulier X, pour tout préschéma en groupes G semi-simple sur X ; comparer SGAD, Exp V, n° 5, remarque 3°.

b) Supposant que X soit normal et noethérien, on peut préciser le noyau $H^1(X,\underline{Div}_X)$ qui intervient dans 1.7 grâce à la suite exacte

$$(5) \qquad 0 \to \underline{Div}_X \to \underline{Z}^1_X \to \underline{P}_X \to 0 ,$$

où le faisceau $\underline{P}_X$, qui mesure en un sens le défaut de factorialité des anneaux locaux de X et des X' étales sur X, mérite le nom de <u>faisceau des groupes de Picard locaux sur</u> X. Comme on a $H^1(X,\underline{Z}^1_X) = 0$ en vertu de 1.10 et (3), il vient

$$(6) \qquad H^1(X,\underline{Div}_X) = \operatorname{Coker}(\underline{Z}^1(X) \longrightarrow H^0(X,\underline{P}_X)) .$$

Un cas intéressant est celui où les conditions de factorialité de 1.4 sont satisfaites sauf en les points d'une partie fermée discrète Z de X (par exemple si X est régulier sauf en un nombre fini de points singuliers isolés). Alors le faisceau $\underline{P}_X$ est concentré sur Z, et on déduit facilement de (6) un isomorphisme

$$(7) \qquad H^1(X,\underline{Div}_X) = \coprod_{x\in Z} \operatorname{Pic}(\overline{U}_x)^{\pi_x} / \operatorname{Im} \operatorname{Pic}(U_x) ,$$

ou $U_x = \operatorname{Spec}(\underline{O}_{X,x}) - x$, $\overline{U}_x = \operatorname{Spec}(\overline{\underline{O}_{X,x}}) - \overline{x}$ ($\overline{\underline{O}_{X,x}}$ étant le hensélisé strict de $\underline{O}_{X,x}$), et enfin $\pi_x = \operatorname{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$, qu'on fait opérer sur $\operatorname{Spec}(\overline{\underline{O}_{X,x}})$ donc sur $\overline{U}_x$ de la façon habituelle, enfin les Pic désignent les groupes de Picard des schémas envisagés. Lorsque $k(x)$ est séparablement clos, cette expression se simplifie en

(7 bis) $$H^1(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) = \coprod_{x \in Z} \mathrm{Pic}(\overline{U}_x) / \mathrm{Im}\,\mathrm{Pic}(U_x) ,$$

ce qui montre que ce groupe mesure l'écart entre les groupes de Picard locaux, en les $x \in Z$, au sens de la topologie de Zariski et au sens de la topologie étale. Sauf malentendu de la part du conférencier, MUNFORD a construit une surface normale (sur le corps des complexes si on veut), et un point $x \in X$, pour lequel $\mathrm{Pic}(U_x) = 0$ i.e. $\underline{O}_{X,x}$ est factoriel, mais $\mathrm{Pic}(\overline{U}_x) \neq 0$ (donc le hensélisé de $\underline{O}_{X,x}$ n'est pas factoriel), et même tel que $\mathrm{Pic}(\overline{U}_x)$ ne soit pas un groupe de torsion ni même un groupe de type fini ([9], p. 16 ; comparer [6], Exp XIII, n° 5). En vertu de 1.7 cela donne donc un exemple où $H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^2(x,\underline{G}_m) = \mathrm{Br}(x)$ (x le point générique) n'est pas injectif, le noyau n'étant pas de torsion, et a fortiori un exemple où $H^2(X,\underline{G}_m)$ n'est pas de torsion, X étant une surface algébrique normale ; il ne devrait pas être difficile de la même façon de construire un exemple d'une surface algébrique normale pour laquelle $\mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}(x)$ n'est pas injectif. Dans le cas d'une courbe non normale, un tel exemple figure dans AUSLANDER-GOLDMAN, savoir le cas de la courbe $\mathrm{Spec}\ \underline{\underline{R}}[X,Y]/(X^2 + Y^2)$, où $\underline{\underline{R}}$ est le corps des réels.

c) La conclusion d'injectivité de 1.8, lorsque X est de dimension ≤ 1 , peut sans doute être prouvée sous des conditions plus générales, par exemple en supposant seulement que les corps résiduels $k(x)$ (x point fermé de X) sont de dimension ≤ 1 au sens de Serre [10], ou que X est "géométriquement unibranche", comme on voit en explicitant les sommandes du deuxième membre de (3 bis). Faire attention cependant à l'exemple de AUSLANDER-GOLDMAN qu'on vient de signaler dans b).

2. Cas de surjectivité de l'application canonique $\mathrm{Br}(X) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)$.

Que cette application (toujours injective, rappelons-le) n'est pas nécessairement bijective résulte du fait que si X est quasi-compact, $\mathrm{Br}(X)$ est un groupe de torsion (GB I n° 2), alors qu'on a signalé (1.11 b)) que $H^2(X,\underline{G}_m)$ n'est pas toujours un groupe de torsion. On peut cependant se demander si cette application a comme image exactement le sous-groupe de torsion du H^2 , ce qui constituerait une généralisation du théorème de Serre GB I 1.6. Apparemment, on n'a pas construit encore de contre-exemple, et on ignore la réponse même dans le cas d'une surface algébrique (projective, ou affine) normale sur le corps $\underline{C}$, ou d'une variété (projective, ou affine) non singulière de dimension trois sur $\underline{C}$. Un autre cas, intéressant parce que très explicite, qui mériterait d'être regardé, est celui de la réunion X de quatre plans affines en position générale dans l'espace affine à trois dimensions, de sorte que X est homotope à la sphère S^2 , et par la théorie de Kummer (cf. n° suivant), le sous-groupe des éléments x de $H^2(X,\underline{G}_m)$ tels que $nx = 0$ est engendré par un élément canonique : cet élément est-il défini par une algèbre d'Azumaya sur X ?

Voici les quelques résultats positifs connus.

THÉORÈME 2.1.- Soit X un préschéma noethérien. Pour tout $\xi \in H^2(X,\underline{G}_m)$, il existe une partie fermée Y de X , de codimension $\geqslant 2$, telle que $\xi \mid X - Y$ soit dans $\mathrm{Br}(X - Y)$, i.e. définissable par une Algèbre d'Azumaya sur $X - Y$. Lorsque X est régulier, on peut dans cet énoncé prendre même Y de codimension $\geqslant 3$.

COROLLAIRE 2.2.- Si X est de dimension $\leqslant 1$, on a $\mathrm{Br}(X) = H^2(X,\underline{G}_m)$. La même conclusion est vraie si X est régulier et de dimension $\leqslant 2$.

Indiquons le principe de la démonstration, fort élémentaire, de 2.1. Utilisant, si on veut, le fait bien connu que $Br(K) = H^2(K,\underline{G}_m)$ lorsque K est un corps, on en déduit grâce à GB I 6.1 l'assertion analogue pour K artinien, d'où facilement l'existence d'un ouvert dense U dans X, et d'une algèbre d'Azumaya $\underline{A}$ de rang constant sur U, définissant $\xi|U$. Si $Z = X - U$ contient encore des composantes irréductibles Z_i de codimension 1, on montre que si x_i est le point générique de Z_i, on peut prolonger $\underline{A}$ en une Algèbre d'Azumaya sur un voisinage ouvert U_i de x_i, quitte au besoin à remplacer $\underline{A}$ d'abord par son produit tensoriel par une Algèbre de matrices $\underline{M}_n(\underline{O}_U)$. En effet, on voit aussitôt que ce problème se ramène au problème analogue avec X remplacé par $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x_i})$, et il n'est pas difficile de voir qu'il admet une solution, utilisant le fait que $\underline{O}_{X,x_i}$ est de dimension 1. De cette façon, on diminue de proche en proche Z en lui enlevant ses composantes irréductibles de codimension 1, ce qui prouve la première assertion de 2.1, compte tenu de 1.8. Pour la deuxième, lorsque X est régulier, on note que si $i : U = X - Y \dashrightarrow X$ est l'inclusion, alors $i_*(\underline{A})$ est une Algèbre sur X qui est un Module cohérent "réflexif", et pour cette raison libre en les points x de X tels que $\dim \underline{O}_{X,x} \leq 2$. Utilisant le critère GB I 5.1 (iii), on voit de plus que $i_*(\underline{A})$ est une Algèbre d'Azumaya en tout point où il est localement libre, en particulier en les $x \in X$ tels que $\dim \underline{O}_{X,x} \leq 2$. Il suffit donc de prendre pour Y l'ensemble des $x \in X$ en lesquels $i_*(\underline{A})$ n'est pas localement libre, appliquant encore 1.8. Signalons que ce dernier raisonnement, et la deuxième assertion dans 2.2, sont dus essentiellement à AUSLANDER-GOLDMAN, sous la forme suivante n'utilisant pas de cohomologie :

PROPOSITION 2.3.- Soient X un préschéma régulier connexe de dimension ≤ 2,

η le point générique de X , $K = k(\eta)$, de sorte que $Br(X) \subset Br(K)$, et de même pour tout $x \in X$, $Br(\underline{O}_{X,x}) \subset Br(K)$, en vertu de 1.8. Ceci posé, on a

$$(9) \qquad Br(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} Br(\underline{O}_{X,x}) ,$$

l'intersection prise dans $Br(K)$, et $X^{(1)}$ désignant l'ensemble des $x \in X$ tels que $\underline{O}_{X,x}$ soit de dimension 1 , i.e. soit un anneau de valuation discrète.

La démonstration est essentiellement celle qui précède.

PROPOSITION 2.4.- Soit X le spectre d'un anneau local, et $\xi \in H^2(X,\underline{G}_m)$. Pour que ξ soit dans $Br(X)$, il faut et il suffit que ξ soit "isotrivial" i.e. qu'il existe un morphisme fini étale surjectif $f : X' \longrightarrow X$ tel que l'image inverse $f^*(\xi)$ soit nulle.

Le "il faut" résulte de GB I 5.1. Pour le "il suffit", on utilise la suite spectrale de HOCHSCHILD-SERRE (SGAA VIII 8.4)

$$E_2^{p,q} = H^p(G,H^q(X',\underline{G}_{m\,X'})) \Longrightarrow H^*(X,\underline{G}_{m\,X}) ,$$

en supposant X' principal galoisien de groupe G , ce qui est loisible. Tenant compte du fait que $H^1(X',\underline{G}_{m\,X'}) = Pic(X') = 0$, car X' est semi-local, on en tire la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^2(G,\underline{G}_m(X')) \xrightarrow{\alpha} H^2(X,\underline{G}_{m\,X}) \xrightarrow{\beta} H^2(X',\underline{G}_{m\,X'})^G ,$$

qui montre que si ξ est dans le noyau de β (comme on le suppose), il est défini par un élément de $H^2(G,\underline{G}_m(X'))$, donc par un 2-cocycle de G à coefficients dans $\underline{G}(X')$. La construction classique bien connue de l'algèbre "produit croisé" associée à un tel cocycle s'applique encore dans le cas actuel, et permet de construire une algèbre d'Azumaya sur l'anneau affine A de X , de rang n^2 où $n = card(G)$, dont l'invariant est ξ .

COROLLAIRE 2.5.- On a $Br(X) = H^2(X,\underline{G}_m)$ lorsque X est local hensélien.

En effet, dans ce cas toute classe de cohomologie sur X, en dimension > 0, est isotriviale, car le hensélisé strict A' de l'anneau local hensélien A est alors limite inductive d'algèbres finies et étales sur A, et toute classe de cohomologie en dimension > 0 s'annule sur $Spec(A')$, et on peut appliquer SGAA VII 5.8.

COROLLAIRE 2.6.- Soit X un schéma local et soit l un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de X. Pour que tout élément de l-torsion de $H^2(X,\underline{G}_m)$ soit dans $Br(X)$, il faut et il suffit que pour tout entier $n > 0$, et tout $\xi \in H^2(X,\mu_{l^n})$ (où μ_{l^n} désigne le faisceau localement constant des racines n-èmes de l'unité sur X), soit isotrivial i.e. soit effaçable par un morphisme fini étale surjectif $X' \dashrightarrow X$.

La première assertion résulte de 2.4 et de la théorie de Kummer (cf. n° suivant), la deuxième en est une simple reformulation, compte tenu que μ_{l^n} est localement isomorphe à $\underline{Z}/l^n\underline{Z}$ (au sens de la topologie étale). La dernière assertion est due à ARTIN, et résulte de l'existence des "bons voisinages" d'ARTIN pour les points d'un préschéma lisse sur un corps algébriquement clos (SGAA XI), qui implique que toute classe de cohomologie en degré > 0 sur un schéma X lisse sur un corps k, à coefficients $\underline{Z}/n\underline{Z}$, n premier à la caractéristique, est localement isotriviale.

REMARQUE 2.7.- En l'absence de critères généraux satisfaisants assurant l'égalité $Br(X) = H^2(X,\underline{G}_m)$, et vu l'importance du groupe $H^2(X,\underline{G}_m)$ indépendamment de toute interprétation géométrique en termes d'Algèbres d'Azumaya, nous appellerons

$H^2(X,\underline{G}_m)$ le <u>groupe de Brauer cohomologique</u> du préschéma X, et nous le noterons $Br'(X)$. Il est donc identique au groupe de Brauer ordinaire $Br(X)$ lorsque X est noethérien et de dimension ≤ 1, ou régulier et de dimension 2, ou lorsque X est local hensélien, ou enfin lorsque X est le spectre d'un anneau local d'un schéma lisse sur un corps k de caractéristique nulle.

3. Application de la suite exacte de Kummer.

C'est la suite exacte de faisceaux étales sur X :

$$(10) \qquad 0 \longrightarrow (\mu_n)_X \longrightarrow (\underline{G}_m)_X \xrightarrow{x \mapsto x^n} (\underline{G}_m)_X \longrightarrow 0 ,$$

où n est un entier > 0 premier aux caractéristiques résiduelles de X, et où μ_n désigne le faisceau des racines n-èmes de l'unité, qui est localement isomorphe (pour la topologie étale) au faisceau constant $\underline{Z}/n\underline{Z}$. Désignant, pour tout groupe abélien B, par $B(l)$ le sous-groupe de l-torsion de B (formé des éléments dont l'ordre est une puissance de l), on trouve, à l'aide de la suite exacte de cohomologie déduite de (10) et passage à la limite pour $n = l^m$:

THÉORÈME 3.1.- Soient X un préschéma, l un nombre premier distinct de toute caractéristique résiduelle de X. Alors on a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)\otimes_{\underline{Z}}\underline{Q}_l/\underline{Z}_l \longrightarrow H^2(X,\mu_{l^\infty}) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)(l) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^{i-1}(X,\underline{G}_m)\otimes_{\underline{Z}}\underline{Q}_l/\underline{Z}_l \longrightarrow H^i(X,\mu_{l^\infty}) \longrightarrow H^i(X,\underline{G}_m)(l) \longrightarrow 0 \qquad \text{si } i \geq 3 .$$

Rappelons aussi pour mémoire les valeurs de $H^i(X,\underline{G}_m)$ pour $i = 0,1$, qui sont des invariants fondamentaux bien connus de X :

$$H^0(X,\underline{G}_m) = H^0(X,\underline{O}_X)^* \quad , \quad H^1(X,\underline{G}_m) = \mathrm{Pic}(X) .$$

COROLLAIRE 3.2.- Supposons que les $H^i(X,\mu_{l^\infty})$ soient des $\underline{Z}_l$-modules "de type cofini", i.e. que l'annulateur de l dans ce groupe soit fini, i.e. que ce groupe soit isomorphe à une somme directe $(\underline{Q}_l/\underline{Z}_l)^r +$ groupe fini (ou ce qui revient au même, grâce à la suite exacte de cohomologie relative à la suite exacte de faisceaux $0 \longrightarrow \mu_l \longrightarrow \mu_{l^\infty} \xrightarrow{x \mapsto x^l} \mu_{l^\infty} \longrightarrow 0$, que les $H^i(X,\mu_l)$ soient des groupes finis). Alors les groupes $H^i(X,\underline{G}_m)(l)$ sont également de type cofini, et on a

$$H^i(X,\underline{G}_m)(l) \simeq H^i(X,\mu_{l^\infty}) \qquad \text{pour } i \geqslant 3 .$$

Cela résulte de la suite exacte de cohomologie associée à (10) pour $n = 1$, de la deuxième suite exacte dans 3.1 et du fait que si M est un groupe de l-torsion de type cofini, alors $M \otimes \underline{Q}_l/\underline{Z}_l = 0$.

CAS PARTICULIERS 3.3.- En vertu des résultats de finitude exposés dans SGAA XIV, les hypothèses de 3.2 sont vérifiées dans chacun des cas suivants :

a) X est de type fini sur un corps k séparablement clos ou fini, et est soit propre sur k, soit lisse sur k, ou (pour pouvoir disposer de la résolution des singularités de HIRONAKA [7], resp. ABHYANKAR [1]) k est de caractéristique zéro, ou $\dim X \leqslant 2$.

b) X est de type fini sur $\operatorname{Spec}(\underline{Z})$, et est soit lisse sur $\operatorname{Spec} \underline{Z}$, soit propre sur un ouvert de $\operatorname{Spec}(\underline{Z})$.

Il est d'ailleurs très plausible que les hypothèses de finitude de 3.2 sont vérifiées dès que X est de type fini sur un corps fini, ou un corps séparablement clos, ou sur $\operatorname{Spec}(\underline{Z})$, mais les moyens actuels ne permettent pas de le démontrer (faute notamment de disposer de la résolution des singularités sous des conditions suffisamment générales).

COROLLAIRE 3.4.- Sous les conditions de 3.2 le "corang" de la partie de l-torsion de $Br'(X)$ est égal à $B_2 - \rho$, où B_2 est le "deuxième nombre de Betti l-adique de X ", défini comme le rang de $H^2(X,\underline{Z}_l)$ ou encore comme le "corang" de $H^2(X,\mu_{l^\infty})$, et où ρ est le "nombre de Picard" de X , défini comme le corang de $Pic(X) \otimes \underline{Q}_l/\underline{Z}_l$.

Précisons que par "corang" d'un groupe de l-torsion M qui est de type cofini, i.e. isomorphe à $(\underline{Q}_l/\underline{Z}_l)^r \times$ groupe fini, on entend le nombre entier r , qui est aussi égal au rang du $\underline{Z}_l$-module de type fini

$$T_l(M) = \varprojlim_n {}_{l^n}M \quad ,$$

où pour tout entier m , ${}_{l^m}M$ désigne le noyau de la multiplication par l^m dans M .

3.5.- Lorsqu'on ne fait pas d'autre hypothèse que dans 3.4, le "nombre de Picard" de X dépend a priori de l , tout comme B_2 lui-même. Cependant, dans des cas importants, $Pic(X)$ est une extension d'un groupe abélien de type fini $NS(X)$ par un groupe $Pic(X)^o$ qui est l-divisible pour tout l premier aux caractéristiques résiduelles de X . C'est sans doute le cas lorsque X est de type fini sur un corps k séparablement clos, et peut être prouvé du moins lorsque de plus X est propre sur k (en utilisant le théorème de finitude de Néron, l'existence du schéma de Picard de X et la structure des groupes algébriques commutatifs connexes sur k) ; lorsque k est un corps fini, $Pic(X)$ est même un groupe de type fini, du moins si X est propre sur k ; de même, il est plausible que si X est de type fini sur $Spec(\underline{Z})$ et réduit, $Pic(X)$ est un groupe de type fini lui-même. Lorsque $Pic(X)$ a la structure qu'on vient d'envisager, alors le nombre ρ introduit dans 3.4 n'est autre que le rang du groupe de Néron-Severi

$NS(X)$, et en particulier ne dépend pas de l . C'est là un invariant fondamental bien connu, appelé souvent "nombre de Picard" de X . Il est bien connu que cet invariant est de nature essentiellement arithmétique, et non topologique, contrairement aux nombres de Betti B_i , car contrairement à ces derniers, le nombre ρ ne reste pas constant en général lorsque X varie dans une famille de schémas algébriques lisses définie par un morphisme propre et lisse $Y \longrightarrow Z$, avec Z connexe. Pour cette raison, le corang $B_2 - \rho$ du groupe $Br'(X)(l)$ est également un invariant de nature essentiellement arithmétique.

3.6.- Ajoutons que lorsque X est de type fini sur un corps séparablement clos ou sur $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$, il est sans doute vrai que les nombres de Betti l-adiques (l premier aux caractéristiques résiduelles) ne dépendent pas de l . Malheureusement, ce fait n'est pas démontré encore à l'heure actuelle, même pour le B_2 d'un schéma projectif et lisse de dimension 3 sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Il est démontré cependant lorsque X est lisse et propre sur k séparablement clos, et $\dim X \leq 2$, grâce au fait que B_1 s'interprète comme la dimension du schéma de Picard, que l'on a la formule de dualité $B_i = B_{2n-i}$ (où $n = \dim X$, X supposé connexe), et que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\sum_i (-1)^i B_i$ s'interprète comme la self-intersection de la diagonale dans $X \times X$. Il s'ensuit donc, compte tenu de 2.2 :

COROLLAIRE 3.7.- Supposons X lisse et propre sur un corps k séparablement clos, et $\dim X \leq 2$. Alors le corang de la partie de l-torsion $Br(X)(l)$ de $Br(X)$ ne dépend pas du nombre premier l distinct de la caractéristique de k .

D'ailleurs, si $\dim X \leq 1$, ce corang est nul, comme il résulte soit de 3.1 et du calcul explicite de $H^2(X,\mu_n)$ lorsque X est une courbe lisse et propre, soit de 1.8 et du théorème de Tsen pour le corps des fonctions de X (du moins lorsque k est même algébriquement clos, et alors on trouve même que $\mathrm{Br}(X) = 0$; alors que pour k séparablement clos de caractéristique $p > 0$ on peut conclure seulement que $\mathrm{Br}(X)$ est un groupe de p-torsion).

REMARQUE 3.8.- L'interprétation de $B_2 - \rho$ comme corang l-adique du groupe de Brauer cohomologique $\mathrm{Br}'(X)$ fournit immédiatement l'<u>inégalité de Picard</u>

(11) $$\rho \leq B_2 ,$$

qui avait été étendue par IGUSA [8] au cas des surfaces projectives lisses sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque, en utilisant la structure du groupe fondamental "tame" d'une courbe algébrique. IGUSA ne disposant pas à l'époque de la cohomologie étale, définit B_2 dans le cas d'une surface lisse projective connexe par la formule

$$B_2 = c_2 + 2(q - 1) ,$$

où $q = B_1$ est la dimension du schéma de Picard, et c_2 est la caractéristique d'Euler-Poincaré i.e. la self-intersection de la diagonale. Utilisant la définition générale de B_2 en termes de cohomologie étale, nous obtenons l'inégalité (11) pour un schéma propre quelconque X sur k. Signalons que la même méthode peut être utilisée pour prouver en même temps le <u>théorème de Néron</u>, disant que le groupe de Néron-Severi $NS(X)$ de X est de type fini, dans le cas d'un X propre sur k et par ailleurs quelconque, et avec la précision supplémentaire que lorsque X varie dans une famille $f : Y \to Z$ paramétrée par un préschéma quasi-compact Z (f un morphisme de présentation finie à fibres propres), alors les groupes de Néron-Severi correspondants ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, à isomorphisme près. Ceci est lié bien entendu au fait que la majoration de Picard-Igusa pour ρ est faite par un invariant B_2 qui est de nature <u>topologique</u>, donc a une tendance à rester constant pour un X variant dans une famille ...

REMARQUE 3.9.- On peut donner une interprétation géométrique de la première suite exacte dans 3.1, en introduisant une variante du groupe de Brauer $Br(X)$ d'un préschéma X, qu'on pourrait appeler <u>groupe de Brauer spécial</u> de X et désigner par le symbole $SBr(X)$. Il se définit en termes d'Algèbres d'Azumaya de la même façon que le groupe de Brauer ordinaire, mais en négligeant non pas <u>toutes</u> les Algèbres d'Azumaya de la forme $End(\underline{E})$, $\underline{E}$ Module localement libre de type fini, mais seulement celles pour lesquelles $\underline{E}$ peut être choisi tel que sa puissance extérieure maxima $\det(\underline{E})$ soit isomorphe à $\underline{O}_X$. Du point de vue torseurs sous le groupe projectif $\underline{GPL}(n)_X$, ceci signifie qu'on néglige ceux dont le groupe structural peut se relever à $\underline{Sl}(n)_X$ (et non seulement à $\underline{Gl}(n)_X$). Il s'ensuit qu'à un élément de $SBr(X)$ défini par une Algèbre d'Azumaya de rang n^2 est associé un invariant dans $H^2(X,\mu_n)$ (et non seulement dans $H^2(X,\underline{G}_m)$), - du moins si n est premier aux caractéristiques résiduelles de X, ou en convenant dans le cas général de travailler avec la topologie "fidèlement plate de présentation finie" au lieu de la topologie étale, (qui donne le même résultat si n premier aux caractéristiques résiduelles). On obtient ainsi un homomorphisme caractéristique :

$$SBr(X)(l) \longrightarrow H^2(X,\mu_{l^\infty}) , \tag{12}$$

avec les mêmes précautions. D'autre part, on définit aisément une suite exacte canonique :

$$0 \longrightarrow Pic(X) \otimes \underline{Q}/\underline{Z} \longrightarrow SBr(X) \longrightarrow Br(X) \longrightarrow 0 , \tag{13}$$

qui précise les relations entre $Br(X)$ et $SBr(X)$. Prenant enfin les composantes de l-torsion dans (13), cette suite exacte s'envoie dans la première suite exacte de 3.1 à l'aide de l'homomorphisme (12) sur les termes médians, et l'homomorphisme caractéristique $Br(X)(l) \dashrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)(l)$ pour les termes de droite. Cela montre en particulier que ce dernier est un isomorphisme si et seulement si (12) l'est.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR - Local Uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$. Ann. of Math. 63 (1956), 491-526.

[2] M. ARTIN et A. GROTHENDIECK - Cohomologie étale. Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques 1963/64 (multigraphié en trois fascicules, en préparation, exposés I à VIII tirés), (cité SGAA).

[3] F. CHATELET - Variations sur un thème de H. Poincaré. Annales ENS, 61, 1944, p. 249-300.

[4] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK - Schémas en Groupes. Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques 1963 et 1964 (multigraphié en sept fascicules, en préparation, fascicules 1, 3, 4 parus), (cité SGAD).

[5] A. GROTHENDIECK - Le Groupe de Brauer, I, Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses. Séminaire Bourbaki Mai 1965, n° 290, 21 p., (cité GB I).

[6] A. GROTHENDIECK - Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques 1962 (multigraphié en deux fascicules).

[7] H. HIRONAKA - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.

[8] J. I. IGUSA - Betti and Picard numbers of abstract algebraic surfaces, Proc. Nat. Acad. Sc. 46 (1960), 724-726.

[9] D. MUMFORD - The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Publications Math. 9 (1961), 5-22.

[10] J.-P. SERRE - Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Math. 5 (1964), Springer.

-:-:-:-

LE GROUPE DE BRAUER III : EXEMPLES ET COMPLEMENTS

par Alexander Grothendieck

Le présent exposé continue les deux exposés " Le Groupe de Brauer I, II " (Séminaire Bourbaki, n $^{\underline{os}}$ 290 et 297), cités dans la suite GB I et GB II .

1. Corps de dimension $\leqslant 1$.

Rappelons [31] qu'un corps K est dit <u>de dimension</u> $\leqslant 1$ si pour toute extension finie K' de K , on a $Br(K') = 0$. Pour diverses caractérisations équivalentes de ces corps, cf. [31, II 3.1]. Notons seulement que cette condition implique que la dimension cohomologique $cd(K)$ de K (toujours sous-entendu : pour la topologie étale et des coéfficients de torsion) est $\leqslant 1$, et la réciproque est vraie si K est de caractéristique nulle (loc. cit.) ; dans le cas général, on peut dire seulement que si ℓ est un nombre premier distinct de car K , alors la relation $cd_{\ell}(K) \leqslant 1$ équivaut à la condition suivante : pour toute extension finie (ou plus généralement, algébrique) K' de K , $Br(X)(\ell)$ (= composante ℓ -primaire du groupe de Brauer $Br(X)$) est nul [31, II 2.3] . D'autre part, un corps K est dit (C_1) si toute forme à coefficients dans K , à n variables et de degré $d < n$, admet un zéro non trivial dans K . Un tel corps est de dimension $\leqslant 1$ [31, II 3.2] . Rappelons alors les théorèmes de TSEN et de LANG [23] :

1) (TSEN) : soient k un corps algébriquement clos, K une extension de k de degré de transcendance 1, alors K est (C_1) .

2) (LANG) : soient V un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel k algébriquement clos, K le corps des fractions de V, alors K est (C_1), du moins si V est <u>excellent</u>, i.e. si le corps des fractions $\hat{K}$ de $\hat{V}$ est séparable sur K (*).

On en conclut donc :

<u>Théorème (1.1). Soit</u> K <u>un corps du type défini dans</u> 1) <u>ou</u> 2) <u>ci-dessus. Alors</u> $Br(K) = 0$, <u>plus généralement, pour tout</u> $i \neq 0$, <u>on a</u> $H^i(K,\underline{G}_m) = 0$.

La dernière assertion, pour $i \geqslant 3$, résulte par exemple de [31, I 3.2] .

<u>Corollaire (1.2). Soit</u> X <u>une courbe algébrique sur un corps</u> k <u>algébriquement clos, alors</u> $Br(X) = 0$.

En effet, si η est un point maximal de X , on conclut de (1.1) que $Br(k(\eta)) = 0$, et par suite on a $Br(X) = 0$ en vertu de (BR II 1.8).

1.2.1. Notons que lorsque dans (1.1) ci-dessus, on remplace l'hypothèse que le corps de base resp. résiduel k soit algébriquement clos par celle que ce corps soit séparablement clos, les conclusions

---

(*) Cf. "Compléments" p. 101.

(1.1), (1.2) tombent en défaut, du moins si on suppose que k est de caractéristique $p > 0$: dans ce cas, en effet, $Br(K)$ peut être un groupe de p-torsion non nul, et en particulier $Br(k[t])$ n'est nul que si k est parfait, donc algébriquement clos [7, 7.5]. Cependant :

Corollaire (1.3). Sous les conditions 1) ou 2) ci-dessus, mais supposant seulement k séparablement clos, on a $cd_{\ell}(K) = 1$ pour tout nombre premier $\ell \neq$ car k, et par suite on a (par la suite exacte de Kummer) :

$$H^i(K,\underline{G}_m)(\ell) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad \text{, en particulier } Br(K)(\ell)=0 \quad .$$

D'ailleurs, manifestement pour l'assertion $cd_{\ell}(K) \leqslant 1$ la restriction $\ell \neq p$ n'est nécessaire ici que dans le cas 2), et dans le cas d'inégales caractéristiques (dans le premier cas, la dimension cohomologique n'est pas changée si on étend le corps de base à la clôture algébrique $\bar{k}$; dans le deuxième, on applique le fait que $cd_p(K) \leqslant 1$ si car $K = p > 0$ [31, II 2.2]). Pour le cas 2), cf. [4, X 2.3].

Remarque (1.4). En fait, la démonstration du cas 2) dans (1.3) prouve ceci : soit A un anneau strictement local (i.e. hensélien à corps résiduel séparablement clos) noethérien et de dimension 1, de corps résiduel k, d'anneau total des fractions K, alors pour tout nombre premier $\ell \neq$ car.K, on a $cd_{\ell}(K) \leqslant 1$, d'où $H^i(K,\underline{G}_m)(\ell) = 0$ pour $i \geqslant 1$, et en particulier $Br(K)(\ell) = 0$.

Rappelons aussi le théorème de CHEVALLEY [10] : un corps fini est (C_1) . On en conclut donc l'énoncé suivant, qui est d'ailleurs classique sous la forme du théorème de WEDDERBURN [§ 11, n° 1, th. 1]: tout corps gauche fini est commutatif. En termes de groupe de Brauer :

Proposition (1.5). Si K est un corps fini, on a $Br(K) = 0$, d'où $H^i(K,G_m) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.

2. Schémas de dimension 1 .

Soit X un préschéma localement noethérien de dimension $\leqslant 1$, et soit S le schéma somme des $\mathrm{Spec}(k(\eta))$, où η parcourt les points maximaux de X , $i : S \longrightarrow X$ le morphisme canonique. Utilisant (1.4), on trouve

(2.1) $$R^n i_*(\underline{G}_{m\,S}) = 0 \quad \text{pour} \quad i > 0 \quad ,$$

du moins si les corps résiduels en les points fermés non isolés de X sont parfaits ; sinon, il reste vrai que pour tout nombre premier ℓ distinct des caractéristiques résiduelles de X , les $R^n i_*(\underline{G}_{m\,S})$ (qui sont de torsion pour $n \geqslant 1$ en vertu de (BR II 1.5)) ont pour $n \geqslant 1$ une composante ℓ -primaire nulle. Il en résulte, par la suite spectrale de Leray pour i :

(2.2) $$H^n(X,\underline{R}_X^*) \xrightarrow{\sim} H^n(S,\underline{G}_{m\,S}) \quad ,$$

avec le grain de sel analogue si on ne suppose pas les corps résiduels des points fermés de X parfaits ; on a posé

$$\underline{R}_X^* = i_*(\underline{G}_{m\ S}) = \text{faisceau des fonctions rat. inversibles}$$

sur X . Utilisant la suite exacte (BR II 1. (2)), on en conclut une suite exacte infinie :

$$(2.3) \qquad \ldots \to H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(S,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) \to H^{i+1}(X,\underline{G}_m) \to \ldots,$$

modulo le grain de sel habituel, où $\underline{\mathrm{Div}}_X$ désigne le faisceau des diviseurs (de Cartier) sur X . Compte tenu de la structure discrète de ce dernier faisceau, (BR II 1. (3 bis)), on peut écrire d'ailleurs, si X est noethérien :

$$(2.4) \qquad H^i(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) = \sum_{x \in X^{(1)}} H^i(x,\underline{\mathrm{Div}}_{X,x}) \quad ,$$

où $X^{(1)}$ désigne l'ensemble des points (fermés) de codimension 1 dans X , et $\underline{\mathrm{Div}}_{X,x}$ la restriction de $\underline{\mathrm{Div}}_X$ à $x = \mathrm{Spec}(k(x))$.

Lorsque X est régulier, alors $\underline{\mathrm{Div}}_{X,x}$ n'est autre que le faisceau constant $\underline{Z}$ sur x . Utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{Z} \longrightarrow \underline{Q} \longrightarrow \underline{Q}/\underline{Z} \longrightarrow 0 \quad ,$$

et le fait que $H^i(x,\underline{Q}) = 0$ pour $i > 0$, on trouve

$$(2.5) \qquad H^i(x,\underline{Z}) \xleftarrow{\sim} H^{i-1}(x,\underline{Q}/\underline{Z}) \quad \text{pour } i \geqslant 2 \quad ,$$

d'autre part (BR II 1.9) on a

$$(2.5\text{ bis}) \qquad H^1(x,\underline{Z}) = 0 \quad .$$

Mettant ensemble les renseignements obtenus, on trouve :

Proposition (2.1). Soient X un préschéma noethérien régulier intègre de dimension 1, η son point générique, $X^{(1)}$ l'ensemble des points fermés de X. Si pour tout $x \in X^{(1)}$, $k(x)$ est parfait, on a une suite exacte infinie :

$$0 \to H^2(X,\underline{G}_m) \to H^2(\eta,\underline{G}_m) \to \coprod_{x \in X^{(1)}} H^1(x,\underline{Q}/\underline{Z}) \to H^3(X,\underline{G}_m) \to$$
$$\to H^3(\eta,\underline{G}_m) \to \cdots$$

La conclusion reste valable, sans hypothèse sur les corps résiduels, pour les composantes ℓ-primaires des groupes envisagés, pour tout nombre premier ℓ distinct des caractéristiques résiduelles de X.

Supposons par exemple que X soit le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien A, de sorte que $X^{(1)}$ est réduit à l'unique point fermé x de X. On vérifie (grâce à l'hypothèse hensélienne sur A) que pour tout préschéma en groupes commutatif et lisse G sur X, on a

$$H^i(X,G) \xrightarrow{\sim} H^i(x,G) , \tag{2.6}$$

(ce qui, pour $i = 2$ et $G = \underline{G}_m$, n'est autre essentiellement que le théorème de AZUMAYA (BR I 6.1)). On trouve donc :

Corollaire (2.2). Soit A un anneau de valuation discrète hensélien, de corps résiduel k, corps des fractions K. Si k est parfait, on a une suite exacte infinie (*) :

$$0 \to H^2(k,\underline{G}_m) \to H^2(K,\underline{G}_m) \to H^1(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \to H^3(k,\underline{G}_m) \to H^3(K,\underline{G}_m) \to H^2(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \to$$
$$\to \cdots$$

(*) Cf. le complément donné p. 101.

La conclusion reste valable, sans hypothèse sur k *, pour les composantes* ℓ *-primaires des groupes envisagés, pour tout nombre premier* ℓ *distinct de la caractéristique de* k .

Les deux premiers termes de cette suite exacte ne sont autres que $\mathrm{Br}(k)$ et $\mathrm{Br}(K)$, le troisième est le dual $\mathrm{Hom}(\pi_1(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ du groupe fondamental $\pi_1(k)$ de k . Lorsque k est fini, on a $\mathrm{Br}(k) = 0$ par (1.5), et $\pi_1(k) = \hat{\mathbb{Z}}$ (isomorphisme canonique défini par la substitution de Frobénius). On en conclut donc le résultat suivant, classique dans la théorie du *corps de classes local* :

Corollaire (2.3). Soit A *un anneau de valuation discrète hensélien, à corps résiduel fini* k *, et soit* K *son corps des fractions. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Br}(K) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad .$$

Soit maintenant K un corps de nombres algébriques i.e. une extension finie du corps $\mathbb{Q}$, et soit P l'ensemble des "places" (finies ou infinies) de K . Comme d'habitude, pour tout $\mathfrak{p} \in P$, on désigne par $K_{\mathfrak{p}}$ le complété de K en $\mathfrak{p}$, de sorte qu'on obtient un homomorphisme canonique

$$\mathrm{Br}(K) \longrightarrow \sum_{\mathfrak{p} \in P} \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}}) \quad . \tag{2.7}$$

Pour $\mathfrak{p}$ fini, le calcul de $\mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}})$ est fait dans (2.3), on trouve $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; pour $\mathfrak{p}$ infini, on trouve 0 si $K_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{C}$, et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}$: en effet, on a

$$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad , \tag{2.8}$$

par le théorème de Frobénius [8, par. 11, n° 2, th. 2]. La théorie du corps de classe [3] nous apprend d'autre part que (2.7) <u>est injectif</u>, et que son image est formée des $(\xi_{\underline{p}})_{\underline{p} \in P}$ tels que $\sum_{\underline{p}} \xi_{\underline{p}} = 0$, où la somme $\sum_{\underline{p}} \xi_{\underline{p}}$ est définie comme un élément de $\underline{Q}/\underline{Z}$, en identifiant les $Br(\underline{K}_p)$ soit à $\underline{Q}/\underline{Z}$, soit à un sous-groupe de $\underline{Q}/\underline{Z}$ de la façon indiquée. Soit maintenant A l'anneau des entiers de K , et $X = Spec(A)$; alors les éléments de $X^{(1)}$ correspondent biunivoquement aux places finies de K . Conjuguant (2.1) et les résultats de la théorie du corps de classes qu'on vient de rappeler, on trouve :

<u>Proposition (2.4). Soient</u> K <u>un corps de nombres,</u> X <u>le spectre de son anneau des entiers. Alors</u> $Br(X)$ <u>est un groupe de</u> 2 <u>-torsion fini, isomorphe à</u> $(\underline{Z}/2\underline{Z})^r$, <u>où</u> $r = Max(0,s-1)$, s <u>étant le nombre de places réelles de</u> K . <u>En particulier, si</u> K <u>est purement imaginaire, ou n'a qu'une seule place réelle (et dans ces cas</u> seulement), on a $Br(X) = 0$.

En particulier, on a $Br(Spec(\underline{Z})) = 0$.

<u>Remarques (2.5).</u>

a) On peut également calculer les $H^i(X,\underline{G}_m)$ [5] : ainsi, si K est purement imaginaire, on trouve

$$H^i(X,\underline{G}_m) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 3 \quad , \quad H^3(X,\underline{G}_m) = \underline{Q}/\underline{Z} \quad ,$$

en conjuguant (2.1) et les résultats connus du corps de classes.

b) On a des résultats analogues pour une courbe régulière complète X sur un corps fini k, notamment

$$\mathrm{Br}(X) = 0 \quad , \quad H^3(X,\underline{G}_m) \simeq \underline{Q}/\underline{Z} \quad \text{si } X \text{ connexe,}$$

qu'on peut établir par la même méthode, en utilisant la théorie du corps de classes "géométrique". Donnons ici une démonstration directe ; on utilise la suite spectrale de Leray $E_2^{p,q} = H^p(k,R^qf_*(\underline{G}_m)) \Longrightarrow H^*(X,\underline{G}_m)$ pour le morphisme structural $f : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, où ici $R^qf_*(\underline{G}_m) = 0$ pour $q \geqslant 2$, car en vertu de (2.1) et (1.1) on trouve $H^q(\bar{X},\underline{G}_m) = 0$ pour $q \geqslant 2$. On peut évidemment supposer X irréductible et $k = H^\circ(X,\underline{O}_X)$ donc $f_*(\underline{G}_m) = \underline{G}_{m\,k}$, et on aura, essentiellement par définition [16, V] $R^1f_*(\underline{G}_m) = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ restreint au site étale de k. On trouve donc une suite exacte infinie

$$(2.9) \quad \to H^n(k,\underline{G}_m) \to H^n(X,\underline{G}_m) \to H^{n-1}(k,\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \to H^{n+1}(k,\underline{G}_m) \to \cdots$$

(valable sans hypothèse sur le corps de base). Comme k est fini, on a $H^n(k,\underline{G}_m) = 0$ pour $n \geqslant 1$ par (1.5), d'où

$$(2.10) \qquad H^n(X,\underline{G}_m) \xrightarrow{\sim} H^{n-1}(k,\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \quad ,$$

ce qui (en vertu de $\mathrm{cd}(k) \leqslant 1$) implique $H^n(X,\underline{G}_m) = 0$ pour $n \geqslant 4$. D'autre part, on a une suite exacte canonique

$$(2.11) \qquad 0 \to \underline{\mathrm{Pic}}^\circ_{X/k} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \to \underline{Z}_k \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\underline{\mathrm{Pic}}^\circ_{X/k}$ est un groupe algébrique lisse et connexe sur k, d'où résulte par un théorème bien connu de LANG [24] que

$$(2.12) \qquad H^i(k,\underline{\mathrm{Pic}}^\circ_{X/k}) = 0 \quad \text{pour } i \geqslant 1 \quad ,$$

d'où par la suite exacte de cohomologie relative à (2.11)

$$(2.13) \qquad H^i(k,\underline{Pic}_{X/k}) \xrightarrow{\sim} H^i(k,\underline{Z}) \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

et par suite, d'après la structure connue du groupe fondamental du corps fini k , qui implique

$$(2.14) \qquad H^i(k,\underline{Z}) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 0,2 \quad , \quad H^2(k,\underline{Z}) \simeq H^1(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \simeq \underline{Q}/\underline{Z} \quad ,$$

la comparaison de (2.10), (2.13) et (2.14) donne $H^n(X,\underline{G}_m) = 0$ si $n = 2$, $\underline{Q}/\underline{Z}$ si $n = 3$, d'où pour conclure (ne supposant plus X irréductible) :

$$(2.15) \qquad H^n(X,\underline{G}_m) = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq 0,3 \quad , \quad H^3(X,\underline{G}_m) \simeq (\underline{Q}/\underline{Z})^c \quad ,$$

où c désigne l'ensemble des composantes irréductibles de X , et où le dernier isomorphisme est canoniquement défini. Observons que la même démonstration essentiellement établit encore (2.15) sans supposer la courbe complète X régulière ; il faut simplement dans (2.11) remplacer $\underline{Z}_k$ par un groupe $\underline{Z}_k{}^c$ tordu.

c) En liaison avec des conjectures de SWINNERTON-DYER et de TATE [32] [33] , M. ARTIN a soulevé la question s'il était vrai que pour tout schéma X <u>propre sur</u> $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$, le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est fini. C'est ce qu'on vérifie, grâce aux résultats qui précèdent, lorsque $\dim X \leq 1$. Mais déjà le cas [32] où X est une surface projective non singulière semble échapper aux moyens dont on dispose actuellement. Signalons cependant que des résultats récents de TATE (*) établissent la validité de cette conjecture lorsque X est une <u>variété abélienne définie sur un corps fini</u>, <u>ou un produit de courbes algébriques.</u>

(*) J. Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Inventiones Math. 2, 134-144 (1966).

3. Schémas fibrés de dimension 2 : Résultats locaux.

Le résultat-clef est le suivant :

Théorème (3.1). (M. ARTIN) : Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, avec X régulier et de dimension 2, Y spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien japonais (EGA 0_{IV} 23.1.1), y le point fermé de Y, Z un sous-schéma de X dont l'ensemble sous-jacent soit égal à $f^{-1}(y)$. Alors l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Br}(X) = H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow \mathrm{Br}(Z) = H^2(Z,\underline{G}_m)$$

est bijectif.

Notons que dans le cas envisagé ici, l'égalité entre les groupes de Brauer cohomologiques et géométriques résulte de (BR II 2.2), compte tenu que X est régulier de dimension 2 et Z de dimension 1. Notons tout de suite le corollaire suivant, qui est l'application principale de (3.1) :

Corollaire (3.2). Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, avec X, Y localement noethériens et réguliers, Y de dimension 1 et les fibres de f de dimension 1. Supposons de plus les anneaux locaux de Y japonais. Alors on a

$$R^i f_*(\underline{G}_m) = 0 \quad \text{pour } i \geqslant 2 .$$

Déduisons (3.2). Par le calcul habituel des $R^i f_*$ (SGA 4 VIII 5.2) on est ramené au cas où Y est strictement local, et à prouver alors $H^i(X,\underline{G}_m) = 0$ pour $i \geqslant 2$. Notons que le théorème de changement de base propre (SGA 4 XII 5.5) montre que pour tout faisceau de torsion F sur X , si F_o désigne sa restriction à la fibre fermée X_o , on a des isomorphismes de restriction

$$H^i(X,F) \xrightarrow{\sim} H^i(X_o,F_o) \quad .$$

Compte tenu que $\dim X_o = 1$, le deuxième membre est nul si $i > 2$, et même si $i > 1$ lorsque F donc F_o est de p -torsion, où $p = \operatorname{car} k$ (k le corps résiduel) (SGA 4 X, 4.3 et 5.2) ; donc on a

$$\operatorname{cd}(X) \leqslant 2 \quad , \text{ et } \quad \operatorname{cd}_p(X) \leqslant 1 \quad ,$$

où cd désigne la dimension cohomologique. Les relations $H^i(X,\underline{G}_m) = 0$ pour $i \geqslant 3$ résultent maintenant du fait que ces groupes sont des groupes de torsion (BR II 1.4), et du :

Lemme (3.2.1). Soit X un préschéma, ℓ un nombre premier, n un entier tel que $\operatorname{cd}_\ell(X) \leqslant n$. Alors $H^i(X,\underline{G}_m)(\ell) = 0$ si $i > n+1$ (resp. si $i > n$, si ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles de X).

Comme d'habitude, $M(\ell)$ désigne le sous-groupe formé des éléments de ℓ -torsion (i.e. annulés par une puissance de ℓ) du groupe abélien M . Lorsque ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles, on utilise la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de Kummer (BR II 3)

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^r} \longrightarrow \underline{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^{\ell^r}} \underline{G}_m \longrightarrow 0 \quad ;$$

lorsque on ne fait pas d'hypothèse sur ℓ , on introduit les faisceaux noyau et conoyau A , B de l'endomorphisme $x \mapsto x^{\ell^r}$ dans $\underline{G}_m$, qui sont des faisceaux de ℓ -torsion, ainsi que le faisceau image $\underline{G}'_m$ de cet endomorphisme, et on utilise les suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \underline{G}_m \longrightarrow \underline{G}'_m \rightarrow 0 \quad , \quad 0 \rightarrow \underline{G}'_m \rightarrow \underline{G}_m \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad .$$

Le lemme en résulte immédiatement.

Il reste à traiter le cas $i = 2$, i.e. à prouver

$$H^2(X,\underline{G}_m) = 0 \quad .$$

Notons que lorsque ℓ est un nombre premier $\neq$ car k , alors la relation

$$H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) = 0$$

est facile et s'établit, comme le cas $i \geqslant 3$, sans référence à (3.1), et sans faire appel à l'hypothèse japonaise pour Y , ni à la régularité de X . Il suffit d'utiliser l'homomorphisme de suites exactes du type Kummer (BR II 3.1) induit par l'inclusion $X_o \longrightarrow X$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X)\otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell & \longrightarrow & H^2(X,\mu_{\ell^\infty}) & \longrightarrow & H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X_o)\otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell & \longrightarrow & H^2(X_o,\mu_{\ell^\infty}) & \longrightarrow & H^2(X_o,\underline{G}_m)(\ell) & \longrightarrow & 0
\end{array} \quad ,$$

d'utiliser le fait que la flêche verticale médiane est bijective, et la première flêche verticale surjective (EGA IV 21.9.12) donc bijective, d'où résulte que la troisième flêche verticale est bijective. Or $H^2(X_o,\underline{G}_m) = 0$, comme il résulte de (1.2) lorsque k est algébriquement clos (et non seulement séparablement clos), et comme nous verrons plus bas (5.8) dans le cas général, utilisant le fait que X_o est propre, d'où $H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) = 0$. (Notons que la même démonstration prouve l'assertion (3.1) pour les composantes ℓ -primaires des groupes envisagés, pour tout $\ell \neq \operatorname{car} k$, sans hypothèse japonaise sur Y ni de régularité sur X.) Pour prouver la même relation pour $\ell = \operatorname{car} k$, i.e. pour prouver que $H^2(X,\underline{G}_m) = 0$, on doit cependant faire appel à (3.1), qui nous dit que

$$H^2(X,\underline{G}_m) \xrightarrow{\simeq} H^2(X_o,\underline{G}_m) \quad ,$$

et utiliser la relation déjà invoquée $H^2(X_o,\underline{G}_m) = 0$.

Prouvons enfin (3.1). Posons $Y = \operatorname{Spec}(A)$, $Y_n = \operatorname{Spec}(A/\underline{m}^{n+1})$, $\underline{m}$ étant l'idéal maximal de A , $X_n = X \times_Y Y_n$. Donc pour n assez grand, on aura $Z \subset X_n$, et Z et X_n ont même ensemble sous-jacent, i.e. Z est défini par un Idéal nilpotent sur X_n . Un dévissage standard du faisceau $\underline{G}_{m\,X_n}$ en termes de $\underline{G}_{m\,Z}$ et de faisceaux cohérents additifs F sur Z , joint à la relation $H^i(Z,F)=0$ pour $i \geqslant 2$ pour un tel F (provenant de l'hypothèse $\dim Z \leqslant 1$, et de (SGA 4 VII 4.3)), prouve qu'on a

$$H^2(X_n,\underline{G}_m) \xrightarrow{\simeq} H^2(Z,\underline{G}_m) \quad ,$$

dès que $Z \subset X_n$. Appliquant ceci au cas $Z = X_o$, on voit que l'homomorphisme de restriction $H^2(Z,\underline{G}_m) \longrightarrow H^2(X_o,\underline{G}_m)$ est également bijectif. On peut donc, pour prouver (3.1), supposer

$$Z = X_o \quad .$$

Compte tenu du fait que les morphismes de transition $\operatorname{Br}(X_{n+1}) \to \operatorname{Br}(X_n)$

sont injectifs (en fait, bijectifs), l'injectivité de $Br(X) \to Br(X_o)$ est contenue dans le lemme suivant :

Lemme (3.3). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et plat, avec Y spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien japonais. Avec la notation habituelle X_n, supposons que le système projectif $(\mathrm{Pic}(X_n))_{n \in \underline{N}}$ satisfasse la condition de Mittag-Leffler (EGA 0_{III} 13.1), par exemple que les morphismes de transition y soient surjectifs. Alors l'homomorphisme canonique

$$Br(X) \longrightarrow \varprojlim_n Br(X_n)$$

est injectif.

Soit $\underline{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X, dont la classe dans $Br(X)$ est dans le noyau de l'application envisagée dans (3.3), i.e. telle que pour tout n, on ait un isomorphisme

$$(3.2) \qquad u_n : \underline{A}_n \simeq \underline{\mathrm{End}}(\underline{V}_n) ,$$

où $\underline{V}_n$ est un Module localement libre sur X_n. Un tel $\underline{V}_n$ n'est déterminé par $\underline{A}_n$ que modulo tensorisation par un Module inversible $\underline{L}_n$ sur X_n, mais utilisant la condition que $(\mathrm{Pic}(X_n))_{n \in \underline{N}}$ satisfait la condition de Mittag-Leffler, on constate facilement qu'on peut choisir les $\underline{V}_n$, U_n de telle façon qu'ils forment un système projectif :

$$(3.3) \qquad \underline{V}_n \simeq \underline{V}_{n+1} \otimes_{\underline{O}_{X_{n+1}}} \underline{O}_{X_n} ,$$

les isomorphismes (3.2) formant eux-mêmes un système projectif. Soit

$\hat{X}$= Spec(A) le complété de Y , et désignons par $\hat{X}$, $\hat{\underline{A}}$ ... les transformés de X, $\underline{A}$ ... par le changement de base $\hat{Y} \longrightarrow Y$. Compte tenu de (EGA III 5.1.4), la donnée d'un tel système de $(\underline{V}_n, u_n)$ revient à la donnée d'un Module localement libre $\hat{\underline{V}}$ sur $\hat{X}$, et d'un isomorphisme

$$\hat{u} : \hat{\underline{A}} \simeq \underline{\mathrm{End}}\,(\hat{\underline{V}}) \quad . \tag{3.3}$$

Lorsque $Y = \hat{Y}$ (cas complet), la démonstration est terminée. Dans le cas général, il faut faire attention qu'on ne sait pas même, avec la construction précédente, si $\hat{\underline{V}}$ provient d'un Module $\underline{V}$ sur X . Cependant, il existe certainement un Module localement libre $\underline{E}$ sur X , tel qu'il existe un épimorphisme

$$\hat{\underline{E}} \longrightarrow \hat{\underline{V}} \quad ;$$

en effet, choisissant une immersion projective pour X (il en existe, comme l'a remarqué LICHTENBAUM), d'où un faisceau $\underline{O}_X(1)$ inversible ample sur X , on sait qu'il suffit de prendre une somme directe de faisceaux $\underline{O}_X(-N)$, avec N assez grand, en vertu du "théorème A" de Serre (EGA III 2.2.1). Considérons maintenant, pour un préschéma Y' sur Y variable, le foncteur contravariant $F : (\mathrm{Sch})^{\circ}_{/Y} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$, défini par

> $F(Y')$ = ensemble des couples $(\underline{V}', \phi')$, où V' est un Module quotient localement libre de $\underline{E}' = \underline{E} \otimes_Y Y'$, et ϕ' un isomorphisme $\underline{A}' = \underline{A} \otimes_Y Y' \xrightarrow{\sim} \underline{V}'$.

Utilisant la platitude et la propreté de f , et une technique standard reposant sur (EGA III 7.7.6) (comparer la démonstration dans

(SGA4 XIII 1)), on trouve que le foncteur F est <u>représentable</u> par un schéma de type fini sur Y, que nous noterons encore F. La donnée (3.3) ci-dessus s'interprète alors comme un élément de $F(\hat{Y})$. Or un théorème de GREENBERG [13] nous dit (sous une forme un peu plus précise d'ailleurs) que si F est un préschéma de type fini sur le spectre Y d'un anneau de valuation discrète <u>hensélien et japonais</u>, alors tout point de F à valeurs dans $\hat{Y}$ peut s'approcher par des points à valeurs dans Y, a fortiori $F(\hat{Y}) \neq \emptyset$ implique $F(Y) \neq \emptyset$. Cela prouve donc en l'occurence que $\underline{A}$ est isomorphe à une Algèbre de la forme $\underline{\mathrm{End}}(\underline{V})$, $\underline{V}$ Module localement libre sur X, et achève la démonstration de (3.3).

L'assertion de surjectivité dans (3.1) se démontre de façon toute analogue. Partant d'un élément de $\mathrm{Br}(X_o)$, représenté par une Algèbre d'Azumaya $\underline{A}_o$, on remonte de proche en proche $\underline{A}_o$ en des Algèbres d'Azumaya $\underline{A}_n$ sur les X_n, ce qui est possible, les obstructions aux relèvements consécutifs se trouvant dans des $H^2(X_o, ..)$, qui sont nuls puisque $\dim X_o = 1$. On trouve ainsi une Algèbre d'Azumaya $\hat{\underline{A}}$ sur $\hat{X}$. Choisissons un Module localement libre $\underline{E}$ sur X tel qu'il existe un épimorphisme $\hat{\underline{E}} \longrightarrow \hat{\underline{A}}$, et considérons le foncteur $(\mathrm{Sch})^o_{/Y} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ défini par $F(Y')$ = ensemble des couples $(\underline{B}', p')$, où $\underline{B}'$ est un Module quotient localement libre des $\underline{E} \otimes_Y Y'$ et p' une loi de multiplication sur $\underline{B}'$ qui en fait une Algèbre d'Azumaya. On constate alors que F est représentable par un préschéma localement de type fini sur Y, et comme le point de $F(y)$ défini par $\underline{A}_o$ se remonte par construction en un point de $F(\hat{Y})$, le théorème de GREENBERG déjà invoqué nous assure qu'il se remonte aussi en un point de $F(Y)$, ce qui achève la démonstration.

Remarques (3.4).

a) Lorsqu'on se borne à énoncer (3.1) pour les groupes Br (à l'exclusion des H^2), la démonstration est valable sans supposer X régulier (la régularité n'a servi qu'à assurer l'identité de $Br(X)$ avec $H^2(X,\underline{G}_m)$, et vaut également sans supposer Y de valuation discrète, lorsqu'on dispose pour Y d'un énoncé du type Greenberg (démontré pour l'instant seulement en dimension 1). Il est possible d'ailleurs que (3.3) (donc (3.1) et (3.2)) soient valables également sans hypothèse japonaise sur Y , et que plus généralement pour tout schéma X propre sur le spectre Y d'un anneau local noethérien hensélien, l'application $Br(X) \longrightarrow \varprojlim_n Br(X_n)$ soit injective. (Même si Y est complet, cette assertion n'est prouvée que lorsque X est plat sur Y , et moyennant l'hypothèse supplémentaire du type Mittag-Leffler.) On pourrait se poser la même question pour les applications $H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow \varprojlim_n H^i(X_n,\underline{G}_m)$, et la réponse est en tout cas affirmative pour $i = 0$, et pour $i = 1$ moyennant de légères restrictions (par exemple Y complet, ou X plat sur Y et Y hensélien excellent de valuation discrète, ce qui permet d'appliquer le résultat cité de GREENBERG). Mais comme me l'a fait observer RAYNAUD, la réponse est négative déjà pour $i = 2$, même si Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet et X est un schéma normal, plat et projectif sur Y , de dimension relative 1 : en effet, dans ce cas

$$\varprojlim H^2(X_n,\underline{G}_m) = H^2(X_o,\underline{G}_m) = Br\ (X_o) = \operatorname{Im} Br(X)$$

d'après la fin de la démonstration de (3.1) (où l'hypothèse de régularité sur X n'a pas été utilisée), donc si

$$H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow \varprojlim_n H^2(X_n,\underline{G}_m) \simeq Br(X_o)$$

était injectif, comme son composé avec l'injection $Br(X) \to H^2(X,\underline{G}_m)$ est surjectif, cette dernière serait également surjective ; or on a signalé (BR II 1.11 b)) que l'on peut trouver une surface algébrique normale X , sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, pour laquelle $Br(X) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)$ n'est pas surjective (le conoyau étant un groupe qui n'est pas de torsion, ni de type fini ...). Il est alors facile de voir qu'on peut (en modifiant au besoin X) supposer que X est projective et munie d'un morphisme dominant sur une courbe algébrique non singulière Y , d'où l'exemple annoncé. Notons cependant que la même question d'injectivité se pose également pour l'application $H^1(X,G) \longrightarrow \varprojlim_n H^1(X_n,G)$, lorsque G est un préschéma en groupes lisse non nécessairement commutatif sur X , et se résoud d'ailleurs par l'affirmative, essentiellement par la démonstration d'Artin qu'on vient de donner, lorsque X est plat sur Y et si de plus, ou bien G est affine sur X (ce qui permettra d'appliquer (EGA III 7.7.6)), ou bien G est quasi-projectif sur X et X projectif sur Y (ce qui permettra d'appliquer la théorie des "schémas de Hilbert"), pour assurer le résultat de représentabilité dont on a besoin.

b) Ecrivant la suite exacte infinie déduite de la suite spectrale de Leray pour le faisceau $\underline{G}_m$ et le morphisme f , en utilisant (3.2), et l'homomorphisme de cette suite exacte dans la suite exacte analogue associée au morphisme $f_o : X_o \longrightarrow y$, et tenant compte que $H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(X_o,\underline{G}_m)$ est bijectif pour $i \geqslant 2$ (pour $i \geqslant 3$, ceci résulte encore de la suite exacte de Kummer et du théorème de changement de base) et que $H^i(Y,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(y,\underline{G}_m)$ est bijectif pour $i \geqslant 1$ (11.7), on trouve comme corollaire du théorème d'Artin le fait que les homomorphismes

$$H^i(Y,R^1f_*(\underline{G}_m)) \longrightarrow H^i(y,R^1f_{o*}(\underline{G}_m))$$

sont des isomorphismes pour $i \geqslant 1$.

4. Schémas de dimension 2 : Comparaison avec le groupe de Tate-Chafarévitch.

La lecture du présent numéro, assez long et technique, n'est pas nécessaire pour la compréhension des numéros suivants.

Nous présentons ici, sous une forme légèrement généralisée, des résultats de M. ARTIN et J. TATE, comparer [32] . Soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme propre et plat, avec Y régulier intègre de dimension 1, X régulier de dimension 2. Nous supposerons les anneaux locaux de Y excellents ; lorsqu'on abandonne cette hypothèse, les résultats qui suivent restent en tous cas valables, à condition de se borner aux ℓ -composantes des groupes de torsion envisagés, où ℓ est distinct des caractéristiques résiduelles de Y . Compte tenu de (3.2), la suite spectrale de Leray pour f et le faisceau étale $\underline{G}_{m\,X}$ fournit une suite exacte infinie

$$(4.1)\quad H^i(Y,f_*(\underline{G}_m)) \longrightarrow H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^{i-1}(Y,R^1f_*(\underline{G}_m)) \dashrightarrow H^{i+1}(Y,f_*(\underline{G}_m))$$

que nous allons étudier en basses dimensions pour l'étude de $H^2(X,\underline{G}_m) = \mathrm{Br}(X)$. Nous supposons vérifiée l'hypothèse

$$(4.2)\qquad f_*(\underline{O}_X) \xleftarrow{\sim} \underline{O}_Y \ ,$$

(qui est dans la nature d'une hypothèse de normalisation, car si elle n'est pas satisfaite, on s'y ramène en remplaçant Y par $\mathrm{Spec}(f_*(\underline{O}_X))$). On aura alors

$$(4.2\ \mathrm{bis})\qquad f_*(\underline{G}_{m\,X}) = \underline{G}_{m\,Y} \ ,$$

et nous poserons

$$(4.3)\qquad R^1f_*(\underline{G}_{m\,X}) = P = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y} \ ;$$

la notation $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}$ est compatible d'ailleurs avec la notation introduite dans [16] pour l'étude du foncteur de Picard, comme nous verrons plus bas (5.1). Ici, (4.3) nous servira de définition de ce symbole, et nous écrirons par conséquent

$$(4.4)\qquad \mathrm{Pic}(X/Y) = H^0(Y,P) = H^0(Y,R^1f_*(\underline{G}_{m\,X})) \ ,$$

et nous utiliserons les notations analogues quand Y est remplacé par un Y' étale (ou préétale) sur Y . Ecrivant Pic et Br pour les H^1 et H^2 à coefficients dans $\underline{G}_m$, la suite exacte (4.1) peut se réécrire sous la forme

$$(4.5)\quad 0 \to \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/Y) \to \mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(Y,P) \to$$
$$\to H^3(Y,\underline{G}_m) \to H^3(X,\underline{G}_m) \ ,$$

que nous écrirons sous la forme

(4.6) $$0 \to S \to \mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(Y,P) \to T \to 0 \quad ,$$

ou encore

(4.6 bis) $$0 \to \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(Y) \to H^1(Y,P) \to T \to 0 \quad ,$$

avec

(4.7) $$S = \mathrm{Coker}(\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/Y)),\ T = \mathrm{Ker}(H^3(Y,\underline{G}_m) \to H^3(X,\underline{G}_m)) \ .$$

Nous allons montrer que dans des cas fréquents, S et T sont des groupes finis, voire nuls, et expliciter $H^1(Y,P)$ en termes du classique groupe de Tate-Chafarévitch de la jacobienne de la fibre générique X_η de X .

Introduisons quelques entiers liés à la situation. Notons que pour tout diviseur D sur X_η , et plus généralement pour tout élément ξ de $\mathrm{Pic}(X_\eta/\eta)$, on définit son degré $\deg(D)$ resp. $\deg(\xi)$ sur k . Si ξ est un élément de $\mathrm{Pic}(X)$ ou de $\mathrm{Pic}(X/Y)$, son degré est défini comme le degré de sa restriction à X_η , ou ce qui revient au même, le degré de sa restriction à n'importe quelle fibre X_s de X (relativement au corps résiduel $k(s)$). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow{\text{surj.}} & \mathrm{Pic}(X_\eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Pic}(X/Y) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X_\eta/\eta) \end{array} \ .$$

On désigne par δ le pgcd des degrés des diviseurs sur X_η , i.e. des degrés des éléments de $\mathrm{Pic}(X_\eta)$, ou encore des éléments de

$\mathrm{Pic}(X)$, par δ' celui des degrés des éléments de $\mathrm{Pic}(X/Y)$, enfin par δ'' celui des éléments de $\mathrm{Pic}(X_\eta/\eta)$. Ce sont des entiers $\geqslant 1$. Voici quelques relations entre ces entiers :

Proposition (4.1).

a) On a $\delta'' \mid \delta' \mid \delta$.

b) Les trois entiers précédents sont égaux si $\mathrm{Br}(\eta) = 0$, par exemple (1.1) si Y est une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos, ou Y strictement local à corps résiduel parfait.

c) On a $\delta = \delta'$ si $\mathrm{Br}(Y) = 0$, par exemple si Y est une courbe algébrique propre sur un corps séparablement clos (5.8) ou fini (2.5 b) , ou si Y est strictement local.

En effet, ces assertions résultent du diagramme ci-dessus, compte tenu que si $\mathrm{Br}(\eta) = 0$ (resp. $\mathrm{Br}(Y)n= 0$) alors $\mathrm{Pic}(X_\eta) \to \mathrm{Pic}(X_\eta/\eta)$ (resp. $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/Y)$) est surjectif.

Remarques (4.2).

a) On n'a pas toujours $\delta = \delta''$, comme on voit en prenant pour X une forme tordue de la droite projective (auquel cas on a $\delta'' = 1$ car $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y} \simeq \mathbb{Z}_Y$, et $\delta \neq 1$ comme on voit en utilisant BR II 0, 3ème alinéa). Un tel exemple peut exister même si Y est strictement local, en le prenant à corps résiduel imparfait de car. 2 (de sorte que $\mathrm{Br}(Y)$ est un groupe de 2 -torsion non nul (1.2.1)) ; comme dans ce cas, on a $\delta = \delta'$ en vertu de (4.1 c), on voit qu'on a alors même $\delta' \neq \delta''$. J'ignore si on a toujours

$\delta = \delta'$.

b) Les assertions b) et c) de (4.1) se généralisent de façon évidente en des assertions sur les ℓ-facteurs des entiers δ , δ' δ'' , lorsqu'on suppose seulement qu'on a $Br(\eta)(\ell) = 0$ resp. $Br(Y)(\ell) = 0$. Cela prouve que si Y est strictement local, à corps résiduel imparfait de caractéristique p , alors δ/δ'' est une puissance de p (car $Br(\eta)$ est alors un groupe de p-torsion (1.3)).

c) On a $\delta' = \delta''$ si pour tout point fermé $y \in Y$, il existe une quasi-section étale de X sur Y au-dessus de y (plus généralement, si on a $\delta_y = 1$). En effet, on montre alors que $Pic(X/Y) \to Pic(X_\eta/\eta)$ est surjectif, cf. (4.14) ci-dessous.

d) Lorsque X admet une section sur Y , i.e. X_η a un point rationnel sur $K(\eta)$, il est évident que $\delta = 1$, et par suite aussi $\delta' = \delta'' = 1$.

e) L'intérêt de la considération de l'entier δ'' (égal à δ dans les cas les plus importants), est qu'il admet une interprétation géométrique intéressante, en introduisant la jacobienne $J = P^o = \mathrm{Ker}\,(P \xrightarrow{\deg} \underline{Z})$, comme étant l'ordre d'un élément remarquable de $H^1(\eta, J)$, savoir la classe du J_η-torseur P^μ_η ,(où μ est la multiplicité radicielle de X_η , égale à 1 si X est séparable - par exemple lisse - sur η , et P^μ désigne l'image inverse de la section constante μ de $\underline{Z}_Y$ par le morphisme degré).

On peut interpréter δ comme étant le pgcd des degrés n des revêtements finis et plats $Y' \dashrightarrow Y$ tels qu'il existe un Y-morphisme $Y' \dashrightarrow X$. Or pour un tel revêtement, la considération de l'homomorphisme trace nous montre que le noyau de

$$H^*(Y,\underline{G}_m) \longrightarrow H^*(Y',\underline{G}_m)$$

est annulé par n, et comme d'autre part il contient celui de $H^*(Y,\underline{G}_m) \dashrightarrow H^*(X,\underline{G}_m)$, on conclut :

<u>Proposition (4.3)</u>. <u>Les groupes</u> S, T <u>de</u> (4.6) <u>à</u> (4.7) <u>sont annulés par</u> δ. <u>En particulier, si</u> $\delta = 1$, <u>par exemple si</u> X <u>admet une section sur</u> Y, <u>alors ces groupes sont nuls. Ils sont nuls également si</u> Y <u>est une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos, et alors</u> $Br(X) \simeq H^1(Y,P)$.

En effet, dans ce dernier cas nous savons que $H^2(Y,\underline{G}_m) = H^3(Y,\underline{G}_m) = 0$.

<u>Corollaire (4.4)</u>. <u>Supposons que</u> Y <u>soit une courbe algébrique sur un corps fini. Alors les groupes</u> S <u>et</u> T <u>sont des groupes finis. Si</u> Y <u>est complète, alors</u> $S = 0$, <u>et</u> T <u>est un groupe cyclique d'ordre divisant</u> δ, <u>et on a la suite exacte</u>

$$0 \dashrightarrow Br(X) \dashrightarrow H^1(Y,P) \dashrightarrow T \dashrightarrow 0 \ .$$

En effet, $H^2(Y,\underline{G}_m)$ et $H^3(Y,\underline{G}_m)$ sont alors des groupes contenus dans une somme finie de groupes $\underline{Q}/\underline{Z}$, comme il résulte aussitôt des résultats des n^{os} 1 et 2. Lorsque Y est complète, on trouve même $Br(Y) = 0$, $H^3(Y,\underline{G}_m) \simeq \underline{Q}/\underline{Z}$, d'où le corollaire.

Soit

$$i = \eta \dashrightarrow Y$$

l'inclusion du point générique, et posons

(4.8) $$\underline{B} = i_*(i^*(P)) \quad ,$$

de sorte qu'on a un homomorphisme canonique

(4.9) $$P \longrightarrow \underline{B} \quad ,$$

et on posera

(4.10) $$\underline{E} = \mathrm{Ker}\ (P \longrightarrow \underline{B}) \quad , \quad \underline{F} = \mathrm{Coker}\ (P \longrightarrow \underline{B}) \quad .$$

Les faisceaux $\underline{E}$ et $\underline{F}$ sont des "faisceaux gratte-ciel", qui sont donc connus lorsqu'on connait leurs restrictions aux points fermés de Y. Leurs fibres géométriques au-dessus d'un tel point y s'obtiennent comme les noyau et conoyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) = \mathrm{Pic}\ (\widetilde{X}/\widetilde{Y}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\widetilde{\eta}}/\widetilde{\eta}) \quad ,$$

où les $\sim$ dénotent l'effet de la localisation stricte relativement à un point géométrique $\bar{y}$ au-dessus de y. Compte tenu que le morphisme précédent se factorise par le sous-groupe $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\eta})$, et que $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\widetilde{\eta}})$ est surjectif puisque $\widetilde{X}$ est régulier, on trouve

(4.11) $$\underline{F}_{\bar{y}} = \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\eta}/\widetilde{\eta}) \ / \ \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\widetilde{\eta}})$$

(4.12) $$\underline{E}_{\bar{y}} = \mathrm{Ker}\ (\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\widetilde{X}_{\widetilde{\eta}})) \quad .$$

Compte tenu que $\mathrm{Br}(\widetilde{\eta}) = 0$ si $k(y)$ est parfait, et que c'est un groupe de $p(y)$ -torsion en tous cas, où $p(y)$ est l'exposant caractéristique de $k(y)$, on trouve que $\underline{F}_{\bar{y}}$ est un groupe de $p(y)$ -torsion, nul si $k(y)$ est parfait. Désignant par δ_y , δ'_y , δ''_y les entiers analogues à δ , δ' , δ'' pour la situation localisée $\widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$, un argument déjà fait plus haut nous montre que $\underline{F}_{\bar{y}}$ est nul également si $\delta_y = 1$, par exemple si $\widetilde{X}$ admet une section sur $\widetilde{Y}$. Nous allons supposer pour simplifier, par la suite, que l'on a

$$(4.13) \qquad \underline{F} = 0 \ ,$$

ce qui en vertu des remarques qui précèdent sera vérifié dans les cas les plus intéressants. (Dans le cas contraire, il faudra dans les résultats qui suivent se borner aux composantes premières aux caractéristiques résiduelles des groupes envisagés). Alors on obtient donc une suite exacte courte

$$(4.10 \text{ bis}) \qquad 0 \longrightarrow \underline{E} \longrightarrow P \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow 0 \ ,$$

permettant de relier la cohomologie de P avec celle de $\underline{B}$ et $\underline{E}$. Compte tenu de la structure discrète de $\underline{E}$, on trouve la suite exacte de cohomologie (où les sommes sont étendues aux points fermés y de Y) :

$$(4.14) \qquad 0 \longrightarrow \coprod_y H^0(y,\underline{E}_y) \to \mathrm{Pic}(X/Y) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_\eta/\eta}) \to \coprod_y H^1(y,\underline{E}_y) \to$$
$$\to H^1(Y,P) \to H^1(Y,\underline{B}) \to \coprod_y H^2(y,\underline{E}_y) \ .$$

Lorsque pour tout point fermé y de Y , $k(y)$ est séparablement clos, (par exemple Y une courbe algébrique sur k séparablement clos), cette suite exacte nous donne simplement

(4.14 bis) $$H^1(Y,P) \xrightarrow{\sim} H^1(Y,B) \quad .$$

Dans le cas général, notons qu'on voit sur cette suite exacte que l'image de $H^1(Y,P)$ dans $H^1(Y,\underline{B})$ est définie par des conditions de nature locale relativement à la hensélisation ordinaire (s'exprimant en effet par l'annulation de certains éléments des $H^2(y,\underline{E}_y)$). Désignant par $\bar{Y}$, $\bar{X}$ les schémas déduits de Y, X par hensélisation ordinaire en le point fermé $y \in Y$ (non précisé dans la notation), on voit qu'un élément de $H^1(y,\underline{B})$ appartient à l'image de $H^1(Y,P)$ si et seulement si pour tout y, son image dans $H^1(\bar{Y},\underline{B})$ est dans celle de $H^1(\bar{Y},P)$. Supposons qu'on ait pour tout y :

(4.15) $$H^1(\bar{Y}, P) = 0 \quad ,$$

ce qui sera vérifié si $k(y)$ est un corps séparablement clos ou fini (cf. (3.4 b) pour le cas k fini). Alors l'image de $H^1(Y,P)$ dans $H^1(Y,\underline{B})$ est le sous-groupe de $H^1(Y,\underline{B})$ formé des éléments dont l'image dans chaque $H^1(\bar{Y},\underline{B})$ est nulle. Ce sous-groupe s'appelle le <u>groupe de Tate-Chafarévitch de</u> Y <u>à coefficients dans</u> $\underline{B}$, et se note $Ш(Y,B)$ (cf. plus bas pour la relation avec la définition originelle de Tate et Chafarévitch). On trouve alors la suite exacte déduite de (4.14) :

(4.17) $$\cdots \operatorname{Pic}(X_\eta/\eta) \to \coprod_y H^1(y,\underline{E}_y) \to H^1(Y,P) \to Ш(Y,\underline{B}) \to 0 \quad ,$$

explicitant $H^1(Y,P)$ comme une extension du groupe de Tate-Chafarévitch par un quotient de la somme $\coprod_y H^1(y,\underline{E}_y)$.

Il faut enfin expliciter cette dernière somme. Notons que $\underline{E}_y$

est nul si X_y est géométriquement intègre, a fortiori si X_y est lisse sur y , de sorte que si X_η est séparable sur $k(\eta)$ (par exemple, lisse sur $k(\eta)$), alors le support de E est contenu dans (en fait, égal à) l'ensemble fini des $y_i \in Y$ tels que X_{y_i} ne soit pas géométriquement intègre. Un calcul facile donne pour $\underline{E}_y$ la structure suivante (en procédant par descente à partir de $\underline{E}_{\bar{y}}$). On écrit l'égalité de diviseurs sur X :

(4.18) $$X_y = \sum_i a_y^i C_y^i \quad ,$$

les C_y^i étant les composantes irréductibles de X_y , et les a_y^i leur multiplicité dans la fibre. On désigne par

(4.19) $$\mu_y^i \quad , \quad \nu_y^i$$

la multiplicité radicielle et la multiplicité séparable de C_y^i sur $k(y)$ respectivement (EGA IV 4.7.4), -donc $\mu_y^i = 1$ si $k(y)$ est parfait. On considère aussi la plus petite extension galoisienne $k(y)^i$ de $k(y)$ tel que les composantes irréductibles de $(X_y^i) \otimes_{k(y)} k(y)^i$ soient géométriquement irréductibles : c'est une extension finie de $k(y)$, de degré ν_y^i . On pose

(4.20) $$Z_y^i = \operatorname{Spec}(k(y)^i) \ , \ Z_y = \coprod Z_y^i \quad .$$

Ceci posé, le faisceau $\underline{E}_y$ sur y s'insère dans une suite exacte de faisceaux

(4.21) $$0 \longrightarrow \underline{Z}_y \longrightarrow p_{y*}(\underline{Z}_{Z_y}) \longrightarrow \underline{E}_y \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $p_y : Z_y \longrightarrow y$ est la projection structurale, et où l'homomorphisme $\underline{Z}_y \longrightarrow p_{y*}(\underline{Z}_{Z_y})$ est adjoint de l'homomorphisme

$$p_y^*(\underline{Z}_y) = \underline{Z}_Z \longrightarrow \underline{Z}_Z \tag{4.22}$$

qui, sur la composante Z_y^i , se réduit à la multiplication par a_y^i . La suite exacte de cohomologie associée à (4.21) nous fournit alors

$$\begin{aligned} H^1(y,\underline{E}_y) &= \operatorname{Ker}\,(H^2(y,\underline{Z}_y) \longrightarrow \prod_i H^2(Z_y^i,\underline{Z})) \\ &= \operatorname{Ker}\,(H^1(y,\underline{Q}/\underline{Z}) \longrightarrow \prod_i H^1(Z_y^i,\underline{Q}/\underline{Z})) \quad , \end{aligned} \tag{4.23}$$

où la flêche $H^1(y,\underline{Q}/\underline{Z}) \longrightarrow H^1(Z_y^i,\underline{Q}/\underline{Z})$ est l'homomorphisme de transition évident, multiplié par a_y^i . Comme $H^1(y,\underline{E}_y)$ est l'intersection des noyaux de ces homomorphismes, et qu'un tel noyau est manifestement annulé par $a_y^i\ \nu_y^i$, on voit que $H^1(y,\underline{E}_y)$ est annulé par

$$d_y = \operatorname{pgcd}(a_y^i\ \nu_y^i) \quad . \tag{4.24}$$

Lorsque $k(y)$ est fini, ou plus généralement pseudo-fini au sens de Serre, i.e. son groupe fondamental $\operatorname{Gal}(\overline{k(y)}/k(y))$ isomorphe à $\hat{\underline{Z}}$, alors on trouve même la valeur exacte :

$$H^1(y,\underline{E}_y) \simeq \underline{Z}/d_y\underline{Z} \quad . \tag{4.25}$$

Ainsi, on trouve que <u>pour que</u> $H^1(y,\underline{E}_y)$ <u>soit nul</u>, <u>il est suffisant en tous cas</u>, <u>et nécessaire lorsque</u> $k(y)$ <u>est quasi-fini</u>, <u>que l'on</u> ait $d_y = 1$.

Notons que d_y ne dépend que de la situation localisée <u>stricte</u> $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ en y , car c'est le pgcd des multiplicités des composantes irréductibles de $\tilde{X}_{\tilde{y}}$, ou encore l'ordre du sous-groupe de torsion de la fibre géométrique $\underline{E}_{\bar{y}}$, laquelle est en effet donnée par l'isomorphisme canonique

(4.26) $$\mathrm{Tors}(\underline{E}_{\bar{y}}) = \underline{Z}/d_y\underline{Z} \quad ,$$

(le sous-groupe de torsion de $\underline{E}_{\bar{y}} = \mathrm{Ker}\ (\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X))$ étant en effet engendré par la classe du diviseur $(1/d_y)\widetilde{X}_{\bar{y}})$. Cet entier est $\neq 1$ si et seulement si la fibre géométrique $X_{\bar{y}} = X_{\bar{y}}$ est une "fibre multiple", i.e. multiple non trivial d'un cycle positif sur $\widetilde{X}$; on peut donc se borner à ces y dans la suite exacte (4.15). Notons qu'on a aussi la relation

(4.27) $$\delta_y = \mathrm{pgcd}(a_y^i\ \nu_y^i\ \mu_y^i) \quad ,$$

comme il résulte du fait que $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{\bar{y}})$ est surjectif (SGA3 XIII 3.1). Par suite, on a

(4.28) $$d_y = \delta_y \quad \text{si } k(y) \text{ parfait,}$$

et en général

(4.29) $$d_y \mid \delta_y \quad , \quad \delta_y = d_y\, p_y^{s_y} \quad ,$$

où p_y désigne l'exposant caractéristique de $k(y)$, et s_y est un entier naturel. Par suite, si $\delta_y = 1$, en particulier si $\widetilde{X}$ admet une section sur $\widetilde{Y}$, alors a fortiori $d_y = 1$ et par suite $H^1(y,\underline{E}_y) = 0$.

Des résultats de cette discussion, retenons en tous cas :

Proposition (4.5). *Supposons qu'on ait* (4.13), *et que tout élément de* $H^1(y,\underline{Q}/\underline{Z})$ *annulé par* d_y (*défini dans* (4.24)) *soit nul, par exemple* $k(y)$ *séparablement clos ou* $\delta_y = 1$ (*par exemple que* X

<u>admet une quasi-section étale sur</u> Y <u>en</u> y). <u>Alors</u>

$$(4.30)\qquad H^1(Y,P) \xrightarrow{\sim} Ш(Y,\underline{B}) \ .$$

<u>Ainsi, la suite exacte</u> (4.6 bis) <u>devient</u> :

$$(4.31)\qquad 0 \longrightarrow Br(X)/\mathrm{Im}\, Br(Y) \dashrightarrow Ш(Y,\underline{B}) \longrightarrow T \longrightarrow 0 \ ,$$

<u>où le groupe</u> T <u>est défini par</u> (4.7) <u>et contrôlé par les énoncés</u> (4.3) <u>et</u> (4.4).

Il convient enfin, pour terminer ces dévissages, d'expliciter le sous-groupe $Ш(Y,\underline{B})$ de $H^1(Y,\underline{B})$ en termes de la jacobienne J de X_η ,

$$(4.32)\qquad J = \underline{B}_\eta{}^{o} = \mathrm{Ker}\,(\underline{B}_\eta \xrightarrow{\deg} \underline{Z}_\eta) \ .$$

Posons

$$(4.33)\qquad \underline{A} = i_*(J) = \mathrm{Ker}\,(\underline{B} \xrightarrow{\deg} \underline{Z}_Y) \ ,$$

nous allons supposer pour simplifier que l'homomorphisme $\deg : \underline{B} \to \underline{Z}_Y$ est surjectif, ce qui, par définition essentiellement, signifie aussi que les degrés locaux δ_y sont tous égaux à 1 :

$$(4.34)\qquad \delta_y = 1 \quad \text{pour tout point fermé } y \in Y \ ,$$

ce qui signifie aussi, si les $k(y)$ sont parfaits, que les fibres géométriques de X ne sont pas multiples. On a donc alors une suite exacte

$$(4.35)\qquad 0 \longrightarrow \underline{A} \dashrightarrow \underline{B} \longrightarrow \underline{Z}_Y \longrightarrow 0 \ ,$$

qui donne la suite exacte de cohomologie

$$\mathrm{Pic}(X_\eta/\eta) \xrightarrow{\deg} \underline{Z} \longrightarrow H^1(Y,\underline{A}) \longrightarrow H^1(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

compte tenu que $H^1(Y,\underline{Z}_Y) = 0$; tenant compte de la définition de δ'', on trouve la suite exacte

$$(4.36) \qquad 0 \longrightarrow \underline{Z}/\delta''\underline{Z} \longrightarrow H^1(Y,\underline{A}) \longrightarrow H^1(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

explicitant $H^1(Y,\underline{B})$ comme quotient du groupe $H^1(Y,\underline{A})$ par un sous-groupe fini cyclique $\underline{Z}/\delta''\underline{Z}$. Utilisant les suites exactes analogues pour les situations localisées par hensélisation ordinaire $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$, on est conduit à introduire un groupe intermédiaire entre $H^1(Y,\underline{A})$ et $Ш(Y,\underline{A})$

$$(4.37) \qquad Ш'(Y,\underline{A}) = \left(\xi \in H^1(Y,\underline{A}) \;\middle|\; \forall\, y \text{ fermé dans } Y \text{ , l'image de } \xi \text{ dans } H^1(\bar{Y},\underline{A}) \text{ est dans } \mathrm{Im}(\underline{Z}/\delta''_y\underline{Z}) \right) .$$

Ceci posé, on aura donc une suite exacte :

$$(4.38) \qquad 0 \longrightarrow \underline{Z}/\delta''\underline{Z} \longrightarrow Ш'(Y,\underline{A}) \longrightarrow Ш(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Explicitons deux cas particuliers importants :

<u>Cas particulier (4.6)</u>. Y <u>est une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos</u>. Alors la plus grande partie de la discussion précédente devient triviale. La relation (4.13) est automatiquement satisfaite, et on a (4.14 bis) :

$$(4.39) \qquad \mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(Y,\underline{B}) \quad ;$$

lorsque de plus les δ_y sont égaux à 1, i.e. si X n'a pas de fibre multiple sur Y , alors le deuxième membre s'explicite par

(4.40) $$0 \longrightarrow \underline{Z}/\delta\underline{Z} \longrightarrow H^1(Y,\underline{A}) \longrightarrow H^1(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

compte tenu que l'on a ici nécessairement $\delta = \delta' = \delta''$.

Cas particulier (4.7). Y est une courbe algébrique propre sur un corps fini k . Ici encore, (4.13) est automatiquement satisfaite, k étant parfait, ainsi que (4.16) puisque $k(y)$ est de dimension $\leqslant 1$, d'où $H^3(k(y), \mathbb{G}_m) = 0$; de plus on aura $\delta = \delta'$, et de même pour les invariants hensélisés et strictement hensélisés. Comme on a encore $Br(Y) = 0$, on trouve ici (4.4) :

(4.41) $$0 \longrightarrow Br(X) \longrightarrow Ш(Y,\underline{B}) \longrightarrow \underline{Z}/\triangle\,\underline{Z} \longrightarrow 0, \text{ où } \triangle \mid \delta .$$

D'autre part, si les δ_y sont égaux à 1, i.e. si le morphisme déduit de $f : X \longrightarrow Y$ en passant à la clôture algébrique de k n'a pas de fibre multiple, alors on trouve la suite exacte

(4.42) $$0 \longrightarrow \underline{Z}/\delta''\underline{Z} \longrightarrow Ш(Y,\underline{A}) \longrightarrow Ш(Y,\underline{B}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

ce qui est un cas particulier de (4.37), compte tenu de la relation suivante :

(4.43) $$\bar{\delta}_y = \delta_y$$

pour tout point fermé y de Y , qui implique ici $\bar{\delta}_y = 1$ d'où $Ш'(Y,\underline{A}) = Ш(Y,\underline{A})$. La démonstration de l'égalité (4.43), qui est une conséquence facile du théorème de LANG [24] $H^1(k,G) = 0$ pour le corps fini $k(y)$ et le schéma de Picard connexe $G = \mathrm{Pic}^o_{X_y/y}$, est laissée au lecteur comme un exercice plaisant et délectable.

Autocritique (4.8). La discussion du cas particulier (4.7) n'est pas complète. On aimerait en particulier déterminer l'entier Δ, ordre du noyau de $H^3(Y,\underline{G}_m) \longrightarrow H^3(X,\underline{G}_m)$ (est-il toujours égal à δ, ou au ppcm des δ_y ?), et préciser les relations entre $Ш(Y,\underline{B})$ et $Ш(Y,\underline{A})$ lorsqu'on ne suppose plus les δ_y égaux à 1. Une analyse plus poussée devrait donner en particulier la formule conjecturale "élémentaire" [32,(4.4)] de ARTIN et TATE.

Complément (4.9). Lien avec la définition habituelle du groupe de Tate-Chafarévitch. Les faisceaux $\underline{B}$, $\underline{A}$ pour lesquels nous avons considéré les groupes de Tate-Chafarévitch étaient tous deux de la forme $i_*(F_\eta)$, où F_η était un faisceau abélien sur le point générique η. La suite exacte habituelle, associée à la suite spectrale de Leray pour l'inclusion $i : \eta \longrightarrow Y$, nous donne alors

$$(4.44) \qquad 0 \longrightarrow H^1(Y,i_*(F_\eta)) \longrightarrow H^1(\eta, F_\eta) \longrightarrow \coprod_y H^1(\tilde{K}(y),F_\eta) ,$$

où $\tilde{K}(y)$ désigne le corps des fractions du localisé strict en y. Ainsi, $H^1(Y,i_*(F_\eta))$ s'interprète comme un sous-groupe du groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\eta,F_\eta)$. De ceci, et de la définition de $Ш(Y,i_*(F_\eta))$, on conclut aussitôt la suite exacte

$$(4.45) \qquad 0 \longrightarrow Ш(Y,i_*(F_\eta)) \longrightarrow H^1(\eta,F_\eta) \longrightarrow \coprod_y H^1(\bar{K}(y),F_\eta) ,$$

où $\bar{K}(y)$ désigne le corps des fractions du hensélisé ordinaire de Y en y. La suite exacte (4.45) n'est autre essentiellement que la définition originale de TATE et CHAFAREVITCH (du moins dans le cas "géométrique"), à cela près qu'ils considèrent les complétés au lieu des hensélisés des anneaux locaux $\underline{O}_{Y,y}$; dans le cas qu'ils envisagent, comme F_η est défini par un schéma abélien sur η , les deux définitions reviennent au même, car les $H^1(\bar{K}(y),F_\eta)$ sont les mêmes dans les deux cas [30, th. 2 (iii)] . Dans le cas arithmétique, lorsque Y est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K , la définition de TATE et CHAFAREVITCH diffère de celle que nous envisageons ici, en ce que ces auteurs considèrent également les complétés de K correspondant à des "places à l'infini" i.e. archimédiennes.

Complément (4.10). Lien avec les modèles de Néron. Par définition même, le faisceau $\underline{A} = i_*(J)$ envisagé plus haut n'est autre que le faisceau étale associé au faisceau en groupes lisse sur Y construit par NERON [29] en termes de la variété abélienne J (nous supposons ici X_η lisse sur η , donc J une variété abélienne ; il semble d'après des travaux en cours de RAYNAUD que cette restriction n'esf d'ailleurs pas nécessaire). La même remarque essentiellement s'applique à $\underline{B}$, à cela près qu'il faut prendre ici le modèle de Néron d'un schéma en groupes $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_\eta/\eta}$ qui n'est pas de type fini sur η ; cela n'offre pas de difficulté, puisque la théorie de Néron a été écrite également pour des fibrés principaux homogènes sous des schémas abéliens. La considération des modèles de Néron et de leurs relations au foncteur de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}$ doit permettre de donner des compléments importants sur les groupes de cohomologie $H^1(Y,\underline{A})$, $H^1(Y,\underline{B})$ et leurs variantes chafarévitchisées. Dans le cas particulier (4.7), on voit par exemple aussitôt, grâce à ces modèles, que les groupes de Tate-Chafarévitch envisagés sont d'indice fini dans les H^1 correspondants. Pour des relations plus précises, nous renvoyons aux futurs papiers de M. RAYNAUD.

5. Utilisation de la topologie "fidèlement plate de présentation finie", application au groupe de Picard relatif.

En plus de la topologie étale, nous allons utiliser la topologie fppf d'un préschéma X, pour laquelle un système fondamental de familles couvrantes pour X est formée des familles surjectives $(f_i : X_i \longrightarrow X)$ de morphismes plats localement de présentation finie [SGA3 IV 6.3] ; on voit alors qu'on peut même supposer les f_i localement quasi-finis (et même quasi-finis si X est quasi-séparé). Nous désignerons ici par X_{pl} le préschéma X considéré comme "muni de la topologie fppf" (ou plus précisément, le site formé des préschémas localement de présentation finie sur X, muni de la topologie qu'on vient de préciser), de sorte que pour un préschéma en groupes commutatifs G sur X, $H^i(X_{pl},G)$ désignera les groupes de cohomologie correspondants, par contraste avec $H^i(X,G) = H^i(X_{et},G)$, qui désignent les groupes de cohomologie étale. Du point de vue du morphisme canonique de sites

$$p : X_{pl} \longrightarrow X_{ét} ,$$

les faisceaux G_{pl} et $G_{ét}$ sur X_{pl} et $X_{ét}$ respectivement définis par G sont reliés par

(5.1) $$G_{ét} = p_*(G_{pl}) ,$$

d'où on conclut comme d'habitude des homomorphismes fonctoriels

$$H^i(X_{\text{ét}}, G) \longrightarrow H^i(X_{\text{pl}}, G) \quad , \tag{5.2}$$

qui pour $i = 0$ est un isomorphisme, donc pour $i = 1$ est un monomorphisme. Nous utiliserons dans le présent n° le fait, prouvé en Appendice (11.7), que <u>lorsque</u> G <u>est lisse sur</u> X (en particulier lorsque $G = \underline{G}_m$), <u>alors</u> (5.2) <u>est un isomorphisme pour tout</u> i .

Soit maintenant

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, supposons que l'on a (pour les faisceaux de Zariski habituels)

$$\underline{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_*(\underline{O}_X) \tag{5.3}$$

(relation qui restera vérifiée alors après tout changement de base plat), et que f admette des sections localement fppf sur Y , par exemple que f soit fidèlement plat et de présentation finie. Utilisant la définition [16, V] du foncteur de Picard relatif $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}$, les hypothèses faites impliquent que sa restriction aux préschémas plats localement de présentation finie sur Y coïncide avec la restriction à ces arguments du faisceau $R^1 f_{\mathrm{pl}*}(\underline{G}_m)$; lorsque (5.3) reste vrai pour tout changement de base, donc est un isomorphisme $\underline{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_{\mathrm{pl}*}(\underline{O}_X)$, alors dans l'assertion précédente il n'est pas nécessaire d'ailleurs de se borner aux arguments plats sur Y , et on trouve simplement

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y} = R^1 f_{\mathrm{pl}*}(\underline{G}_m) \quad , \tag{5.4}$$

(avec le grain de sel que le premier membre est considéré comme restreint au site X_{pl}). Utilisant la notation $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}(Y) = \mathrm{Pic}(X/Y)$ de loc. cit., la suite spectrale de Leray pour

$$f_{pl} : X_{pl} \longrightarrow Y_{pl}$$

nous fournit une suite exacte en basses dimensions

$$(5.5)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/Y) \longrightarrow H^2(Y_{pl},\underline{G}_m) \longrightarrow \cdots$$

Utilisons maintenant que, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$(5.6)\qquad H^2(Y_{pl},\underline{G}_m) = H^2(Y_{\acute{e}t},\underline{G}_m)\quad ,$$

donc que tout élément de $H^2(Y_{pl},\underline{G}_m)$ s'annule localement pour la topologie étale. On obtient alors :

Théorème (5.1). *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme quasi-compact et quasi-séparé satisfaisant* (5.3) *et admettant une section localement* fppf *sur* Y . *Alors tout élément* ξ *du groupe de Picard relatif* $\mathrm{Pic}(X/Y)$ *se réalise localement pour la topologie étale sur* Y *par un élément de* $\mathrm{Pic}(X)$, *i.e. on peut trouver une famille surjective de morphismes* étales $Y_i \longrightarrow Y$, *tel que chaque* ξ_i = *image de* ξ *dans* $\mathrm{Pic}(X\times_Y Y_i/Y_i)$ *soit image d'un élément de* $\mathrm{Pic}(X\times_Y Y_i)$.

Lorsque la relation (5.3) a lieu universellement, on peut encore exprimer ce résultat en disant que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}$, qui a été défini via le foncteur $Y' \longmapsto \mathrm{Pic}(X\times_Y Y')$ en passant au faisceau associé pour la topologie fidèlement plate, et qui en vertu de (5.4) est aussi le faisceau associé pour la topologie fidèlement plate de présentation finie, peut aussi se calculer plus simplement comme le faisceau associé pour la topologie <u>étale</u>, i.e. on a

$$(5.7)\qquad \underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y} = R^1 f_{\text{ét}*}(\underline{G}_m) \quad ,$$

(avec le même grain de sel que ci-dessus). Une autre façon essentiellement équivalente d'exprimer (5.1) est la suivante :

<u>Corollaire (5.2)</u>. <u>Sous les conditions de</u> (5.1), <u>supposons de plus</u> Y <u>strictement local</u>, <u>alors l'homomorphisme</u> $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/Y)$ <u>est surjectif</u>, <u>donc on a un isomorphisme</u>

$$(5.8)\qquad \mathrm{Pic}(X/Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{Pic}(X) \quad .$$

Utilisant maintenant la suite spectrale de Leray pour

$$f_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \longrightarrow Y_{\text{ét}}$$

et le faisceau $\underline{G}_m$, et utilisant (5.1), on trouve le

<u>Corollaire (5.3)</u>. <u>Sous les conditions de</u> (5.1), <u>on a une suite exacte canonique</u> :

$$(5.9)\quad 0 \to \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/Y) \to \mathrm{Br}'(Y) \to \mathrm{Br}'(X)^{\mathrm{tr}} \to H^1(Y, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/Y}),$$

<u>où le groupe de cohomologie écrit est pris au sens de la cohomologie étale</u> (<u>l'exposant</u> tr <u>au groupe</u> $H^2(X,\underline{G}_m) = \mathrm{Br}'(X)$ <u>indique le sous-groupe des</u> "<u>éléments transgressifs</u>" <u>au sens de la suite spectrale</u>).

(5.4). Un intérêt particulier s'attache à l'homomorphisme

$$(5.9\ \text{bis})\qquad \delta : \mathrm{Pic}(X/Y) \longrightarrow \mathrm{Br}'(Y) = H^2(Y,\underline{G}_m) \quad ,$$

qui apparaît comme un homomorphisme d'obstruction au relèvement d'un élément du groupe de Picard relatif de X en un élément du groupe de Picard absolu. On notera qu'en général, cet homomorphisme ne prend pas ses valeurs dans le groupe de Brauer géométrique $Br(X) \to Br'(X)$, comme on voit en prenant pour Y la surface normale de MUMFORD signalée dans [BR II 1.11 b)] , pour X l'ouvert complémentaire du point singulier. J'ignore ce qu'il en est lorsque f est plat et propre de présentation finie, et que la relation (5.3) est vraie universellement. Dans ce cas, moyennant une légère hypothèse supplémentaire sur l'élément envisagé ξ de $Pic(X/Y)$, on peut cependant donner une construction géométrique simple d'un fibré de Brauer-Séveri P sur Y dont la classe dans $Br(Y)$ est $\delta(\xi)$. Pour exprimer cette condition, considérons un morphisme étale et surjectif $Y' \to Y$ tel que l'image de ξ dans $Pic(X'/Y')$ provienne d'un faisceau inversible $\underline{L}$ sur X' . Notre condition est que

a) $f'_*(\underline{L}')$ soit un faisceau localement libre sur Y' , dont la formation commute à tout changement de base (i.e. que $\underline{L}'$ soit "cohomologiquement plat sur Y' en dimension 0", au sens de [EGA III 7.8.1] , et que de plus

b) pour toute fibre géométrique $X'_{\bar{y}'}$ de X' sur Y' , l'image inverse de $\underline{L}'$ sur cette dernière puisse être définie par un diviseur (de Cartier) positif, i.e. que ce faisceau admette une section qui soit partout régulière. (Ces conditions, manifestement, ne dépendent pas du choix de Y' , $\underline{L}'$). Considérons alors le fibré projectif $\check{P}(f'_*(\underline{L}'))$, il est muni d'une donnée de descente naturelle pour $Y' \to Y$, et grâce à a) cette donnée est nécessairement effective, car elle laisse stable le faisceau des différentielles relatives de degré maxima, dont l'inverse est relativement ample. Désignons par $\check{P}(\xi)$ le Y-préschéma descendu, qui est donc un fibré de Brauer-Sévéri [BR I 8] sur Y. Utilisant b), on voit que dans $P = \check{P}(\xi)$ il y a un ouvert canonique V, qui représente le foncteur $Y' \mapsto$ ensemble des diviseurs relatifs positifs de X' sur Y' dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X'/Y')$ est égale à $\xi' =$ image de ξ dans $\mathrm{Pic}(X'/Y')$; lorsque les fibres géométriques de X sur Y sont intègres, cet ouvert est même égal à P, ce qui fournit alors une interprétation géométrique pour P, comparer [16, V th. 4.3]. On (plus précisément, J. GIRAUD) vérifie que la classe de cet élément dans $\mathrm{Br}(X)$ est bien $\delta(\xi)$. Lorsque f est projectif et Y quasi-compact, alors tout élément de $\mathrm{Pic}(X/Y)$ s'écrit comme différence de deux éléments qui sont"suffisamment amples" pour que les hypothèses a) et b) envisagées plus haut soient satisfaites. On trouve par suite :

Corollaire (5.5). Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif, plat et de présentation finie, avec Y quasi-compact, tel que pour tout $y \in Y$, on ait $k(y) \xrightarrow{\sim} H^0(X_y, \underline{O}_{X_y})$. Alors l'homomorphisme d'obstruction (5.9 bis) prend ses valeurs dans $\mathrm{Br}(Y)$, i.e. induit un homomorphisme

$$(5.10) \qquad \mathrm{Pic}(X/Y) \to \mathrm{Br}(Y) .$$

Soit maintenant X un schéma propre sur un corps k, que nous supposons séparablement clos mais pas nécessairement algébriquement clos. Nous nous proposons d'utiliser les relations entre la topologie étale et la topologie fppf pour étudier les relations entre $\mathrm{Br}'(X)$ et $\mathrm{Br}'(X')$, où $X' = X \otimes_k k'$, k' étant une clôture algébrique de k. Nous considérons le morphisme de sites

$$f_{pl} : X_{pl} \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)_{pl} ,$$

et la suite spectrale de Leray correspondante, pour le faisceau $\underline{G}_m$ sur X_{pl}. Soit $A = H^0(X,\underline{O}_X)$, qui est une algèbre commutative finie sur k, alors on trouve immédiatement que $f_{pl*}(\underline{G}_m)$ est le faisceau défini par le schéma en groupes lisse G sur k des unités de A. Par suite, utilisant le résultat signalé au début du n°, on trouve

$$(5.11) \qquad H^i(k_{pl}, f_{pl*}(\underline{G}_m)) = H^i(k_{pl}, G) = H^i(k_{et}, G) = 0 \quad (i \geqslant 1) .$$

D'autre part, on a par définition essentiellement

$$(5.12) \qquad R^1 f_{pl*}(\underline{G}_m) = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} ,$$

et la suite spectrale de Leray donne alors une suite exacte

$$(5.12) \quad 0 \to H^1(k_{pl}, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \to H^2(X,\underline{G}_m) \to H^0(k, R^2 f_{pl*}(\underline{G}_m)) \to H^2(k_{pl}, \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) .$$

D'autre part, le calcul habituel de $R^2 f_{pl*}(\underline{G}_m)$ comme le faisceau associé à un certain préfaisceau nous donne, par un passage à la limite facile

$$(5.13) \qquad H^0(k_{pl}, R^2 f_{pl*}(\underline{G}_m)) \simeq H^2(X',\underline{G}_m)^{inv} ,$$

où le deuxième membre désigne le sous-groupe de $H^2(X',\underline{G}_m)$ formé des éléments "invariants" au sens de la descente $\mathrm{Spec}(k') \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, i.e.

$$(5.14)\qquad H^2(X',\underline{G}_m)^{inv} = \mathrm{Ker}(H^2(X',\underline{G}_m) \rightrightarrows H^2(X'',\underline{G}_m)) \quad ,$$

où on a posé

$$X'' = X'x_X X' = X \otimes_k (k' \otimes_k k') = X \otimes_k k'' \quad , \qquad (k'' = k' \otimes_k k') \quad .$$

Ainsi on trouve :

Proposition (5.6). *Soit* X *propre sur* k *corps séparablement clos, et soit* k' *une clôture algébrique de* k , $X' = X \otimes_k k'$. *Alors on a la suite exacte* (5.12), *qui nous donne en particulier la suite exacte*

$$0 \longrightarrow H^1(k_{pl},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X') \quad ,$$

en particulier pour que $\mathrm{Br}'(X) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X')$ *soit injectif, il faut et il suffit que* $H^1(k_{pl},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) = 0$. *Si* $H^2(k_{pl},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) = 0$, *alors l'image de* $\mathrm{Br}'(X)$ *dans* $\mathrm{Br}'(X')$ *est le sous-groupe* $\mathrm{Br}'(X')^{inv}$ *décrit dans* (5.14).

Le cas le plus intéressant est celui où $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ est lisse, car d'après le résultat déjà invoqué, on en conclut alors

$$(5.15)\qquad H^i(k_{pl},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) = H^i(k_{et},\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

et par suite :

Corollaire (5.7). *Avec les notations de* (5.6) *supposons que* $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ *soit lisse sur* k (*par exemple* $H^2(X,\underline{O}_X)=0$, *ou* $H^1(X,\underline{O}_X)=0$). *Alors l'application* $\mathrm{Br}'(X) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X')$ *est injective, son image est formée des éléments "invariants" de* $\mathrm{Br}'(X')$ (*définis par* (5/14)).

En particulier, utilisant (1.2), on trouve :

Corollaire (5.8). *Soit* X *une courbe algébrique propre sur un corps* k *séparablement clos. Alors* $Br'(X) = Br(X) = 0$.

Remarques (5.9). Lorsque $P = \underline{Pic}_{X/k}$ n'est pas nécessairement lisse sur k , supposons que P_{red} soit un sous-schéma en groupes P' de X lisse sur k (condition automatiquement vérifiée lorsque P^o est propre sur k , par exemple lorsque X est géométriquement normal sur k), de sorte qu'on a une suite exacte de schémas en groupes

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0 \quad , \tag{5.16}$$

où P' est lisse et P'' est un groupe fini radiciel sur k . La suite exacte de cohomologie et $H^i(k_{pl},P') = H^i(k_{et},P') = 0$ pour $i \geq 1$, nous donnent alors

$$H^i(k_{pl},P) \xrightarrow{\sim} H^i(k_{pl},P'') \qquad (i \geq 1), \tag{5.17}$$

ce qui nous ramène au calcul des H^i à coefficients dans le groupe fini radiciel P'' . Un dévissage facile nous donne pour un tel groupe

$$H^1(k_{pl},P'') \neq 0 \quad \text{si } P'' \neq 0,\ k \text{ non parfait,} \tag{5.18}$$

$$H^i(k_{pl},P'') = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq 2 \quad ,$$

ce qui nous montre que l'application $Br'(X) \longrightarrow Br'(X')^{inv}$ est nécessairement surjective, et que (lorsque k n'est pas parfait) son noyau est nul *si et seulement si* $\underline{Pic}_{X/k}$ est lisse sur k . D'ailleurs, sans aucune hypothèse préliminaire sur P , on peut montrer que l'on a

$$(5.19) \qquad H^i(k_{pl}, P) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2$$

(utiliser l'existence d'un sous-groupe fini radiciel N de P tel que P/N soit lisse). Il en résulte que $Br'(X) \longrightarrow Br(X')^{inv}$ est en tous cas surjectif.

6. Théorème de pureté pour le groupe de Brauer.

Soient X un préschéma localement noethérien régulier, Y un sous-préschéma fermé, de codimension $d > 0$ en chaque point. On s'intéresse aux faisceaux de cohomologie locale $\underline{H}^i_Y(\underline{G}_m)$, qui s'introduisent dans l'explicitation des relations entre la cohomologie de X et celle de $X-Y$ à coefficients dans $\underline{G}_m$ via la suite exacte bien connue [SGA4 V 4.3 et VIII 6.6] :

$$(6.1) \qquad H^i_Y(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(X-Y,\underline{G}_m) \longrightarrow H^{i+1}_Y(X,\underline{G}_m) \quad ,$$

et la suite spectrale (variante de la suite spectrale de Leray) "de passage du local au global" :

$$(6.2) \qquad H_Y(X,\underline{G}_m) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(Y,\underline{H}^q_Y(\underline{G}_m)) \quad .$$

On trouve immédiatement les valeurs

$$(6.3) \qquad \underline{H}^0_Y(\underline{G}_m) = 0$$

$$(6.4) \qquad \underline{H}^1_Y(\underline{G}_m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad d \neq 1 \\ \sum_i \underline{Z}_{Y_i, X} & \text{si} \quad d = 1 \end{cases}$$

(6.5) $$\underline{H}_Y^2(\underline{G}_m) = 0 \quad ,$$

où les Y_i sont les composantes irréductibles de Y . Les faisceaux $\underline{H}_Y^i(\underline{G}_m)$ pour $i \geqslant 3$ sont des faisceaux de torsion, comme il résulte de l'expression habituelle des fibres géométriques

(6.6) $$\underline{H}_Y^i(\underline{G}_m)_{\bar{y}} \simeq H^{i-1}(\bar{X}-\bar{Y},\underline{G}_m) \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2 \quad ,$$

(où $\bar{X},\bar{Y}$ sont les localisés stricts de X,Y en $\bar{y}$), et de (BR II 1.4). On dira que le couple (X,Y) <u>satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer</u> (resp. relativement à l'ensemble $\mathbb{L}$ de nombres premiers), si l'on a

(6.7) $$\underline{H}_Y^3(\underline{G}_m) = 0 \quad , \text{ i.e. } \quad H^2(\bar{X}-\bar{Y},\underline{G}_m) = 0 \text{ pour tout point géométrique } \bar{y} \text{ de } Y \quad ,$$

(resp. si pour tout $\ell \in \mathbb{L}$, la composante ℓ -primaire de $\underline{H}_Y^3(\underline{G}_m)$ est nulle). Lorsque $\dim X = 1$, donc $d = 1$, cette notion est justiciable du n° 1, qui implique que la propriété de pureté est satisfaite si les $k(y)$, $y \in Y$, sont parfaits, et que la propriété de pureté est satisfaite en tous cas pour tout nombre premier ℓ distinct des caractéristiques de ces $k(y)$.

Revenant au cas général du début, il est assez plausible que le couple (X,Y) satisfait <u>toujours</u> au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, lorsqu'on se borne dans le cas $d = 1$ à l'énoncer pour les ℓ distincts des caractéristiques résiduelles de Y . On peut en tous cas dès à présent donner à cet égard les résultats suivants :

<u>Théorème (6.1)</u>. <u>Soient</u> X <u>un préschéma régulier</u>, Y <u>un sous-préschéma-</u>

ma fermé de codimension d *partout. Alors le couple* (X,Y) *satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, relativement au nombre premier* ℓ *, dans chacun des cas suivants :*

a) $\dim X = 1$ *, et pour tout* $y \in Y$, $k(y)$ *est parfait ou* $\ell \neq$ *car* $k(y)$.

b) $\dim X = 2$, $d = 2$.

c) X *est lisse sur un corps* k *, et* $\ell \neq$ *car* k .

d) X *est de caractéristique nulle et* excellent [EGA IV 7.8.2] .

Démonstration. Le cas a) est mis pour mémoire, il vient d'être rappelé. Pour le cas b), on peut supposer X strictement local, Y réduit à son point fermé, et on est ramené à prouver que sous ces conditions, on a $H^2(X-(y),\underline{G}_m) = 0$. Or le premier membre est identique à $Br(X-(y))$ en vertu de (BR II 2.2). On est donc ramené à prouver que toute Algèbre d'Azumaya $\underline{A}$ sur $X-(y)$ est triviale. Or comme on a vu dans la démonstration de (BR II 2.2), si $i : X-(y) \to X$ est l'injection, alors $i_*(\underline{A})$ est encore une Algèbre d'Azumaya, grâce au fait que $\dim X = 2$. Comme cette dernière est triviale en vertu du théorème d'AZUMAYA [BR I 6.1] , il en est de même de $\underline{A}$. Pour les autres cas, notons que si X est strictement local, alors la relation $H^2(X-Y,\underline{G}_m)(\ell) = 0$ que nous désirons établir équivaut, en vertu de la suite exacte de Kummer (BR II 3.1) et de la relation $Pic(X-Y) = 0$, à la relation

$$H^2(X-Y, \mu_{\ell^\infty}) = 0 \quad , \tag{6.8}$$

qui est une relation du type "pureté topologique" habituel. Ainsi, revenant au cas général, le couple (X,Y) satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, relativement à 1, si et seulement si on a

$$(6.8\text{ bis})\qquad \underline{H}^3_Y(\mu_{\ell^\infty}) = \lim \underline{H}^3_Y(\mu_{\ell^n}) = 0 \quad ,$$

et il suffit pour ceci (et il faut également, comme on constate sans peine) qu'on ait pour tout n la relation

$$(6.8\text{ ter})\qquad \underline{H}^3_Y(\mu_{\ell^n}) = 0 \quad .$$

Or on a, plus généralement,

$$(6.9)\qquad \underline{H}^i_Y(\mu_{\ell^n}) = 0 \quad \text{si} \quad i < 2d \quad ,$$

dans les cas c) et d), comme il est prouvé dans [SGA 4 XVI 3.9, XX] . Ceci prouve d'ailleurs plus généralement, sous les conditions c) ou d) :

$$(6.10)\qquad \underline{H}^i_Y(\underline{G}_m)(\ell) = 0 \quad \text{si} \quad (i \neq 1 \text{ ou } d \neq 1) \quad \text{et} \quad i < 2d \quad .$$

__Corollaire (6.2)__. __Sous l'une des conditions de__ (6.1), __lorsque__ $d \geq 2$, __l'homomorphisme de restriction__

$$H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) \xrightarrow{\sim} H^2(X-Y,\underline{G}_m)(\ell)$$

__est bijectif__, __et__

$$H^3(X,\underline{G}_m)(\ell) \longrightarrow H^3(X-Y,\underline{G}_m)(\ell)$$

__est injectif__ ; __lorsque__ $d = 1$, __i.e.__ Y __est un diviseur__, __alors on a la suite exacte__ (__contenant essentiellement celle de prop__. (2.1)) :

$$0 \to H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) \to H^2(X-Y,\underline{G}_m)(\ell) \to H^1(Y_i,\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell) \to H^3(X,\underline{G}_m)(\ell) \to$$
$$\to H^3(X-Y,\underline{G}_m)(\ell) \quad .$$

En effet, dans le cas $d \geqslant 2$ on aura $\underline{H}^i_Y(\underline{G}_m)(\ell) = 0$ pour $i \leqslant 3$ d'où $H^i_Y(X,\underline{G}_m)(\ell) = 0$ pour $i \leqslant 3$; dans le cas $d = 1$ la suite spectrale (6.2) donne aisément

(6.11) $\quad H^3_Y(X,\underline{G}_m)(\ell) \xrightarrow{\sim} H^2(Y,\underline{Z}_Y)(\ell) \xleftarrow{\sim} H^1(Y,\underline{Q}/\underline{Z})(\ell) = H^1(Y,\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell) \quad ,$

compte tenu de $H^1(Y,\underline{Z}) = 0$, d'où aussitôt (6.2).

7. Invariance birationnelle du groupe de Brauer.

Théorème (7.1). Soient X un préschéma régulier, Y un sous-préschéma fermé régulier, X' le préschéma déduit de X en faisant éclater Y [EGA II 8.1.3] , ℓ un nombre premier. On suppose qu'on est sous l'une des conditions suivantes :

a) ℓ est distinct des caractéristiques résiduelles de Y .

b) Le couple (X,Y) satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, relativement à ℓ (cf n° 6).

Sous ces conditions, l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Br}'(X)(\ell) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X')(\ell)$$

est un isomorphisme (où $\mathrm{Br}'(\ )$ désigne $H^2(\ ,\underline{G}_m)$, le groupe de Brauer cohomologique).

Signalons tout de suite les corollaires suivants :

Corollaire (7.2). *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme propre birationnel de préschémas réguliers noethériens de dimension* $\leqslant 2$. *Alors l'application induite* $Br(Y) \longrightarrow Br(X)$ *est bijective*.

On peut en effet supposer X et Y intègres et de dimension 2. On sait alors [2] que f se factorise en un composé fini de morphismes $X_i \longrightarrow X_{i-1}$, tel que X_i se déduise de X_{i-1} en faisant éclater un point fermé y_{i-1} . Comme le couple (X_{i-1}, y_{i-1}) satisfait au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, en vertu de (6.1 b), il s'ensuit par (7.1 b) que $Br(X_{i-1}) \longrightarrow Br'(X_i)$ est bijectif pour tout i , donc le composé $Br'(Y) \longrightarrow Br'(X)$ l'est également. On conclut grâce à (BR II 2.2) qui permet d'identifier les Br' aux Br .

Corollaire (7.3). *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme birationnel de préschémas réguliers* excellents [EGA IV 7.8.2] *de caractéristique nulle. Alors l'homomorphisme induit* $Br'(Y) \longrightarrow Br'(X, \underline{G}_m)$ *sur les groupes de Brauer cohomologiques est un isomorphisme*.

En effet, en vertu de la théorie de HIRONAKA [21] , on sait (*) qu'il existe un morphisme propre birationnel $X' \longrightarrow X$, tel que X' puisse se déduire de X *et* de Y par deux suites d'éclatements du type envisagé dans (7.1). Ceci nous ramène au cas où $f : X \longrightarrow Y$ est défini par un tel éclatement, cas qui est justiciable de (7.1 a).

Démonstration de (7.1). Nous prouverons dans l'un et l'autre cas en-

(*) C'est apparemment un malentendu de la part de l'auteur; néanmoins, on signale plus bas qu'une autre démonstration de 7.3 peut être donnée, cf. (7.4).

visagé la relation

$$R^2 f_*(\underline{G}_m)(\not{X}) = 0 \quad . \tag{7.1}$$

On a d'autre part aussitôt les relations

$$f_*(\underline{G}_{m\,X'}) = \underline{G}_{m\,X} \quad , \tag{7.2}$$

$$R^1 f_*(\underline{G}_{m\,X'}) = \coprod_{i \in I} \underline{Z}_{Y_i, X} \quad , \tag{7.3}$$

où Y_i parcourt les composantes irréductibles de codimension $\geqslant 2$ de Y. Les deux relations précédentes nous fournissent, via la suite spectrale de Leray, la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X') \to \underline{Z}^I \to H^2(X,\underline{G}_m) \to H^2(X',\underline{G}_m) \to H^o(X,R^2 f_*(\underline{G}_m)),$$

compte tenu que $H^1(Y_i,\underline{Z}) = 0$ pour tout i. Comme l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(X') \to \underline{Z}^I$ est surjectif comme on constate aussitôt, on conclut la suite exacte

$$0 \to H^2(X,\underline{G}_m) \to H^2(X',\underline{G}_m) \to H^o(X,R^2 f_*(\underline{G}_m)) \quad . \tag{7.4}$$

Ainsi le théorème (7.1) résulte aussitôt de cette suite exacte, et de la formule (7.1), que nous allons maintenant prouver.

Nous pouvons supposer X strictement local, et nous sommes alors ramenés à prouver que l'on a

$$H^2(X',\underline{G}_m)(\not{X}) = 0 \quad .$$

Or soit Y' l'image inverse de Y dans X', alors f induit un isomorphisme $X'-Y' \xrightarrow{\sim} X-Y$, donc sous la condition b) on conclut que $H^2(X'-Y',\underline{G}_m)(\not{X}) = 0$, et comme d'autre part $H^2(X',\underline{G}_m) \to$

$\longrightarrow H^2(X'-Y',\underline{G}_m)$ est injectif (BR II 1.8) on en conclut bien $H^2(X',\underline{G}_m) = 0$. Supposons maintenant satisfaite la condition a), i.e. ℓ distinct de la caractéristique résiduelle de X . Alors en vertu de la suite exacte de Kummer (BR II 3.1) on est réduit à prouver que l'application "classe de cohomologie associée"

$$(*) \qquad \mathrm{Pic}(X') \longrightarrow H^2(X', \mu_{\ell^n})$$

est surjective. Or on sait par le "théorème de changement de base pour un morphisme propre" (SGAA XII 5.5) que l'on a un isomorphisme

$$H^2(X', \mu_{\ell^n}) \longrightarrow H^2(X'_o, \mu_{\ell^n})$$

par l'homomorphisme de restriction, où $X'_o \simeq P^r_{k(y)}$ est la fibre de X' en le point fermé y de X , qui est ici un espace projectif sur $k(y)$. On sait alors que $H^2(X'_o, \mu_{\ell^n}) \simeq \underline{Z}/\ell^n\underline{Z}$, l'isomorphisme étant donné à l'aide de la classe de 2 -cohomologie associé au générateur canonique de $\mathrm{Pic}(X'_o)$. Comme ce générateur est dans $\mathrm{Im}(\mathrm{Pic}(X') \to \mathrm{Pic}(X'_o))$, de façon précise est induit par le faisceau inversible sur X' associé au diviseur $-Y'$ (comme il est bien connu), il s'ensuit bien que $(*)$ est surjective, ce qui achève la démonstration de (7.1).

La démonstration donnée plus haut pour (7.3) n'utilise pas le théorème de pureté cohomologique, assez délicat dans le cas invoqué dans (6.1 d) et dû alors à M. ARTIN (SGA4 XX), mais "seulement" la résolution des singularités de HIRONAKA (*). **Une démonstration différente** via la pureté cohomologique, analogue à celle de (7.1 a), permet d'obtenir d'autre part un résultat plus général, sans utiliser nécessairement la résolution des singularités :

(*) sous une forme erronée de plus, comme on l'a signalé plus haut!

Théorème (7.4). *Soient* X , Y *deux préschémas sur un préschéma localement noethérien* S , $f : X \dashrightarrow Y$ *une* S *-application rationnelle,* ℓ *un nombre premier. Supposons* Y *propre sur* S , X *régulier, et que pour tout sous-préschéma fermé* Z *de codimension* $\geqslant 2$ *dans* X , *le couple* (X,Z) *satisfasse au théorème de pureté pour le groupe de Brauer, relativement à* ℓ (cf. (6.1)). *Alors il existe un unique morphisme* $\mathrm{Br}'(Y)(\ell) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X)(\ell)$ *rendant commutatifs les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}'(Y)(\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(X)(\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Br}'(f(x))(\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(x)(\ell) \end{array} ,$$

où x *est un point maximal de* X . *Lorsque* Y *est également régulier et satisfait la même hypothèse de pureté que* X , *que* X *est également propre sur* S , *et si on suppose de plus que* f *est birationnel, alors* $\mathrm{Br}'(Y)(\ell) \longrightarrow \mathrm{Br}'(X)(\ell)$ *est un isomorphisme.*

L'unicité provient du fait que en vertu de (BR II 1.8), l'application naturelle de $\mathrm{Br}'(X)$ dans le produit des $\mathrm{Br}(x)$ (x parcourant les maximaux de X) est injectif, X étant régulier. Pour l'existence, utilisant la propreté de Y sur S , on voit qu'il existe un ouvert U de X , dont le complémentaire est de codimension $\geqslant 2$, tel que f soit définie sur U , d'où un morphisme $\mathrm{Br}'(Y) \longrightarrow \mathrm{Br}'(U)$ donc $\mathrm{Br}'(Y)(\ell) \longrightarrow \mathrm{Br}'(U)(\ell)$. Comme d'après l'hypothèse de pureté, l'application $\mathrm{Br}'(X)(\ell) \longrightarrow \mathrm{Br}'(U)(\ell)$ est bijective, on gagne. La dernière assertion de (7.4) résulte immédiatement de la première, appliquée à f et à f^{-1} .

<u>Corollaire (7.5)</u>. <u>Soit</u> k <u>un corps</u>, <u>et</u> X <u>un schéma régulier variable, propre sur</u> k . <u>Si</u> $\dim X \leqslant 2$, <u>alors</u> $Br'(X) = Br(X)$ <u>est un invariant birationnel en</u> X , <u>et il en est de même de</u> $Br'(X)(\ell)$ <u>pour tout</u> $\ell \neq$ <u>car</u> k , <u>sans hypothèse sur la dimension de</u> X .

Résulte aussitôt de (7.4) et de (6.1 b) c)).

<u>Remarques (7.6)</u>.

a) Compte tenu des observations faites au n° 6, il est possible que les hypothèses de pureté faites dans (7.4) soient conséquence des autres, de sorte que $Br'(X)$ soit toujours un invariant birationnel pour les schémas réguliers et propres sur une base S donnée. Le premier cas douteux se présente pour un schéma projectif et lisse de dimension 3 , sur un corps algébriquement clos de car. $p > 0$, pour la composante p -primaire du groupe $Br'(X)$. - Bien entendu, la démonstration de (7.4) via le théorème de pureté est exactement la même que la démonstration classique établisssant l'invariance birationnelle du groupe fondamental ou des espaces de différentielles $H^0(X,\underline{\Omega}^i_{X/k})$ pour des schémas propres et lisses sur un corps k , via les théorèmes de pureté correspondants.

b) L'argument de (7.3), utilisant le théorème de structure de HIRONAKA pour les morphismes birationnels propres de schémas réguliers, s'il n'est pas indispensable dans le contexte présent, s'insère cependant parmi d'autres résultats de nature cohomologique utilisant le même principe, et dont le premier est dû à HIRONAKA lui-même : si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre birationnel de préschémas réguliers, alors $R^i f_*(\underline{O}_X) = 0$ pour tout $i > 0$. Signalons également que pour tout $y \in Y$, la fibre géométrique $X_{\bar{y}}$ a tous ses groupes de cohomologie de dimension impaire nuls (coefficients finis constants)(*). Dans le cas du H^1 , ce résultat peut se préciser en la relation $\pi_1(X_{\bar{y}}) = 0$, dont une démonstration directe, via le théorème de pureté de Zariski-Nagata et le "théorème de spécialisation pour le π_1" (SGA4 XII), indépendante de la résolution, est immédiate. Notons en passant que le résultat sur le H^1 qu'on vient de signaler équivaut au fait que $\underline{\mathrm{Pic}}^{\mathrm{o}}_{X_y/k(y)}$ (voir [16 V] pour la définition) est un groupe algébrique unipotent (au sens général de (SGA 3 XVII)), et on peut se demander si ce groupe est même nécessairement nul ; c'est vrai en tous cas si $\dim X_y = 1$.

8. Groupe de Brauer et dualité.

Je renvoie à l'exposé de TATE [32] pour les relations de dualité dans le groupe de Brauer d'une surface projective lisse sur un corps fini, liées à la dualité de CASSELS dans le groupe de Tate-Chafarévitch. Nous nous bornons ici à quelques remarques sur des relations de dualité dans le groupe de Brauer dans des cas proprement "géométriques" (corps de base ou corps résiduel algébriquement clos).

8.1. Précisons d'abord les relations entre le groupe de Brauer cohomologique $\mathrm{Br}'(X)$ et la cohomologie ℓ-adique. De façon générale, si M est un groupe, et ℓ un nombre premier, posons avec TATE

$$T_\ell(M) = \varprojlim_{\nu} {}_{\ell^\nu}M \ , \tag{8.1}$$

(*) **Précisons que ces résultats se démontrent en utilisant la résolution sous la forme effectivement établie par Hironaka!**

où pour tout entier n , ${}_nM$ désigne le noyau de la multiplication par n . Lorsque le sous-groupe de ℓ -torsion $M(\ell)$ de M est de cotype fini, i.e. isomorphe à un sous-groupe d'un $(\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell)^n$, ce qui équivaut aussi à ${}_\ell M$ fini, alors $T_\ell(M)$ (qui de toute façon ne dépend que de $M(\ell)$) est un module <u>libre de type fini</u> sur $\underline{Z}_\ell$. Sa connaissance équivaut alors à la connaissance du plus grand sous-groupe divisible $M(\ell)^\circ$ de $M(\ell)$, qui est aussi le plus petit sous-groupe d'indice fini de $M(\ell)$. En effet, d'une part $T_\ell(M)$ est aussi isomorphe à $T_\ell(M(\ell)^\circ)$, par l'inclusion canonique $M(\ell)^\circ \longrightarrow M$, et d'autre part $M(\ell)^\circ$ est canoniquement isomorphe à $T_\ell(M) \otimes_{\underline{Z}_\ell} \underline{Q}_\ell / T_\ell(M)$. Supposons par exemple que

(8.2) $$M = H^i(X, \mu_{\ell^\infty}) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \varinjlim_{\nu} H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) \quad ,$$

où X est un préschéma tel que

$$H^{i-1}(X, \mu_\ell) \text{ et } H^i(X, \mu_\ell) \text{ sont finis,}$$

alors par passage à la limite projective dans les suites exactes

$$0 \to H^{i-1}(X, \mu_{\ell^\infty})_\ell \to H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) \to {}_{\ell^\nu} H^i(X, \mu_{\ell^\infty}) \to 0$$

on trouve une suite exacte canonique (où $\underline{Z}_\ell[1] = \varprojlim_\nu \mu_{\ell^\nu}$ est le faisceau ℓ -adique de TATE) :

(8.3) $$0 \to t^{i-1}(X,\ell) \to H^i(X,\underline{Z}_\ell[1]) \to T_\ell(H^i(X, \mu_{\ell^\infty})) \to 0 \quad ,$$

où on a posé

(8.4) $$t^{i-1}(X,\ell) = H^{i-1}(X, \mu_{\ell^\infty})/H^{i-1}(X, \mu_{\ell^\infty})^\circ$$

qui est donc un groupe fini de ℓ -torsion, et s'identifie donc, par

(8.3), au sous-module de torsion du $\underline{Z}_\ell$ -module de type fini

(8.5) $$H^i(X,\underline{Z}_\ell[1]) = \lim H^i(X, \mu_{\ell^\nu}) \quad ,$$

dont la partie libre s'identifie, à son tour, à $T_\ell(H^i(X, \mu_{\ell^\infty}))$. On en déduit également un isomorphisme

(8.6) $$(H^i(X, \mu_{\ell^\infty}))^\circ \simeq H^i(X,\underline{Z}_\ell[1]) \otimes_{\underline{Z}_\ell} \underline{Q}_\ell \,/\, \mathrm{Im}\, H^i(X,\underline{Z}_\ell[1]) \quad ,$$

qui montre que $H^i(X, \mu_{\ell^\infty})$ et $H^i(X,\underline{Z}_\ell[1])$ se déterminent mutuellement mod groupes finis.

8.2. Un passage à la limite analogue dans la suite exacte de Kummer (BR II 3.1) nous donne de même une suite exacte

(8.7) $$0 \to NS(X) \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}_\ell \to H^2(X,\underline{Z}_\ell[1]) \to T_\ell(Br'(X)) \to 0 \quad ,$$

en supposant maintenant que $Pic(X)$ est extension d'un groupe de type fini $NS(X)$ (le <u>groupe de Néron-Sévéri</u>) par un groupe divisible, et que $H^2(X,\underline{Z}/\ell\underline{Z})$ est fini. On trouve en passant le fait, classique dans la théorie transcendante, que la composante ℓ -primaire du sous-groupe de torsion de $NS(X)$ est isomorphe au sous-groupe de torsion de $H^2(X,\underline{Z}_\ell[1])$, en même temps qu'on précise du point de vue de la cohomologie ℓ -adique la relation entre le groupe de Brauer (ou plus précisément, $T_\ell(Br'(X))$) et la "partie transcendante" du H^2 , comparer (BR II 3 passim).

Lorsque X est une surface propre, lisse et connexe sur un corps k algébriquement clos, il y a lieu de considérer sur le terme médian de (8.7) la forme bilinéaire symétrique canonique, fournie par le cup-produit, qui est à valeurs dans

$$H^4(X,\underline{Z}_\ell\,[2]\,) \simeq \underline{Z}_\ell \quad .$$

Cette forme (en négligeant la torsion du H^2) est non dégénérée, et induit sur $NS(X)\otimes_{\underline{Z}}\underline{Z}_\ell$ la forme bilinéaire déduite de la <u>forme intersection</u> sur $NS(X)$, provenant de la multiplicité globale d'intersections de diviseurs sur X [15] . D'après MATSUSAKA [27] , cette dernière forme est non dégénérée. Tensorisant alors la suite exacte (8.7) par $\underline{Q}_\ell$, on trouve que $T_\ell(Br\,(X))\otimes_{\underline{Z}_\ell}\underline{Q}_\ell$ <u>s'identifie canoniquement à l'orthogonal de</u> $NS(X)\otimes_{\underline{Z}_\ell}\underline{Q}_\ell$ <u>dans</u> $H^2(X,\underline{Q}_\ell\,[1]\,)$, <u>et que le cup-produit définit sur cet espace une forme quadratique non dégénérée</u>. L'interprétant comme une forme quadratique sur $T_\ell(Br(X))$ à valeurs dans $\underline{Q}_\ell$, (et tenant compte que le cup-produit induit même une autodualité de H^2/torsion) on trouve aisément que cette forme est à valeurs dans $\underline{Z}_\ell$ si et seulement si le discriminant de la forme intersection sur $NS(X)$/torsion est une unité ℓ-adique - condition qui est vérifiée donc pour presque tous les nombres premiers ℓ -, et que dans ce cas on trouve une autodualité de $T_\ell(Br(X))$.

8.3. Ce résultat ne concerne essentiellement que la partie divisible $Br'(X)^o$ du groupe de Brauer cohomologique. On peut également donner une relation de dualité concernant le groupe fini $Br'(X)/Br'(X)^o$, qui grâce à la suite exacte de Kummer (BR II 3.1) s'explicite comme

$$Br'(X)/Br'(X)^o \simeq H^2(X,\,\mathbb{\mu}_{\ell^\infty}\,)/H^2(X,\,\mathbb{\mu}_{\ell^\infty}\,)^o \quad , \tag{8.8}$$

(compte tenu que $Pic(X)\otimes\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell = NS(X)\otimes\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell$ est divisible). Utilisant (8.3) pour $i = 3$, on trouve donc

$$Br'(X)/Br'(X)^o \simeq \mathrm{Tors}\; H^3(X,\underline{Z}_\ell\,[1]\,) \quad , \tag{8.9}$$

valable indépendamment des hypothèses particulières posées au début de l'alinéa précédent pour X . Lorsque celles-ci sont vérifiées, alors les relations de dualité, bien connues dans le cas classique, et qui résultent aisément par passage à la limite des résultats de dualité [SGA 4 XIX] pour des coefficients de torsion, donnent des accouplements de dualité

(8.10) $$\mathrm{Tors}\, H^i(X,\underline{Z}_\ell) \times H^{2n+1-i}(X,\underline{Z}_\ell[n]) \longrightarrow \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell \quad ,$$

(où $n = \dim X$), qui nous donne en particulier, faisant $n = 2$ et $i = 3$, et tenant compte de l'isomorphisme déjà signalé

$$NS(X)(\ell) \simeq \mathrm{Tors}\, H^2(X,\underline{Z}_\ell(1))$$

ainsi que de (8.9), l'accouplement de dualité

(8.11) $$Br(X)/Br(X)^{\circ} \times NS(X)(\ell) \longrightarrow \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell \quad ,$$

qui fournit donc un isomorphisme

(8.12) $$Br(X)/Br(X)^{\circ} \simeq \mathrm{Hom}(NS(X)(\ell),\underline{Q}/\underline{Z}) \quad ,$$

(où, rappelons-le, $NS(X)(\ell)$ est le sous-groupe de ℓ -torsion de $NS(X)$) .

On a des résultats analogues pour $\dim X \geqslant 3$, mais pour définir alors une forme quadratique remarquable sur $T_\ell(Br'(X))$, à valeurs dans $\underline{Q}_\ell$, il faut utiliser une polarisation de X , dont la classe de cohomologie ℓ -adique $\xi \in H^2(X,\underline{Z}_\ell[1])$ permet alors de définir une forme bilinéaire symétrique $(x,y) \longmapsto xy\,\xi^{n-2}$ sur $H^2(X,\underline{Z}_\ell[1])$, à valeurs dans $\underline{Z}_\ell$.

8.4. Supposons maintenant que X soit le spectre d'un <u>anneau local normal complet</u> A, de dimension 2, à corps résiduel k algébriquement clos, et supposons que l'on peut "résoudre" X, i.e. qu'il existe un morphisme propre et birationnel

$$f : X' \longrightarrow X \quad ,$$

avec X' <u>régulier</u>, induisant un isomorphisme $X' \mid U = U' \xrightarrow{\sim} U$, où

$$U = X - (x) \quad ,$$

x étant le point fermé de X. Supposons de plus que k ait été relevé en un sous-corps de A, de sorte que A est une k-algèbre (cette hypothèse n'étant sans doute pas essentielle). Comme il a été signalé dans [SGA 2, XIII 5] on peut sous ces conditions construire canoniquement un schéma en groupes lisse et de type fini sur k, soit $\underline{\mathrm{Pic}}_U$, et un isomorphisme

(8.13) $$\mathrm{Pic}(U) = \underline{\mathrm{Pic}}_U(k)$$

de $\mathrm{Pic}(U)$ avec le groupe des points à valeurs dans k de $\underline{\mathrm{Pic}}_U$. Cela nous fournit donc pour $\mathrm{Pic}(U)$ une structure d'extension

(8.14) $$0 \to \mathrm{Pic}(U)^{\circ} \to \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{NS}(U) \to 0 \quad ,$$

où on a posé

(8.15) $$\mathrm{Pic}(U)^{\circ} = \underline{\mathrm{Pic}}_U{}^{\circ}(k) \quad , \quad \mathrm{NS}(U) = \underline{\mathrm{NS}}_U(k) \quad ,$$

$\underline{\mathrm{Pic}}_U{}^{\circ}$ désignant la composante neutre de $\underline{\mathrm{Pic}}_U$, et $\underline{\mathrm{NS}}_U$ le quotient de $\underline{\mathrm{Pic}}_U$ par cette composante. La construction indiquée dans loc. cit. permet d'ailleurs de préciser la structure de $\mathrm{NS}(U)$, en introduisant la matrice d'intersection

$$(C_i . C_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$$

définie par les r composantes irréductibles C_i de $f^{-1}(x)_{\text{réd}}$ sur le schéma régulier X' : en vertu de MUMFORD [28] , cette matrice est définie négative, donc le conoyau de l'homomorphisme

$$\underline{Z}^r \longrightarrow \underline{Z}^r$$

qu'elle définit est un groupe fini, dont l'ordre n'est autre que la valeur absolue du déterminant de cette matrice. Ceci posé, on trouve que $NS(U)$ est canoniquement isomorphe à ce groupe fini. La matrice envisagée étant symétrique, on voit aussitôt que ce groupe est canoniquement autodual (par un accouplement symétrique à valeurs dans $\underline{Q}/\underline{Z}$), d'où une autodualité symétrique

(8.16) $$NS(U) \times NS(U) \longrightarrow \underline{Q}/\underline{Z} \quad ,$$

dont on constate aisément qu'elle est indépendante de la résolution X' choisie.

Si maintenant ℓ est un nombre premier distinct de car k , alors la structure connue des groupes algébriques commutatifs connexes sur k [9, exp. 4] montre que $\mathrm{Pic}(U)^o$ est un groupe ℓ-divisible, donc la suite exacte (8.14) nous donne, pour toute puissance $n = \ell^{\nu}$ de ℓ , une suite exacte

(8.17) $$0 \to {}_n\mathrm{Pic}(U)^o \to {}_n\mathrm{Pic}(U) \to {}_n NS(U) \to 0 \quad .$$

Comparons cette suite exacte avec la suite exacte de Kummer

$$0 \to \mathrm{Pic}(U)_n \to H^2(U, \mu_n) \to {}_n\mathrm{Br}(U) \to 0 \quad ,$$

où pour tout groupe M , on pose $M_n = M/nM$. Utilisant (8.14) et le fait que $\mathrm{Pic}(U)^\circ$ est ℓ-divisible, on trouve $\mathrm{Pic}(U)_n \simeq \mathrm{NS}(U)_n$, de sorte que la suite s'écrit aussi

$$(8.18) \qquad 0 \to \mathrm{NS}(U)_n \to H^2(U, \mu_n) \to {}_n\mathrm{Br}(U) \to 0 \quad .$$

Je dis que <u>les suites exactes</u> (8.17) <u>et</u> (8.18) <u>sont duales l'une de l'autre</u>, du moins si car $k = 0$. Pour s'en convaincre, notons qu'on a aussi, grâce à la suite exacte de Kummer, un isomorphisme

$$(8.19) \qquad {}_n\mathrm{Pic}(U) = H^1(U, \mu_n) \quad ,$$

donnant une interprétation cohomologique du terme médian de (8.17). D'autre part, on a un accouplement par cup-produit

$$(8.20) \qquad H^1(U, \mu_n) \times H^2(U, \mu_n) \longrightarrow H^3(U, \mu_n) \quad ,$$

et un isomorphisme canonique :

$$H^3(U, \mu_n) \simeq \underline{Z}/n\underline{Z} \quad ,$$

moyennant lequel (8.20) devient une dualité (Théorème de dualité locale [SGA 5 I]). Ainsi les termes médians de (8.17) et (8.18) sont duals l'un de l'autre. Il resterait à vérifier que dans cet accouplement, $\mathrm{NS}(U)_n$ et ${}_n\mathrm{Pic}(U)^\circ$ s'annulent mutuellement, et que l'accouplement

$$\mathrm{NS}(U)_n \times {}_n\mathrm{NS}(U) \longrightarrow \underline{Z}/n\underline{Z}$$

qui s'en déduit par passage au quotient est aussi celui qui est déduit de l'autodualité canonique (8.16). Il en résultera que cet accouplement est non dégénéré, donc une dualité, et que $NS(U)_n$ et ${}_nPic(U)^o$ sont exactement annulateurs l'un de l'autre, ce qui prouve notre assertion. On trouve alors un accouplement

$$(8.21) \qquad {}_nBr(U) \times {}_nPic(U)^o \longrightarrow \underline{Q}/\underline{Z}$$

qui est une dualité parfaite. Passant à la limite sur n , on peut écrire ceci comme un isomorphisme canonique

$$(8.22) \qquad Br(U)(\ell) \xrightarrow{\sim} Hom(T_\ell(\underline{Pic}_U{}^o(k)), \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell) \quad .$$

On en conclut en particulier que $Br(U)(\ell)$ est un groupe <u>divisible</u>, (compte tenu de la structure des groupes algébriques commutatifs sur k).

<u>Remarques (8.5)</u>. Pour que la démonstration qui précède soit complète, il faudrait faire la vérification signalée plus haut. Le rédacteur avoue qu'il ne l'a pas faite, mais pense qu'elle ne doit pas offrir de difficulté. Bien entendu, la restriction car $k = 0$ ne nous a servi que via l'utilisation du théorème de dualité locale, qui reste sans doute valable sans cette hypothèse. (La difficulté technique, non surmontée à l'heure actuelle, est dans la démonstration du théorème de pureté cohomologique sur un schéma régulier de dimension 2 ...) Enfin, il y aurait lieu d'analyser ce qu'on peut dire lorsqu'on ne suppose plus k algébriquement clos, par exemple lorsque k est fini.

9. Généralisation du groupe de Brauer : invariants birationnels cohomologiques supérieurs.

9.1. Le groupe de Brauer cohomologique $Br'(X)$ d'un préschéma X s'insère dans la suite infinie d'invariants cohomologiques $H^i(X,\underline{G}_m)$, $i \geqslant 0$. Cependant parmi ceux-ci seul le $H^2 = Br'$ possède une propriété d'invariance birationnelle (n° 7), et d'ailleurs pour $i \geqslant 3$, ils coïncident pour l'essentiel avec les invariants $H^i(X, \mu_{\ell^\infty})$ (GB II 3.2) et ne peuvent donc être considérés comme des invariants originaux. C'est donc dans une autre direction qu'il convient de chercher une généralisation adéquate, de nature cohomologique également, du groupe de Brauer. Les invariants que nous allons définir constituent en un sens l'équivalent, dans le contexte de la cohomologie ℓ-adique, des invariants que fournit la considération des classiques "différentielles de deuxième espèce" dans le contexte de la cohomologie de Hodge - De Rham [6] [19] . Le lien explicite entre les deux types d'invariants (qui fournissent des vectoriels de même rang, sur le corps $\underline{Q}_\ell$ d'une part, sur le corps de base de la variété envisagée X d'autre part) est donnée, lorsque le corps de base est le corps des complexes, par la considération de la cohomologie transcendante à coefficients entiers, qui permet (en calquant dans ce contexte les définitions qui vont suivre) de définir des invariants birationnels cohomologiques analogues "à coefficients entiers", qui fourniront alors les deux types d'invariants précédents par simple extension des scalaires $\underline{Z} \dashrightarrow \underline{Z}_\ell$ et $\underline{Z} \dashrightarrow \underline{C}$. Lorsque le corps de base n'est plus le corps des complexes, et qu'on ne dispose pas de constructions transcendantes liées à la topologie de $\underline{C}$, il y aurait lieu, pour exprimer encore les liens entre ces deux types d'invariants, de faire appel à la "<u>théorie des motifs</u>", en définissant l'un et l'autre comme étant respectivement la "réalisation ℓ-adique" et la "réalisation de De-Rham" d'un même <u>motif</u>, dont la connaissance est considérablement plus riche que celle des deux invariants précédents auxquels il donne naissance. Ainsi, pour la dimension 1, elle équivaut à la connaissance de la variété d'Albanese A de X, qui donne naissance d'une part au module de Tate $T_\ell(A') \simeq H^1(X,\underline{Z}_\ell[1])$, d'autre part à la cohomologie de De Rham de A, isomorphe (si le corps de base est de caractéristique nulle) à celle de X. Comme la théorie des motifs est à l'heure actuelle purement conjecturale, et qu'elle n'a encore fait l'objet d'aucun exposé publié, nous nous bornons à ces allusions concernant la nature plus profonde des invariants qui nous intéressent.

9.2. Dans la suite, nous supposons fixé un corps de base k. Soient $f : X' \to X$ un morphisme birationnel, avec X <u>lisse</u> sur k, U un ouvert de X tel que le morphisme induit $f^{-1}(U) = U' \to U$ soit un isomorphisme. Soit d'autre part F un faisceau de torsion <u>localement constant</u> (pour la topologie étale) sur X, premier à la caractéristique, et désignons par F' son image inverse sur X. On a alors le diagramme commutatif d'applications canoniques

$$(9.1)\qquad \begin{array}{ccc} H^i(X,F) & \xrightarrow{g^i} & H^i(U,F|U) \\ \downarrow & & \downarrow\wr \\ H^i(X',F') & \xrightarrow{g'^i} & H^i(U',F'|U') \end{array},$$

où la deuxième flèche verticale est un isomorphisme, et nous servira à identifier les deux termes correspondants. Ceci posé, on a la relation

$$\mathrm{Im}\, g^i = \mathrm{Im}\, g'^i \quad . \tag{9.2}$$

Pour le voir, on insère (9.1) dans un homomorphisme de suites exactes de cohomologie relative (où $Y = X-U$, $Y' = X'-U' = f^{-1}(Y')$) :

$$\begin{array}{ccccc}
H^i(X,F) & \longrightarrow & H^i(U,F\mid U) & \longrightarrow & H^{i+1}_Y(X,F) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^i(X',F') & \longrightarrow & H^i(U',F'\mid U') & \longrightarrow & H^{i+1}_{Y'}(X',F')
\end{array} \quad ,$$

et tout revient à prouver que l'homomorphisme $H^{i+1}_Y(X,F) \to H^{i+1}_{Y'}(X',F')$ est injectif. Ceci est vrai en fait pour toute partie fermée Y de X (indépendamment de l'hypothèse particulière faite sur U), en fait on va définir un homomorphisme canonique

$$H^j_{Y'}(X',F') \to H^j_Y(X,F) \quad , \tag{9.3}$$

inverse à gauche de l'homomorphisme $H^j_Y(X,F) \longrightarrow H^j_{Y'}(X',F')$. Nous utilisons la théorie de dualité sous la forme donnée dans [SGA 4 XIX] , [SGA 5 I] . Utilisant l'hypothèse de lissité sur X et la nature de F , on constate que $R^!f(F)$ est un complexe sur X' dont les faisceaux de cohomologie sont nuls en dimension <0 , et dont le faisceau de cohomologie en dimension 0 s'identifie à $h_*(F'\mid V')$, où V' est l'ouvert des points lisses de X' et $h : V' \longrightarrow X'$ l'inclusion. On trouve donc un homomorphisme canonique $F' \to \underline{H}^0(R^!f(F))$, qui grâce à ce qui précède s'interprète comme un homomorphisme

$$F' \longrightarrow R^!f(F) \quad ,$$

dont la donnée équivaut, grâce au théorème de dualité globale pour le morphisme f , à la donnée d'un homomorphisme

(9.4) $$Rf_{*}(F') \longrightarrow F \quad .$$

On a d'autre part l'homomorphisme canonique évident

(9.5) $$F \longrightarrow Rf_{*}(F') \quad ,$$

puisque $F' = f^{*}(F)$, et on constate aussitôt que le composé

$$F \longrightarrow Rf_{*}(F') \longrightarrow F$$

est l'identité (en regardant ce qui se passe sur le plus grand ouvert W de X au-dessus duquel f est un isomorphisme, ouvert dense puisque f est birationnel). Transformant (9.4) et (9.5) par le foncteur $R\Gamma_Y$, dérivé du foncteur Γ_Y "sections à support dans Y" , on trouve des homomorphismes de complexes de groupes abéliens

$$R\Gamma_Y(F) \longrightarrow R\Gamma_Y(Rf_{*}(F')) \simeq R\Gamma_{Y'}(F') \longrightarrow R\Gamma_Y(F)$$

dont le composé est égal à l'identité dans la catégorie dérivée. Passant aux groupes de cohomologie, on trouve (9.3) avec la propriété demandée.

9.3. Partons maintenant avec un schéma lisse de type fini U sur k , muni d'un faisceau de torsion G localement constant, premier à la caractéristique. Supposons de plus que U puisse être inclus comme ouvert dense d'un schéma propre et lisse X sur k . (C'est certainement le cas si k est de caractéristique nulle, grâce à la résolution des singularités de HIRONAKA [21] , et également si k est parfait et $\dim X \leqslant 2$, grâce à ABHYANKAR [1]). Supposons de plus que G soit alors restriction d'un faisceau localement constant F sur X ; un argument bien connu, utilisant le théorème de pureté de ZARISKI-NAGATA [SGA 2, X 3.4] pour le groupe fondamental, montre que cette hypothèse ne dépend pas du choix particulier de X . Considérons alors l'image

$$H^i_{\wedge}(U,G) = \mathrm{Im}\ (H^i(X,F) \longrightarrow H^i(U,G)) \quad . \tag{9.6}$$

Je dis que <u>cette dernière ne dépend pas du choix de</u> X (ce qui justifie la notation qu'on vient d'introduire).

Soit en effet X' une autre compactification propre et lisse de U . Il existe alors une compactification normale X'' de X qui "coiffe" à la fois X et X' , i.e. munie de morphismes $X'' \longrightarrow X$ et $X'' \dashrightarrow X'$ qui induisent l'identité sur U . On est donc ramené à voir que $H^i(X,F)$ et $H^i(X'',F'')$ ont même image dans $H^i(U,G)$, ce qui a été vu en effet dans (9.2).

9.4. L'invariant $H^i_{\wedge}(U,G)$ qu'on vient de définir se comporte évidemment comme un foncteur contravariant en le couple (U,G) (au sens habituel en cohomologie des faisceaux), en particulier, si V est un ouvert de U , on trouve un homomorphisme de restriction (évidemment surjectif)

$$H^i_{\wedge}(U,G) \longrightarrow H^i_{\wedge}(V,G) \quad .$$

Supposons maintenant U irréductible, de corps de fractions K . Comme d'habitude, nous désignons par G_K la restriction de K au point générique $\mathrm{Spec}(K)$ de U . Ceci dit, nous poserons

$$(9.7) \qquad H^i_{\wedge}(K,G_K) = \varinjlim_{V} H^i_{\wedge}(V,G) \quad ,$$

la limite étant étendue à la famille filtrante décroissante des ouverts non vides V de U . Il est clair, d'après ce qui précède, que $H^i(K,G_K)$ est un invariant de l'extension de type fini K de k et du faisceau de torsion étale G_K sur $\mathrm{Spec}(K)$, soumis à la condition que G_K soit induit par un faisceau localement constant F sur un modèle propre et lisse convenable X de K (ou, comme on dit encore, que F est "non ramifié" sur un tel modèle) ; ou ce qui revient au même, une fois admis l'existence d'un modèle propre et lisse X de K , que F soit non ramifié sur les modèles propres normaux "suffisamment grands" (pour la relation de domination) de K . Il a les mêmes propriétés fonctorielles en (K,G_K) que $H^i_{\wedge}(U,G)$ en (U,G) (ce qui permetrrait d'ailleurs, si on le désirait, d'étendre la définition à des extensions K de k qui ne sont pas nécessairement de type fini). Il résulte du théorème de finitude (SGA 4 XIV) que si G_K est un groupe fini, il en est de même des $H^i_{\wedge}(K,G_K)$, puisque ce sont des quotients des groupes finis $H^i(X,F)$; ce résultat se généralise de façon évidente au cas où G_K est un faisceau de Λ-modules constructible, sur un anneau Λ donné. Signalons aussi que si U est un ouvert affine, alors sa dimension cohomologique satisfait

$$\mathrm{cd}(U) \leqslant \dim U$$

(SGA 4 XIV), d'où on conclut pour nos invariants birationnels

$$(9.8) \qquad H^i_{\wedge}(K,G_K) = 0 \quad \text{si} \quad i > \text{deg.tr. } K/k \quad .$$

Un cas particulier intéressant, en fait le plus important pour nous, est celui où G_K est constant, et défini par un groupe de torsion ordinaire G , auquel cas la condition de non ramification imposée à G_K est automatiquement satisfaite. On écrira simplement $H^i_\wedge(K,G)$ au lieu de $H^i_\wedge(K,G_K)$. Lorsque k est algébriquement clos, ce cas comprend les faisceaux de la forme μ_{ℓ^ν} , μ_{ℓ^∞} qui s'introduisent en relation avec le groupe de Brauer.

Lorsque X est un schéma propre et lisse sur k , muni d'un faisceau de torsion F premier à la caractéristique, alors (K désignant le corps des fractions de X , supposé connexe) $H^i_\wedge(K,F_K)$ apparaît comme un quotient de $H^i(X,F)$, qu'on peut considérer (comme nous verrons plus bas (10.1)) comme le premier terme du gradué associé à $H^i(X,F)$ pour une filtration remarquable. C'est pourquoi nous écrirons aussi

$$(9.9) \qquad \mathrm{Gr}^o H^i(X,F) = H^i_\wedge(X,F_K) \quad .$$

9.5. Les définitions et notations précédentes s'étendent de façon évidente lorsque on considère, soit des faisceaux qui sont limites inductives de faisceaux de torsion du type précédent, tels les faisceaux μ_{ℓ^∞} et plus généralement $\mu_{\ell^\infty}^{(n)} = \varinjlim_{\nu} \mu_{\ell^\nu}^{\otimes n}$, soit des "faisceaux ℓ-adiques constants tordus", définis par des systèmes projectifs "adiques" de faisceaux de $(\underline{Z}/\ell^{\nu+1}\underline{Z})$-modules localement constants F_ν , ou ce qui revient au même sur une base connexe X , par des représentations continues du groupe fondamental $\pi_1(X, \xi)$ de X (relativement à un point géométrique $\overline{\xi}$ donné) par des automorphismes de modules de type fini M sur $\underline{Z}_\ell$. Rappelons que dans ce deuxième cas, on pose par définition

$$H^i(X,F) = \varprojlim_{\nu} H^i(X,F_\nu) \quad ;$$

on définit alors les $H^i_\wedge(U,G)$ et $H^i_\wedge(K,G_K)$ par (9.6) et (9.7) respectivement. Parmi les faisceaux ℓ-adiques, un intérêt particulier s'attache évidemment aux faisceaux de TATE

$$\underline{Z}_\ell [n] = \varprojlim_\nu \mu_{\ell^\nu}^{\otimes n} ,$$

qui sont d'ailleurs, lorsque k contient un corps algébriquement clos, isomorphes (non canoniquement) au faisceau ℓ-adique constant $\underline{Z}_\ell$.

9.6. Exemples en basses dimensions. Soit X propre et lisse sur k , et connexe, F un faisceau sur X du type envisagé dans les numéros précédents. Pour tout ouvert non vide U de X , il est bien connu que l'homomorphisme

$$(*) \qquad H^1(X,F) \longrightarrow H^1(U,F)$$

est injectif, ce qui montre que l'on a

$$(9.10) \qquad \mathrm{Gr}^0\, H^1(X,F) \simeq H^1(X,F) \quad .$$

On trouve en particulier, par la théorie de Kummer, si k algébriquement clos :

$$(9.11) \qquad \mathrm{Gr}^0 H^1(X, \mu_{\ell^\infty}) = H^1(X, \mu_{\ell^\infty}) \simeq {}_{\ell^\infty}\mathrm{Pic}(X) \quad ,$$

$$(9.12) \qquad \mathrm{Gr}^0 H^1(X,\underline{Z}_\ell [1]) = H^1(X,\underline{Z}_\ell [1]) \simeq T_\ell(\mathrm{Pic}(X)) \quad ,$$

qui permet d'expliciter ces invariants, modulo groupe fini provenant de la torsion de NS(X) , en termes de la variété de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ (dont on peut d'ailleurs négliger les éléments nilpotents ...), où si on préfère, en termes de la variété d'Albanese Alb(X) (dont le caractère d'invariant birationnel est bien connu grâce à WEIL [25]).

Désignant par x_i les points maximaux de codimension 1 de X-U , la suite exacte de cohomologie relative pour X,U donne en basses dimensions :

(9.13) $0 \to H^1(X,F) \to H^1(U,F) \to \sum_i H^o(x_i, (F \otimes \underline{Z}_\ell[-1])_x) \to H^2(X,F) \to H^2(U,F)$,

en supposant pour simplifier que F est un faisceau de ℓ-torsion ou un faisceau ℓ-adique. Le terme médian doit s'interpréter comme le groupe des <u>diviseurs sur X</u> , <u>à coefficients tordus</u> $F \otimes \underline{Z}_\ell[-1]$, à support contenus dans X-U , et la flèche dans $H^2(X,U)$ n'est autre que l'homomorphisme habituel associant à tout diviseur la 2-classe de cohomologie bien connue. Passant à la limite sur U , on trouve donc

(9.14) $$Gr^o H^2(X,F) = H^2(X,F)/ \operatorname{Im} \operatorname{Div}(X,F \otimes \underline{Z}_\ell[-1]) ,$$

où $\operatorname{Div}(X,F \otimes \underline{Z}_\ell[-1])$ désigne le groupe de tous les diviseurs sur X à coefficients tordus par $F \otimes \underline{Z}_\ell[-1]$. En particulier, faisant $F = \mu_{\ell^\infty}$ donc $F \otimes \underline{Z}_\ell[-1] = \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell$, donc

$$\operatorname{Div}(X,F \otimes \underline{Z}_\ell[-1]) \simeq \operatorname{Div}(X) \otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell ,$$

on trouve, compte tenu de (BR II 3.1), un isomorphisme canonique

(9.15) $$Gr^o H^2(X, \mu_{\ell^\infty}) \simeq Br'(X) .$$

Donc, comme promis, les invariants introduits ici généralisent bien le groupe de Brauer cohomologique Br'(X) (isomorphe, rappelons-le, à Br(X) si $\dim X \leqslant 2$). Il est souvent plus intéressant de travailler avec des faisceaux ℓ-adiques qu'avec des faisceaux ind-finis, il y a lieu alors de remplacer (9.15) par la formule suivante, obtenue en faisant $F = \underline{Z}_{\ell}[1]$:

$$(9.16) \qquad Gr^{o}H^{2}(X,\underline{Z}_{\ell}[1]) \simeq H^{2}(X,\underline{Z}_{\ell}[1])/\ \mathrm{Im}\ \mathrm{Pic}(X)\otimes\underline{Z}_{\ell} \ ;$$

en d'autres termes on trouve ici "la partie transcendante" de la cohomologie ℓ-adique en dimension 2, obtenue en négligeant la "partie algébrique" i.e. celle provenant de diviseurs à coefficients dans $\underline{Z}_{\ell}$; son rang (lorsque k est algébriquement clos) est le sempiternel $B_2-\rho$ (BR II 3.5).

9.7. Gardons les notations de (9.6), et supposons que k soit de caractéristique nulle, pour pouvoir disposer de la résolution des singularités [21] . Si U est un ouvert non vide de X , on peut alors caractériser le noyau de

$$H^{i}(X,F) \longrightarrow H^{i}(U,F)$$

comme étant la somme des images des homomorphismes de Gysin [SGA 4 XVIII]

$$(9.17) \qquad H^{i-2p}(Z,\ F_{Z}\otimes\underline{Z}_{\ell}[-p]) \longrightarrow H^{i}(X,F) \ ,$$

où Z est un schéma propre et lisse sur k , de dimension dim X - p, $p \geqslant 1$ muni d'un morphisme $Z \longrightarrow X$ dont l'image est contenue dans X-U , morphisme qu'on peut si on veut supposer une immersion sur un ouvert non vide de Z . (NB F_Z désigne l'image inverse de F dans Z). La démonstration de cette caractérisation n'offre pas de difficulté, en procédant par récurrence sur la dimension de Y = X-U , utilisant la suite exacte de cohomologie relative pour X , U et la résolution des singularités pour Y . Lorsque U n'est plus fixé, on en conclut la caractérisation correspondante du sous-groupe $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$ tel qu'on ait

$$H^i(X,F)/\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F) = \mathrm{Gr}^o H^i(X,F) \quad :$$

c'est la réunion des images des homomorphismes de Gysin (9.17), pour Z lisse et propre sur k de dimension $\dim X - p < \dim X$, qu'on envoie dans X par un morphisme quelconque (qu'on peut, si on veut, supposer être génériquement immersif). On notera qu'on doit permettre pour p toutes les valeurs de 1 à $\dim X$. De cette description, on déduit formellement la description suivante de $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$, en supposant pour simplifier F constant : c'est la somme des images d'espaces du type $H^{i-2p}(Z, F \otimes \underline{Z}_\ell [-p])$, où Z est propre et lisse sur k, de dimension quelconque, $p \geqslant 1$, par des homomorphismes définissables par des cycles algébriques sur $Z \times X$, de codimension $q = \dim Z + p$. Ainsi, $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$ s'interprète comme la partie de $H^i(X,F)$ provenant, à l'aide d'homomorphismes définis par des classes de correspondance algébriques, d'espaces de cohomologie $H^j(Z,G)$ avec $j < i$ (*). Nous dirons encore que les éléments, ou sous-groupes, de $H^i(X,F)$ qui se trouvent dans Filt^1 sont de "type dimensionnel" ou de "niveau" $< i$, tandis que $H^i(X,F)/\mathrm{Filt}^1 = \mathrm{Gr}^o H^i(X,F)$ apparaît comme la "composante pure de niveau i" de $H^i(X,F)$.

9.8. Notons que le critère précédent nous montre le caractère fonctoriel en X de $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$, donc de $\mathrm{Gr}^o H^i(X,F)$, pour des morphismes pas nécessairement dominants, et même pour des classes de correspondance algébriques arbitraires. Comme nous avons signalé déjà que lorsque $i > \dim X$, on a $\mathrm{Filt}^1 H^i = H^i$ (formule (9.8)), on

(*) et Z de dimension quelconque.

en conclut que si Z est tel que $\dim Z < i$, alors pour tout homomorphisme

$$H^j(Z,G) \longrightarrow H^i(X,F)$$

défini par une classe de correspondance algébrique, $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$ contient l'image de cet homomorphisme. J'ignore si $\mathrm{Filt}^1 H^i(X,F)$ est engendrée par ces images (ce qui fournirait une autre interprétation de Filt^1 , et une justification plus intuitive de la terminologie "type dimensionnel" introduite ci-dessus). Lorsque k est algébriquement clos et que F est le faisceau constant $\underline{Z}_\ell$, il en est très probablement ainsi tout au moins modulo groupes finis, i.e. pourvu qu'on travaille plutôt avec la cohomologie à coefficients dans $\underline{Q}_\ell$. Cela résulterait d'une variante plausible des théorèmes cohomologiques de Lefschetz pour les sections hyperplanes [26] en termes de groupes de cycles algébriques (*), qui de son côté semble maintenant à la base des conjectures de Weil [36] .

(9.9). Les développements du présent paragraphe reposent essentiellement sur l'énoncé démontré dans (9.2) (formule (9.2.)), qui garde un sens indépendamment de tout corps de base, l'hypothèse de lissité étant simplement remplacée par une hypothèse de régularité. Il est plausible que l'énoncé ainsi généralisé reste valable dans ces conditions plus générales, du moins si X est excellent. La démonstration donnée montre que la question est liée au théorème de pureté cohomologique. Grâce à ARTIN, celui-ci est démontré pour des schémas excellents de caractéristique nulle (SGA 4 XIX), de sorte que les développements précédents s'étendent de façon évidente pour définir des inva-

(*) Cf. l'exposé de KLEIMAN dans ce même volume.

riants birationnels relatifs au-dessus d'un tel schéma de base.

10. Relations avec les conjectures de Weil et de Tate.

10.1. Filtration de la cohomologie par le "type dimensionnel". Soit X un préschéma sur un corps k, F un faisceau étale sur X. On définit alors une filtration décroissante naturelle des groupes de cohomologie $H^i(X,F)$, en posant

$$\text{Filt}^p H^i(X,F) = \bigcup_U \text{Ker}\,(H^i(X,F) \dashrightarrow H^i(U,F)) \quad , \tag{10.1}$$

où la réunion du deuxième membre est étendue aux ouverts U de X tels que

$$\text{codim}(X\text{-}U,X) \geqslant p \quad . \tag{10.1 bis}$$

Cette filtration de la cohomologie est donc associée à la "filtration" de X par les familles $\emptyset^p$ de parties fermées, où $\emptyset^p$ désigne l'ensemble des fermés de X qui sont de codimension $\geqslant p$. Des réflexions standard (cf par exemple [20]) montrent alors que la filtration (10.1) de $H^\cdot(X,F)$ fait de ce groupe l'aboutissement d'une suite spectrale convergente (dont le terme E_∞ est par suite le gradué associé

$$E_\infty = \text{Gr}\; H^\cdot(X,F) \quad), \tag{10.2}$$

dont le terme initial s'explicite ici comme

$$E_1^{p,q} = \sum_{x \in X^{(p)}} H_x^{p+q}(F) \quad , \tag{10.3}$$

où $X^{(p)}$ désigne l'ensemble des points x de X qui sont de codimension p ,

$$x \in X^{(p)} \iff \dim \underline{O}_{X,x} = p \quad ,$$

et où, pour un point x de X , et un entier n , on définit

$$(10.4) \qquad H^n_x(F) = \varinjlim_{U} H^n_{\overline{\{x\}} \cap U}(U,F) \quad ,$$

la limite inductive étant prise suivant les voisinages ouverts (au sens de Zariski) de x , le groupe de cohomologie écrit au deuxième membre étant la cohomologie "à support dans $\overline{\{x\}} \cap U$ ". Lorsque X est lisse, F localement constant (pour la topologie étale) et de ℓ -torsion, ℓ premier à car.K , alors le "théorème de pureté cohomologique" (SGA 4 XVI) permet d'expliciter le deuxième membre de (10.4) par la formule

$$(10.5) \qquad H^n_x(F) \simeq H^{n-2p}(x,F \otimes \underline{Z}_\ell [-p]) = \varinjlim_{V} H^{n-2p}(V,F \otimes \underline{Z}_\ell [-p]) \ ,$$

où $p = \dim \underline{O}_{X,x}$ est la codimension de x dans X , et où V parcourt les ouverts non vides de $\overline{\{x\}}$. Ainsi (10.3) nous donne dans ce cas :

$$(10.6) \qquad H^{\bullet}(X,F) \Longleftarrow E_1^{p,q} = \sum_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}(x,F \otimes \underline{Z}_\ell [-p]) \quad ;$$

comparer [20] et [19 , footnote 8] pour la suite spectrale analogue pour la cohomologie des faisceaux cohérents resp. la cohomologie de De Rham.

Ces considérations s'étendent de façon évidente aux faisceaux ℓ -adiques constructibles, en particulier si F est constant tordu sur X lisse, on a la suite spectrale (10.6), dont le terme initial s'explicite par (10.5), associé à la filtration de $H^{\bullet}(X,F)$ définie par (10.1). Dans ce cas, et sous réserve de disposer de la résolution des singularités, par exemple si car.k = 0 , les réflexions de (9.7) s'appliquent pour donner la caractérisation suivante de $\mathrm{Filt}^p\, H^{\bullet}(X,F)$:

$$(10.7) \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(X,F) = \sum_{q \geqslant p} \mathrm{Im}\,(H^{i-2q}(Z,F_Z \otimes \underline{Z}_\ell\,[-q]) \to H^i(X,F)) ,$$

où Z est un X-schéma propre de dimension égale à $\dim X - q$ (en supposant pour simplifier X équidimensionnel). Les variantes de cette description, signalées dans (9.7) et (9.8), pour p = 1, restent encore valables pour p quelconque.

10.2. Désignons par $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , et soient $\bar{X}$, $\bar{F}$ déduits de X , F par extension $k \to \bar{k}$ du corps de base. Alors les réflexions de (10.1) peuvent s'appliquer, pour donner une filtration canonique sur $H^{\bullet}(\bar{X},\bar{F})$, aboutissement d'une suite spectrale à terme initial explicité. Or le groupe fondamental

$$G = {}^{\bullet}\Pi_1(k) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$$

opère sur toute la situation par transport de structure, et en particulier il opère sur $H^{\bullet}(\bar{X},\bar{F})$ en invariant sa filtration. Il opère donc par suite sur le gradué associé $\mathrm{Gr}\, H^{\bullet}(\bar{X},\bar{F})$.

Lorsque k est le corps fini à N éléments, alors G s'identifie à $\hat{\underline{Z}}$ grâce au générateur topologique frob_N , et la connaissance de l'opération de G est équivalente à l'opération de l'automorphisme de frobénius. Supposons alors que X est lisse et propre sur $k = \underline{F}_N$, et que $F = \underline{Z}_\ell$ (considéré comme faisceau ℓ-adique).

Supposons de plus qu'on dispose de la résolution des singularités, de façon à pouvoir écrire (10.7) pour $\bar{X}$, i.e.

$$\text{(10.8)} \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(\bar{X},\underline{Z}_\ell) = \sum_{q \geqslant p} \mathrm{Im}(H^{i-2q}(\bar{Z},\underline{Z}_\ell[-q]) \longrightarrow H^i(\bar{X},\underline{Z}_\ell)) ,$$

où on peut prendre les $\bar{Z}$ provenant de X -préschémas lisses et propres Z . Remarquons qu'on a :

$$\text{(10.9)} \qquad H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell[-q]) \simeq H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell)[-q] = H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell)\otimes_{\underline{Z}_\ell}\underline{Z}_\ell[-q] .$$

D'autre part, la conjecture de WEIL-RIEMANN [36] [17] postule que frob_N opérant sur $H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell)$ a un polynôme caractéristique à coefficients <u>entiers</u> ordinaires, donc que ces racines (les valeurs propres de frob_N opérant sur $H^j(\bar{Z},\underline{Z}_\ell)$) sont des entiers algébriques, et que de plus ces derniers sont de valeurs absolues égales à $N^{j/2}$. Comme les valeurs propres de frob_N opérant sur (10.9) sont égales aux valeurs propres précédentes multipliées par N^q , on conclut alors de l'expression (10.8) que <u>les valeurs propres de</u> frob_N <u>opérant sur</u> $\mathrm{Filt}^p H^i(\bar{X},\underline{Z}_\ell)$ <u>sont stables par conjugaison sur</u> $\underline{Q}$ (i.e. <u>le polynôme caractéristique de cet endomorphisme est encore à coefficients entiers</u>), <u>et que ce sont des produits de</u> N^p <u>par des entiers algébriques</u> (<u>de valeur absolue nécessairement égale à</u> $N^{i/2-p}$) . Il y a donc lieu de conjecturer que cet énoncé, généralisant l'hypothèse de WEIL-RIEMANN, est valable pour tout schéma propre et lisse sur le corps fini $\underline{F}_N$. Désignant par $\mathrm{Filt}'^p H^i(\bar{X},\underline{Q}_\ell)$ le sous-espace de

$$H^i(\bar{X},\underline{Q}_\ell) = H^i(\bar{X},\underline{Z}_\ell)\otimes_{\underline{Z}_\ell}\underline{Q}_\ell$$

stable par frob_N correspondant aux valeurs propres de frob_N dont les quotients par N^p sont encore des entiers algébriques, on peut exprimer la conjecture précédente par la relation

$$\text{(10.10)} \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(\bar{X}, \underline{Q}_\ell) \subset \mathrm{Filt}'^p H^i(\bar{X}, \underline{Q}_\ell) \quad .$$

10.3. Nous inspirant des conjectures de TATE [33] , <u>il y a lieu de conjecturer que l'inclusion hypothétique</u> (10.10) <u>suggérée par les conjectures de</u> WEIL, <u>est en fait une égalité</u>. Lorsque $i = 2p$, ceci se réduit en effet aux conjectures de TATE, dans le cas du corps de base $\underline{F}_N$, car on constate aussitôt que $\mathrm{Filt}^p H^{2p}(\bar{X}, \underline{Z}_\ell)$ est exactement le sous-module de $H^{2p}(\bar{X}, \underline{Z}_\ell)$ engendré par les classes de cohomologie des cycles de codimension p dans $\bar{X}$ (à coefficients dans $\underline{Z}_\ell\,[-p]$) ; tensorisant par $\underline{Q}_\ell\,[p]$, on trouve (compte tenu des conj. de WEIL) la <u>conjecture</u> de TATE : <u>le sous-espace de</u> $H^{2p}(\bar{X}, \underline{Q}_\ell\,[p]\,)$ <u>engendré par les classes de cohomologie des cycles algébriques de codimension</u> p <u>est égal à l'espace correspondant aux valeurs propres de</u> frob_q <u>qui sont des racines de l'unité</u>, i.e. <u>à l'espace des invariants de</u> $\mathrm{frob}_q^{\,r}$ <u>pour</u> r <u>grand</u>.

Il est immédiat comment généraliser la définition de Filt' lorsque le corps fini $\underline{F}_N$ est remplacé par un "corps de type fini", ou mieux, par un schéma de base S régulier et de type fini sur Spec $\underline{Z}$, en faisant intervenir les opérations des frobénius correspondants aux différents points fermés de S . Il y a lieu alors de conjecturer l'égalité dans (10.10) dans cette situation générale, ce qui généralise la conjecture de TATE pour la base S .

Rappelons cependant [32] que même lorsque X est une surface lisse et propre sur le corps fini F_N , ni la conjecture de WEIL ni celle de TATE n'est prouvée pour le $H^2(\bar{X}, \underline{Z}_\ell)$, celle de TATE étant d'ailleurs équivalente (en vertu de ARTIN-TATE) à l'hypothèse de finitude du groupe de Brauer "arithmétique" Br(X) [32].

10.4. Comme nous l'avons déjà signalé, lorsque X est lisse sur le corps k , on peut introduire sur la cohomologie de De Rham $H^{\bullet}(X)$ de X une filtration par la même formule (10.1), associée encore à une suite spectrale analogue à (10.6) [19] . On ne confondra pas cette filtration par les $\mathrm{Filt}^p H^i(X)$ avec la filtration par des $\mathrm{Filt}'^p H^i(X,F)$, défini par voie purement algébrique en termes de la définition de $H^{\bullet}(X)$ comme l'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe de faisceaux de De Rham, filtration qui est associée à une suite spectrale de terme initial

$$(10.11) \qquad H^{\bullet}(X) \Longleftarrow E'^{p,q}_1 = H^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/k}) \quad ,$$

(l'opérateur différentiel de E'_1 provenant de celui de $\underline{\Omega}_{X/k}$) . Cette deuxième filtration joue un rôle analogue à la filtration "arithmétique" désignée par la même notation dans (10.2), et la formule (10.10) se remplace ici par la formule

$$(10.12) \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(X) \subset \mathrm{Filt}'^p H^i(X) \quad ,$$

valable tout au moins si k est de caractéristique nulle. Lorsque de plus X est projectif sur k , la théorie de HODGE [37] prouve d'ailleurs que la suite spectrale (10.11) est dégénérée, et si $k = \underline{C}$, on trouve un isomorphisme canonique de la cohomologie de De Rham avec la cohomologie de Hodge.

$$(10.13) \qquad H^{\bullet}(X) \simeq \sum_{p,q} H^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/\underline{C}}) \quad ,$$

(par une définition transcendante, via l'opération transcendante de "conjugaison complexe" $\phi \longmapsto \bar{\phi}$ dans $H^{\bullet}(X)$ et la filtration Filt' de $H^{\bullet}(X)$, donnant naissance à la bigraduation de HODGE). Dans ce cas, la filtration "topologique" Filt^p étant manifestement stable par conjugaison complexe, la relation (10.12) peut aussi s'écrire

$$(10.14) \qquad \mathrm{Filt}^p H^i(X) \subset \mathrm{Filt'}^p H^i(X) \cap \overline{\mathrm{Filt'}^p}\, H^i(X) \quad ,$$

où le terme de droite s'explicite également en termes de la bigraduation (10.13) comme la somme des termes bihomogènes $H^{r,s}(X)$, avec $r \leqslant p$, $s \leqslant p$. Désignant par X_{cl} l'espace $X(\underline{C})$ muni de sa topologie compacte habituelle, $H^i(X)$ n'est autre que $H^i(X_{cl},\underline{Q}) \otimes \underline{C}$, et l'inclusion (10.14) s'écrit de façon équivalente comme une inclusion

$$(10.15) \qquad \mathrm{Filt}^p\, H^i(X_{cl},\underline{Q}) \subset \mathrm{Filt'}^p H^i(X) \cap \overline{\mathrm{Filt'}^p H^i}(X) \cap H^i(X_{cl},\underline{Q})$$

(compte tenu que la filtration "topologique" de $H^i(X)$ est évidemment déduite d'une filtration sur $H^i(X_{cl},\underline{Q})$).

<u>La conjecture de</u> TATE <u>généralisée du</u> (10.3) <u>admet comme analogue la classique conjecture de</u> HODGE [22] : <u>l'inclusion</u> (10.15) <u>est une égalité</u>.* Le cas $i = 2p$, qui correspond exactement à la conjecture de TATE proprement dite, n'est autre que la caractérisation conjecturale des classes de cohomologie rationnelles de $H^{2p}(X_{cl},\underline{Q})$ qui correspondent à des cycles algébriques de codimension p , à coefficients rationnels, comme celles qui sont de type (p,p) .

* (Ajouté en octobre 1968.) On a oublié dans cet énoncé de préciser qu'on suppose $i \leqslant m$, où X est équidimensionnel de dimension m; la théorie de Lefschetz [26] permet d'ailleurs, pour une description de Filt en termes de Filt', de se ramener aux $i \leqslant m$: si $i \geqslant m$, remplacer p par $p + (i-m)$ dans le deuxième membre de (10.15). D'autre part, l'auteur vient de s'apercevoir que la conjecture de Hodge est fausse, pour des raisons essentiellement triviales, sous sa forme originale qu'on vient de rappeler, et doit être reformulée ainsi: <u>le premier membre de</u> (10.15) <u>est le plus grand sous-espace vectoriel (sur Q) du second membre, engendrant dans</u> $H^i(X,\underline{C})$ <u>un sous-espace vectoriel stable par la décomposition de Hodge</u>.

11. Appendice: Un théorème de comparaison de la cohomologie étale et de la cohomologie fppf.

Nous allons dans le présent appendice démontrer le théorème "rappelé" au début du paragraphe 5, sous une forme un peu plus générale (11.7). Les notations sont celles introduites au par. 5, nous aurons en particulier à considérer le morphisme canonique de sites

$$p : X_{pl} \longrightarrow X_{ét}$$

associé à un préschéma X . Nous désignons par G_{pl} un faisceau abélien sur X_{pl} , et par n un entier $\geqslant 0$.

<u>Lemme</u> (11.1). <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $R^i p_*(G_{pl}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant n$.

(ii) <u>Pour tout</u> X' <u>étale sur</u> X , <u>l'homomorphisme canonique</u>

$$H^i(X'_{ét}, p_*(G_{pl})) \longrightarrow H^i(X'_{pl}, G_{pl})$$

<u>est un isomorphisme pour</u> $i \leqslant n$, <u>un monomorphisme pour</u> $i = n+1$.

(iii) <u>Pour tout localisé strict</u> $\bar{X}$ <u>de</u> X , <u>on a</u>

$$H^i(\bar{X}, G_{pl}) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

<u>Démonstration</u>. L'équivalence de (i) et (ii) est essentiellement triviale, et s'étend à un morphisme de sites quelconques. L'équivalence de (i) et (iii) résulte aussitôt des isomorphismes

$$H^i p_*(G_{pl})_{\bar{x}} \simeq H^i(\bar{X}_{pl}, G_{pl}) ,$$

où $\bar{X}$ est le localisé strict de X relatif au point géométrique $\bar{x}$ de X [SGA 4 VIII 4] , limite projective de schémas affines X_i' étales sur X . En vertu de [SGA 4 VIII 3.9] le premier membre est en effet isomorphe à

$$\varinjlim_{i} H^i(X'_{i\ \mathrm{pl}}, G_{\mathrm{pl}}) \quad ,$$

lui-même isomorphe au deuxième membre en vertu de la théorie de passage à la limite [SGA 4 VI par. 6, VII 5] , qui s'applique en effet au cas de la topologie fppf, comme à celui de la topologie étale.

Lemme (11.2). ("Lemme de Cartan"). Supposons X local hensélien. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout X' fini localement libre sur X , on a

$$H^i(X'_{\mathrm{pl}}, G_{\mathrm{pl}}) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad .$$

(ii) Pour tout X' comme dessus, et tout X'' fini localement libre sur X' , on a

$$H^i(X''/X', G_{\mathrm{pl}}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad ,$$

(où le premier membre désigne la cohomologie de Čech pour le "recouvrement" $X'' \longrightarrow X'$).

NB. On dit qu'un morphisme $X' \longrightarrow X$ est localement libre si X' est le spectre d'un faisceau d'Algèbres qui est localement libre comme faisceau de modules. Démontrons (11.2) : notons qu'on peut dans l'énoncé supposer que $X' \longrightarrow X$ et $X'' \longrightarrow X'$ sont surjectifs (car l'image est à la fois ouverte et fermée), donc qu'ils sont "couvrants" pour la topologie fppf. Pour un X' fixé, comme X' est semi-local hensélien, il est connu que les X'' sont cofinaux dans les familles couvrantes de X' pour la topologie fppf, donc que pour tout $i \geqslant 1$ et tout $\xi \in H^i(X'_{pl},G_{pl})$, peut s'effacer par un tel X'' . Le lemme (11.2) résulte de là formellement par un argument connu, procédant par récurrence sur n et utilisant la suite spectrale de Leray pour le "recouvrement" X''/X' .

Nous sommes donc amenés à trouver des critères de nullité pour les groupes de cohomologie $H^i(X'/X,G_{pl})$. Signalons d'abord le lemme préliminaire :

Lemme (11.3). Soit $X'_o \to X_o$ un morphisme de X-préschémas. Pour tout entier $j \geqslant 0$, désignons par X'^j (resp. X'^j_o) le produit fibré j.ème de X' (resp. de $X'_o = X' \times_X X_o$) sur X (resp. sur X_o). Supposons vérifiée la condition suivante :

(L) Pour tout $j \geqslant 1$, l'application

$$G_{pl}(X'^j) \longrightarrow G_{pl}(X'^j_o)$$

est surjective.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application

$$H^i(X'/X,G_{pl}) \longrightarrow H^i(X'_o/X_o,G_{pl})$$

est bijective pour $1 \leqslant i \leqslant n$, injective pour $i = n+1$.

(ii) Si N désigne le foncteur $Z \longmapsto \mathrm{Ker}\,(G_{pl}(Z) \to G_{pl}(Z_o))$,

<u>où</u> $Z_o = Z \times_X X_o$, <u>on a</u>

$$H^i(X'/X,N) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad .$$

<u>Démonstration</u>. On a une suite exacte de complexes de cochaines

$$0 \longrightarrow C^{\cdot}(X'/X,N) \longrightarrow C^{\cdot}(X'/X,G) \longrightarrow C^{\cdot}(X'_o/X_o,G) \longrightarrow 0 \quad ,$$

compte tenu de la condition (L) . On en conclut une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \to H^i(X'/X,N) \longrightarrow H^i(X'/X,G) \longrightarrow H^i(X'_o/X_o,G) \longrightarrow H^{i+1}(X'/X,N) \to \cdots ,$$

qui implique aussitôt la conclusion voulue.

Voici enfin le lemme clef :

<u>Lemme</u> (11.4). <u>Avec les notations de</u> (11.3), <u>supposons de plus</u> X <u>local hensélien,</u> $X_o \longrightarrow X$ <u>une immersion fermée</u>, $X' \longrightarrow X$ <u>fini localement libre</u>, <u>que</u> G_{pl} <u>satisfasse la condition</u> (L), <u>et qu'il existe un sous-foncteur ouvert</u> U <u>de</u> G_{pl} "<u>contenant</u>" <u>la section unité et qui soit représentable par un préschéma lisse sur</u> X <u>(ces deux conditions sur</u> G_{pl} <u>sont automatiquement vérifiées si</u> G_{pl} <u>est représentable par un préschéma lisse sur</u> X). <u>Alors la condition</u> (i) <u>de</u> (11.3) <u>est vérifiée pour tout</u> n .

Lorsque X_o n'est pas de présentation finie sur X , pour pouvoir dans (11.3) et (11.4) donner un sens à $G_{pl}(X_o)$, et plus généralement $G_{pl}(X'^j_o)$, il y a lieu de prolonger canoniquement G_{pl} en un foncteur $(Sch)_{/X}^o \longrightarrow (Ens)$, en posant pour tout $f : Y \to X$ sur X : $G_{pl}(Y) = f^*_{pl}(G_{pl})(Y)$. Alors U est encore un sous-foncteur ouvert de $G_{pl} = G$, considéré comme foncteur défini sur tout $(Sch)_{/X}$. Nous utiliserons aussi les foncteurs $\underline{C}^i(G)$ définis par

$$\underline{C}^i(G)(Y) = C^i(Y'/Y,G) = G\ (Y'^{i+1}) \quad ,$$

où $Y' = Y \times_X X'$, Y'^{i+1} désignant la puissance fibrée (i+1).ème de Y' sur Y. Ainsi, $\underline{C}^i(G)$ n'est autre que le foncteur noté $\underline{\mathrm{Hom}}_X(X'^{i+1},G)$ par ailleurs. Les $\underline{C}^i(G)$ forment un "foncteur-groupe simplicial" noté $\underline{C}^{\bullet}(G)$, et on a des isomorphismes canoniques

$$\underline{C}^{\bullet}(G)(X) = C^{\bullet}(X'/X,G) \quad , \quad \underline{C}^{\bullet}(G)(X_o) = C^{\bullet}(X'_o/X_o,G) \quad .$$

On introduit de même le sous-foncteur $\underline{Z}^i(G)$ de $\underline{C}^i(G)$, noyau de l'homomorphisme cobord $\underline{C}^i(G) \longrightarrow \underline{C}^{i+1}(G)$, de sorte qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\underline{Z}^i(G)(X) = Z^i(X'/X,G) \quad , \quad \underline{Z}^i(G)(X_o) = Z^i(X'_o/X_o,G) \quad .$$

On peut, pour tout i, considérer le sous-foncteur

$$\underline{C}^i(U) = \underline{\mathrm{Hom}}_X(X'^{i+1},U)$$

de $\underline{C}^i(G)$. Ces sous-foncteurs, pour i variable, forment un sous-foncteur simplicial $\underline{C}^{\bullet}(U)$ de $\underline{C}^{\bullet}(G)$ (mais en général pas stable, bien entendu, par la loi de groupe). Notons que chaque $\underline{C}^i(U)$ est un sous-foncteur <u>ouvert</u> de $\underline{C}^i(G)$. On peut d'autre part supposer U affine, ce qui implique alors que les $\underline{C}^i(U)$ sont <u>représentables</u> par des schémas affines sur X, qui sont de plus <u>lisses</u> en vertu de l'hypothèse de lissité sur U (comme on voit par le critère infinitésimal habituel de lissité).

On posera $\underline{Z}^i(U) = \underline{Z}^i(G) \cap \underline{C}^i(U)$, c'est un sous-foncteur de

$\underline{C}^i(U)$, dont on ne sait pas s'il est représentable, faute de pouvoir affirmer que le cobord d^i applique $\underline{C}^i(U)$ dans $\underline{C}^{i+1}(U)$. Cependant, posant

$$\underline{C}'^i(U) = d_i^{\ -1}(\underline{C}^{i+1}(U)) \quad ,$$

on trouve un sous-schéma ouvert de $\underline{C}^i(U)$, contenant la section nulle, et posant

$$\underline{Z}'^i(U) = \underline{Z}^i(G) \cap \underline{C}'^i(U) = \operatorname{Ker}\ (C'^i(U) \longrightarrow \underline{C}'^{i+1}(U)) \quad ,$$

on trouve un foncteur représentable par un sous-préschéma de présentation finie de $C'^i(U)$, comme image inverse de la section nulle de $C'^{i+1}(U)$ par le morphisme de préschémas $\underline{C}'^i(U) \longrightarrow C'^{i+1}(U)$.

Le fait important, qui donne la clef de la démonstration, est que

$$(*) \qquad d^{i-1} : \underline{C}'^{i-1}(U) \longrightarrow \underline{Z}'^i(U) \quad , \text{ pour } i \geqslant 1 \quad ,$$

est un morphisme lisse de préschémas. (Ce fait est vrai, indépendamment de l'hypothèse locale hensélienne sur X , et est également indépendant de la donnée de X_o et de l'hypothèse (L)). Quitte à faire un changement de base affine $Y \longrightarrow X$, on est ramené à montrer que si X est affine, et si X_o est un sous-schéma fermé défini par un idéal $\underline{I}$ de carré nul, alors pour tout $z^i \in \underline{Z}'^i(U)(X)$, et tout $c_o^{i-1} \in \underline{C}^{i-1}(U)(X_o)$, tels que

$$d^{i-1}(c_o^{i-1}) = z_o^i$$

(où le deuxième membre désigne la restriction de z^i à X_o), il existe un $c^{i-1} \in \underline{C}'^{i-1}(U)(X)$, relevant c_o^{i-1} , et satisfaisant

$$d^{i-1}(c^{i-1}) = z^i \quad .$$

Pour le trouver, on note que, puisque $\underline{C}'^{i-1}(U)$ est lisse sur X, on peut remonter c_o^{i-1} en une cochaine $c^{i-1} \in \underline{C}'^{i-1}(U)(X)$, et alors

$$u^i = d^{i-1}(c^{i-1}) - z^i$$

est un élément de $\underline{Z}'^i(U)(X)$ dont la restriction u_o^i à X_o est nulle. Tout revient à prouver qu'il existe un $v^i \in \underline{C}'^{i-1}(U)(X)$, tel que

$$v_o^i = 0 \quad , \quad d^{i-1}v^i = u^i \quad .$$

En d'autres termes, avec les notations de (11.3), on est ramené à prouver qu'on a

$$H^i(X'/X,N) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad .$$

Or, utilisant la représentabilité de U, on constate aussitôt que l'on a un isomorphisme canonique de foncteurs :

$$N(Y) = H^o(Y, f^*(\underline{\omega})) \quad ,$$

où $f : Y \dashrightarrow X$ est le morphisme structural et $\underline{\omega}$ est l'image inverse, par la section unité, du faisceau $\underline{\Omega}^1_{U/X}$ des 1-différentielles relatives. Par suite on trouve $H^i(X'/X,N) = H^i(X'/X, \underline{\omega})$, qui est nul pour $i \geqslant 1$ comme il est bien connu [16, I, page 18].

Utilisant la lissité de l'application (*), on va conclure facilement la validité de la condition (ii) de (11.3) (en revenant maintenant aux conditions initiales de (11.4), donc sans plus supposer

X_o défini par un idéal nilpotent, ce qui prouvera bien (11.4) grâce à (11.3). Soit (pour $i \geq 1$ fixé)

$$\underline{z}^i \in Z^i(X'/X,N) \subset \underline{Z}'^i(U)(X) \quad ,$$

donc $z_o^i = 0$, on cherche un $c^{i-1} \in \underline{C}'^{i-1}(U)(X)$, avec $c_o^{i-1} = 0$, tel que $d^{i-1}(c^{i-1}) = z^i$. Or l'image inverse de la section z^i de $\underline{Z}'^i(U)$ sur X par le morphisme lisse (*) est un sous-préschéma Z de $\underline{C}'^{i-1}(U)$ <u>lisse</u> sur X , d'autre part on dispose d'une section de $Z_o = Z \times_X X_o$ sur X_o , savoir la section nulle. Comme X est hensélien, on peut alors relever cette section en une section c^{i-1} de Z , cqfd.

<u>Remarques</u> (11.5).

1°) Lorsque dans (11.4) X_o est défini par un Nilidéal de X , on peut affaiblir les autres hypothèses, en se bornant à supposer X affine (au lieu de local hensélien), et en laissant tomber l'hypothèse que U soit <u>lisse</u> sur X (représentable suffit). Bien entendu, on garde l'hypothèse (L), qui est dans la nature d'une hypothèse de lissité.

2°) Pour démontrer la lissité du morphisme (*) ci-dessus, on n'a manifestement utilisé l'hypothèse affine sur U que pour pouvoir affirmer que les deux membres sont bien représentables, ce qui est le cas sous des conditions nettement plus générales. Par exemple, si G est représentable et lisse sur X , on pourra prendre $G = U$ dans des cas importants, par exemple chaque fois que G est quasi-projectif sur X , ou que X est le spectre d'un corps, ou que $X' \longrightarrow X$

est radiciel.

Lemme (11.6). Sous les conditions de (11.4) sur X , G , supposons la condition (L) vérifiée pour tout X' fini localement libre sur X et $X_o = \mathrm{Spec}(k(x))$, et X strictement local, i. e. à corps résiduel séparablement clos. Alors on a

$$H^i(X'/X,G_{pl}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

et de même

$$H^i(X_{pl},G_{pl}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad .$$

Démonstration. La deuxième assertion résulte de la première, compte tenu que les hypothèses sont stables par passage de X à X' , et de (11.2). Pour la première relation, compte tenu de (11.4), on peut supposer que X est égal au spectre d'un corps séparablement clos k . Alors il est connu que G est même représentable par un schéma en groupes lisse sur k [SGA 3 XVIII] , et par suite (11.5. 2°) le morphisme

$$\underline{C}^{i-1}(G) \longrightarrow \underline{Z}^i(G) \ , \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

est représentable par un morphisme lisse de préschémas. Pour prouver que chaque point de $\underline{Z}^i(G)(k)$ provient d'un point de $\underline{C}^{i-1}(G)(k)$, il suffit donc de prouver que le morphisme précédent est surjectif. Or ceci nous ramène au cas où le corps de base k est algébriquement clos et non seulement séparablement clos, mais alors tout X' fini non vide sur $X = \mathrm{Spec}(k)$ admet une section, et par suite $H^i(X'/X,G) = 0$ pour $i \geqslant 1$, ce qui implique la surjectivité voulue et achève de prouver (11.6).

Mettant ensemble les résultats obtenus (11.1), (11.2), (11.4), (11.6), on trouve :

Théorème (11.7). Soient X un préschéma, G_{pl} un faisceau abélien sur X_{pl}. On suppose vérifiées les deux conditions suivantes (remplies en tous cas si G est représentable par un préschéma lisse sur X) :

(L) Pour tout localisé strict $\overline{X}$ de X, tout sous-schéma fermé non vide X_o de X, et tout X' fini localement libre sur $\overline{X}$, posant $X'_o = X' \times_X X_o$, l'homomorphisme

$$G(X') \longrightarrow G(X'_o)$$

est surjectif.

(R) Pour tout $\overline{X}$ comme ci-dessus, il existe un sous-foncteur ouvert U de $G_{pl} \times_X \overline{X} = \overline{G}_{pl}$, représentable par un préschéma lisse et tel que $U \longrightarrow X$ soit surjectif (auquel cas, quitte à "translater" U, on peut même supposer que U "contient" la section nulle).

Alors on a les conclusions suivantes :

1°) Les homomorphismes canoniques

$$H^i(X_{ét}, G_{ét}) \longrightarrow H^i(X_{pl}, G_{pl})$$

sont des isomorphismes, où $G_{ét} = p_*(G_{pl})$ est la restriction de G_{pl} au site étale. En particulier, on a

$$H^i(X_{pl},G_{pl}) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geqslant 1 \quad , \underline{\text{si}} \quad X \quad \underline{\text{est strictement local}}.$$

2°) Si X_o est un sous-préschéma fermé non vide de X , X local hensélien, alors les homomorphismes de restriction

$$H^i(X,G) \longrightarrow H^i(X_o,G_o) \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geqslant 1$$

sont bijectifs, où les groupes de cohomologie sont pris au sens de la topologie étale ou fppf indifféremment, et où $G_o = G_{pl} \times_X X_o$.

3°) Sous les conditions de 2°), pour tout X' fini localement libre sur X , les homomorphismes de restriction

$$H^i(X'/X,G_{pl}) \longrightarrow H^i(X'_o/X_o,G_{pl}) \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geqslant 1$$

sont bijectifs. En particulier,

$$H^i(X'/X,G_{pl}) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geqslant 1 \quad , \underline{\text{si}} \quad X \quad \underline{\text{strictement local}}.$$

Démonstration. Seul 2°) n'est pas encore démontré. Notons qu'en vertu de 1°), les deux énoncés contenus dans 2°), suivant la topologie adoptée, sont équivalents ; travaillons par exemple sur X_{pl} . En vertu de la suite exacte $0 \longrightarrow N \longrightarrow G_{pl} \longrightarrow G_{pl\,o} \longrightarrow 0$, et compte tenu de la condition (L), on est réduit à prouver qu'on a

$$H^i(X_{pl},N) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad .$$

En vertu de (11.2) cela se ramène aux relations

$$H^i(X'/X,N) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \quad ,$$

qui en vertu de (11.3) équivalent à la conclusion de 3°), déjà prouvée, cqfd.

<u>Remarques</u> (11.8).

1) Dans 2°) et 3°), on peut remplacer l'hypothèse que X soit local hensélien par celle que X soit affine et X_o défini par un Idéal nilpotent de X, en reformulant convenablement (L) et (R) cf (11.5, 1°).

2) On fera attention que même en interprétant l'énoncé 2°) au sens de la topologie étale, l'isomorphisme envisagé n'est <u>pas</u> trivial (et ne se réduit <u>pas</u> à l'énoncé analogue pour un faisceau <u>étale</u> $G_{ét}$ sur $X_{ét}$ et sa restriction à $X_{o\,ét}$ [SGA 4 VIII 8.6.]). En effet, la restriction $G_{o\,ét}$ de G_o au site étale $X_{o\,ét}$ de X_o n'est pas en général isomorphe à la restriction du faisceau étale $G_{ét}$ sur $X_{ét}$ à ce même $X_{o\,ét}$.

3) On peut, par essentiellement la même méthode, prouver un énoncé correspondant à (11.7), pour un faisceau en groupes G_{pl} non nécessairement commutatif sur X_{pl}, et les H^1 correspondants, généralisant [SGA 3 XXIV 8.1.] , (où on avait fait des hypothèses de quasi-projectivité, pour assurer la représentabilité des $\underline{C}^i(G)$ de la démonstration de (11.4)).

Une remarque analogue s'applique au résultat (11.9) qui suit.

<u>Corollaire</u> (11.9). <u>Soit</u> $G_{ét}$ <u>un faisceau étale sur</u> X, <u>et considérons</u> $G_{pl} = p^*(G_{ét})$, <u>son image inverse sur le site</u> fppf X_{pl} <u>par le morphisme canonique de sites</u> $p : X_{pl} \to X_{ét}$. <u>Alors l'homomorphisme canonique</u>

$$G_{ét} \to p_*(G_{pl})$$

est un isomorphisme, _et si_ $G_{ét}$ _est un faisceau abélien_, _les homomorphismes canoniques_

$$H^i(X_{ét},G_{ét}) \longrightarrow H^i(X_{pl},G_{pl})$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. La première assertion équivaut encore à dire que le foncteur p sur les faisceaux étales est pleinement fidèle, ou encore que l'homomorphisme

$$H^o(X_{ét},G_{ét}) \longrightarrow H^o(X_{pl},G_{pl})$$

est bijectif, et que l'assertion analogue reste vraie en remplaçant X par un X' étale sur X. En fait, on vérifie, de façon plus générale, que pour $X' \in \mathrm{Ob}\, X_{pl}$, à morphisme structural $f : X' \to X$, on a une bijection

$$G_{pl}(X') = p^*(G_{ét})(X') \xrightarrow{\simeq} f^*_{ét}(G_{ét})(X') \quad ,$$

qui est fonctorielle en X' et $G_{ét}$, et permet donc d'interpréter l'opération p^* en termes d'opérations _entre sites étales_. Cette interprétation de G_{pl} permet de vérifier sans difficulté que G_{pl} satisfait aux conditions de (11.7), car elle rend (L) triviale, tandis que (R) se vérifie en prenant simplement la section nulle de G_{pl}, qui définit un sous-foncteur de G_{pl} grâce à [SGA 4 VIII 6.1]. La conclusion 1°) de (11.7) jointe à la première assertion déjà admise de (11.9) implique alors aussitôt la deuxième assertion de (11.9).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. ABHYANKAR, Local uniformisation on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, Ann. of Math. 63 (1956), 491-526 .

[2] S. ABHYANKAR, On the valuations contained in a local domain, Amer. Journ. of Math. 78 (1956), 321-348 .

[3] E. ARTIN-J. TATE, Class field theory, (miméographié), Harvard.

[4] M. ARTIN- A.GROTHENDIECK - J.L. VERDIER, Cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S. 1963/64 (cité SGA 4).

[5] M. ARTIN-J. L. VERDIER, Seminar on étale cohomology of number fields, Summer Institute on Algebraic Geometry held at the Whitney Estate, Woods Hole, 1964.

[6] M. F. ATIYAH- W.C.D. HODGE, Integrals of the second kind on an algebraic variety, Annals of Math. 62 (1955), 56-91 .

[7] M. AUSLANDER-O. GOLDMAN, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 367-409 .

[8] N. BOURBAKI, Algèbre, Chap. VIII, Modules et Anneaux semi-simples, Act. Scient. et Ind. 1261, Paris, Hermann.

[9] C. CHEVALLEY, Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure 1956/58 .

[10] C. CHEVALLEY, Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11 (1934), 73-75 .

[11] M. DEMAZURE-A. GROTHENDIECK, Schémas en Groupes, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S. 1962/64, (cité SGA 3).

[12] J. DIEUDONNE-A. GROTHENDIECK, Eléments de Géométrie Algébrique, Chapitres II, III, IV, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., (cité EGA II, III, IV) .

[13] M. J. GREENBERG, Rational points in henselian discrete valuation rings, à paraître dans Publications Mathématiques.

[14] A. GROTHENDIECK, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S., 1962 (cité SGA 2).

[15] A. GROTHENDIECK, Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S., 1964/65, (cité SGA 5).

[16] A. GROTHENDIECK, Fondements de la Géométrie Algébrique (Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962), Secrétariat Mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris.

[17] A. GROTHENDIECK, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Séminaire Bourbaki 279 (décembre 1964) (*).

[18] A. GROTHENDIECK, Le groupe de Brauer, I, II, Séminaire Bourbaki 290 (Mai 1965) et 297 (Novembre 1965) (*).

(*) Dans ce volume.

[19] A. GROTHENDIECK, Crystals and the De Rham cohomology of algebraic varieties, Pub. Math. 29 (1966), 95-103 (*).

[20] R. HARTSHORNE, Residues and duality, Séminaire Harvard 1963/64, (à paraître dans Lecture Notes in Mathematics, Springer).

[21] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math. 79 (1964), 109-326 .

[22] W. V. D. HODGE, The topological invariants of algebraic varieties, Proceedings of the Int. Congress of Mathematicians, 1950, 182-192 .

[23] S. LANG, On quasi-algebraic closure, Annals of Math. 55 (1952), 373-390 .

[24] S. LANG, Algebraic groups over finite fields, Amer. Journ. of Math. 78 (1956), 55-63 .

[25] S. LANG, Abelian Varieties, Interscience Publishers, New York.

[26] S. LEFSCHETZ, L'Analysis Situs et La Géométrie Algébrique, Gauthiers-Villars, Paris.

[27] T. MATSUSAKA, A criteria for algebraic equivalence and the torsion group; Amer. Journ. of Math. 79 (1957), 53-66 .

[28] D. MUMFORD, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Pub. Math. 9 (1961), 5-22 .

(*) Dans ce volume.

[29] A. NERON, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux etglobaux, Pub. Math. 21 (1964), 5-128 .

[30] M. RAYNAUD, Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki 287 (Février 1965) (*).

[31] J. P. SERRE, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Mathematics 5, Springer.

[32] J. TATE, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Séminaire Bourbaki 306 (Février 1966) (*).

[33] J. TATE, Algebraic cohomology classes, Woods Hole Summer Institute on Algebraic Geometry, 1964 .

[34] J. L. VERDIER, Catégories dérivées des catégories abéliennes, à paraître dans North Holland Pub. Cie.

[35] J. L. VERDIER, Catégories dérivées (quelques résultats - Etat 0), Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1963 .

[36] A. WEIL, Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 497-508 .

[37] A. WEIL, Variétés Kählériennes, Act. Sc. et Ind. n° 1267, Paris, Hermann .

(*) Dans ce volume.

ERRATA ET COMPLEMENTS.

p. 89, ligne 8:

Comme me l'a signalé J.P. Serre, sans la restriction qu'on vient d'insérer, le théorème du texte est probablement faux, mais néanmoins la relation $Br(K) = 0$ reste vraie sans cette restriction. Il suffit, pour le voir, de reprendre la démonstration classique (non cohomologique) du fait que tout corps gauche fini sur K de centre K est identique à K, utilisant l'extension au corps gauche de la valuation qu'on a sur K. Cet argument marche en effet en supposant seulement V hensélien, au lieu de complet.

p. 93, Corollaire (2.2):

Comme fait remarquer J.P. Serre, la suite exacte écrite dans ce corollaire se décompose en des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H^i(k,\underline{G}_m) \longrightarrow H^i(K,\underline{G}_m) \longrightarrow H^{i-1}(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \longrightarrow 0 \quad , \quad (i \geqslant 2) \quad ,$$

qui splittent (le choix d'une uniformisante de V définissant un splittage de ces suites exactes). Pour le voir, il suffit de définir pour tout $i \geqslant 2$ un homomorphisme $H^{i-1}(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \simeq H^i(k,\underline{Z}) \longrightarrow H^i(K,\underline{G}_m)$, inverse à gauche de $H^i(K,\underline{G}_m) \longrightarrow H^{i-1}(k,\underline{Q}/\underline{Z})$. On prend le composé $H^i(k,\underline{Z}) \longrightarrow H^i(K,\underline{Z}) \longrightarrow H^i(K,\underline{G}_m)$, où la dernière flèche est celle déduite de l'homomorphisme $(\underline{Z})_K \longrightarrow \underline{G}_m$ provenant du choix d'une uniformisante de V. On a en particulier

$$Br(K) \simeq Br(k) + H^1(k,\underline{Q}/\underline{Z}) \quad ,$$

isomorphisme dû déjà à WITT (1936).

CLASSES DE CHERN ET REPRESENTATIONS LINEAIRES DES GROUPES DISCRETS

par A. GROTHENDIECK

§ 0. Introduction.

0.1. Soit G un groupe discret opérant linéairement sur un espace vectoriel complexe E de dimension finie. Il est bien connu comment associer à E des "classes de Chern"

$$c_i(E) \in H^{2i}(G, \mathbb{Z}) \quad . \tag{0.1}$$

Pour ceci, on interprète la cohomologie entière de G comme étant celle de son "espace classifiant" B_G [7] [34] , et utilisant le fibré universel E_G , qui est un fibré principal de base B_G , groupe G , pour tordre E , on trouve un fibré vectoriel associé $\mathbb{E} = (E,G) = (E_G \times E)/G$, (où on fait opérer G sur $\mathbb{E}_G \times E$ par $g(a,x) = (a.g^{-1} ,g.x))$. Par définition, les classes $c_i(E)$ sont les classes de Chern du fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur B_G (cf. [23] pour la définition et les propriétés des classes de Chern de fibrés vectoriels). Cette définition des classes (0.1) est indiquée dans l'appendice à [4] , où est également soulevée la question d'une définition purement algébrique de ces classes, n'utilisant pas la construction (de nature topologique et transcendante) de l'espace classifiant B_G. Le but initial du présent travail a été de fournir une solution à ce problème.

0.2. Signalons d'abord qu'il y a lieu de reformuler le problème initial, dont la solution est négative pour des raisons triviales que nous allons expliquer maintenant. Notons que par "définition purement algébrique" il faut entendre sans doute une définition indépendante de la topologie mise sur le corps des complexes, et qui garderait donc un sens si ce corps était remplacé par n'importe quel corps de base, soumis au besoin à des conditions purement algébriques convenables, telles que celle d'être algébriquement clos, ou même d'être isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (i.e. d'être en plus de caractéristique nulle et de degré de transcendance sur le corps premier égal à la puissance du continu). On demanderait alors aux classes de Chern (0.1) d'être inchangées pour un changement de corps de base par un isomorphisme $k \to k'$ (et en particulier, par automorphismes du corps k). De plus, dans le cas où $k = \mathbb{C}$, elles doivent coïncider avec les classes définies plus haut par voie transcendante. Or, même en se bornant à la seule classe $c_1(E)$, au cas de vectoriels E de dimension 1, et du seul corps de base $k = \mathbb{C}$, on voit facilement qu'une telle théorie n'existe pas, même si G est un groupe cyclique d'ordre $n > 1$. En effet, la donnée d'une représentation linéaire de G dans un espace vectoriel E de dimension 1 sur k revient à la donnée d'un homomorphisme $G \to k^*$ de G dans le groupe k^* des éléments inversibles de k, ou encore (tout élément de G étant d'ordre fini) d'un homomorphisme

(0.2) $$G \longrightarrow \mu_\infty(k) \ ,$$

où $\mu_\infty(k)$ désigne le groupe des <u>racines de l'unité</u> de k . D'autre part, G étant fini, donc $H^i(G,\mathbb{Q}) = 0$ pour $i > 0$, la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de G -modules triviaux $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ nous donne un isomorphisme canonique

(0.3) $$H^2(G,\mathbb{Z}) \simeq H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \ ,$$

de sorte que la définition d'une classe $c_2(E) \in H^2(G,\mathbb{Z})$ revient à la définition d'un homomorphisme

(0.4) $$G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ .$$

D'ailleurs, lorsque k est algébriquement clos de caractéristique nulle, on sait que le groupe $\mu_\infty(k)$ est isomorphe (non canoniquement) au groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si on a même $k = \mathbb{C}$, alors un isomorphisme canonique

(0.5) $$\phi : \mu_\infty(\mathbb{C}) \xleftarrow{\ \simeq\ } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

peut être choisi de façon bien connue, utilisant l'exponentielle :

(0.6) $$\phi\,(q \bmod \mathbb{Z}\,) = \exp\,(2i\pi q) \quad \text{pour} \quad q \in \mathbb{Q} \ .$$

On vérifie aussitôt que via les isomorphismes (0.3) et (0.5) , la classe de Chern $c_1(E)$ définie dans 0.1 n'est autre que l'homomorphisme (0.2), i.e. qu'on a égalité entre ce dernier et (0.4) modulo l'identification (0.5) . Or l'isomorphisme (0.5) n'est pas de nature algébrique, mais utilise au contraire de façon essentielle la topologie du corps $\mathbb{C}$; en fait, on sait, par un théorème classique de GAUSS [29, p. 53] que composant cet isomorphisme avec les automorphismes de $\mu_\infty(\mathbb{C})$ induits par les automorphismes du corps des complexes, on trouve tous les isomorphismes possibles entre $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\mu_\infty(\mathbb{C})$, qui forment un torseur (= ensemble principal homogène) sous le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \prod \mathbb{Z}_\ell^*$, produit des groupes $\mathbb{Z}_\ell^*$ des entiers ℓ -adiques, pour tous les nombres premiers ℓ . Ceci montre donc que la classe $c_1(E)$ définie par voie transcendante n'a pas la propriété d'invariance algébrique demandée.

0.3. Ces considérations suggèrent cependant que pour trouver une définition purement algébrique des classes de Chern $c_i(E)$, il faudra remplacer le groupe de coefficients $\mathbb{Z}$ par des groupes différents, attachés fonctoriellement au corps de base k (*), et plus spécifiquement, au groupe $\mu_\infty(k)$ des racines de l'unité dans k . En fait, étant fixé un entier n premier à la caractéristique de k , et désignant par $\mu_n(k)$ le groupe des racines n.èmes de l'unité dans k (isomorphe, non canoniquement, au groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) , on trouve aisément une définition algébrique d'une classe

$$c_1(E) \in H^2(G, \mu_n(k)) \quad , \tag{0.7}$$

définie comme

$$c_1(E) = \partial(d) \quad , \tag{0.8}$$

où

$$d \in H^1(G, k^*) \quad \text{i.e.} \quad d : G \longrightarrow k^*$$

est défini comme le déterminant de la représentation linéaire donnée de G dans E :

(*) Supposé algébriquement clos dans ce qui suit.

$$d(g) = \text{dét}\,(g_E) \quad , \tag{0.9}$$

et où ∂ est l'opérateur cobord de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de G-modules triviaux (dite "de KUMMER") :

$$0 \longrightarrow \mu_n(k) \longrightarrow k^* \xrightarrow{x \rightsquigarrow x^n} k^* \longrightarrow 0 \quad . \tag{0.10}$$

La classe (0.7) jouera alors le rôle d'une première classe de Chern "mod n" . La formule habituelle d'additivité pour une extension

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

de deux représentations :

$$c_i(E) = \sum_{j+k=i} c_j(E')c_k(E'') \quad ,$$

nous oblige alors, pratiquement, à chercher une définition des classes de Chern mod n supérieures comme étant des classes

$$c_i(E) \in H^{2i}(G, \mu_n(k)^{\otimes i}), \text{ où } \mu_n(k)^{\otimes i} = \overbrace{\mu_n(k) \otimes \ldots \otimes \mu_n(k)}^{i \text{ facteurs}} \quad . \tag{0.11}$$

0.4. Dans ce travail, nous présentons une construction algébrique de tels invariants (0.11) , et explicitons leur lien avec la réduction mod n des classes de Chern entières (0.1) définies par voie transcendante, lorsque le corps de base k est égal à $\mathbb{C}$. On obtient l'équivalent algébrique des classes de Chern entières, sur un corps algébriquement clos k quelconque, en introduisant, pour tout entier ℓ premier à la caractéristique de k , le <u>module de Tate</u>

$$T_\ell(k) = \varprojlim_{\nu} \mu_{\ell^\nu}(k) \quad , \tag{0.12}$$

qui est un $\mathbb{Z}_\ell$-module isomorphe (non canoniquement !) à $\mathbb{Z}_\ell$, ses puissances tensorielles

$$T_\ell(k)^{\otimes i} \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \quad ,$$

également isomorphes (non canoniquement) à $\mathbb{Z}_\ell$, et les groupes de cohomologie de type ℓ -adique, définis par

$$H^j(G, T_\ell(k)^{\otimes i}) = \varprojlim_{\nu} H^j(G, \mu_{\ell^\nu}(k)^{\otimes i}) \quad .$$

Alors la collection des classes de Chern mod ℓ^ν , pour ν variable, définit des classes de Chern

(0.13) $$c_i(E) \in H^{2i}(G, T_\ell(k)^{\otimes i}) \quad ,$$

qui donnent l'approximation algébrique la meilleure possible aux classes de Chern entières transcendantes (0.1) . Elles ont, d'autre part, toutes les propriétés désirables : non seulement celles familières de la théorie transcendante, mais également les propriétés de fonctorialité pour un corps de base k variable.

0.5. Il résulte de ces propriétés fonctorielles que dans le cas où la représentation linéaire donnée de G , sur le corps algébriquement clos k , provient d'une représentation définie sur un sous-corps k_o , (plus généralement, lorsque la classe mod. isomorphisme de cette représentation est "rationnelle sur k_o "), alors <u>les classes</u> $c_i(E)$ <u>de</u> 0.13 <u>sont invariantes par action du groupe des</u> k_o <u>-automorphismes de</u> k . C'est là <u>une condition cohomologique nécessaire tout-à-fait non triviale pour la possibilité de réduire le corps de base de la représentation à un sous-corps</u> k_o . Lorsque k_o est de type fini sur le corps premier, il en résulte par exemple (grâce au fait qu'alors le groupe des k_o -automorphismes "opère énormément" sur les racines de l'unité et par suite sur les modules de Tate $T_\ell(k)$) que toutes les classes de Chern ℓ -adiques sont des classes de torsion. Ainsi, lorsque G est de type fini, comme on peut toujours réduire alors le corps de définition à un corps de type fini au sens absolu, on trouve que dans ce cas toutes les classes $c_i(E)$ ℓ -adiques sont des classes de torsion ! On retrouve ainsi par voie arithmétique un résultat "transcendant" connu [32, p. 223] [26] , qu'on peut exprimer en disant que pour toute représentation linéaire d'un groupe discret G dans un vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, les classes de Chern rationnelles sont nulles, (ou, ce qui revient au même moyennant une restriction convenable assez anodine sur G , que les classes de Chern entières sont des classes de torsion). La méthode arithmétique donne cependant des résultats beaucoup plus précis, en permettant de majorer multiplicativement les ordres de ces classes de Chern entières $c_i(E)$, en fonction de la structure d'un corps de définition k_o de type fini, et plus précisément, en fonction de la sous-extension cyclotomique maximale de k_o (voir 4.11 pour l'énoncé précis).

0.6. Le principe de définition des classes de Chern "arithmétiques" (0.11) est le suivant. On remarque qu'un substitut algébrique de l'espace classifiant B_G du groupe discret G est tout trouvé : c'est le "topos" formé des G -ensembles (i.e. des ensembles sur lesquels le groupe G opère). Les faisceaux abéliens (ou groupes abéliens) de ce topos sont en effet simplement les G -modules M , le foncteur "sections" est le foncteur $M \rightsquigarrow H^\circ(G,M) = M^G$, et les foncteurs dérivés de ce foncteur, i.e. les groupes de cohomologie du topos, sont, par définition même, donnés par les groupes de cohomologie $H^i(G,M)$ de G . D'autre part, munissant ce topos du faisceau d'anneaux constant défini par le corps k , une représentation linéaire de G sur k n'est autre qu'un k -Module sur le topos, lequel est localement libre de type fini si et seulement si la représentation correspondante de G est de dimension finie. Il s'impose alors de paraphraser la construction des classes de Chern, donnée dans [17] , dans le cas des Modules localement libres de type fini sur un topos localement annelé quelconque. Cette construction est esquissée dans ce cadre général dans le § 1. Signalons qu'elle fait un usage essentiel de la cohomologie étale [2] . Ainsi, dans le cas du topos associé à un groupe discret G , et du Module associé à une représentation linéaire de G dans un vectoriel E sur k , elle fait intervenir la topologie étale du schéma projectif $P(E)$ associé à E , via la cohomologie étale mixte de ce schéma, considéré comme schéma à groupe d'opérateurs discret G . Au § 2, nous définissons de façon générale la cohomologie étale mixte d'un schéma X à groupe discret d'opérateurs, sur le modèle de [16] , et définissons (suivant le programme esquissé au § 1) les classes de Chern mixtes pour un faisceau localement libre "à opérateurs" $\mathbb{E}$ sur (X,G) . Cette définition contient comme cas particulier la définition des classes (0.11).

Il convient de remarquer cependant que cette définition est considérablement plus riche que celle envisagée dans 0.3 , qui correspond au cas où X est le spectre d'un corps algébriquement clos sur lequel G opère trivialement. Ainsi, pour une représentation linéaire de G définie sur un corps de base <u>arbitraire</u> k , la i.ème classe de Chern mod n se trouve dans un groupe de cohomologie mixte

(0.14) $$c_i(E) \in H^{2i}(\mathrm{Spec}\,(k),G\,;\,\mu_n^{\otimes i})\quad ,$$

qui fait intervenir simultanément la cohomologie du groupe discret G et la cohomologie du groupe profini $\pi_1(k) = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k . L'homomorphisme canonique

$$(0.15)\quad H^{2i}(\mathrm{Spec}(k);G,\ \mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(\mathrm{Spec}(\bar{k}),G;\mu_n^{\otimes i}) = H^{2i}(G,\mu_n(\bar{k})^{\otimes i})$$

est en général loin d'être injectif, et la classe (0.14) peut fort bien être non nulle, alors que son image (0.11) (où on remplace k par $\bar{k}$) par l'homomorphisme (0.15) est nulle. C'est ainsi que nous verrons sur des exemples que lorsque k est de type fini, donc que (comme il a été dit dans 0.5) la classe de Chern ℓ -adique (0.11) de la représentation de G dans $E\otimes_k\bar{k}$ est une classe de torsion, il n'en est pas nécessairement de même de la classe de Chern ℓ -adique <u>sur</u> k , définie par les classes (0.14) où n parcourt les puissances de ℓ . On peut bien entendu dans de telles réflexions remplacer le corps de base par n'importe quel anneau de base. On trouve par exemple de cette façon des conditions cohomologiques nécessaires pour la possibilité de la restriction du corps (ou de l'anneau) de base, dans une représentation linéaire donnée de G : savoir que toutes les classes de Chern proviennent de classes de Chern mixtes relatives à l'anneau plus petit. Ces conditions sont considérablement plus fortes que celles signalées à la fin de 0.5. Il semblerait d'ailleurs intéressant d'examiner la question : dans quelle mesure ces conditions cohomologiques nécessaires sont-elles aussi suffisantes, en travaillant avec des représentations virtuelles (éléments des anneaux de représentation $R_k(G)$) plutôt qu'avec des représentations effectives?

0.7. Dans le § 6, utilisant le même principe de construction, mais en utilisant la cohomologie de DE RHAM ou de HODGE des schémas, plutôt que leur cohomologie ℓ -adique, on trouve deux autres variantes de la notion de classes de Chern d'un Module localement libre à opérateurs. Elle comprend encore comme cas particulier la définition de classes de Chern pour une représentation linéaire d'un groupe discret G, qui devrait pouvoir rendre des services analogues à ceux de la définition ℓ -adique. Ces classes, liées aux différentielles <u>absolues</u> du corps ou anneau de base, sont de ce fait de nature exclusivement arithmétique (même lorsque le corps de base est le corps des complexes !). La question des relations entre ces classes de Chern au sens de DE RHAM ou de HODGE avec les classes de Chern ℓ -adiques (comme d'ailleurs de celles-ci entre elles) est une question fort intéressante, qu'on peut considérer comme un cas particulier de la question analogue pour la cohomologie des schémas - question qui est loin d'être éclaircie à l'heure actuelle. Notons que les classes de Chern de DE RHAM ont l'avantage sur les classes ℓ -adiques de se construire sans hypothèse sur les caractéristiques résiduelles de la base. En revanche, lorsque le groupe G est fini, et qu'on travaille sur un corps de base de caractéristique nulle, les classes de Chern style DE RHAM sont toutes nulles ; et lorsque l'on travaille sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres, il en est encore de même des c_i pour $i > 1$. Dans le cas des groupes finis, cela limite forcément l'intérêt de ces classes de Chern style DE RHAM.

0.8. Bien entendu, la construction du topos envisagé au début du § 0.6 se généralise aussitôt au cas où on remplace le groupe G discret par un groupe algébrique quelconque sur un corps donné, ou plus généralement par un schéma en groupes sur une base quelconque (ou, également, par un groupe topologique quelconque). On est ainsi conduit au "point de vue faisceautique" dans la théorie de l'espace classifiant, qui sera exposé systématiquement ailleurs [15] . De ce point de vue, on peut envisager la construction des classes de Chern ℓ -adiques (resp. style DE RHAM, ou HODGE) pour les Modules localement libres sur les topos localement annelés, comme réduite à la même construction dans la situation "universelle" : celle du topos étale associé au site des schémas de type fini sur $S = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[\ell^{-1}]$ (resp. $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$) à schéma en groupes d'opérateurs $G = G\ell(n)_S$ (le schéma en groupes linéaire sur S), ce topos jouant le rôle d'un "topos classifiant" pour le groupe linéaire G . La classe de Chern ℓ -adique (disons) "universelle" pour les fibrés de rang n est alors une classe de cohomologie ℓ -adique de ce topos :

(0.16) $$c_i \in H^{2i}(\mathbb{B}_{Gl(n)}, T_\ell^{\otimes i}) \quad .$$

Cela permet une approche assez différente [15] pour la définition des diverses variantes des c_i . Nous verrons par exemple dans loc. cit. que la cohomologie de ce topos classifiant (à coefficients ℓ -adiques constants tordus) est isomorphe à celle du schéma grassmanien habituel sur S , et que via cet isomorphisme, les c_i sont les classes de cohomologie associées [19] à des cycles convenables sur la grassmannienne, - cycles d'ailleurs exprimables en fonction des classiques cycles de Schubert. Ainsi peuvent se préciser les liens entre la théorie arithmétique et la théorie topologique transcendante des classes caractéristiques. En même temps, la nature des faisceaux de coefficients naturels pour les classes de Chern ℓ -adiques peut s'interpréter par le phénomène, sans doute assez familier à l'heure actuelle, que la classe de cohomologie associée à un cycle de codimension i sur un schéma régulier est relative au même faisceau de coefficients ℓ -adique,

$$T_\ell^{\otimes i} = \varprojlim_\nu \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i} \quad ,$$

que la i.ème classe de Chern d'un fibré vectoriel (la source commune de l'introduction de ces sempiternels faisceaux étant comme de juste la suite exacte de KUMMER (0.10)).

Signalons que, suivant la même voie, on parvient [15] à une théorie générale des classes caractéristiques en géométrie algébrique, englobant également la théorie des <u>classes de STIEFEL-WHITNEY</u> pour les fibrés orthogonaux ; d'où en particulier une théorie des classes de STIEFEL-WHITNEY pour des représentations linéaires de groupes dans des espaces vectoriels munis de formes quadratiques non dégénérées.

0.9. L'énoncé transcendant auquel on a fait allusion dans 0.5 peut s'énoncer encore en disant que si H est le groupe linéaire complexe à n variables, G un groupe discret, et

$$u : G \longrightarrow H \tag{0.17}$$

un homomorphisme de groupes, alors l'homomorphisme correspondant

$$B_u : B_G \longrightarrow B_H$$

induit un homomorphisme nul sur la cohomologie rationnelle :

$$H^i(B_H, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^i(B_G, \mathbb{Q}) \quad \text{est nul pour} \quad i > 0 \quad . \tag{0.18}$$

De façon équivalente, si X est un espace topologique (un polyèdre fini, si on veut), et P un fibré principal sur X de groupe H, associé à une représentation (0.17) de son groupe fondamental

$$G = \pi_1(X) \quad ,$$

(ce qu'on exprime parfois en disant que P est un fibré principal _plat_ sur X, ou lorsque X est une variété différentiable, que P admet une _connexion intégrable_ invariante par H), les classes caractéristiques rationnelles de P sont nulles, i.e.

(0.19) $$H^i(B_H, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^i(X, \mathbb{Q}) \text{ est nul pour } i > 0 \quad .$$

Il est connu que cette propriété s'étend au cas où H est, plus généralement, un groupe complexe réductif dont le groupe des composantes connexes est fini (ce qui implique aussitôt la même conclusion lorsque H est un groupe de Lie compact, en utilisant le groupe complexe associé [10] , qui satisfait en effet aux hypothèses précédentes). Cet énoncé, plus général en apparence, est d'ailleurs une conséquence immédiate du cas particulier où H est le groupe linéaire, grâce au fait que pour un groupe complexe réductif connexe H, l'anneau caractéristique $H^*(B_H, \mathbb{Q})$ est engendré par les classes de Chern des fibrés vectoriels complexes sur B_H associés aux représentations linéaires complexes de H (*).

Le théorème qu'on vient de signaler ne s'étend pas au cas où H est un groupe de Lie connexe réel (même semi-simple) ou complexe quelconque, [32, cor. au Th. 2] . Dans un appendice à ce travail, nous prouvons par contre qu'il suffit que H soit un groupe de Lie complexe _algébrique_. Notre démonstration est transcendante en apparence, mais signalons que l'on pourrait encore en donner une démonstration arithmétique, par essentiellement le même argument d'invariance que celui indiqué dans 0.5 ; il suffirait pour cela

(*) Ce dernier fait, qui ne semble pas figurer explicitement dans la littérature, doit cependant être considéré comme "bien connu", et il peut servir de base à un traitement considérablement simplifié de la théorie des classes caractéristiques des groupes de Lie connexes.

d'utiliser la théorie algébrique [15] de la cohomologie classifiante pour les groupes algébriques (à laquelle nous avons fait déjà allusion dans 0.8). L'auteur pense que la raison profonde du théorème en question, et qui tient le plus directement compte de l'hypothèse d'algébricité faite sur H, est bien donnée par la démonstration arithmétique à laquelle on vient de faire allusion.

0.10. Remarquons encore que le théorème précédent n'est pas le seul exemple connu de théorème, de nature topologique ou géométrique par son énoncé, dont la démonstration naturelle (ou même la seule démonstration connue) se fasse par voie arithmétique, par un procédé de réduction à des corps ou anneaux de base de type fini au sens absolu. Peut-être le premier exemple connu est le beau théorème de LAZARD [30], suivant lequel toute loi de groupe, donnée par des formules polynomiales sur un espace affine k^n sur un corps k, est nécessairement nilpotente, qui se prouve par réduction au cas où k est un corps fini, auquel cas le théorème est trivial. (Il ne semble pas qu'on connaisse une autre démonstration "élémentaire" de ce théorème ; la seule autre démonstration que je connaisse utilise la théorie de structure de BOREL des groupes algébriques affines, et la théorie de la cohomologie étale). Pour un autre exemple, tiré de la théorie "géométrique" des familles de variétés abéliennes en caractéristique nulle, par réduction à une situation à corps résiduel fini, nous renvoyons à [21], où sont combinées méthodes arithmétiques et transcendantes. Comme dernier exemple, reposant d'ailleurs comme 0.5 sur les propriétés galoisiennes du groupe des racines de l'unité, signalons encore ici sans démonstration le théorème suivant, qui utilise de plus la résolution des singularités de HIRONAKA :

<u>Soit</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>un morphisme propre d'espaces analytiques com-</u>

plexes, avec S non singulier de dimension 1, supposons que X soit "algébrique relativement à S ", par exemple soit un sous-espace analytique fermé de $S \times P^r_{\mathbb{C}}$ (f étant induit par la projection pr_2 de ce dernier). Alors il existe une partie discrète T de S telle que, pour tout entier i, le faisceau $R^i f_* (\mathbb{Q}_X)$ soit localement constant sur $S-T$ (où $\mathbb{Q}_X$ désigne le faisceau constant de valeur $\mathbb{Q}$ sur X), donc donné sur $S-T$ par une représentation linéaire de $\pi_1(S-T,s_o)$ (groupe fondamental de $S-T$ en un point base donné s_o) par automorphismes d'un espace vectoriel $H^i = H^i(X_{s_o},\mathbb{Q})$ de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. De plus, pour tout $s \in T$, désignant par L_s l'élément du groupe fondamental de $S-T$ défini par un "lacet autour de s " issu de s_o, il existe une puissance ${L_s}^{n(s)}$ (avec $n(s) > 0$) qui opère de façon unipotente sur les V^i (*).

J'ignore si un énoncé de cette nature est valable lorsqu'on abandonne l'hypothèse d'algébricité relative faite sur le morphisme f, et j'ai tendance à suspecter que non (**) ; remarque analogue pour la formulation hypothétique, en termes de familles analytiques de tores complexes sur une base algébrique, du résultat cité de [21] sur les familles algébriques de variétés abéliennes. Comparer aussi avec le résultat négatif signalé dans 0.6, et la question soulevée plus bas (4.14 a)) pour les classes de Chern "mixtes" sur les variétés analytiques complexes compactes.

0.11. Dans le même ordre d'idées que les réflexions qui précèdent, on

(*) Ce théorème figure dans une lettre de l'auteur à J.P.SERRE, du 5.10.1964.

(**) Après avoir rédigé le présent article, l'auteur a pris connaissance d'un preprint d'un travail de P.A. GRIFFITHS, annonçant un résultat sensiblement identique (par une démonstration transcendante, utilisant les techniques de LEFSCHETZ) : cf. P.A. GRIFFITHS, On the periods of integrals of algebraic manifolds (Summary), (miméographié, Berkeley). Dans une communication personnelle, P.A. GRIFFITHS a précisé que l'hypothèse d'algébricité n'est en fait pas requise ; par contre, il suppose X et les fibres "générales" non singulières.

peut remarquer que beaucoup d'énoncés de topologie gardent un sens, et peuvent encore se démontrer, dans le contexte des variétés algébriques "abstraites", et plus généralement des schémas (par exemple en utilisant la topologie étale de ceux-ci). Ce sont même souvent des cas particuliers de tels théorèmes sur des schémas généraux (valables généralement en caractéristique quelconque). Il doit en être ainsi, bien entendu, des théorèmes topologiques concernant plus spécialement les variétés algébriques (tels les théorèmes du type de LEFSCHETZ pour les sections hyperplanes des variétés projectives, quoique une démonstration en termes de cohomologie étale n'ait pas encore été trouvée à l'heure actuelle pour le plus profond d'entre eux). Cette remarque prend tout son sens lorsqu'on observe que certains des espaces les plus importants pour les topologues sont bien des variétés algébriques complexes. C'est ainsi que, aux groupes de Lie compacts chers aux topologues, il y a tout avantage, pour une meilleure compréhension géométrique de la situation, à substituer les groupes complexifiés [10] , qui fournissent les mêmes invariants homotopiques, mais ont l'avantage d'être des groupes linéaires algébriques sur $\mathbb{C}$; on constate que le fibré universel E_G et l'espace classifiant B_G d'un tel groupe, qui se construisent en termes de variétés de STIEFEL ou de GRASSMANN complexes, sont également des variétés algébriques (plus précisément, des limites inductives de telles variétés). La cohomologie entière de B_G (du moins modulo torsion, et pour G connexe) peut d'ailleurs s'interpréter de façon purement algébrique comme son anneau de CHOW (fait assez spécial aux variétés algébriques en question, et qui avait été signalé déjà dans [18, 4-24]) ; on peut également la remplacer par les cohomologies ℓ -adiques. C'est en ce sens, par exemple, que la théorie des espaces classifiants des groupes de Lie compacts peut être considérée comme un chapitre de géométrie algébrique "abstraite", et qui pourrait être traité (du moins pour ses résultats cohomologiques les plus importants) par les méthodes de géométrie algébrique, comme il sera plus ou moins clair pour le lecteur attentif de [18] ; comparer § 0.7, et cf [15] pour un exposé de ce point de vue. Comme le groupe $K(B_G)$ topologique peut également s'interpréter comme le groupe K des classes de faisceaux cohérents sur la variété algébrique B_G (ou du moins comme une limite projective des groupes K des variétés algébriques dont B_G est la limite), ceci invite donc aussi à reconsidérer les théorèmes connus récents de ATIYAH [6] , SEGAL-ANDERSON [1] et KAROUBI [27] sur la comparaison de l'anneau des représentations (complexes, complexes orthogonales ou complexes symplectiques) de G , et du groupe K correspondant (KU , KO ou KSp) de B_G , en termes de géométrie algébrique sur un corps de base (voire un schéma de base) général.

Comme autre exemple du rôle clef joué par les variétés algébriques en topologie, rappelons la détermination par MILNOR et NOVIKOFF [33] de l'anneau de cobordisme quasi-complexe, dont les générateurs sont les classes de certaines variétés algébriques complexes projectives très simples.

Ces exemples, et bien d'autres, permettent de prévoir que les inter-relations entre la topologie, la géométrie et l'arithmétique (sans compter l'analyse, comme auxiliaire de tous trois) ne pourront que se multiplier et se resserrer dans l'avenir, pour le plus grand bénéfice de chacune de ces disciplines, et le plaisir et la délectation des mathématiciens concernés.

§ 1. Classes de Chern sur un topos localement annelé.

1.1. Dans le présent paragraphe, nous donnons l'esquisse d'une théorie des classes de Chern sur un topos [37, II 4.12] localement annelé [22], via une théorie de la "cohomologie étale des topos localement annelés", qui devrait être écrite sur le modèle de [2]. Dans le cas d'un espace topologique ordinaire, annelé par les fonctions continues à valeurs complexes, cette théorie est essentiellement la théorie ordinaire des classes de Chern, traitée suivant la méthode de [17], à la différence près qu'ici les coefficients naturels sont des faisceaux de racines de l'unité tordues, au lieu du faisceau constant des entiers, la suite exacte de KUMMER (1.1) remplaçant la suite exacte de l'exponentielle

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{O}_X \longrightarrow \mathbb{O}_X^* \longrightarrow 0$$

(qui, elle, fait appel à la structure topologique des groupes de sections du faisceau structural). Dans le cas d'un schéma, la théorie des classes de Chern est esquissée dans [25], sur le même modèle. Dans les deux paragraphes suivants, nous développerons directement, sur ce modèle, la théorie des classes de Chern sur les schémas à opérateurs, sans nous appuyer explicitement dans ce cas particulier sur la théorie des schémas relatifs de [22], ni celle de la cohomologie étale des topos localement annelés généraux, qui reste à écrire. La lecture du présent paragraphe n'est donc pas, à strictement parler, indispensable à l'intelligence du présent article. Il fournit cependant le principe unificateur pour les diverses variantes de la notion de classe de Chern, et a été la motivation initiale pour la définition donnée au paragraphe suivant, qui n'est qu'un simple exercice de transcription de la définition générale donnée ici.

1.2. Soit X un topos localement annelé. Nous supposons défini, sur le modèle de [2, Exp. VII], le "site étale de X" (*) dont la catégorie des fais-

(*) Cette construction est faite maintenant dans [22].

ceaux sera notée ici $X_{\text{ét}}$, pour éviter des confusions avec le topos de départ X . Soit $n > 0$ un entier tel que $n.\,1_X$ soit une section inversible du faisceau structural $\mathcal{O}_X$. Considérant sur $X_{\text{ét}}$ le faisceau "multiplicatif" $(\mathbb{G}_m)_{X_{\text{ét}}}$, l'élévation à la puissance n.ème dans ce faisceau est alors un épimorphisme (NB c'est en vue d'obtenir ce fait qu'on doit travailler avec les topologies étales), donc fournit une suite exacte de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$:

$$(1.1) \qquad 0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

(<u>suite exacte de KUMMER</u>) - où nous avons omis dans les notations $\mathbb{G}_m$ et μ_n la référence au topos de base $X_{\text{ét}}$. Le faisceau μ_n sur $X_{\text{ét}}$, noyau de l'élévation à la puissance n.ème dans $\mathbb{G}_m$, est appelé <u>faisceau des racines n.èmes de l'unité</u> sur $X_{\text{ét}}$. On vérifie que c'est un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modules <u>inversible</u>, i.e. localement isomorphe au faisceau constant sur $X_{\text{ét}}$ de valeur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La même chose sera vraie par suite pour ses puissances tensorielles $\mu_n^{\otimes i}$, pour $i \in \mathbb{Z}$.

Si alors $\mathbb{L}$ est un faisceau de modules inversible (i.e. localement libre de rang 1) sur X , d'où une classe

$$(1.2) \qquad c\ell(\mathbb{L}) \in H^1(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{G}_m) \quad ,$$

l'opérateur cobord de la suite exacte (1.1) nous fournit un élément

$$(1.3) \qquad c_1(\mathbb{L}) = \partial\,(c\ell(\mathbb{L})) \in H^2(X_{\text{ét}}, \mu_n) \quad ,$$

qui sera par définition la <u>première classe de Chern</u> du faisceau inversible $\mathbb{L}$.

1.3. Plus généralement, pour un Module localement libre $\mathbb{E}$ sur X , nous nous proposons de définir des classes de Chern

(1.4) $$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X_{ét}, \mu_n^{\otimes i}) \quad .$$

Supposons $\mathbb{E}$ de rang constant r . On introduit le fibré projectif P associé à E [EGA II 4.11] , qui est un schéma relatif sur X au sens de loc. cit., et en particulier c'est un topos localement annelé au-dessus de X . Par suite $P_{ét}$ est un topos localement annelé au-dessus de $X_{ét}$, et on a un morphisme structural

$$f : P_{ét} \longrightarrow X_{ét} \quad .$$

Procédant comme dans [17] , on considère le faisceau inversible canonique $\mathbb{L} = \mathcal{O}_P(-1)$ sur P , d'où une classe

(1.5) $$\xi = c_1(\mathbb{L}) \in H^2(P_{ét}, \mu_n) \quad , \quad \mathbb{L} = \mathcal{O}_P(-1) \quad ,$$

et par conséquent une section

(1.6) $$\xi' \in H^0(X_{ét}, R^2 f_* (\mu_n)) \quad .$$

Lorsqu'on se fixe un isomorphisme

(1.7) $$\phi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{X_{ét}} \xrightarrow{\sim} (\mu_n)_{X_{ét}} \quad ,$$

(ce qui est toujours possible localement sur $X_{ét}$, tout au moins), le résultat clef dans l'étude cohomologique de f consiste dans les relations :

(1.8) $$\begin{cases} R^j f_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{si } j \text{ impair, ou } j > 2(r-1) \quad . \\ R^{2i} f_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ est libre sur } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ , de base } \xi_0'^{\,i} \text{, si} \\ \qquad 0 \leq i \leq r-1 \quad , \end{cases}$$

où $\xi'_o \in H^o(X_{ét}, R^2f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ est déduit de ξ' donné par (1.6) grâce à l'isomorphisme (1.7) sur les coefficients. Utilisant la suite spectrale de Leray pour f et le faisceau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $P_{ét}$, on conclut de façon bien connue de (1.8) [25] que cette suite spectrale dégénère, et fournit un isomorphisme canonique de $H^*(X_{ét},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ -modules :

$$(1.9) \qquad H^*(P_{ét},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \coprod_i H^*(X_{ét},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\, \xi_o^{\,i} \;,$$

i.e. $H^*(P_{ét},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est libre sur $H^*(X_{ét},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, de base les $\xi_o^{\,i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$, $\xi_o \in H^2(P_{ét},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ désignant l'image de ξ (1.5) grâce à l'isomorphisme φ (1.7) sur les coefficients. C'est là une variante globale de (1.8), essentiellement équivalente à (1.8). Quant à la démonstration de (1.8), une fois étendue au cas des schémas relatifs le "théorème de changement de base pour un morphisme propre" de [2, Exp. XII], elle se ramène à la détermination de la structure cohomologique de l'espace projectif sur un corps algébriquement clos, qui est bien connue [25].

Toujours moyennant (1.7), on pourra de façon unique, grâce à (1.9), exprimer $\xi_o^{\,r}$ comme combinaison linéaire des $\xi_o^{\,i}$ $(0 \leqslant i \leqslant r-1)$, d'où une relation de la forme

$$(1.10) \qquad \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} c_i(\mathbb{E})_o\, \xi_o^{\,r-i} = 0 \;,$$

où les $c_i(\mathbb{E})_o \in H^{2i}(X_{ét},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont bien déterminés par cette relation et la condition $c_o(\mathbb{E})_o = 1$, et définissent les classes de Chern (1.4) de E à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'où grâce à (1.7) des classes de Chern (1.4) (puisque ϕ définit des isomorphismes

$$(1.11) \qquad \phi^i : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_n^{\otimes i} \quad).$$

1.4. Cette définition cependant dépend en apparence de l'existence et du choix d'un isomorphisme global (1.7) . Pour donner une définition qui en soit indépendante, on procède comme dans [25] pour déduire des isomorphismes (1.8) (qui gardent un sens localement sur $X_{\text{ét}}$) , pour tout faisceau $\mathbb{F}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modules sur $X_{\text{ét}}$, un isomorphisme

(1.12) $$H^i(P_{\text{ét}},f^*(\mathbb{F})) \simeq \coprod_{j\geqslant 0} H^{i-2j}(X_{\text{ét}},\mathbb{F}\otimes\mu_n^{\otimes(-j)})\,\xi^j \quad ,$$

(où la somme du deuxième membre est en fait finie, puisqu'il suffit de l'étendre aux $j \geqslant 0$ tels que $i-2j \geqslant 0$ i.e. $2j \leqslant i$) , qui réalise un isomorphisme de $H^i(P_{\text{ét}},f^*(\mathbb{F}))$ avec la somme directe des $H^{i-2j}(X_{\text{ét}},\mathbb{F}\otimes\mu_n^{\otimes(-j)})$ correspondants ; bien entendu, le produit de ce dernier module avec ξ^j s'entend au sens du cup-produit avec $\xi^j \in H^{2j}(P_{\text{ét}},\mu_n^{\otimes j})$, (où ξ^j est la cup-puissance j.ème de ξ défini dans (1.5)), compte tenu de l'homomorphisme canonique de $H^*(X_{\text{ét}}, \ldots)$ dans $H^*(P_{\text{ét}}, \ldots)$) . Ce cup-produit prend bien ses valeurs dans le premier membre de (1.12) .

La formule (1.12) , qui est une généralisation de (1.9) indépendante de la donnée d'un ϕ comme dans (1.7) , donne un sens à la formule analogue à (1.10) , où nous pouvons maintenant supprimer les indices o aux classes de cohomologie envisagées :

(1.13) $$\sum_{0\leqslant i\leqslant r} c_i(\mathbb{E})\,\xi^{r-i} = 0 \quad .$$

Compte tenu de (1.12) , où on fait $\mathbb{F} = \mu_n^{\otimes r}$, cette formule (1.13) , plus la relation $c_o(\mathbb{E}) = 1$, détermine de façon unique les $c_i(\mathbb{E})$ comme éléments des $H^{2i}(X_{\text{ét}},\mu_n^{\otimes i})$, annoncés dans (1.4) . On définit comme d'habitude la classe de Chern totale :

$$c(\mathbb{E}) = \sum_{i \geqslant 0} c_i(\mathbb{E}) \quad . \tag{1.14}$$

1.5. Procédant comme dans [17] , [25] , on établit pour les classes $c_i(\mathbb{E})$ les trois propriétés caractéristiques : compatibilité avec les <u>images inverses</u> de Modules localement libres par des morphismes de topos, <u>normalisation</u> pour le cas des Modules inversibles (alors la classe de Chern est celle définie par (1.3)), enfin et surtout, la formule d'additivité

$$c(\mathbb{E}) = c(E')\, c(E'') \tag{1.15}$$

pour une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'' \longrightarrow 0$$

de Modules localement libres. (Seule la vérification de cette dernière relation n'est pas triviale).

Pour simplifier, nous avions supposé dans nos réflexions que le Module localement libre $\mathbb{E}$ envisagé était de rang constant. Il est évident comment généraliser la définition au cas général, en décomposant le topos X en morceaux, sur chacun desquels $\mathbb{E}$ est de rang donné r . Le formulaire habituel (en particulier (1.15)) sera valable encore. Signalons également la formule bien connue

$$c_1(\mathbb{E}) = c_1\,(\text{dét}\,(\mathbb{E}))\quad , \tag{1.16}$$

où dét $(\mathbb{E})$ est le faisceau <u>inversible</u>, puissance extérieure maxima de $\mathbb{E}$, et où le deuxième membre de (1.16) peut donc s'interpréter par la formule (1.3) appliquée à dét $(\mathbb{E})$.

1.6. Il reste à examiner comment se comportent les classes de Chern $c_i(\mathbb{E})$, pour un $\mathbb{E}$ fixé, quand on fait varier n. Soit

$$n' = mn$$

un multiple de n, tel que $n'.1_X$ soit une section inversible de $\mathbb{O}_X$. Alors on a un homomorphisme canonique surjectif de faisceaux sur $X_{ét}$

(1.17) $$u_{n,n'} : \mu_{n'} \longrightarrow \mu_n ,$$

donné par l'élévation à la puissance n.ème. On en conclut des homomorphismes

(1.17 bis) $$u_{n,n'}{}^{\otimes i} : \mu_{n'}{}^{\otimes i} \longrightarrow \mu_n{}^{\otimes i} ,$$

d'où des homomorphismes canoniques

(1.18) $$u_{n,n'}^{(i)} : H^{2i}(X_{ét}, \mu_{n'}{}^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(X_{ét}, \mu_n{}^{\otimes i}) .$$

Ceci posé, désignant par $c_i^{(n)}(\mathbb{E})$ les classes de Chern à coefficients dans les $\mu_n{}^{\otimes i}$, on trouve la formule de comparaison

(1.19) $$c_i^{(n)}(\mathbb{E}) = u_{n,n'}^{(i)}(c_i^{(n')}(\mathbb{E})) ,$$

dont la démonstration est essentiellement triviale en termes des définitions (ou de la caractérisation axiomatique des classes de Chern par leurs trois propriétés fondamentales), et de la vérification dans le cas du c_1 des faisceaux inversibles. Ce dernier résulte aussitôt de l'homomorphisme sur les suites exactes de cohomologie, déduit de l'homomorphisme sur les suites exactes de KUMMER associées respectivement à l'entier n' et n :

$$(1.20)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mu_{n'} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\lambda \rightsquigarrow \lambda^{n'}} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow u_{n,n'} & & \Big\downarrow \alpha & & \Big\downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{n} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \end{array} ,$$

où $\alpha(z) = z^m$.

1.7. On peut exprimer les propriétés de compatibilités (1.19) de façon commode, lorsque n,n' parcourent les puissances d'un nombre premier ℓ fixé, en introduisant le "faisceau ℓ-adique"

$$(1.21)\qquad T_\ell = T_\ell(\mathbb{G}_m) = (\mu_{\ell^\nu})_{\nu \geqslant 0} ,$$

système projectif des faisceaux μ_{ℓ^ν} $(\nu \geqslant 0)$ sur $X_{ét}$ (les morphismes de transition étant donnés par (1.17)), et ses puissances tensorielles

$$(1.22)\qquad T_\ell^{\otimes i} = (\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})_{\nu \geqslant 0} ,$$

système projectif des faisceaux $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$, à morphismes de transition donnés par (1.17 bis) . Par abus de langage, le faisceau ℓ-adique $T_\ell^{\otimes 0}$ sera aussi simplement noté $\mathbb{Z}_\ell$, mais on gardera à l'esprit qu'il s'agit ici d'un système projectif de faisceaux sur $X_{ét}$, et non du faisceau constant sur $X_{ét}$ défini par l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques. On posera également, par définition

$$(1.23)\qquad H^j(X_{ét},T_\ell^{\otimes i}) = \varprojlim_{\nu} H^j(X_{ét},\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) .$$

Les relations de compatibilité (1.19) peuvent alors s'exprimer en disant que (pour un nombre premier ℓ fixé, tel que $\ell.1_X$ soit une section inversible de $\mathcal{O}_X$) les $c_i^{(\ell^\nu)}(\mathbb{E})$, pour ν variable, sont les composantes d'un élément bien déterminé

(1.24) $$c_i(\mathbb{E})(\ell) \in H^{2i}(X_{\text{ét}}, T_\ell^{\otimes i}) \quad ,$$

qu'on appellera la i.<u>ème classe de Chern</u> ℓ <u>-adique</u> du faisceau localement libre $\mathbb{E}$. La connaissance de ces $c_i(\mathbb{E})(\ell)$, pour tout nombre premier ℓ tel que $\ell.1_X$ soit inversible, équivaut à la connaissance des $c_i^{(n)}(\mathbb{E})$ pour tout n admissible i.e. tel que $n.1_X$ soit inversible. D'autre part, ces classes de Chern ℓ -adiques satisfont encore manifestement aux propriétés habituelles déjà énumérées plus haut, et en particulier à la formule d'additivité (1.15) pour une suite exacte courte de Modules localement libres $0 \longrightarrow \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'' \longrightarrow 0$.

1.8. Supposons que le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ de X soit un faisceau de $\mathbb{C}$ -algèbres (où $\mathbb{C}$ désigne le corps des complexes), qui soit muni en plus d'une structure vectorielle topologique (i.e. qui soit en même temps le faisceau de $\mathbb{C}$ -vectoriels sous-jacent à un faisceau sur X , à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques). Moyennant des conditions convenables, impliquant en particulier la convergence de la série exponentielle à coefficients dans $\mathcal{O}_X$, d'où la suite exacte exponentielle

(1.25) $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0 \quad ,$$

on peut espérer trouver, sur le modèle déjà utilisé, une théorie des classes de Chern à coefficients entiers

(1.26) $$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z}) \quad ,$$

pour les faisceaux de Modules localement libres $\mathbb{E}$ sur X , qui pour un faisceau inversible $\mathbb{L}$ soit donné par la formule

(1.27) $$c_1(\mathbb{L}) = \partial(c\ell(\mathbb{L})) \in H^2(X,\mathbb{Z}) \quad ,$$

où ici l'opérateur cobord ∂ est celui associé à la suite exacte (1.25). La question technique qui se posera, pour développer ce point de vue, est d'arriver à formuler des conditions sur X, qui, non seulement permettent d'écrire (1.25), mais qui de plus permettent de développer une notion de fibré projectif P associé à un Module localement libre $\mathbb{E}$, qui fournisse pour P un topos topologiquement annelé satisfaisant aux mêmes conditions que X (donnant lieu par suite à une suite exacte exponentielle (1.25)), et satisfaisant aux relations de la forme (1.8) (avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ remplacé par $\mathbb{Z}$, et ξ_o' par la section ξ' de $R^2f_*(\mathbb{Z})$ définie par le faisceau inversible canonique $\mathbb{L}$ sur P). Sans tenter ici une axiomatisation dans da **sens (*)**, remarquons que dans le cas particulier où X est le topos des faisceaux d'ensembles associé à un espace topologique ordinaire, ou plus généralement, le topos des faisceaux d'ensembles à groupe d'opérateurs [16, Chap. V] associé à un espace topologique X_o muni d'un groupe d'automorphismes G, les conditions envisagées sont vérifiées de façon évidente, en prenant sur X_o le faisceau d'anneaux topologiques des fonctions complexes continues, et prenant comme fibré projectif associé à un Module localement libre $\mathbb{E}$ (à groupe G) le fibré projectif ordinaire, considéré comme un espace topologique à groupe d'opérateurs G, et muni encore du faisceau d'anneaux (à groupe d'opérateurs G) des fonctions complexes continues sur P (ou plus précisément, le topos des faisceaux d'ensembles à groupe d'opérateurs G sur ledit fibré projectif). Les groupes de cohomologie du topos X associé à (X_o,G) ne sont autres que les groupes de cohomologie mixtes

(1.28) $$H^i(X_o,G\ ;\mathbb{Z})$$

de l'espace et du groupe G, étudiés dans loc. cit. Dans ce cas, on trouve

(*) Il apparaît qu'il y en a, suivant des principes fort généraux et naturels à la fois!

une théorie des classes de Chern pour les Modules loc. libres équivariants $\mathbb{E}$ sur X_o , de groupe G , fournissant des invariants

$$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X_o, G \,; \mathbb{Z}) \quad , \tag{1.29}$$

théorie qui dans le cas où G est réduit au groupe unité, se réduit à la théorie ordinaire des classes de Chern. (Il serait d'ailleurs possible de ramener le cas général à celui-ci, en interprétant les groupes (1.28) comme les groupes de cohomologie ordinaire d'un espace fibré (X_o, G) convenable bien connu, de fibre X_o , et de base l'espace classifiant [7] B_G du groupe discret G ; nous laissons au lecteur le soin (facile) de vérifier la compatibilité de cette définition, et de la définition envisagée ici via les fibrés projectifs).

Ceci posé, et nous restreignant (par la force des choses !) au cas particulier des espaces topologiques à opérateurs, il s'impose de comparer les classes (1.4) et (1.29) . D'ailleurs ici $X_{\text{ét}} \longrightarrow X$ sera une équivalence de topos, donc les classes (1.4) peuvent être considérées comme des classes

$$c_i^{(n)}(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X_o, G \,; \mu_n^{\otimes i}) \quad . \tag{1.30}$$

Notons d'autre part qu'on a ici un isomorphisme canonique (1.7) , défini par l'exponentielle par la formule

$$\phi(1 \bmod n) = \exp\,(2i\pi/n) \quad , \tag{1.31}$$

de sorte que la donnée des classes (1.22) équivaut à celle de classes

$$c_i^{(n)}(\mathbb{E})_o = (\phi^{\otimes i})^{-1}(c_i^{(n)}(\mathbb{E})) \in H^{2i}(X_o, G \,; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad . \tag{1.32}$$

D'autre part, ces dernières sont définies, comme il a été vu plus haut, à l'aide de la formule (1.10) , qui est aussi essentiellement la formule qui définit les classes de Chern "transcendantes" (1.27) , à cela près que les coefficients pour cette dernière sont $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et que l'on travaille sur le fibré projectif ordinaire (au lieu de travailler sur le fibré projectif au sens : schéma relatif sur X_o , à groupe d'opérateurs G). Ceci implique alors aussitôt que les classes de Chern "arithmétiques", sous la forme (1.24) , déduite de (1.22) et (1.23) , se déduisent des classes de Chern "transcendantes" (1.29) , par l'homomorphisme canonique

$$H^*(X_o, G ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X_o, G ; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

déduit de l'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur les coefficients. En effet, grâce à ce qui précède, on est ramené à prouver la même chose pour les invariants c_1 et $c_{1\,o}^{(n)}$ associés au fibré inversible à opérateurs $\mathbb{L} = \mathcal{O}_P(1)$ sur le fibré projectif (ordinaire) P , ce qui nous ramène à l'énoncé de comparaison pour les invariants (1.5) resp. (1.27) associés à un faisceau inversible $\mathbb{L}$ sur X . Or dans ce cas, ceci résulte des définitions, et de l'homomorphisme de suites exactes de cohomologie associé à l'homomorphisme suivant entre les suites exactes de Kummer (1.1) et exponentielle (1.17) :

(1.35)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{O}_{X_o} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{O}^*_{X_o} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"', equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] & \mathcal{O}^*_{X_o} \arrow[r] & \mathcal{O}^*_{X_o} \arrow[r] & 0 ,
\end{tikzcd}$$

où les flêches verticales sont définies par

$$\begin{cases} \alpha(z) = \exp(2i\pi z/n) \\ \beta(t) = \phi\ (t \bmod n) = \exp \dfrac{2i\pi t}{n} \end{cases} .$$

§ 2. Classes de Chern sur un schéma à groupe d'opérateurs.

2.1. Soit X un schéma (*), muni d'un groupe G d'automorphismes. Procédant comme dans [16, Chap V], on en conclut que G "opère" sur le topos des faisceaux étales [2, VII] sur X, d'où une notion de "faisceau étale sur X à groupe d'opérateurs G", ou "faisceaux sur $(X_{ét},G)$", ces faisceaux formant une catégorie, qui est encore un topos $\mathcal{C}$, comme il résulte facilement du critère de GIRAUD [2, IV 1.2]. Donc aux objets abéliens de ce topos, i.e. aux faisceaux abéliens F sur X, à groupe d'opérateurs G, sont associés des groupes de cohomologie, appelés groupes de cohomologie (mixtes) étales du schéma à opérateurs G, et notés

(2.1) $$H^i(X_{ét},G\ ;\ F) .$$

On explicite les liens de cette cohomologie mixte avec, d'une part la cohomologie étale ordinaire de X (étudiée dans [2]), et d'autre part la cohomologie ordinaire du groupe abstrait G, en termes d'une suite spectrale canonique

(2.2) $$H^*(X_{ét},G;F) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(G,\ H^q(X_{ét},F)) .$$

Cette suite spectrale s'établit exactement comme la suite exacte analogue

(*) En conformité avec la réédition du Chap. I des EGA, nous dirons dorénavant "schéma" au lieu de "préschéma", en réservant le mot "schéma séparé" à la notion précédemment désignée sous le nom de "schéma".

dans [16, 5.2.1] , ou plus simplement, comme cas particulier de la suite spectrale de LERAY [37, V § 5] . Nous laissons le détail au lecteur, ainsi que l'établissement (lorsque X/G existe dans un sens raisonnable) de la deuxième suite spectrale donnée dans loc. cit., qui n'est qu'un cas particulier de la suite spectrale de LERAY pour morphismes de topos (et dont nous n'aurons pas besoin ici).

2.2. Soit maintenant $\mathbb{E}$ un Module localement libre sur X , muni d'opérations de G (compatibles avec les opérations de G sur X). On peut, de façon équivalente, regarder $\mathbb{E}$ comme un Module localement libre du topos $\mathcal{C}$ annelé par $\mathcal{O}_X$, ce qui conduit (compte tenu des considérations générales du par. 1) à construire des classes de Chern pour $\mathbb{E}$. De façon précise, $n > 0$ étant un entier fixé, tel que $n.1_X$ soit une section inversible de $\mathcal{O}_X$, i.e. n premier aux caractéristiques résiduelles de X , on définira directement des

$$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X_{\text{ét}},G;\mu_n^{\otimes i}) \quad , \tag{2.3}$$

en transcrivant simplement la construction esquissée au § 1. On dispose ici du fibré projectif ordinaire $P = P(\check{\mathbb{E}})$ associé au Module dual $\check{\mathbb{E}}$ [EGA II 4.1.1] (Noter que la convention de notation adoptée dans loc. cit. est opposée de celle qui était utilisée dans [17] , où on note $P(\mathbb{E})$ ce qui ici est noté $P(\check{\mathbb{E}})$). Le groupe G opère encore sur P . Nous pouvons donc considérer la cohomologie étale mixte de (P,G) , ce qui nous dispense tout à la fois du recours à la notion généralisée de schéma relatif de [22] , et à une théorie (encore à écrire) de la cohomologie étale des topos localement annelés généraux, dont il était question au § 1. Nous pouvons alors sans difficulté transcrire la construction indiquée au § 1 dans le contexte particulier actuel, travail qui est écrit en détail dans [25] lorsque G est le groupe unité, exposé auquel il n'y a essentiellement rien à changer. Pour le morphisme

$$f : (P,G) \longrightarrow (X,G) \quad ,$$

les formules purement locales (1.8) sont valables : le processus de localisation dans les topos associés à (X,G) , (P,G) implique en effet, en particulier, "l'oubli" des opérations de G , de sorte que les formules à vérifier sont identiques aux formules analogues, quand on fait abstraction des opérations de G , formules qui sont établies dans loc. cit. comme conséquence du "théorème de changement de base pour un morphisme propre" [2,XII 5.1] . On en déduit, pour tout faisceau abélien à opérateurs $\mathbb{F}$ sur (X,G) , annulé par n (i.e. qui est un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules) des isomorphismes canoniques (*)

$$(2.4) \qquad H^i(P,G;f^*(\mathbb{F})) \simeq \coprod_{j \geq 0} H^{i-2j}(X,G;\mathbb{F} \otimes \mu_n^{\otimes(-j)})\,\xi^j \quad , \text{ où}$$

$$(2.5) \qquad \xi = \partial(c\ell(\mathcal{O}_P(1)) \in H^2(P,G;\mu_n) \quad .$$

Dans cette dernière formule, on interprète $c\ell(\mathcal{O}_P(1))$ comme un élément

$$(2.6) \qquad c\ell\,(\mathcal{O}_P(1)) \in H^1(P,G;\mathbb{G}_m) \quad ,$$

dans la cohomologie mixte de $P_{\text{ét}}$ et de G , à coefficients dans le groupe multiplicatif, compte tenu des opérations de G sur $\mathcal{O}_P(1)$ (déduites des opérations de G sur $\mathbb{E}$ et du caractère fonctoriel de la construction de $\mathcal{O}_P(1)$ en fonction de $\mathbb{E}$). La suite exacte de KUMMER (1.1) est ici regardée comme une suite exacte de faisceaux abéliens <u>à opérateurs</u> sur $P_{\text{ét}}$

(*) Dorénavant, quand une confusion ne sera pas à craindre, nous omettrons l'indice "ét" dans la notation (2.1) .

(l'exactitude provenant de l'hypothèse que $n.1_X$ est inversible), ce qui donne un sens à l'opérateur cobord qui intervient dans (2.5). Une fois obtenu (2.4), on en déduit une définition des classes de Chern (2.3) par la formule (1.13) .

2.3. Les classes de Chern qu'on vient de définir satisfont aux trois propriétés fondamentales de HIRZEBRUCH [23] , qui les caractérisent :

(i) <u>Fonctorialité</u>, pour un morphisme $f : (X',G') \longrightarrow (X,G)$ de schémas à groupes d'opérateurs, un Module localement libre $\mathbb{E}$ sur (X,G) , et son image inverse $f^*(\mathbb{E})$ sur (X',G') :

$$c_i(f^*(\mathbb{E})) = f^*(c_i(\mathbb{E})) \quad .$$

(ii) <u>Normalisation</u>, pour un fibré inversible $\mathbb{L}$:

$$c(\mathbb{L}) = 1 + c_1(\mathbb{L}) \ , \quad \text{où} \quad c_1(\mathbb{L}) \text{ est donné par (2.5) .}$$

(iii) <u>Formule d'additivité</u>, pour une suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'' \longrightarrow 0$ de Modules localement libres sur (X,G) :

$$c(\mathbb{E}) = c(\mathbb{E}')\, c(\mathbb{E}'') \quad .$$

La démonstration de (i) et (ii) est triviale ; pour celle de (iii), qui se fait suivant le même principe que dans [17] , nous renvoyons à [25] , où est traité le cas où $G = e$, et dont la démonstration se transpose immédiatement au cas général. - Des propriétés (i), (ii) et (iii) on déduit formellement, de façon bien connue, le formulaire habituel, comprenant notamment le calcul des classes de Chern d'une puissance extérieure ou d'un produit tensoriel de Modules localement libres à opérateurs : on se ramène toujours au cas de Modules qui sont des sommes de Modules à opérateurs <u>inversibles</u>

(par passage à des schémas de drapeaux convenables), grâce au fait que la cohomologie de X s'envoie injectivement dans celle de ces fibrés.

Comme cas particulier utile de (i), signalons le fait suivant : l'image des $c_i(\mathbb{E})$ par l'homomorphisme "d'oubli de G"

$$H^{2i}(X,G;\mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(X,\mu_n^{\otimes i}) ,$$

sont les classes de Chern ordinaires de $\mathbb{E}$, après oubli des opérations de G.

§ 3. Comparaison avec la définition transcendante.

3.1. Supposons maintenant que X soit un schéma localement de type fini sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes. Alors à X est associé un espace analytique X^{an}, sur lequel G opère encore par automorphismes. Le Module localement libre à opérateurs $\mathbb{E}$ sur (X,G) définit de même un Module localement libre à opérateurs $\mathbb{E}^{an}$ sur X^{an}. Il lui sont associés, par voie transcendante, des classes de Chern

$$(3.1) \qquad c_i(\mathbb{E}^{an}) \in H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}) = H^{2i}(X^{top},G;\mathbb{Z}) ,$$

où X^{top} désigne l'espace topologique localement compact sous-jacent à X^{an} (muni du groupe d'automorphismes G) ; par définition, les $c_i(\mathbb{E}^{an})$ sont les classes de Chern associées au fibré vectoriel complexe topologique à opérateurs associé à $\mathbb{E}^{an}$, ou si on préfère, au faisceau de modules localement libre sur (X^{top},G), annelé par les fonctions continues complexes, associé à $\mathbb{E}^{an}$ par extension du faisceau d'anneaux des fonctions homomorphes aux fonctions continues. Une définition en forme de ces classes de Chern est esquissée dans § 1.8. Les considérations développées à cet endroit s'appliquent de plus, dans la situation présente, pour donner une description des classes de Chern "arithmétiques" (2.3) en termes des classes de Chern "transcendantes" (3.1) . Pour préciser ce point, notons qu'on a des homomorphismes canoniques évidents

(3.2) $$H^j(X_{ét},G;\mathbb{F}) \longrightarrow H^j(X^{an},G\ ;\ g^*(\mathbb{F}))$$

associés au morphisme de topos associé au morphisme de sites à groupe d'opérateurs évident (comparer [2, XI 4])

(3.3) $$g\ :\ (X^{an}_{ét},G) \longrightarrow (X_{ét},G) \quad .$$

Lorsque le faisceau abélien à opérateurs F sur $X_{ét}$ est constructible au sens de [2, IX] , en particulier est un faisceau de la forme $\mathbb{M}_n^{\otimes i}$, alors les homomorphismes (3.2) sont des isomorphismes. En effet, l'utilisation de la suite spectrale (2.2) , et de la suite spectrale analogue pour le faisceau à opérateurs $g^*(\mathbb{F})$ sur (X^{an},G) , nous ramène au cas où G est le groupe unité, cas qui est traité dans [2, XVI] (ou, plus élémentairement, i.e. sans résolution des singularités, dans [2,XI] lorsque X est lisse sur $\mathbb{C}$, cas qui suffira le plus souvent). En particulier, on trouve des homomorphismes

(3.2 bis) $$H^{2i}(X_{ét},G;\mathbb{M}_n^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{M}_n^{\otimes i})$$

qui sont en fait des isomorphismes. Donc la classe de Chern (2.3) dans le premier membre de (3.2 bis) est connue quand on connaît son image dans le deuxième membre $H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{M}_n^{\otimes i})$. Utilisant de plus l'isomorphisme ϕ de

(1.7) défini par (1.31), d'où des isomorphismes

(3.4) $$H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2i}(X^{an},G;\mu_n^{\otimes i}) \quad ,$$

on voit qu'il suffit d'exprimer les classes correspondantes

(3.5) $$c_i^{(n)}(\mathbb{E})_o \in H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad ,$$

définies en termes des classes (2.3) en appliquant (3.2 bis) et l'isomorphisme inverse de (3.4). Ceci posé, les considérations esquissées à la fin du § 1 montrent que <u>les classes</u> (3.5) <u>ne sont autres que celles qui se déduisent des classes de Chern "transcendantes"</u> (3.1) <u>par les homomorphismes</u> $H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ <u>déduits de l'homomorphisme canonique</u> $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ <u>sur les coefficients</u>.

3.2. Inversement, dans le cas où les homomorphismes canoniques

(3.6) $$H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}) \longrightarrow \varprojlim_n H^j(X^{an},G,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \prod H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}_\ell)$$

sont injectifs, alors la connaissance des $c_i^{(n)}(\mathbb{E})$, ℓ premier, i.e. la connaissance des classes de Chern ℓ-adiques (§ 1.7)

(3.7) $$c_i(\mathbb{E})(\ell) \in H^{2i}(X,G;T_\ell^{\otimes i}) \quad ,$$

ou encore de leurs images

(3.8) $$c_i(\mathbb{E})(\ell)_o \in H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}_\ell) \quad ,$$

implique celle des classes de Chern transcendantes (3.1).

On fera bien attention que dans le dernier membre de (3.6), et dans 3.8, $\mathbb{Z}_\ell$ doit être considéré comme désignant un faisceau ℓ-adique à opérateurs sur

X^{an} , i.e. le <u>système projectif</u> $(\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})$ de faisceaux à opérateurs, - et non le faisceau constant défini par le groupe abstrait $\mathbb{Z}_\ell$, comparer § 1.6 . Ainsi, on a <u>par définition</u>

$$H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim_{\nu} H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \quad , \tag{3.9}$$

et on peut seulement dire qu'on a un homomorphisme canonique

$$H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}_\ell) \quad , \tag{3.10}$$

homomorphisme qui en général <u>n'est pas</u> un isomorphisme.

3.3. Cependant, <u>lorsque les</u> $H^j(X^{an},G;\mathbb{Z})$ <u>sont des</u> $\mathbb{Z}$ <u>-modules de type fini</u>, <u>alors les homomorphismes</u> (3.10) <u>sont des isomorphismes</u>, <u>et par suite l'homomorphisme</u> (3.6) <u>est bien injectif</u> (puisque la famille de changements d'anneaux $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ est fidèlement plate). C'est là une conséquence facile de la suite exacte déduite de $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$, reliant les cohomologies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, conséquence que nous laissons au lecteur d'établir. La condition de finitude envisagée sur les $H^j(X^{an},G;\mathbb{Z})$ est vérifiée en particulier lorsque X est de type fini sur $\mathbb{C}$, et que le $\mathbb{Z}[G]$ -module "trivial" $\mathbb{Z}$ admet une résolution gauche L_* par des $\mathbb{Z}[G]$-modules libres de type fini. Pour le vérifier, on est ramené, compte tenu de la suite spectrale de nature transcendante analogue à (2.2) , relative à l'espace à opérateurs (X^{an},G) muni du faisceau constant $\mathbb{Z}$, à montrer que les $H^q(X^{an},\mathbb{Z})$ sont des $\mathbb{Z}$ -modules de type fini, ce qui est une conséquence bien connue de la triangulabilité des paires de variétés algébriques complexes [31] , et à prouver que $H^p(G,M)$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$ lorsque M est un G -module qui est de type fini sur $\mathbb{Z}$, ce qui résulte aussitôt du calcul habituel de la cohomologie de G en termes de L_* .

3.4. Lorsque les $H^j(X^{an},G;\mathbb{Z})$ sont des $\mathbb{Z}$-modules de type fini, donc les homomorphismes (3.10) des isomorphismes, on conclut aussitôt ceci : Pour que la classe de Chern entière $c_i(\mathbb{E})$ soit une classe de torsion, il faut et il suffit que la classe de Chern ℓ-adique $c_i(\mathbb{E})(\ell)$ le soit ; si cette dernière est d'ordre ℓ^s, alors la composante de $c_i(\mathbb{E})$ dans le sous-groupe de ℓ-torsion de $H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z})$ est d'ordre ℓ^s.

En l'absence d'hypothèses de finitude sur les $H^j(X^{an},G;\mathbb{Z})$, on peut donner encore des énoncés un peu moins précis, dans lesquels on peut d'ailleurs remplacer X^{an} par n'importe quel espace topologique Z, en travaillant cependant avec l'homologie et la cohomologie <u>singulières</u> de l'espace

$$(Z,G) = (E_G \times Z)/G$$

(E_G étant le fibré universel pour G, cf 0.1). Posant pour abréger

$$H_i = H_i((Z,G),\mathbb{Z})) \quad , \quad H^i = H^i((Z,G),\mathbb{Z}) \quad , \tag{3.11}$$

la formule des coefficients universels [8, Chap. VI] nous donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{i-1},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_i,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad . \tag{3.12}$$

Soit ℓ un nombre premier. Alors un élément c de H^i a une image nulle dans $H^i((Z,G),\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$ si et seulement si il est "divisible par ℓ^ν", donc il en est ainsi pour tout ν si et seulement si c est "infiniment ℓ-divisible dans H^i". Comme le seul élément infiniment ℓ-divisible de $\mathbb{Z}$ est zéro, il s'ensuit alors que l'image de c dans $\mathrm{Hom}(H_i,\mathbb{Z})$ est nulle, donc que

$$c \in \mathrm{Ext}^1(H_{i-1},\mathbb{Z}) \quad . \tag{3.13}$$

De plus, $\mathrm{Hom}(H_i,\mathbb{Z})$ étant sans torsion, on voit que c est infiniment ℓ-divisible dans le Ext^1 .

Considérons maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow H_{i-1} \longrightarrow S \longrightarrow 0 \quad ,$$

où T est le sous-groupe de ℓ-torsion de H_{i-1} , d'où (compte tenu que $\mathrm{Hom}(T,\mathbb{Z}) = 0$) une suite exacte sur les Ext^1 :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{i-1},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad . \tag{3.14}$$

D'autre part, T étant un groupe de torsion, calculant son Ext^1 avec $\mathbb{Z}$ grâce à la résolution injective standard de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on trouve

$$\mathrm{Ext}^1(T,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_U \mathrm{Hom}(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad ,$$

où U parcourt les sous-groupes <u>finis</u> de T . Comme pour un tel U , $\mathrm{Hom}(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un ℓ-groupe fini, donc n'a d'autre élément infiniment ℓ-divisible que zéro, il s'ensuit que $\mathrm{Ext}^1(T,\mathbb{Z})$ n'a d'autre élément infiniment ℓ-divisible que zéro, d'où compte tenu de (3.13) (3.14) :

$$c \in \mathrm{Ext}^1(S,\mathbb{Z}) \quad .$$

Notons d'autre part que, S étant sans ℓ-torsion, i.e. la multiplication par ℓ dans S étant injective, et Ext^1 étant exact à gauche en son premier argument, on trouve que la multiplication par ℓ dans $\mathrm{Ext}^1(S,\mathbb{Z})$ est surjective, donc le groupe $\mathrm{Ext}^1(S,\mathbb{Z})$ est ℓ-divisible. En résumé :

Proposition 3.5. *Soit* Z *un espace topologique à groupe discret d'opérateurs* G *, soient* H_i *et* H^i *les groupes d'homologie et cohomologie singulière mixtes en degré* i *de l'espace à opérateurs, donnés par* (3.11) *,* ℓ *un nombre premier,* S_i^{ℓ} *le quotient de* H_i *par son sous-groupe de* ℓ*-torsion, et considérons la suite exacte des coefficients universels* (3.12) *, d'où moyennant l'inclusion* (3.14) $\mathrm{Ext}^1(S_{i-1}^{\ell},\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{i-1},\mathbb{Z})$ *, une inclusion*

$$\mathrm{Ext}^1(S_{i-1}^{\ell},\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^i \quad .$$

Ceci posé, pour tout nombre premier ℓ *, la partie de* H^i *formée des éléments infiniment* ℓ *-divisibles, i.e. dont les images dans les* $H^i((Z,G,\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})$ *sont nulles, est identique à* $\mathrm{Ext}^1(S_{i-1},\mathbb{Z})$ *. En particulier, un élément infiniment* ℓ *-divisible* c *de* H^i *a une image nulle dans* $\mathrm{Hom}(H_i,\mathbb{Z})$ *, ou, ce qui revient au même, a une image nulle dans* $H^i((Z,G),\mathbb{Q})$ *. Enfin, lorsque le sous-groupe de* ℓ *-torsion* T_{i-1}^{ℓ} *de* H_{i-1} *est annulé par une puissance finie de* ℓ *(par exemple si* H_{i-1} *est de type fini), alors les éléments* c *de* H^i *d'image dans* $H^i((Z,G),\mathbb{Q})$ *nulle sont exactement ceux pour lesquels il existe un entier* $m > 0$ *, avec* mc *infiniment* ℓ *-divisible.*

3.5.1. Bien entendu, le lecteur aura remarqué que cet énoncé n'a rien de spécial aux espaces à opérateurs et leur cohomologie mixte singulière, et concerne plutôt la cohomologie et l'homologie d'un complexe de chaînes de groupes abéliens quelconque. Il s'applique aux groupes tels que les $H^i(X^{an},G;\mathbb{Z})$ considérés plus haut, grâce au fait que pour des espaces localement contractibles comme X^{an} , la théorie de la cohomologie singulière coïncide avec la théorie faisceautique, comme il est bien connu.

§ 4. Propriétés de torsion des classes de Chern : cas géométrique.

4.1. Sous les conditions générales de 2.1, supposons que X soit le spectre d'un corps séparablement clos k . Alors le topos formé des faisceaux étales sur X est équivalent, par le foncteur "sections", au topos égal à la catégorie des ensembles ; donc le topos des G -faisceaux n'est autre à équivalence près que le topos des ensembles à groupe d'opérateurs G , donc la cohomologie mixte (2.1) se réduit alors à la cohomologie ordinaire de G , à coefficients dans des G -modules. Donc, supposant qu'on fait opérer G trivialement sur k , de sorte que les "fibrés vectoriels à opérateurs" envisagés dans 2.2 ne sont autres que les représentations de G dans des vectoriels de dimension finie sur k , pour un tel (G,k) -module E , les classes de Chern ℓ -adiques sont des classes

$$(4.1) \qquad c_i(E) \in H^{2i}(G, T_\ell(k)^{\otimes i}) \overset{\text{dfn}}{=} \varprojlim_{\nu} H^{2i}(G, \mu_{\ell^\nu}(k)^{\otimes i}) \quad ,$$

(où le premier groupe de cohomologie écrit n'est qu'une notation abrégée et abusive pour la limite projective du dernier membre).

4.2. Soit alors π le groupe des automorphismes du corps k . Il opère sur le système projectif des groupes $\mu_{\ell^\nu}(k)$, donc sur celui des $\mu_{\ell^\nu}(k)^{\otimes i}$, donc sur le groupe de cohomologie ℓ -adique intervenant dans 4.1. Les propriétés générales des classes de Chern résumées dans 2.3 donnent alors, pour tout $\sigma \in \pi$, la formule

$$(4.2) \qquad \sigma(c_i(E)) = c_i({}^{\sigma}E) \quad , \quad {}^{\sigma}E = E \otimes_k (k,\sigma) \quad ,$$

où dans le dernier membre (k,σ) désigne k considéré comme k-algèbre grâce à l'homomorphisme $\sigma : k \longrightarrow k$, et où on fait opérer encore G sur le produit tensoriel de la façon habituelle. En particulier, si π_E est le sous-groupe de π "stabilisateur" de la classe de E , i.e. formé des $\sigma \in \pi$ tels que $E \simeq {}^{\sigma}E$, on voit que $c_i(E)$ <u>est invariante par</u> π_E :

$$(4.3) \qquad \sigma(c_i(E)) = c_i(E) \quad \text{si} \quad E \simeq {}^{\sigma}E \quad .$$

4.3. Soit en particulier k_o un sous-corps de k , tel que la classe de E soit invariante par le groupe $\mathrm{Gal}(k/k_o)$ des k_o-automorphismes de k , i.e. tel que $\mathrm{Gal}(k/k_o) \subset \pi_E$; alors les $c_i(E)$ sont invariants par l'action de $\mathrm{Gal}(k/k_o)$. L'hypothèse sur k_o qu'on vient d'envisager est vérifiée en particulier si E provient, par extension du corps de base, du module E_o d'une représentation linéaire de G définie sur le sous-corps k_o . Cette condition suffisante n'est cependant nullement nécessaire, comme il est bien connu. Ainsi, lorsque k est de caractéristique nulle, il existe un plus petit sous-corps k_o de k ayant la propriété $\mathrm{Gal}(k/k_o) \subset \pi_E$ (*) : c'est le corps engendré sur le corps premier par les valeurs de la fonction trace

$$\mathrm{Tr}_E : G \longrightarrow k \quad ;$$

mais on sait qu'en général la représentation envisagée ne peut pas s'écrire sur ce corps.

Considérons donc la représentation de $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(k/k_o)$:

(*) du moins si le G-module E est semi-simple.

$$(4.4) \qquad \phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}\, T_\ell(k) \simeq \mathbb{Z}_\ell^* ,$$

que nous interprétons comme un caractère ℓ -adique de Γ . Alors la représentation de Γ dans $T_\ell(k)^{\otimes i}$ est donné par la puissance ordinaire i.ème de ce caractère :

$$(4.5) \qquad \phi^i : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}\, T_\ell(k)^{\otimes i} \simeq \mathbb{Z}_\ell^* .$$

Soit

$$(4.6) \qquad H_1 = \phi(\Gamma) \subset \mathbb{Z}_\ell^*$$

l'image de Γ par ϕ ; si $\bar{k}_o$ est une clôture séparable de k_o dans k , H_1 est aussi l'image du groupe profini $\mathrm{Gal}(\bar{k}_o/k_o)$ par l'application continue naturelle de celui-ci dans $\mathbb{Z}_\ell^*$, c'est donc un sous-groupe <u>fermé</u> de $\mathbb{Z}_\ell^*$. Il en est de même des groupes

$$(4.7) \qquad H_i = H_1{}^i = \phi^i(\Gamma) \subset \mathbb{Z}_\ell^* .$$

Ceci dit, la propriété d'invariance de $c_i(E)$ par $\Gamma = \mathrm{Gal}(k/k_o)$ s'explicite simplement par les relations $\lambda c_i(E) = c_i(E)$ pour $\lambda \in H_i$, i.e.

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} &(\lambda - 1)\, c_i(E) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \in H_i \quad \text{, ou encore} \\ &(\lambda^i - 1)\, c_i(E) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \in H_1 \quad , \end{aligned}$$

où bien entendu le groupe de valeurs dans (4.1) est regardé comme un module sur $\mathbb{Z}_\ell$ de la façon évidente. Cela montre déjà que <u>dans le cas où</u> $H_i \neq \{1\}$ (et en particulier, lorsque H_1 n'est pas réduit à un groupe fini) <u>la classe de cohomologie</u> ℓ -<u>adique</u> $c_i(E)$ <u>est une classe de torsion</u>, i.e. annulé par une puissance convenable de ℓ . De façon plus précise, posons dans ce cas

$$\alpha(i) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in H_i} v_\ell(\lambda - 1) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in H_1} v_\ell(\lambda^i - 1) \quad , \tag{4.9}$$

où v_ℓ désigne la valuation ℓ-adique. On aura alors

$$\ell^{\alpha(i)} c_i(E) = 0 \quad \text{dans} \quad (4.1) \quad . \tag{4.10}$$

4.4. Remarquons que $U = \mathbb{Z}_\ell^*$ est un produit du groupe $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*$ des racines $(\ell-1)$.èmes de l'unité, qui est fini d'ordre $\ell-1$ premier à ℓ, par le groupe U_o des "Einseinheiten", qui est un module de type fini et de rang 1 sur $\mathbb{Z}_\ell$. Les sous-groupes fermés de U sont ceux dont la trace sur U_o est un sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module. Ce sont également les sous-groupes qui sont soit ouverts (donc d'indice fini), soit finis.

4.5. Lorsque H_1 est un sous-groupe fini de $U = \mathbb{Z}_\ell^*$, soit d le pgcd parmi les entiers annulant H_1, i.e. le plus petit $d > 0$ tel que

$$H_1^{\,d} = \{1\} \quad (\text{d'où } d \mid \operatorname{card} H_1) \quad . \tag{4.11}$$

Alors la relation (4.8) ou (4.10) implique

$$c_i(E) \text{ est de torsion pour } i \not\equiv 0 \pmod d \quad ; \tag{4.12}$$

elle ne donne aucun renseignement pour $i \equiv 0 \pmod d$. Un cas particulier amusant est celui où $k_o = \mathbb{R}$, corps des réels, d'où
$\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq H_1$ et $d = 2$: on trouve que la classe de Chern ℓ-adique $i^{\text{ème}}$ de la complexifiée d'une représentation linéaire réelle du groupe G, pour i impair, est nulle si $\ell \neq 2$, et annulée par 2 en tous cas. L'argument utilisé, qui revient à introduire la représentation complexe conjuguée dans $\bar{E}$ et à utiliser la relation $E \simeq \bar{E}$ d'où
$c_i(E) = c_i(\bar{E}) = (-1)^i c_i(E)$, est également valable pour les classes de Chern

entières transcendantes de 0.1, et dans le cas plus général des fibrés vectoriels réels et leurs complexifiés sur un espace topologique quelconque (pas nécessairement de la forme B_G), où le résultat est évidemment bien connu des topologues.

Lorsque H_1 n'est pas fini, donc est un sous-groupe d'indice fini de $U = \mathbb{Z}_\ell^*$, alors on trouve (comme déjà signalé plus haut) que toutes les classes de Chern ℓ-adiques sont de torsion, la formule (4.9) donnant une valeur finie pour $\alpha(i)$ pour <u>tout</u> entier $i \geqslant 1$, donc fournissant une relation (4.10) i.e. une majoration multiplicative $\ell^{\alpha(i)}$ de l'ordre de la classe de Chern ℓ-adique $c_i(E)$.

4.6. En tout cas, la majoration (4.10) de l'ordre de cette classe ne dépend que de k_o, de i, et de ℓ, et non du choix particulier de G et de E; elle devient de moins en moins bonne quand i augmente multiplicativement, comme il est évident sur (4.9) : on ne trouve <u>jamais</u> de majoration de l'ordre de $c_i(E)$ indépendante de i, car $\alpha(i)$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers l'infini multiplicativement. D'autre part, posant

(4.13) $$\delta = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Im}\,(H_1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*)) \quad , \text{ donc } \quad \delta \mid (\ell-1) \quad ,$$

on trouve $\alpha(i) = 0$ si et seulement si $i \not\equiv 0 \pmod{\delta}$, d'où

(4.14) $$c_i(E) = 0 \quad \text{si} \quad i \not\equiv 0 \pmod{\delta} \quad .$$

On remarquera qu'en général, pour k_o, i et ℓ fixés, la majoration (4.10) pour l'ordre de la classe de Chern ℓ adique $c_i(E)$ (pour G et E variables) n'est pas la meilleure possible, déjà pour le cas $i=1$. Prenons par exemple pour k_o le corps des racines ℓ-èmes de l'unité sur $\mathbb{Q}$, alors $c_1(E)$ se calcule par la formule (2.5) en termes de la fonction déterminant

$$g \rightsquigarrow \det g_E : G \longrightarrow k_o^* \subset k^*$$

(qui est bien à valeurs dans k_o^* et non seulement dans k^*, à cause de l'hypothèse faite que la classe de E est rationnelle sur k_o), via les obstructions à écrire cet homomorphisme comme puissance ℓ^ν.ème d'un homomorphisme dans k^*. Or supposant G à engendrement fini, l'image M de G dans k_o^* est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, dont le sous-groupe de torsion est un sous-groupe du groupe des racines de l'unité de k_o, lequel est d'ordre ℓ-1 d'après GAUSS [29, p. 53], donc premier à ℓ ; il s'ensuit que pour tout entier $\nu > 0$, l'inclusion $M \longrightarrow k^*$ se remonte en un homomorphisme $M \longrightarrow k^*$ via l'épimorphisme $x \rightsquigarrow x^{\ell^\nu} : k^* \longrightarrow k^*$. Par suite on trouve que la première classe de Chern ℓ-adique $c_1(E)$ est nulle. Ce résultat, établi d'abord pour G à engendrement fini, reste vrai pour tout G par un argument immédiat de passage à la limite. Or ici on aura $H_1 = U_o$, groupe des Einseinheiten, et $\alpha(1) = 1$, de sorte que la formule (4.10) ne donne que la relation $\ell\, c_1(E) = 0$, au lieu de $c_1(E) = 0$.

Il semble donc que les relations (4.10) sont encore relativement grossières. Un problème intéressant serait de déterminer, pour k_o, ℓ et i donnés, la meilleure majoration possible pour l'ordre de la classe de Chern ℓ-adique $c_i(E)$, pour G et E variables, soumis éventuellement à des conditions restrictives (G fini, ou G fini cyclique, ou la représentation E définissable sur k_o, etc.).

4.7. En vue d'expliciter (4.9) donc (4.10), introduisons le sous-corps ℓ-cyclotomique maximal de k

(4.15) $$Z = Z(\ell) \subset k \quad ,$$

engendré par les racines de l'unité ℓ^{ν}-èmes, tout ν , et le sous-corps ℓ -cyclotomique maximal de k_o , défini comme

$$Z_o = Z_o(\ell) = Z(\ell) \cap k_o \quad . \tag{4.16}$$

On a le diagramme de corps

$$\begin{tikzcd} k_o \arrow[r] & P(k_o,Z) \arrow[r] & \bar{k}_o \arrow[r] & k \\ Z_o=k_o \cap Z \arrow[u] \arrow[r] & Z \arrow[u] & & \\ P \arrow[u] & & & \end{tikzcd}$$

,

où P est le sous-corps premier de k_o . Comme Z est une extension galoisienne de P , la théorie de Galois nous apprend qu'il en est de même de Z/Z_o et de $P(k_o,Z)$ sur k_o , et que moyennant l'homomorphisme naturel les groupes de Galois de ces deux dernières extensions sont isomorphes. Donc le groupe de Galois de $P(k_o,Z)$ sur k_o est isomorphe à un sous-groupe de Galois de Z/P , lui-même isomorphe à un sous-groupe ouvert π de $\mathbb{Z}_\ell^*$ (et même égal à $\mathbb{Z}_\ell^*$ lorsque k_o donc P est de caractéristique nulle, par le th. de GAUSS [29, p. 53]). D'après les théorèmes d'extensions d'isomorphismes, l'homomorphisme de restriction

$$\Gamma = \mathrm{Gal}(k/k_o) \longrightarrow \mathrm{Gal}(P(k_o,Z)/k_o) \simeq \mathrm{Gal}(Z/Z_o) \hookrightarrow \mathbb{Z}_\ell^*$$

est surjectif, donc moyennant les identifications faites, on trouve

$$H_1 = \mathrm{Im}\,(\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^*) = \mathrm{Gal}\,(Z/Z_o) \quad . \tag{4.17}$$

Par suite, <u>le sous-groupe</u> H_1 <u>de</u> $\mathbb{Z}_\ell^*$ <u>associé au corps</u> k_o <u>ne dépend que du sous-corps</u> ℓ <u>-cyclotomique maximal</u> Z_o <u>de</u> k_o , <u>via la formule</u> (4.17) .
On en conclut en particulier un isomorphisme canonique

$$\pi / H_1 \simeq \mathrm{Gal}(Z_o/P) \qquad (P = \text{corps premier}) \ , \tag{4.18}$$

qui montre que le sous-groupe H_1 de $\mathbb{Z}_\ell^*$ est d'indice fini si et seulement si Z_o est une extension finie du corps premier P .

Nous allons résumer les renseignements obtenus dans un théorème récapitulatif :

Théorème 4.8. Soient k_o un corps, k une extension séparablement close de k , G un groupe discret, muni d'une représentation linéaire dans un vectoriel E de dimension finie sur k , $c_i(E)(\ell)$ ses classes de Chern ℓ -adiques (4.1) , où ℓ est un nombre premier distinct de la caractéristique de k . On suppose que la classe "stable" (*) de la représentation donnée est invariante par le groupe des k_o -automorphismes de k (ce qui signifie aussi, si k_o est de caractéristique nulle, que la fonction trace $G \longrightarrow k$ associée à la représentation prend ses valeurs dans k_o) . Soit Z_o la sous-extension ℓ -cyclotomique maximale (4.16) de k_o , et soit H son groupe de Galois sur le corps premier P , identifié comme d'habitude à un sous-groupe fermé du groupe $\mathbb{Z}_\ell^*$ des unités ℓ -adiques. Posons, pour tout entier $i \geqslant 1$:

$$\alpha(i) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in H} v_\ell(\lambda^i - 1) \ , \tag{4.9}$$

où v_ℓ est la valuation ℓ -adique. Alors on a (si $\alpha(i) \neq +\infty$ i.e. $H^i \neq (1)$)

$$\ell^{\alpha(i)} c_i(E)(\ell) = 0 \ . \tag{4.10}$$

Corollaire 4.9. Si Z_o est une extension finie du corps premier P , en particulier si le corps k_o est une extension de type fini de P , alors

(*) i.e. dans le groupe $R_k(G)$ des classes de k-représentations de G_* [4].

toutes les classes de Chern ℓ-adiques $c_i(E)$ sont des classes de torsion.

Corollaire 4.10. *Soit G un groupe à engendrement fini, et E le module d'une représentation linéaire de dimension finie de G sur un corps séparablement clos k. Alors pour tout nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de k, les classes de Chern ℓ-adiques $c_i(E)$ $(i \geqslant 1)$ sont des classes de torsion.*

En effet, l'hypothèse sur G implique que la représentation donnée provient d'une représentation sur un sous-corps k_o de k de type fini sur le corps premier P, et on applique 4.9.

Corollaire 4.11. *Soit G un groupe discret, E le module d'une représentation linéaire complexe de dimension finie. Alors les classes de Chern rationnelles $c_i(E)_{\mathbb{Q}} \in H^{2i}(G,\mathbb{Q})$ (déduites des classes entières de 0.1) sont nulles pour tout $i \geqslant 1$. Si le corps k engendré par les valeurs du caractère $g \rightsquigarrow \operatorname{Tr} g_E$ est de type fini, et si $H_{i-1}(G,\mathbb{Z})$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$ (*), alors $c_i(E) \in H^{2i}(G,\mathbb{Z})$ est une classe de torsion, dont la ℓ-composante $c_i(E)(\ell)$ satisfait à (4.10), où $\alpha(i)$ est défini dans (4.9) ci-dessus.*

Pour vérifier la première assertion, on peut remplacer G par ses sous-groupes à engendrement fini (par un argument immédiat laissé au lecteur), ce qui nous permet de supposer G de type fini. Alors, choisissant un nombre premier ℓ quelconque, le corollaire 4.10, et la comparaison 3.1 de la théorie arithmétique et la théorie transcendante des classes de Chern, nous montrent qu'il existe pour tout i un entier $m_i > 0$ tel que l'image de $m_i c_i(E)$ dans tous les $H^{2i}(G,\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$ est nulle (où $c_i(E)$ désigne maintenant la classe de Chern entière). Utilisant 3.5 on en conclut que l'image

(*) Il suffit qu'il le soit modulo son sous-groupe de torsion.

de $c_i(E)$ dans $H^{2i}(G,\mathbb{Q})$ est nulle. La dernière assertion de 4.11 se déduit de même de 4.8 et de 3.5.

Remarques 4.12.

a) Comme nous l'avons déjà signalé dans 0.5 , le résultat 4.11 était connu par voie transcendante ; cf 0.9 pour d'autres commentaires concernant ce résultat.

b) Dans 4.10 on ne peut supprimer l'hypothèse que G soit à engendrement fini, comme on voit déjà dans le cas où G est le groupe des racines de l'unité de k d'ordre une puissance de ℓ , E la représentation de degré 1 canonique : on voit tout de suite que la classe ℓ -adique $c_1(E)$ n'est pas une classe de torsion : en fait, l'ordre de son image dans $H^2(G,\mu_{\ell^\nu}(k))$ est égal à ℓ^ν , qui augmente indéfiniment avec ν . Cela n'empêche que 4.11 est valable sans supposer G de type fini : on fera attention à ce propos qu'une classe de $H^j(G,Z)$ dont l'image dans $H^j(G,\mathbb{Q})$ est nulle n'est pas nécessairement une classe de torsion, l'homomorphisme canonique $H^j(G,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \longrightarrow H^j(G,\mathbb{Q})$ n'étant pas en général un isomorphisme (c'est un isomorphisme si $H_{i-1}(G,\mathbb{Z})$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$!).

4.12. On peut généraliser les résultats précédents en utilisant les conjectures de WEIL [37] de la façon suivante. Supposons d'abord que k soit la clôture algébrique d'un corps fini k_o , et que l'on ait un schéma projectif et non singulier X_o sur k_o , muni d'un Module localement libre $\mathbb{E}_o$, le groupe discret opérant par automorphismes sur la situation $(X_o,\mathbb{E}_o)$ sur k_o , donc aussi sur la situation $(X,\mathbb{E})$ qui en est déduite par extension $k_o \longrightarrow k$ du corps de base, d'où des classes de cohomologie mixtes

$$(4.19) \qquad c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X,G;\mathbb{T}_\ell^{\otimes i}) \quad .$$

Supposons, pour un i donné, que l'image de $c_i(\mathbb{E})$ par l'homomorphisme canonique

$$H^{2i}(X,G;T_\ell^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(X,T_\ell^{\otimes i})$$

soit de torsion, ce qui signifie aussi que la classe de Chern i.ème ordinaire de $\mathbb{E}$ (en oubliant les opérations de G) est une classe de torsion. Supposons de plus que les conjectures de WEIL pour les valeurs absolues ordinaires des valeurs propres de Frobenius, opérant sur les

$$H^j(X,\mathbb{Q}_\ell) \overset{\text{dfn}}{=} H^j(X,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell \quad ,$$

soient vraies pour $j < 2i$, i.e. que pour ces j , les valeurs absolues en question soient égales à $q^{j/2}$, où $q = \mathrm{card}(k_o)$. Je dis que <u>sous ces conditions</u>, <u>la classe</u> ℓ -<u>adique mixte</u> (4.19) <u>elle-même est une classe de torsion</u>. Pour le voir, on utilise encore l'invariance de la classe (4.19) par les opérations de $\mathrm{Gal}(k/k_o)$, ou ce qui revient au même, par l'automorphisme du groupe de cohomologie mixte provenant de l'automorphisme de Frobénius

$$\mathrm{Frob}_q : x \rightsquigarrow x^q$$

du corps k . Utilisant l'isomorphisme canonique

$$H^{2i}(X,G;T_\ell^{\otimes i}) \simeq H^{2i}(X,G;\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(k)^{\otimes i} \quad ,$$

et la suite spectrale de cohomologie ℓ -adique déduite de (2.2) :

$$(4.20) \qquad H^*(X,G;\mathbb{Z}_\ell) \Longleftarrow E_2^{s,t} = H^s(G,H^t(X,\mathbb{Z}_\ell)) \quad ,$$

(qu'il faut en toute rigueur interpréter comme une suite spectrale de systèmes projectifs), on est ramené de proche en proche à vérifier que dans

$$E_{\infty}^{s,2i-s} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(k)^{\otimes i} \quad , \quad \text{pour} \quad s \geqslant 1 \quad ,$$

tout élément invariant par l'action de Frob_q est un élément de torsion, et pour ceci, que $E_2^{s,2i-s} \otimes T_\ell(k)^{\otimes i}$ ne "contient" pas (comme quotient de deux sous- $\mathbb{Z}_\ell$ -modules stables par Frobenius) de module à opération triviale de Frobenius, qui ne soit de torsion. Ou encore, que $E_2^{s,2i-s}$ ne "contient" pas de module à opérateurs, sur lequel Frobenius opère simplement par multiplication par q^{-i} , et qui ne soit de torsion. Or c'est là un exercice facile et pratiquement évident, sur l'expression explicite (4.20) du terme E_2 , et compte tenu que d'après l'hypothèse faite, les valeurs absolues des valeurs propres de Frobenius opérant sur $H^{2i-s}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont $q^{(2i-s)/2}$, donc $\neq q^{i}$ (puisque $s \geqslant 1$) .

4.12.1. Par un argument de spécialisation facile, utilisant le théorème de spécialisation pour la cohomologie ℓ -adique [2, XVI 2.2] , on trouve la même conclusion dans le cas d'une situation $(k,X,\mathbb{E},G)$, X schéma projectif et lisse sur le corps séparablement clos k , lorsque celle-ci peut se déduire par extension de la base

$$A_o \longrightarrow k \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_o)$$

d'une situation analogue sur le spectre S_o d'un sous-anneau A_o de k de type fini sur $\mathbb{Z}$, avec un schéma projectif et lisse X_o sur S_o , un Module localement libre $\mathbb{E}_o$ sur X_o , et G opérant sur $(X_o,\mathbb{E}_o)$ par S_o -automorphismes. Cette hypothèse sera vérifiée en particulier lorsque le groupe G est à engendrement fini. Supposons de plus que pour au moins un point fermé s de S_o (donc à corps résiduel fini) la conjecture de WEIL, pour les valeurs absolues des valeurs propres de Frobenius opérant sur les H^j ℓ-adiques ($j < 2i$) de la variété projective lisse $X_{o\,s}$ sur le corps fini $k(s)$, soit vraie ; il en sera en particulier ainsi d'après WEIL [28 p. 140] si $i = 1$, ou si X est une variété abélienne, ou un produit de courbes ... Sous ces conditions, il sera encore vrai que si la classe de Chern ordinaire de $\mathbb{E}$, à valeurs dans $H^{2i}(X, \mathbb{T}_\ell^{\otimes i})$, est une classe de torsion (par exemple si la classe de Chern, en tant que classe de cycles, a un multiple qui est algébriquement équivalent à zéro), alors il en est de même de la classe de Chern mixte (4.19).

4.12.2. L'hypothèse faite dans l'alinéa précédent sur la validité de la conjecture de WEIL en au moins un point fermé s de S_o dépend du choix de (S_o, X_o) dont on déduit (k, X) par changement de base. Si on veut énoncer une hypothèse intrinsèque à (k, X), on exigera qu'il existe un ouvert de ZARISKI non vide U de S_o, tel que pour tout point fermé s de U, la conjecture de WEIL pour $X_{o\,s}$ sur $k(s)$ et le H^j ℓ-adique soit valable. La vérification d'invariance de cette hypothèse par rapport au choix de (S_o, X_o), et par rapport à une extension du corps de base k, est immédiate. On dira sous ces conditions que <u>la conjecture de</u> WEIL <u>est vraie pour</u> X <u>sur</u> k, <u>et la cohomologie</u> ℓ <u>-adique en dimension</u> j. Avec cette terminologie, on peut formuler :

<u>Théorème</u> 4.13. <u>Soient</u> X <u>un schéma projectif lisse sur le corps</u> $\mathbb{C}$ <u>des complexes</u>, $\mathbb{E}$ <u>un Module localement libre de type fini sur</u> X, i <u>un entier</u>, <u>tel que la</u> i.<u>ème classe de Chern rationnelle de</u> $\mathbb{E}$ (<u>classe dans</u> $H^{2i}(X^{an}, \mathbb{Q})$) <u>soit nulle</u>. <u>Supposons de plus que pour un nombre premier conve-</u>

nable ℓ , la conjecture de WEIL soit vraie pour X et la cohomologie ℓ-adique en dimension $j < 2i$, au sens précisé dans 4.12.2. (ce qui est sans doute toujours le cas, et est prouvé par WEIL dans le cas où $i = 1$, ou X une variété abélienne, ou plus généralement un produit de variétés abéliennes et de courbes algébriques). Soit alors G un groupe discret opérant par automorphismes sur $(X,\mathbb{E})$, et considérons la classe de Chern mixte rationnelle

$$c_i(\mathbb{E}^{an})_{\mathbb{Q}} \in H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Q}) \quad .$$

Cette classe est également nulle.

Pour démontrer ce théorème, on se ramène comme pour 4.11 au cas où G est à engendrement fini, donc où la situation $(X,\mathbb{E},G)$ provient d'une situation de type fini sur $\mathbb{Z}$, comme dans 4.12.1. Utilisant 4.12.1 et 3.5 , et procédant comme dans 4.11 , on déduit 4.13.

Remarques 4.14.

a) Lorsque X est réduit à un point, 4.13 se réduit à l'énoncé 4.11. Mais contrairement à ce dernier, 4.13 ne semble pas admettre une démonstration par voie transcendante, qui serait indépendante disons des conjectures de WEIL, et resterait valable lorsque l'on remplace X par une variété analytique compacte (éventuellement supposée kähleriénne). J'ignore si l'énoncé analytique-complexe correspondant est vrai, même en se bornant au cas où $i = 1$, et où X est un tore complexe (non algébrisable). Comparer les commentaires dans 0.10 .

b) Admettant les conjectures de WEIL et la résolution des singularités, on se convainc que les résultats de 4.12 et 4.13 doivent être valables pour des schémas X propres sans plus (pas nécessairement projectifs, ni lisses). Par contre, l'hypothèse de propreté est essentielle, même si X est supposé lisse. Pour avoir un contre-exemple relatif à c_i , on prendra

$$X = \mathbb{G}_m{}^i = \mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m \text{ (i facteurs)}, \; G = \mathbb{Z}^i \;, \; \mathbb{E} = \mathbb{O}_X{}^i \;, \tag{4.21}$$

avec opérations triviales de G sur X , l'opération sur $\mathbb{E}$ s'obtenant en associant au j.ème élément de la base canonique de $\mathbb{Z}^i$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ l'automorphisme de multiplication dans $\mathbb{E}$ par la j.ème fonction coordonnée t_j sur le j.ème facteur $\mathbb{E}_j$ de $\mathbb{E}$, l'identité sur les autres. Un calcul facile donne la formule de KUNNETH

$$H^*(X,G;\mathbb{Z}_\ell) = \bigotimes^i H^*(\mathbb{G}_m,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell) \;, \tag{4.22}$$

et on a par multiplicativité

$$c_i(E) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant i} pr_j^*(\xi) \;, \tag{4.23}$$

où les pr_j $(1 \leqslant j \leqslant i)$ sont les projections de X sur ses facteurs, et où

$$\xi \in H^2(\mathbb{G}_m,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell) = H^2(\mathbb{G}_m,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(k)$$

est la première classe de Chern ℓ -adique $c_1(\mathbb{E}_o)$ du fibré à opérateurs $\mathbb{E}_o = \mathbb{O}_{X_o}$ sur $X_o = \mathbb{G}_m$, le groupe $\mathbb{Z}$ opérant en faisant opérer le générateur 1 de $\mathbb{Z}$ par multiplication par la fonction coordonnée t . D'ailleurs, on a encore une formule du type KUNNETH donnant $H^*(X_o,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell)$:

$$H^*(X_o,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell) \simeq H^*(X_o,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_\ell) = \mathbb{Z}_\ell[u,v] \,/(u^2,v^2) \;,$$

où u,v sont de degré 1 , le dernier isomorphisme n'étant pas canonique et dépendant du choix d'un isomorphisme $\mathbb{Z}_\ell \simeq T_\ell(k)$. On a cependant, de façon canonique :

$$H^2(X_o,\mathbb{Z};T_\ell) \simeq H^1(X_o,T_\ell)\otimes H^1(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathbb{Z}_\ell\otimes\mathbb{Z}_\ell \simeq \mathbb{Z}_\ell \quad ,$$

et moyennant cet isomorphisme, on constate par un calcul facile que la classe ξ devient l'élément 1 de $\mathbb{Z}_\ell$. Les formules (4.22) et (4.23) montrent alors que $H^{2i}(X,G;\ T_\ell^{\otimes i})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, avec comme base $c_i(\mathbb{E})$, qui n'est donc pas une classe de torsion.

c) Le même exemple essentiellement montre que l'énoncé analogue à 4.13 , où on remplacerait X par une variété différentiable compacte, est également faux. Il suffit dans l'exemple précédent (avec $k = \mathbb{C}$) de prendre l'image inverse du fibré à opérateurs $\mathbb{E}$ sur le tore compact de dimension i contenu dans $X(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{*\,i}$. Cela rend improbable qu'on puisse prouver un énoncé généralisant 4.13 par des méthodes de géométrie différentielle.

§ 5. Propriétés de torsion des classes de Chern : cas arithmétique.

5.1. Dans le présent paragraphe, nous examinons les classes de Chern de représentations linéaires du groupe discret G sur des corps k pas nécessairement séparablement clos ; elles sont donc à valeurs dans des groupes de cohomologie mixtes, faisant intervenir à la fois la cohomologie ordinaire de G , et la cohomologie galoisienne de k , i.e. celle du groupe profini $\Pi = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, groupe fondamental de k . Commençons par expliciter dans quelques cas simples le calcul de ces groupes, en termes d'invariants cohomologiques plus familiers.

5.1.1. Notons que le topos des faisceaux étales sur Spec(k) est équivalent à la catégorie des ensembles sur lesquels π opère continûment [2, VIII 2.1] (i.e. de façon que le stabilisateur de tout point soit un sous-groupe ouvert de π) ; par suite, le topos des faisceaux étales sur Spec(k) , à groupe d'opérateurs G , est équivalent à la catégorie des ensembles sur lesquels $\pi \times G$ opère continûment, où $\pi \times G$ est muni de la topologie produit (G étant considéré comme groupe discret). On en conclut très facilement que si F est un objet abélien dudit topos, i.e. défini par un groupe abélien $M = F(\mathrm{Spec}(\bar{k}))$, sur lequel $\pi \times G$ opère continûment, alors on a des isomorphismes canoniques

$$(5.1) \qquad H^*(\mathrm{Spec}(k),G;\ F) \simeq \varinjlim_i H^*(\pi_i \times G,\ M^{U_i \times G}) \quad ,$$

où $\pi_i = \pi / U_i$, U_i parcourant un système fondamental de sous-groupes ouverts de π . Lorsque en particulier G est un groupe fini, alors $\pi \times G$ est encore un groupe pro-fini, et on trouve :

$$(5.2) \qquad H^*(\mathrm{Spec}(k),G;\ F) \simeq H^*(\pi \times G,\ M) \quad ,$$

où le deuxième membre désigne la cohomologie habituelle du groupe profini $\pi \times G$.

5.1.2. Dans les cas qui nous occupent, i.e. où $F = \mu_n^{\otimes i}$, G opère trivialement sur F , i.e. G opère trivialement sur M (qui s'identifie donc simplement à un module "admissible" sur π). Alors on dispose de formules du type KUNNETH, permettant d'exprimer la cohomologie $H(\pi_i \times G,\ M^{U_i})$ en termes, disons, de la cohomologie de π_i et de l'homologie de G à coefficients entiers. Plus généralement, on trouve de telles formules pour $H^*(X,G;\ F)$ chaque fois que le groupe discret G opère trivialement sur le schéma X et sur le faisceau F , cf [16, p. 192] . Dans le cas où les $H_j(G,\mathbb{Z})$ sont libres de type fini sur $\mathbb{Z}$, on en déduit par exemple un isomorphisme (dont la flêche s'explicite aisément en termes de cup-produits) :

(5.3) $$H^*(X,G;\ F) \xleftarrow{\sim} H^*(X,F) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(G,\mathbb{Z}) \quad ,$$

d'où, par passage à la limite sur les $F = \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$, des isomorphismes :

(5.4) $$H^*(X,G;\ T_\ell^{\otimes i}) \xleftarrow{\sim} H^*(X,T_\ell^{\otimes i}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(G,\mathbb{Z}) \quad .$$

L'hypothèse qu'on vient de faire sur G est satisfaite en particulier pour

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \quad ,$$

alors l'algèbre de cohomologie de G est donnée par

(5.5) $$H^*(G,\mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^* H^1(G,\mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^* \check{G} \quad , \text{ où } \check{G} = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z}) \quad .$$

5.1.3. Notons encore que sous les conditions de validité de (5.3) , l'homomorphisme canonique

$$H^*(X,G;\ F) \longrightarrow H^*(X,F)$$

s'interprète comme la réduction modulo l'idéal d'augmentation $H^+(G,\mathbb{Z})$ de $H^*(G,\mathbb{Z})$ (idéal des éléments de degrés >0). Par suite, si $\mathbb{E}$ est un fibré vectoriel sur X sur lequel G opère, et si la classe de Chern ordinaire de E dans $H^{2i}(X,T_\ell(i))$ est nulle, cela signifie que la classe de Chern mixte dans le deuxième membre de (5.4) se trouve dans $H^*(X,T_\ell(i)) \otimes H^+(G,\mathbb{Z})$. Il en est toujours ainsi en particulier lorsque X est local, par exemple le spectre d'un corps.

5.1.4. Lorsqu'on suppose encore les $H_i(G,\mathbb{Z})$ de type fini sur $\mathbb{Z}$, mais pas nécessairement libres sur $\mathbb{Z}$, les formules précédentes (5.3) , (5.4) restent vraies si $H_*(G)$ est sans ℓ -torsion et si F est un faisceau de ℓ -torsion. Lorsque $H_*(G)$ a de la ℓ -torsion, on trouve encore par passage à la limite dans les suites exactes des coefficients universels de loc. cit., relatives aux coefficients $\mathbb{K}_\ell{}^\nu$, une suite exacte :

$$(5.6) \quad 0 \longrightarrow \sum_{p+q=n} \mathrm{Ext}^1(H_{i-1}(G,\mathbb{Z}),H^j(X,T_\ell{}^{\otimes i})) \longrightarrow H^n(X,G;T_\ell{}^{\otimes i})$$

$$\longrightarrow \sum_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H_i(G,\mathbb{Z}),H^j(X,T_\ell{}^{\otimes i})) \longrightarrow 0 \quad ,$$

d'où en tensorisant sur $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$:

$$(5.7) \qquad H^*(X,G;\mathbb{Q}_\ell(i)) \xleftarrow{\sim} H^*(X,\mathbb{Q}_\ell{}^{\otimes i}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(G,\mathbb{Q}) \quad ,$$

où on a posé pour abréger (et par abus de langage)

$$(5.8) \; H^*(X,G;\mathbb{Q}_\ell(i))=H^*(X,G;T_\ell(i))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell \; , \; H^*(X,\mathbb{Q}_\ell(i))=H^*(X,T_\ell{}^{\otimes i})\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell \quad .$$

La flèche dans (5.7) est encore celle donnée par cup-produit. On peut donc dire que l'isomorphisme de KUNNETH (5.4) donné par cup-produit reste valable en supposant seulement les $H_j(G,\mathbb{Z})$ de type fini, à condition de négliger les groupes de torsion i.e. de tensoriser par $\mathbb{Q}$. Avec ce grain de sel, la remarque faite dans 5.1.3 sur les classes de Chern reste encore valable.

5.2. Comme premières propriétés triviales, de nullité resp. de torsion pour les classes de Chern ℓ -adiques mixtes, il y a celles liées à la ℓ -dimension cohomologique du couple (X,G) . Ainsi, on déduit aussitôt de la suite spectrale (2.2) que l'on a

(5.9) $$\mathrm{cd}_\ell(X,G) \leqslant \mathrm{cd}_\ell(X) + \mathrm{cd}_\ell(G) \quad ,$$

d'où les relations

(5.10) $$c_i(E)(\ell) = 0 \quad \text{si} \quad 2i > \mathrm{cd}_\ell(X) + \mathrm{cd}_\ell(G) \quad .$$

Par exemple si $G = \mathbb{Z}^r$, on trouve que

$$c_i(E)(\ell) = 0 \quad \text{pour} \quad 2i > \mathrm{cd}_\ell(X) + r \quad .$$

De même, négligeant la partie de torsion de la cohomologie ℓ -adique, et supposant pour simplifier que G opère trivialement sur X , et que les $H_j(G,\mathbb{Z})$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}$, pour pouvoir utiliser (5.3) , on trouve

(5.11) $$c_i(E)(\ell) \quad \text{de torsion si} \quad 2i > \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}_\ell}(X) + \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) \quad ,$$

où $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G)$ est la dimension cohomologique de G relativement aux modules de coefficients qui sont des $\mathbb{Q}$-modules, et où $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}_\ell}(X)$ désigne la borne inférieure des entiers n tels que $i > n$ implique l'existence d'un entier s , tel que $\ell^s H^i(X,F) = 0$ pour tout faisceau étale de ℓ -torsion F sur X , donc :

$$\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}_\ell}(X) \leqslant \mathrm{cd}_\ell(X) \quad .$$

On notera que, alors qu'il est tout-à-fait exceptionnel qu'on ait $\mathrm{cd}_\ell(G) < +\infty$ (si G est fini, ce n'est jamais le cas si ℓ divise card(G) !), les groupes discrets les plus importants qu'on rencontre en pratique satisfont bien à

$$\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) < +\infty \quad ,$$

et cette propriété de finitude jouit de propriétés de stabilité agréables (notamment par extension de groupes, et passage à un sous-groupe d'indice fini). A ce titre, la formule (5.11) donne des renseignements effectifs pour les cas les plus intéressants. Rappelons à ce propos [SGA 4 IX] que pour un corps k de type fini sur le corps premier P, on a

(5.12) $$cd_{\ell}(k) = 1 + \text{deg.tr. } k/P \qquad \text{si} \quad \text{car}.k = p > 0 \ ,$$

et

(5.13) $$cd_{\ell}(k) = 2 + \text{deg.tr. } k/P \qquad \text{si} \quad \text{car}.k = 0 \ ,$$

sauf pour le cas où $\ell = 2$ et où la clôture algébrique k_o de P dans k n'est pas purement imaginaire (auquel cas la 2 -dimension cohomologique de k peut être infinie) ; mais même dans ce cas, on voit que l'extension quadratique $k' = k(\sqrt{-1})$ satisfait à (5.13) , d'où résulte que (5.13) reste valable pour k en y remplaçant $cd_{\ell}(k)$ par $cd_{\mathbb{Q}_{\ell}}(k)$ (les $H^i(k,F)$ pour $i > 2 + \text{deg.tr. } k/P$ étant annulés par 2).

Compte tenu des observations qui précèdent, on peut donc dire que la possibilité de restreindre à k le corps de base d'une représentation linéaire de G donnée sur une extension K de k , impose des conditions de la forme

$$c_i(E)(\ell) \ \text{de torsion pour } 2i > cd_{\mathbb{Q}_{\ell}}(k) + cd_{\mathbb{Q}}(G)$$

pour les classes de Chern mixtes dans $H^{*}(\text{Spec}(K),G, -)$ de la représentation, qui imposent donc une minoration sur le degré de transcendance de k sur le corps premier :

(5.14) $$\text{deg.tr.}k/P \geqslant 2i - \varepsilon - cd_{\mathbb{Q}}(G)-1 ,$$

où i désigne le plus grand entier tel que $c_i(E)(\ell)$ ne soit pas de torsion, et ε est égal à 0 ou 1 suivant que K est de caractéristique non nulle ou nulle.

5.3. Il convient cependant de noter que, contrairement à ce qui se passe dans le cas "géométrique" envisagé au paragraphe précédent, les classes de Chern mixtes ℓ-adiques des représentations linéaires de G ne sont pas nécessairement des classes de torsion, le corps de définition de la représentation étant un corps k de type fini sur le corps premier. Examinons par exemple le cas de la classe c_1, associée d'après (1.16) à un homomorphisme de groupes

$$\phi : G \longrightarrow k^* .$$

Pour que la classe de Chern ℓ-adique c_1 correspondante soit nulle, il faut et il suffit donc que pour tout entier ν, l'homomorphisme précédent soit de la forme ψ^{ℓ^ν}, où $\psi : G \longrightarrow k$ est un homomorphisme convenable. Cela implique en particulier que pour tout $g \in G$, $\phi(g)$ est un élément infiniment ℓ-divisible de k^*. Or on vérifie facilement, k étant de type fini sur le corps premier, que les seuls éléments infiniment ℓ-divisibles de k^* sont les racines de l'unité de k d'ordre premier à ℓ. Par suite,

(5.15) $c_1(\phi)(\ell) = 0 \Longleftrightarrow \phi(G)$ est un sous-groupe fini de k^* d'ordre premier à ℓ,

et par conséquent :

(5.16) $c_1(\phi)(\ell)$ de torsion $\Longleftrightarrow \phi(G)$ est contenu dans le sous-groupe fini des racines de l'unité de k.

On voit donc que si le corps k (extension de type fini du corps premier) n'est pas un corps fini, il existe toujours des homomorphismes $\mathbb{Z} \longrightarrow k^*$ dont les classes de Chern ℓ-adiques mixtes ne sont pas des classes de torsion. Ce résultat reste valable si on prend pour k une extension de type fini non algébrique d'un corps k_o quelconque : tout homomorphisme $\phi : G \longrightarrow k^*$ dont les valeurs ne sont pas contenues dans la clôture algébrique de k_o dans k donne des classes de Chern ℓ-adiques qui ne sont pas des classes de torsion.

5.3.2. Utilisant cet exemple, on trouve facilement, pour $n \geqslant 1$ donné, un cas où $c_n(E)(\ell)$ n'est pas une classe de torsion, $k = k_o(t_1, \ldots, t_n)$ étant une extension transcendante pure de degré n d'un corps arbitrairement donné k_o (le corps premier, par exemple, ou un corps algébriquement clos), et $G = \mathbb{Z}^n$. On posera simplement

$$E = L_1 + \ldots + L_n \quad ,$$

où L_i est de rang 1 et donné par la représentation composée

$$G = \mathbb{Z}^n \xrightarrow{pr_i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi_i} k^* \ , \quad \phi_i(1) = t_i \quad .$$

Utilisant l'isomorphisme (5.4), on trouve

$$c_n(E)(\ell) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \otimes u_n \in H^n(k, T_\ell^{\otimes n}) \otimes H^n(G, \mathbb{Z}) \quad ,$$

où u_n est le générateur canonique de $H^n(G, \mathbb{Z})$, et où

(5.17) $$\xi_i = q_i^*(\xi) \in H^1(k, T_\ell) \quad ,$$

$q_i : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k_o(t))$ étant associé à l'homomorphisme $k(t) \longrightarrow k = k_o(t_1, \ldots, t_n)$ qui envoie t sur t_i, et

$$\xi \in H^1(k_o(t),\ T_\ell)$$

étant défini par la formule

(5.18) $$c_1(L) = \xi \otimes u_1 \in H^2(\mathrm{Spec}(k_o(t)), \mathbb{Z}; T_\ell) \simeq H^1(k(t_o), T_\ell) \otimes H^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \quad .$$

Ici L désigne le module de la représentation linéaire de rang 1 de $\mathbb{Z}$ défini par le caractère $\mathbb{Z} \longrightarrow k_o(t)$ envoyant le générateur 1 sur t . Notre assertion que $c_n(E)(\ell)$ n'est pas une classe de torsion revient donc à dire que l'élément cup-produit

(5.19) $$\xi_1 \ldots \xi_n \in H^n(k, T_\ell^{\otimes n})$$

n'est pas un élément de torsion, ce qui résulte du fait plus précis que le cup-produit correspondant des classes mod. ℓ^ν est un élément de $H^n(k, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes n})$ <u>d'ordre égal à</u> ℓ^ν . Ceci se prouve aisément par récurrence sur n , en utilisant le

<u>Lemme</u> 5.3.1. <u>Soient</u> k <u>un corps</u> , $K = k(t)$ <u>une extension pure de degré de transcendance</u> 1 , n <u>un entier premier à la caractéristique de</u> k , $\xi \in H^1(K, \mu_n)$ <u>l'image de</u> $t \in H^o(K, \mathbb{G}_m) = K^*$ <u>par l'homomorphisme cobord de la suite exacte de KUMMER relative à l'entier</u> n , F <u>un faisceau abélien étale sur</u> $\mathrm{Spec}(k)$, <u>annulé par</u> n . <u>Alors l'homomorphisme</u>

$$H^i(k,F) \longrightarrow H^{i+1}(K, F \otimes \mu_n) \quad ,$$

<u>défini par cup-produit avec</u> ξ , <u>est</u> injectif.

Indiquons seulement le principe de la démonstration du lemme : on prouve l'assertion analogue, plus forte a priori, où on remplace K par le corps des séries formelles $k((t))$. Or cette dernière assertion se prouve aisément par les calculs locaux explicites [2, X n° 2] .

5.4. Remarquons que dans l'exemple précédent d'une classe de Chern ℓ - adique $c_n(E)(\ell)$ qui n'est pas de torsion, il n'aurait pas été possible de remplacer le groupe $G = \mathbb{Z}^n$ par un groupe $\mathbb{Z}^m$ avec $m < n$. De façon précise, supposons que G soit un groupe abélien de type fini sur $\mathbb{Z}$, de rang n , et considérons le module E d'une représentation linéaire de G définie sur un corps k . Alors on a

$$(5.20) \qquad c_i(E)(\ell) \text{ de torsion pour } i > n = \text{rang } G \ .$$

En effet, lorsqu'on suppose tout d'abord que E admet une suite de composition dont les quotients E_j sont de rang 1 , la formule d'additivité des classes de Chern montre que $c_i(E)$ est une somme de produits de i facteurs de la forme $c_1(E_j)$; d'autre part, comme on a remarqué dans 5.1.3 , les $c_1(E_j)$ sont dans $H^*(k,T_\ell) \otimes H^+(G,\mathbb{Z})$. Notant par (5.5) que l'idéal $H^+(G,\mathbb{Q})$ de $H^*(G,\mathbb{Q})$ est de puissance $(n+1)$.ème nulle (et il en est de même de $H^+(G,\mathbb{Z})$, si G est sans torsion), on conclut (5.20) dans ce cas. On trouve même $c_i(E)(\ell) = 0$ pour $i > n$, lorsqu'on suppose G sans torsion, ce qui constitue alors une condition cohomologique nécessaire pour la possibilité de trouver une filtration de E à facteurs de rang 1 , plus généralement pour pouvoir écrire E dans l'anneau de représentations $R_k(G)$ comme une somme de représentations de rang 1 .

Dans le cas général, on note que G étant commutatif, il existe nécessairement une extension finie k' de k au-dessus de laquelle l'hypothèse précédente de dévissage soit réalisée. Or pour une telle extension, l'argument de trace habituel nous montre que les homomorphismes

$$H^*(k,G;\,F) \longrightarrow H^*(k',G;\,F)$$

sont injectifs modulo éléments annulés par $[k':k]$. Cela nous ramène donc au cas déjà traité.

Le même argument essentiellement permet de montrer ceci :

Proposition 5.5. Soient G un groupe discret tel que les $H_i(G,\mathbb{Z})$ soient de type fini sur $\mathbb{Z}$, et tel que $cd_{\mathbb{Q}}(G) = d < +\infty$. Soit E le module d'une représentation linéaire de G sur un corps k . Supposons qu'il existe une extension finie k' de k telle que $E \otimes_k k'$ admette une suite de composition de longueur s . Soient $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_s$ les rangs des facteurs de cette suite de composition, écrits par ordre de grandeur décroissante. Soit

(5.21) $$r = r_1 + \ldots + r_d$$

(où on convient que $r_i = 0$ pour $i > s$) . Alors pour tout nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de k , on a

(5.22) $$c_i(E)(\ell) \text{ de torsion pour } i > r \ .$$

Cet énoncé est de toutes façons trivial si $d \geqslant s$, puisqu'alors on a $r = \text{rang } E$. Lorsque $d < s$, cet énoncé donne par contre une condition nécessaire non triviale, en termes des classes de Chern ℓ-adiques mixtes, pour pouvoir obtenir une filtration de E du type indiqué, après extension finie du corps de base. On remarquera que dans le cas où le groupe G est à engendrement fini, cette dernière hypothèse est en fait une condition "purement géométrique", qu'il suffira d'exprimer pour la représentation correspondante sur n'importe quelle extension algébriquement close k' de k (comme on voit par des arguments standards bien connus [EGA IV 9.1]).

Pour la démonstration de 5.5 , on se ramène comme ci-dessus au cas où $k = k'$, de sorte que $c_i(E)$ s'écrit comme une somme de termes de la forme $c_{i_1}(E_1) \dots c_{i_s}(E_s)$, où les i_α sont des entiers $\geqslant 0$ de somme égale à i . Or cela exige évidemment que le nombre des α tels que $i_\alpha \neq 0$ soit $> d$ (s'il était $\leqslant d$, la somme serait $\leqslant r = r_1 + \dots + r_d$!), ce qui, en vertu de 5.7 et de la remarque 5.1.3 implique que le produit des $c_{i_\alpha}(E_\alpha)$ est nul modulo torsion.

5.6. Supposons que nous disposions d'une formule de KUNNETH du type (5.4) (par exemple $G = \mathbb{Z}^r$) ou (5.7) . Supposons de plus qu'on ait

$$H^o(X,T_\ell^{\otimes i}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \geqslant 1 \quad , \tag{5.23}$$

ce qui est le cas, rappelons-le, chaque fois que X est de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ou sur un corps premier. Alors on aura donc

$$H^*(X,G;T_\ell^{\otimes i}) \supset H^+(X,T_\ell^{\otimes i})\otimes_{\mathbb{Z}} H^*(G,\mathbb{Z}) \quad (i \geqslant 1) \quad , \tag{5.24}$$

(resp. la relation analogue avec les coefficients $\mathbb{Q}_\ell(i)$,$\mathbb{Q}$). Posons de plus

$$d = cd_\ell(X) \quad \text{resp.} \quad d = cd_{\mathbb{Q}_\ell}(X) \quad .$$

Alors on conclut que le produit de $m > d$ éléments dans le H^+ de (5.24) est nul, donc le produit de $m > d$ classes de Chern $c_i(\mathbb{E}_i)$ $(i \geqslant 1)$, dans les $H^{2i}(X,G;T_\ell^{\otimes i})$ resp. dans les $H^{2i}(X,G;\mathbb{Q}_\ell(i))$, est nul. Cela permet de répéter les arguments de 5.4 sous forme symétrique. On obtient en particulier :

<u>Proposition</u> 5.7. <u>L'énoncé</u> 5.5 <u>reste valable lorsqu'on remplace l'hypothèse</u> $cd_{\mathbb{Q}}(G) < +\infty$ <u>par celle que</u> k <u>est de type fini sur le corps premier, et qu'on désigne par</u> d <u>l'entier</u> $cd_{\mathbb{Q}_\ell}(k)$, <u>égal à</u> ε + deg.tr.k/P , <u>où</u> $\varepsilon = 1$ <u>si</u> k <u>est de car</u>. $p > 0$, $\varepsilon = 2$ <u>si</u> k <u>est de caractéristique nulle</u>.

Si les hypothèses de 5.5 et 5.7 sont réalisées simultanément, on pourra donc prendre

$$d = \mathrm{Inf}(cd_{\mathbb{Q}}(G) \ , \ cd_{\mathbb{Q}_\ell}(k)) \quad .$$

5.8. Dans le présent paragraphe, nous avons "pour fixer les idées" travaillé surtout sur un <u>corps</u> de base. Signalons cependant qu'il y aura généralement intérêt à travailler plutôt sur des anneaux de base, tels par exemple que les anneaux d'entiers des corps de nombres. Rappelons à ce propos que toute représentation linéaire d'un groupe <u>fini</u> G peut se définir sur un corps de nombres k , extension finie de $\mathbb{Q}$ (et même sur une extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$), et même sur l'anneau des entiers A de k (bien qu'en général la connaissance de la représentation sur k ne détermine pas entièrement, même à isomorphisme près, la représentation sur A). On notera cependant que lorsqu'une représentation est donnée sur un anneau A , pour définir ses classes de Chern ℓ -adiques mixtes, il faut commencer par remplacer A par l'anneau localisé

$$A' = A[\ell^{-1}] \ ,$$

pour obtenir un anneau dont les caractéristiques résiduelles soient premières à ℓ . On trouve alors des

$$c_i(E \otimes_A A')(\ell) \in H^{2i}(\mathrm{Spec}(A'),G;\ T_\ell^{\otimes i}) \quad .$$

L'avantage a priori de ces classes sur celles où on remplacerait A' (supposé intègre) par son corps des fractions, c'est qu'elles fournissent évidemment des invariants plus fins, par lesquels (pour ℓ variable) on peut éventuellement espérer distinguer entre les différentes façons de réduire à A l'anneau de base de la représentation, initialement donnée sur le corps des fractions. Comme autre avantage, signalons que les corps globaux les plus courants (tels que $\mathbb{Q}$, ou les corps de fonctions) ont généralement une cohomologie galoisienne immense, contrairement aux anneaux (tels que $\mathbb{Z}$, ou des sous-anneaux affines des corps de fonctions) qui leur donnent naissance, et qui fourniront le plus souvent des modules de type fini sur $\mathbb{Z}_\ell$ comme groupes de cohomologie ℓ -adiques mixtes où les classes de Chern mixtes prennent leur valeur. Il en est en particulier ainsi lorsque les groupes d'homologie entière de G sont de type fini, et que l'on travaille sur un ouvert d'un $\mathrm{Spec}(A)$, où A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Pour une étude arithmétique plus poussée de ces classes de Chern, il faudrait au préalable avoir une bonne connaissance des groupes de cohomologie de tels ouverts, à coefficients dans les faisceaux ℓ -adiques de TATE $T_\ell^{\otimes i}$. Il ne semble pas d'ailleurs que ces groupes de cohomologie aient été déterminés, à l'heure où ces lignes sont écrites.

§ 6. Cas des cohomologies de HODGE et de DE RHAM.

6.1. Soit X un schéma sur un autre. On lui associe canoniquement un complexe des formes différentielles relatives de X sur S :

$$\underline{\Omega}^{*}_{X/S} = \overset{*}{\Lambda}\,\underline{\Omega}^{1}_{X/S} \quad , \tag{6.1}$$

où $\underline{\Omega}^{1}_{X/S}$ est le faisceau conormal à la diagonale de $X \times_S X$, l'opérateur différentiel étant la "différentielle extérieure" habituelle [EGA IV 16] . Nous appellerons ce complexe le <u>complexe de DE RHAM</u> de X par rapport à S , et son hypercohomologie

$$H^{*}_{DR}(X/S) = \mathbb{H}^{*}(X, \underline{\Omega}^{*}_{X/S}) \tag{6.2}$$

est appelée la <u>cohomologie de DE RHAM</u> de X sur S . Il est parfois commode de considérer également le <u>complexe de HODGE</u> de X sur S , qui a même faisceau gradué sous-jacent que le complexe de DE RHAM, mais dont l'opérateur différentiel est nul. L'hypercohomologie de ce complexe

$$H^{*}_{Hdg}(X/S) = \sum_{p,q} H^{q}(X, \underline{\Omega}^{p}_{X/S}) \tag{6.3}$$

sera appelée <u>cohomologie de HODGE de</u> X <u>sur</u> S . On notera que c'est un groupe non seulement gradué, mais <u>bigradué</u> de façon naturelle. Les relations entre ces deux espèces de cohomologie sont exprimées par la suite spectrale d'hypercohomologie de (6.2) :

$$H^{*}_{DR}(X/S) \Longleftarrow E_1^{p,q} = H^{p,q}_{Hdg}(X/S) = H^{q}(X, \underline{\Omega}^{p}_{X/S}) \quad . \tag{6.4}$$

Ainsi, le groupe gradué $H^{*}_{DR}(X/S)$ est muni d'une filtration naturelle, qui "remplace" la bigraduation qui lui fait défaut.

La structure multiplicative habituelle de $\underline{\Omega}^{*}_{X/S}$ définit sur $H^{*}_{DR}(X/S)$ et $H^{*}_{Hdg}(X/S)$ des structures d'<u>anneau gradué filtré</u> resp. d'<u>anneau bigradué</u> ; ces anneaux sont anticommutatifs.

Notons que les anneaux de cohomologie (gradués filtrés resp. bigradués) $H^{*}_{DR}(X/S)$ et $H^{*}_{Hdg}(X/S)$ ont le caractère contravariant habituel par rapport au schéma relatif X/S , relatif à des carrés commutatifs, - caractère fonctoriel qu'on utilisera sans autre mention.

Rappelons enfin [20] que lorsque S est le spectre du corps des complexes, et que X est lisse sur S (donc si X est une variété algébrique non singulière sur le corps des complexes), la cohomologie de DE RHAM $H^{*}_{DR}(X/S)$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie complexe ordinaire de l'espace analytique X^{an} associé à X .

6.2. Supposons maintenant qu'on ait un Module inversible $\mathbb{L}$ sur X , d'où un élément

(6.5) $$\eta \in H^1(X, \mathbb{O}^{*}_{X}) \quad ,$$

classe de ce faisceau à isomorphisme près. Utilisant l'homomorphisme "<u>dérivée logarithmique</u>" :

(6.6) $$f \rightsquigarrow D(f) = df/f \quad : \quad \mathbb{O}^{*}_{X} \longrightarrow \mathbb{Z}^1(\underline{\Omega}^{*}_{X}) \subset \underline{\Omega}^1_X \quad ,$$

(où $\mathbb{Z}^i$ désigne le faisceau des i -cocycles), on trouve un élément

(6.7) $$D(\eta) = c_1(\mathbb{L}) \in H^{1,1}_{Hdg}(X/S) = H^1(X, \underline{\Omega}^1_{X/S}) \quad ,$$

de degré total deux dans la cohomologie de HODGE. De même, travaillant en théorie de DE RHAM, et utilisant l'homomorphisme canonique

$$\phi^i : H^i(X, \mathbb{Z}^1(\underline{\Omega}^{*})) \longrightarrow \mathbb{H}^{i+1}(X, \underline{\Omega}^{*}) \quad ,$$

valable pour tout complexe de faisceaux $\underline{\Omega}^{*}$ sur X , on trouve un élément

(6.8) $$c_1(\mathbb{L}) = \phi^1 D(\eta) \in H^2_{DR}(X/S) \quad .$$

Les éléments (6.7) et (6.8) sont appelés respectivement la <u>première classe de Chern de</u> $\mathbb{L}$ <u>au sens HODGE</u>, <u>et au sens DE RHAM</u>. Dans cette construction, nous avions sous-entendu un préschéma de base S en dessous de X, alors que $\mathbb{L}$ est donné sur X. On notera que l'invariant ~~le~~ plus fin sera obtenu en prenant $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Bien entendu, nous avons obtenu ainsi deux <u>homomorphismes</u>

(6.9) $$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^2_{\mathrm{Hdg}}(X/S) \quad \text{et} \quad \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2_{\mathrm{DR}}(X/S) \quad .$$

Ces homomorphismes sont fonctoriels par rapport au schéma relatif X/S, comme on constate aussitôt.

6.3. Supposons maintenant qu'on ait un Moduel localement libre $\mathbb{E}$ de rang r sur X. Désignons pour simplifier par $H^*(X/S)$ la cohomologie de DE RHAM ou de HODGE de X, étant entendu qu'on travaillera pour le moment dans l'une ou l'autre théorie exclusivement. Désignons encore, comme aux paragraphes 1 et 2, par

$$P = P(\mathbb{E})$$

le fibré projectif défini par $\mathbb{E}$, et considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$H^*(X) \longrightarrow H^*(P)$$

qui permet de regarder $H^*(P)$ comme un module à gauche (disons) sur $H^*(X)$. Soit encore

$$\xi = c_1(\mathcal{O}_P(1)) \in H^2(X)$$

défini par (6.8) resp. (6.7), avec $\mathbb{L} = \mathcal{O}_P(1)$, X remplacé par P. Le résultat clef (non trivial), démontré par ILLUSIE [24], est :

(6.10) Les ξ^i $(0 \leqslant i \leqslant r-1)$ forment une base de $H^*(P)$ sur $H^*(X)$.

Ceci permettra donc d'exprimer ξ^r comme combinaison linéaire des ξ^i pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$, et de définir des classes

(6.11) $$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X/S)$$

par la formule habituelle

(6.12) $$\sum_{0 \leqslant i \leqslant r} c_i(\mathbb{E})\, \xi^{r-i} = 0 \quad .$$

Bien que nous ne l'ayons pas vérifié en détail, il n'y a guère de doute (et nous admettrons) que le formalisme habituel (2.3) des classes de Chern, exprimé par la caractérisation axiomatique bien connue de HIRZEBRUCH, reste valable dans le contexte DE RHAM et HODGE. Pour ce point et une théorie plus détaillée de ces classes, ainsi que leur généralisation aux classes caractéristiques style HODGE et DE RHAM de schémas en groupes autres que $\underline{Gl}(r)$, nous renvoyons à l'exposé systématique [15] .

Ici encore, le préschéma de base S sous X était sous-entendu. On trouve les classes de Chern les plus fines en faisant $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$; celles pour un S quelconque s'en déduiront par l'homomorphisme canonique

(6.13) $$H^*(X/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) \longrightarrow H^*(X/S) \quad .$$

Mais il n'y a pas lieu de négliger le cas où S est une base quelconque, si on désire utiliser les classes de Chern pour le calcul de la structure d'un anneau de cohomologie $H^*(P/S)$ d'un fibré projectif P associé à un Module localement libre sur S , en termes de l'anneau $H^*(X/S)$ et des classes de Chern de $\mathbb{E}$, en utilisant (6.10) à (6.12) .

6.4. Disons quelques mots sur les relations entre les diverses définitions de classes de Chern dont on dispose (transcendante, ℓ-adique, DE RHAM, HODGE). Pour la relation des classes transcendantes avec les classes ℓ-adiques, cf § 1.8 et § 3. Lorsque X est lisse sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, on trouve de même la compatibilité de la définition style DE RHAM avec la définition transcendante, compte tenu de l'homomorphisme

$$\varphi : H^{*}(X^{an}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{*}(X^{an}, \mathbb{C}) \simeq H^{*}_{DR}(X/\mathbb{C}) \quad .$$

De façon précise, on trouve :

$$\varphi\,(c_p^{\mathbb{Z}}(E)) = \frac{1}{(2i\pi)^p}\, c_p^{DR}(E) \quad . \tag{6.14}$$

Pour le voir, on est ramené, grâce à la caractérisation axiomatique, au cas d'un Module inversible, où le résultat est facile [3, Prop. 12] . Enfin, modulo vérification (sans doute sur le même principe) qui, on l'espère, figurera dans [15] (*) , les relations entre les classes de Chern style DE RHAM et style HODGE doivent pouvoir s'exprimer de la façon suivante, en termes de la suite spectrale (6.4) qui les relie : <u>la classe de Chern</u> $c_\ell(\mathbb{E})$ <u>style HODGE est un cocycle universel dans la suite spectrale</u>, <u>donc définit un élément de degré total</u> $2i$, <u>degré filtrant</u> i <u>dans</u> E_∞ ; <u>d'autre part</u>, <u>la classe</u> $c_i(\mathbb{E})$ <u>style DE RHAM est de filtration</u> $\geq i$, <u>et réduite modulo filtration</u> $i+1$ <u>devient égale à l'élément du</u> E_∞ <u>défini par la classe de Chern style HODGE</u>. Comparer avec l'énoncé analogue de ATIYAH-HIRZEBRUCH [5] sur la classe de cohomologie associé à un cycle analytique d'une variété analytique complexe, et l'élément du $K(X)$ topologique associé.

6.5. Arrivé à ce point, il convient de signaler que tous les développements précédents gardent un sens dans le contexte général des topos annelés,

(*) et probablement dans [24] en atendant.

adopté au paragraphe 1 ; inutile d'ailleurs ici de remplacer le topos donné par le topos étale associé. Ces développements s'appliquent en particulier encore dans le cas envisagé au § 2 d'un groupe discret G opérant sur un espace annelé, et plus spécifiquement, sur un préschéma X. Dans ce dernier cas, la théorie peut se développer sans utiliser explicitement la théorie des schémas relatifs sur des topos annelés, et sans transposer à ce cas les calculs de ILLUSIE écrits provisoirement dans le cadre des schémas ordinaires : il suffira en effet de procéder comme au n° 2 pour constater que le "résultat clef" de 6.3 reste valable encore pour l'hypercohomologie de DE RHAM ou de HODGE mixte, faisant intervenir le groupe d'opérateurs. On trouve ainsi des classes de Chern, pour un Module localement libre $\mathbb{E}$ sur X, à groupe d'opérateurs G :

$$c_i(E) \in H^{2i}_{DR}(X/S,\ G) = \mathbb{H}^{2i}(X,G;\underline{\Omega}^{*}_{X/S}) \quad , \tag{6.15}$$

resp.

$$c_i(E) \in H^{ii}_{Hdg}(X/S,\ G) = H^{i}(X,G;\underline{\Omega}^{i}_{X/S}) \quad . \tag{6.16}$$

Il est entendu ici que G opère sur X par S-automorphismes ; on pourra par exemple toujours prendre $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Sur X, on garde la topologie de ZARISKI.

Lorsque X, au lieu d'être un schéma, est un espace analytique complexe, on retrouve comme cas particulier de la définition générale une variante différentielle analytique complexe des classes de Chern, qui est essentiellement connue dans le cas "HODGE" et pour X lisse [3] ; dans le cas X analytique réelle ou variété C^{∞} par contre, $G = e$, la variante HODGE n'offre plus d'intérêt, puisque les $H^{i,i}_{Hdg}(X) = H^{i}(X,\underline{\Omega}^{i}_{X}) = 0$ pour

$i > 0$ (en prenant comme faisceau de différentielles les faisceaux habituels, qui sont des quotients du faisceau des différentielles défini à la KAHLER par voie purement algébrique). Quant au cas "DE RHAM", il redonne essentiellement dans ce cas (via l'isomorphisme de DE RHAM de la cohomologie complexe ordinaire et la cohomologie de DE RHAM) les classes de Chern transcendantes ordinaires, mais considérées comme étant à coefficients complexes.

6.6. En particulier, si G est un groupe discret, et E le module d'une représentation linéaire de rang fini de G sur un anneau A , les considérations de 6.5 nous fournissent des classes de Chern style DE RHAM et style HODGE

$$c_i(\mathbb{E}) \in \mathbb{H}^{2i}(G, \underline{\Omega}^{*}_{A/\mathbb{Z}}) \quad , \tag{6.15 bis}$$

resp.

$$c_i(\mathbb{E}) \in H^i(G, \underline{\Omega}^{i}_{A/\mathbb{Z}}) \quad . \tag{6.16 bis}$$

Lorsque A est un corps k , le complexe resp. groupe de coefficients ne change pas, quand on remplace l'anneau de base $\mathbb{Z}$, par rapport auquel on prend les différentielles, par le corps premier P contenu dans k , ou même par la clôture algébrique k_o de P dans K ; lorsque k est de caractéristique $p > 0$, on peut même remplacer k_o par le corps plus grand $k_1 = P(k^p)$.

Lorsque l'on a

$$\underline{\Omega}^{1}_{A/\mathbb{Z}} = 0 \quad ,$$

ce qui est le cas par exemple lorsque A est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, ou une extension algébrique de $\mathbb{Q}$, ou l'anneau $\mathbb{Z}$ ou un localisé de $\mathbb{Z}$, alors le complexe de DE RHAM est réduit à sa composante A de degré zéro. Par suite les groupes de cohomologie de HODGE $H^i(G,\underline{\Omega}^i_{A/S})$ sont nuls pour $i > 0$, donc aussi les classes de Chern $c_i(E)$ correspondantes (style HODGE). Quant à la cohomologie de DE RHAM, elle est isomorphe à $H^*(G,A)$, donc n'est pas triviale en général. Cependant, admettant l'assertion de 6.4 suivant laquelle $c_i(\mathbb{E})$ style DE RHAM est de filtration i , et notant qu'ici $\mathrm{Filt}^{j-1}H^j_{DR}(A/\mathbb{Z},G) = 0$ pour tout j , on trouve que dans ce cas, les classes de Chern style DE RHAM sont également nulles. En particulier, on voit que lorsque $A = k$ est un corps algébriquement clos, la théorie des classes de Chern, style HODGE ou DE RHAM, est vide si k est de caractéristique $p > 0$.

6.7. Il n'en est plus de même si k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle non algébrique sur $\mathbb{Q}$, par exemple le corps $\mathbb{C}$, ou un corps non parfait. Considérons par exemple une représentation linéaire de degré 1, donnée par un caractère

$$\phi : G \longrightarrow k^* \quad ,$$

alors la classe de Chern style HODGE :

$$c_1(E) = c_1(\phi) \in H^{1,1}_{Hdg}(k/P,G) \simeq \mathrm{Hom}(G,\underline{\Omega}^1_{k/P}) \quad , \tag{6.17}$$

s'identifie par définition à l'homomorphisme

$$u : G \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{k/P} \quad \text{donné par} \quad u(g) = d\phi(g)/\phi(g) \quad , \tag{6.18}$$

où $d\,\phi(g)$ désigne la différentielle absolue (i.e. par rapport au corps premier P) de $\phi(g)$. Par suite, on a

$$c_1(E) = 0 \iff d\,\phi(g) = 0 \quad \text{pour tout} \quad g \in G \quad ; \tag{6.19}$$

lorsque k est de caractéristique nulle, cela signifie que $\phi(g)$ est algébrique sur le corps premier $\mathbb{Q}$ pour tout $g \in G$, donc que ϕ est "définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$". Lorsque k est de car. $p > 0$, cela signifie que pour tout $g \in G$, on a $\phi(g) \in k^p$, donc que ϕ est "définie sur k^p". Si donc $\Omega^1_{k/P} \neq 0$, i.e. k non parfait ou k extension non algébrique de $\mathbb{Q}$, on peut toujours trouver des représentations de rang 1 de $G = \mathbb{Z}$ sur k, dont le c_1 style HODGE soit $\neq 0$. D'ailleurs, la suite spectrale standard montre que chaque fois que le c_1 style HODGE est non nul, (G opérant trivialement sur le corps k) il en est de même du c_1 style DE RHAM, son image dans $E_\infty^{1,1}$ (cf. 6.4) étant non nulle. (Utiliser le fait que la relation $\frac{dy}{y} = dx$ pour deux éléments d'une extension de corps k/P implique $dx=0$, $dy=0$, fait qui se vérifie sans difficulté).

Procédant comme dans 5.3.2, on en conclut également des exemples de classes de Chern $c_i(E)$, style HODGE ou DE RHAM, qui ne sont pas nulles, pour i donné, tant dans le cas d'un corps de base de type fini sur le corps premier, que dans le cas d'une extension de type fini d'un corps arbitrairement donné k_o (auquel cas on peut prendre aussi le complexe des différentielles relatives à k_o comme complexe de coefficients). Lorsque l'on est en caractéristique nulle, on voit aisément qu'une classe non nulle reste non nulle après toute extension k' du corps k (fait valable plus généralement chaque fois qu'on a une extension séparable d'un corps k), de sorte qu'on peut alors dans l'exemple précédent remplacer k par une extension algébriquement close, par exemple par le corps des complexes. On voit donc que la théorie des classes de Chern DE RHAM ou HODGE "arithmétique", pour les représentations complexes des groupes discrets, n'est pas du tout triviale ; contrairement à ce que nous avons vu dans le paragraphe 4 dans le cas de la théorie ℓ-adique, on trouve même des classes de Chern dans des groupes d'hypercohomologie qui sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ (en fait, même sur $\mathbb{C}$ en l'occurence), i.e. les classes non nulles de tous degrés que nous rencontrons sont également des classes qui ne sont pas de torsion.

6.8. La raison de cette différence, en apparence peu naturelle, avec la théorie ℓ-adique, c'est que les classes de Chern ℓ-adiques qui ont vraiment un caractère "arithmétique" sont celles qui se définissent sur des corps de base de type fini (auquel on peut toujours réduire la représentation donnée lorsque G est à engendrement fini). Dans ce cas, nous avons vu que les classes de Chern ℓ-adiques donnent également des invariants généralement non triviaux dans des espaces de cohomologie qui sont des vectoriels sur $\mathbb{Q}_\ell$, donc des invariants qui ne sont pas de torsion. On notera que ces invariants ne se détruisent alors pas non plus par passage à une extension du corps de base k, tant qu'on reste dans les corps de type fini au sens absolu.

Il n'empêche que lorsqu'on travaille sur le corps premier $\mathbb{Q}$ lui-même, et qu'on se borne à la considération des c_1, il se peut que les c_1 ℓ-adiques ne soient pas des classes de torsion (cf (5.16)), alors que les classes de Chern style HODGE ou DE RHAM sont nulles. Il est possible que cette anomalie puisse être exorcisée en travaillant avec une théorie cohomologique plus fine que la théorie de DE RHAM, dont la définition reste à trouver, théorie qui fournirait des groupes de cohomologie s'envoyant dans la cohomologie de DE RHAM. C'est dans cette direction, inaugurée par les travaux de MONSKY et WASHNITZER [35], qu'il convient également de chercher une théorie raisonnable des "classes de Chern p-adiques" pour une représentation linéaire de G définie sur un corps k parfait de caractéristique $p > 0$ (*). Si $W(k)$ est l'anneau des vecteurs de WITT construit sur k, ces classes

(*) Pour les principes généraux qui devraient permettre une telle définition, voir dans ce même volume, A. GROTHENDIECK, Crystals and De Rham Cohomology of algebraic schemes, 7.4.

de Chern devraient être des

(6.20) $$c_i(E) \in H^{2i}(G,W(k)) \quad (*).$$

6.9. Restant d'autre part dans le cadre de la cohomologie de DE RHAM ou de HODGE, on peut noter que l'on a des résultats de nullité analogues à ceux du paragraphe 5. Ainsi, on trouve aisément (par considération de la filtration de la cohomologie de DE RHAM, et en utilisant 6.4), que

(6.21) $$\underline{\Omega}^i_{X/S} = 0 \quad \text{pour} \quad i > n \quad \text{implique} \quad c_i(E) = 0 \quad \text{pour} \quad i > n ,$$

les classes de Chern étant prises dans la cohomologie de DE RHAM ou de HODGE relativement à S. Ceci impose donc des restrictions, en particulier, à la possibilité de restreindre à un sous-corps k_o le corps de base d'une représentation linéaire donnée sur un corps k, en se rappelant que dans le premier membre de l'implication (6.21) on peut prendre pour n le degré de transcendance de k_o sur le corps premier. Cette majoration (6.21) est plus simple que celle obtenue dans 5.2, en ce qu'elle ne fait pas intervenir la dimension cohomologique de G lui-même.

Comme dans 5.1 (et sans les ennuis techniques de passage à la limite), on trouve pour la cohomologie de HODGE ou de DE RHAM mixte des formules du type KUNNETH comme (5.3), pourvu que G opère trivialement sur X. Cela permet de formuler également pour les classes de Chern style HODGE ou DE RHAM les résultats de 5.5 et 5.6. Nous en laissons le détail au lecteur.

6.10. Nous avons surtout envisagé ici le cas d'un corps de base, mais comme nous avons déjà mentionné dans 5.8, il y aura sans doute avantage

(*) Du moins si les $H_n(G,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont finis (sinon, il convient de remplacer le deuxième membre de (6.20) par $\varprojlim_{\nu} H^{2i}(G,W(k)/p^{\nu}W(k))$). Notons qu'on devra avoir $(\sigma-p^i)c^i=0$, où σ provient de l'automorphisme de frobenius de $W(k)$, d'où il résulte que les c^i sont de torsion. Par ailleurs, on devra avoir $c^1=0$, sauf peutêtre pour $p=2$.

souvent à travailler sur des anneaux de base plus généraux. Signalons à ce propos que si A est l'anneau des entiers d'une extension finie k de $\mathbb{Q}$ distincte de $\mathbb{Q}$, on a

$$(6.22) \qquad \Omega^{i}_{A/\mathbb{Z}} = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2 \quad , \text{ mais } \Omega^{1}_{A/Z} \neq 0 \quad ,$$

la première relation signifiant que $\Omega^{1}_{A/\mathbb{Z}}$ est un A -module localement monogène, fait élémentaire bien connu [36, p. 68 Prop. 14], le deuxième étant une reformulation du théorème de MINKOWSKI [29, p. 78] d'après lequel toute extension algébrique finie k de $\mathbb{Q}$ de degré > 1 est "ramifiée sur $\mathbb{Q}$" i.e. donne un anneau d'entiers A qui est ramifié sur $\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que pour des représentations linéaires définies sur A, les $c_i(E)$ sont nuls pour $i \geqslant 2$ (6.21), mais qu'en général il pourra exister (même si G est fini) des représentations de rang 1 dont le c_1 est non nul. Prenant par exemple pour k le corps cyclotomique des racines p^n.èmes de l'unité, on sait que l'anneau des entiers A est engendré par une racine primitive de l'unité, ce qui implique que pour une telle racine ξ, on a $d\xi \neq 0$. Par suite, la représentation linéaire identique du groupe $G \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ des racines p^n.èmes de l'unité dans A, représentation définie sur A, a un c_1 qui est non nul en vertu de (6.19).

6.11. Pour terminer, signalons que la construction de ATIYAH [3] des classes de Chern style HODGE en géométrie analytique peut se transporter sans difficulté au cas général envisagé dans le présent paragraphe, et donne une construction de ces classes qui est indépendante de la théorie cohomologique style HODGE des fibrés projectifs. Renvoyant à [15] pour le détail de la construction, et la comparaison avec la définition précédente, contentons-nous de signaler que pour définir la "classe de ATIYAH"

(6.23) $$c(E) \in H^1(X, \underline{\mathrm{End}}(\mathbb{E}) \otimes \underline{\Omega}^1_{X/S})$$

du Module localement libre $\mathbb{E}$, donnant naissance aux classes de Chern en prenant les puissances

(6.24) $$c(E)^i \in H^i(X, \underline{\mathrm{Sym}}^i(\underline{\mathrm{End}}(\mathbb{E})) \otimes \underline{\Omega}^i_{X/S})$$

et utilisant l'homomorphisme

(6.25) $$c_i : \underline{\mathrm{Sym}}^i(\underline{\mathrm{End}}(\mathbb{E})) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

défini par le "i.ème coefficient du polynôme caractéristique", il convient d'utiliser le fibré <u>cotangent</u> du fibré principal P associé à $\mathbb{E}$, de groupe structural $\underline{\mathrm{Gl}}(r)$ $(r = \mathrm{rang}(\mathbb{E}))$, plutôt que le fibré tangent comme il est d'usage. L'extension de ATIYAH, définie par descente à X du faisceau des 1 -différentielles relatives de P/S (faisceau sur lequel en effet $\underline{\mathrm{Gl}}(r)$ opère) est alors une extension

(6.26) $$0 \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ati}}(\mathbb{E}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbb{E}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

dont $c(E)$ est la classe. (Ce sont les splittages de l'extension (6.26) qu'il convient de désigner sous le nom de "connexions sur $\mathbb{E}$ relativement à S"). Pour simplifier les notations, nous n'avons pas écrit de groupe discret d'opérateurs dans la situation ; c'est d'ailleurs inutile lorsque l'on convient de travailler encore sur un topos localement annelé quelconque, comme il serait encore loisible (*).

§ 7. <u>Appendice</u> : <u>Généralisation d'un résultat de J. MILNOR</u>.

Nous allons ici prouver le théorème suivant, que nous avions signa-

(*) Pour une généralisation de cette construction au cas où $\mathbb{E}$ est un complexe "parfait", et divers compléments, cf. [24].

lé dans 0.9 :

Théorème 7.1. *Soient* G *le groupe des points rationnels sur* $\mathbb{C}$ *d'un groupe algébrique sur le corps* $\mathbb{C}$ *des complexes,* Γ *un groupe discret,* $u : \Gamma \longrightarrow G$ *un homomorphisme, d'où un morphisme sur les espaces classifiants* $B_u : B_\Gamma \longrightarrow B_G$ (G *étant muni de sa topologie habituelle, en faisant un groupe de Lie complexe*). *Alors pour tout corps de coefficients* k *de caractéristique nulle, l'homomorphisme correspondant*

$$H^i(B_G,k) \longrightarrow H^i(B_\Gamma,k)$$

est nul pour $i > 0$.

Bien entendu, le point de vue adopté dans cet énoncé étant le point de vue homotopique, les groupes de cohomologie envisagés sont les groupes de cohomologie singulière. Il est immédiat que 7.1 équivaut au

Corollaire 7.2. *Soient* X *un espace topologique connexe ponctué,* $\phi : \pi_1(X) \longrightarrow G$ *un homomorphisme (où* G *est comme dans* 7.1), *d'où un fibré associé principal* P *sur* X , *de groupe* G . *Alors les classes caractéristiques de* P *en dimensions* > 0 , *à coefficients dans un corps* k *de caractéristique nulle, sont nulles.*

Il suffit d'ailleurs de vérifier 7.2 lorsque X y est un polyèdre fini, compte tenu de la définition de la cohomologie singulière. Dans le cas où X est une variété différentiable, 7.2 peut aussi se reformuler ainsi (cf [3, Prop. 14]) :

Corollaire 7.3. *Soient* X *une variété différentiable,* P *un fibré principal sur* X *à groupe structural* G , *muni d'une connexion* intégrable *inva-*

riante par G . Alors les classes caractéristiques de P en dimensions > 0 , à coefficients dans un corps k de caractéristique nulle, sont nulles.

On notera que dans 7.2 et 7.3 , lorsque l'homologie singulière entière de X est de type fini sur $\mathbb{Z}$ en toute dimension, alors la conclusion énoncée équivaut encore à dire que les classes caractéristiques entières de P , en dimensions > 0 , sont des classes de torsion. Cette conclusion peut tomber en défaut lorsqu'on abandonne l'hypothèse de finitude faite, cf. 4.12 b).

La démonstration de 7.1 se fera en plusieurs pas.

a) Cas où G est connexe et réductif. C'est le cas traité par J. MILNOR [32, Th. 3] , dont nous rappelons la démonstration. On prouve le résultat sous la forme 7.2 , en supposant X un polyèdre fini. Alors X se plonge dans un espace $\mathbb{R}^n$, et comme il est bien connu, X est alors rétracte par déformation d'un voisinage ouvert convenable dans $\mathbb{R}^n$. Cela nous ramène alors au cas où X est une variété différentiable, donc à prouver 7.3 . Or dans ce cas, G étant complexe réductif, un théorème bien connu de A. WEIL [9] nous apprend comment calculer les classes caractéristiques à coefficients complexes de P en termes du tenseur courbure d'une connexion de P , en lui appliquant les polynômes invariants (par l'action adjointe) sur l'algèbre de Lie de G . Lorsqu'il existe une connexion intégrable, i.e. à tenseur courbure nul, cela implique la conclusion de 7.3 .

On notera que le théorème de A. WEIL cité est énoncé le plus souvent pour un groupe structural de Lie connexe et compact (c'est pourquoi, sans doute, MILNOR n'énonce son résultat que pour un tel G). Mais grâce à la théorie du groupe complexe associé à un groupe de Lie compact [10, Chap. VI] , ce résultat s'étend aussitôt au cas d'un groupe de Lie complexe réductif connexe (la connexion étant d'ailleurs également superflue, en fait). D'autre part, KAMBER [26] annonce une démonstration purement topologique du résultat de MILNOR.

b) Cas G connexe commutatif. Alors le résultat 7.1 est valable sans supposer G algébrique ni même complexe. En effet, on aura alors un isomorphisme de groupes topologiques

$$G \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q ,$$

ce qui nous ramène aussitôt au cas où G est lui-même égal à $\mathbb{T}$, le tore réel de dimension 1, ou si on préfère, à son complexifié $\mathbb{C}^*$. Mais ce dernier est un groupe complexe réductif, et on est donc dans le cas a) .

c) Invariance du problème par passage de G à la composante neutre G^o , ou de G supposé connexe à un groupe isogène. La première réduction provient du fait que l'homomorphisme

$$H^*(B_G,k) \longrightarrow H^*(B_{G^o},k)$$

est injectif lorsque k est de caractéristique nulle (car G/G^o est un groupe fini ; l'image du premier membre est alors le sous-espace des invariants sous G/G^o dans le second membre). La deuxième provient du fait bien connu qu'une isogénie de groupes de Lie induit un isomorphisme de la cohomologie des classifiants, à coefficients dans un corps k de caractéristique nulle.

d) Cas général. Il résulte aussitôt des points précédents, combiné au lemme suivant de la théorie des groupes algébriques :

Lemme 7.4. *Soit G un schéma en groupes algébrique lisse et connexe sur un corps parfait. Il existe alors un sous-groupe invariant U, lisse connexe unipotent (donc isomorphe comme schéma à l'espace affine de même dimension), et une isogénie*

$$G/U \longrightarrow H_1 \times H_2 \quad ,$$

avec H_1 commutatif, et H_2 semi-simple.

On notera que lorsque K est le corps $\mathbb{C}$ des complexes, alors le groupe de Lie complexe $U(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^n$, donc l'homomorphisme $G \longrightarrow G/U$ induit un homotopisme sur les espaces classifiants correspondants, ce qui nous ramène, pour démontrer 7.1 pour G, à le démontrer pour G/U, ou encore pour H_1 et pour H_2, justiciables de b) et a) ci-dessus.

Pour être complet, donnons une démonstration de 7.4 à coups de références. D'après le théorème de structure fondamental de CHEVALLEY, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 1 \quad ,$$

avec A une *variété abélienne*, et L un groupe algébrique lisse connexe et *affine*. On prend pour U le radical unipotent [11] de L, c'est un sous-groupe caractéristique de L donc invariant dans G, et il est lisse connexe unipotent. Alors $G' = G/U$ est une extension de la variété abélienne A par le groupe $L' = L/U$, qui est *réductif*. On sait qu'il existe une isogénie

$$L' \longrightarrow T \times L_o \quad ,$$

avec T un tore, et L_o un groupe semi-simple à centre nul. Il suffit donc de prouver que l'extension G'' de A par $T\times L_o$ déduite de G' peut se mettre sous la forme d'un produit $H_1 \times H_2$ comme ci-dessus. Or soit Z le centre de G'' . On sait, comme conséquence immédiate de [13, XII 6.1 et VI_B 11.9] , que le morphisme $Z \longrightarrow A$ est surjectif, donc un épimorphisme, donc l'extension G'' de A par $T\times L_o$ est définie par l'extension Z de A par $Z \cap (T\times L_o)$. Ce dernier groupe, étant contenu dans le centre de $T\times L_o$, qui est T , est contenu dans T , de sorte que l'extension G'' apparaît comme le produit d'une extension H_1 de A par T , et de $H_2 = L_o$. Enfin on sait (cf démonstration de [13, XII 6.4]) que H_1 est commutative. Cela achève de prouver 7.4 donc 7.1 .

<u>Remarques</u> 7.5.

a) La partie a) de la démonstration, utilisant des méthodes proprement topologiques et de géométrie différentielle, peut être remplacée par une référence à 4.11 , démontré ici par voie arithmétique ; cf commentaires dans 0.9 .

b) Le théorème 7.1 ne reste pas valable lorsqu'on abandonne l'hypothèse d'algébricité faite sur G , même si G est connexe et semi-simple, par exemple $G = Sl(2,\mathbb{R})$; en fait, d'après le résultat de MILNOR cité dans 0.9 , on a alors des contre-exemples à 7.2 (i.e. à 7.3) pour tout X qui provient d'une courbe algébrique lisse, connexe et propre de genre $g \geqslant 2$, en prenant l'homomorphisme canonique du groupe fondamental de X dans le groupe des automorphismes de son revêtement universel (groupe isomorphe au quotient de G par son centre ± 1). Comme me l'a signalé J.P. SERRE, le théorème 7.1 ne s'étend pas non plus au cas où G est supposé seulement un groupe de Lie complexe et connexe. Son exemple est le suivant. Soit G' le groupe des matrices complexes inversibles triangulaires strictes de degré 3, qui est un groupe algébrique nilpotent de dimension 3, Γ' le sous-groupe formé des matrices à coefficients entiers, Γ'_o son intersection avec le centre de G' (qui est de dimension 1), de sorte que $\Gamma'_o \simeq \mathbb{Z}$. On prend $G = G'/\Gamma'_o$, $\Gamma = \Gamma'/\Gamma'_o$, $u : \Gamma \longrightarrow G$ le plongement canonique. Le sous-groupe compact maximal de G est $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$, le cercle, donc la cohomologie classifiante entière de G est engendrée par une classe c de dimension 2, qu'on peut aussi interpréter comme l'obstruction à splitter l'extension donnée G' de G par $\mathbb{Z}$ (cf à ce sujet le dernier chapitre du livre de J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, à paraître dans North Holland Publishing Cie). L'image inverse de cette classe sur B est alors la classe de l'extension Γ' de Γ par $\mathbb{Z}$, qui n'est pas de torsion comme on vérifie facilement (car autrement on trouverait que Γ', donc G', serait commutatif).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDERSON, **Thèse, à paraître.**

[2] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER, **Cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie Algébrique de l' IHES 1963/64 (SGA 4), à paraître dans North Holland Pub. Cie.**

[3] M.F. ATIYAH, Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 85, n° 1, pp. 181-207 (1957).

[4] M.F. ATIYAH, Characters and cohomology of finite groups, Pub. Math. n° 9, p. 23-64 (1961).

[5] M.F..ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, Analytic cycles on complex manifolds, Topology, Vol. 1, p. 25-45 (1961).

[6] M.F. ATIYAH, Finiteness theorems for compact Lie groups (multigraphié).

[7] A. BOREL Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Annals of Math., Vol. 57, n°1, p. 115-207 (1952).

[8] H. CARTAN et S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.

[9] S.S. CHERN, Differential geometry of fibre bundles, Vol. II, pp. 397-411, Proc. Internat. Congress Math., 1950.

[10] C. CHEVALLEY, Theory of Lie groups, Princeton University Press, 1946.

[11] C. CHEVALLEY, Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire à l'Ecole Normale Supérieure, 1956 et 1957.

[12] C. CHEVALLEY, Anneau de Chow et espaces fibrés algébriques, Séminaire à l'Ecole Normale Supérieure, 1958.

[13] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK, Schémas en groupes, Séminaire de Géométrie Algébrique à l'IHES, 1962/64 (SGA 3).

[14] J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK, Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. II et IV, Pub. Math. n° 8, 20, 24, 28, 32.

[15] J. GIRAUD, Classes caractéristiques en Topologie et en Géométrie Algébrique, en préparation (à paraître dans North Holland Publishing Cie).

[16] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'Algèbre Homologique, Tohoku Math. Journal, Vol. 9, n° 2-3, pp. 119-221 (1957).

[17] A. GROTHENDIECK, La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. France 86, p. 137-154 (1958).

[18] A. GROTHENDIECK, Torsion homologique et sections rationnelles, in Séminaire CHEVALLEY à l'Ecole Normale Supérieure, 1958 (cf [12]).

[19] A. GROTHENDIECK, Cohomologie ℓ -adique et fonctions L , Séminaire de Géométrie Algébrique à l'IHES, 1964/65 (SGA 5), à paraître dans North Holland Pub. Cie.

[20] A. GROTHENDIECK, On the De Rham cohomology of algebraic varieties, Pub. Math., n° 29, p. 95-103 (1966).

[21] A. GROTHENDIECK, Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens, Inventiones Mathematicae 2, p. 59-78 (1966).

[22] M. HAKIM, Topos localement annelés et schémas relatifs, à paraître dans North. Holland Pub. Cie.

[23] F. HIRZEBRUCH, Neue topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie, Springer (1956).

[24] L. ILLUSIE, Article en préparation.

[25] J.P. JOUANOLOU, Exposé VII (en préparation) au Séminaire de Géométrie Algébrique à l'IHES de A. GROTHENDIECK, 1964/65 (cf [19]).

[26] F.W. KAMBER et PH. TONDEUR, On the characteristic ring of flat bundles Amer. Math. Soc. Abstracts of contributed papers, the October Meeting in Philadelphia, Pennsylvania (Oct. 29 1966).

[27] M. KAROUBI, Travaux plus ou moins secrets, et : Algèbres de CLIFFORD et K-théorie. Thèse Paris 1968 (Gauthier-Villars)

[28] S. LANG, Abelian Varieties, Interscience Publishers, 1958.

[29] S. LANG, Algebraic Numbers, Addison Wesley Pub. Cie. 1963.

[30] M. LAZARD, Sur la nilpotence de certains groupes algébriques, C.R. t. 241, p. 1687-1689 (1955).

[31] S. LOJACIEWICZ, Triangulation of semi-analytic sets, Annali Scuola Norm. Pisa, t. 18, p. 449-474 (1964).

[32] J. MILNOR, On the existence of a connection with curvature zero, Comm. Math. Helv., Vol. 32, Fasc. 3 (1958).

[33] R. THOM, Travaux de Milnor sur le cobordisme, Séminaire Bourbaki n° 180 (Février 1959).

[34] J. MILNOR, Construction of universal bundles, Annals of Math., t. 63, pp. 272-284.

[35] P. MONSKY et G. WASHNITZER, Formal Cohomology, Part I (miméographié), Brandeis 1966.

[36] J.P. SERRE, Corps locaux, Actualités Sc. et Ind. 1296, Paris Hermann 1962.

[37] A. WEIL, Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. 55, p. 497-508 (1949).

Crystals and the De Rham Cohomology of Schemes

A. Grothendieck.

(Notes by I. Coates and O. Jussila).

Introduction.

These notes are a rough summary of five talks given at I.H.E.S in November and December 1966. The purpose of these talks was to outline a possible definition of a p-adic cohomology theory, via a generalization of the de Rham cohomology which was suggested by work of Monsky-Washnitzer [8] and Manin [7].

The contents of the notes are by no means intended to be a complete theory. Rather, they outline the start of a program of work which has still not been carried out (*).

(*) For a more detailed exposition and progress in this direction, we refer to the work of P. Berthelot, to be developped presumably in SGA 8.

1. De Rham Cohomology.

1.1. Differentiable Manifolds. Let X be a differentiable manifold, and $\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}$ the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are complex valued differentiable functions on X.

Theorem 1.1. (De Rham). *There is a canonical isomorphism*

$$H^*(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(\Gamma(X, \underline{\Omega}^{\bullet}_{X/\mathbb{C}})),$$

where $H^*(X,C)$ *is the classical cohomology of X with complex coefficients.*

To prove this, one observes that, by Poincaré's lemma, the complex $\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}$ is a *resolution* of the constant sheaf $\underline{C}$ on X, and that the sheaves $\underline{\Omega}^{j}_{X/\mathbb{C}}$ are *fine* for $J \geqslant 0$, so that $H^i(X, \underline{\Omega}^{j}_{X/\mathbb{C}}) = 0$ for $i > 0$ and $j \geqslant 0$, whence the assertion.

An analogus result holds for the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are real valued differentiable functions on X.

1.2 Complex Analytic Manifolds. Let now X be a complex analytic manifold, and $\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}$ the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are analytic functions on X. Then it is no longer true, in general, that the $\underline{\Omega}^{j}_{X/\mathbb{C}}$ are fine for $j \geqslant 0$. For this reason, we consider the *hypercohomology* $\underline{\underline{H}}^*(X, \underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}})$ of the complex $\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}$. Thus we have the standard spectral sequence of hypercohomology

$$E_2^{pq} = H^p(X, H^q(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}})) \Longrightarrow \underline{\underline{H}}^*(X, \underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}).$$

Now Poincaré's lemma holds for X, and thus this spectral sequence degenerates, thereby showing that there is a canonical isomorphism

$$H^*(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^*(X,\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}).$$

On the other hand, we have the second spectral sequence of hypercohomology

$$E_1^{pq} = H^q(X,\underline{\Omega}^p_{X/\mathbb{C}}) \Longrightarrow \mathbb{H}^*(X,\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}).$$

If X is a Stein manifold, $H^i(X,\underline{\Omega}^j_{X/\mathbb{C}}) = 0$ if $i > 0$ and $j \geqslant 0$, and thus this spectral sequence degenerates, yielding an isomorphism

$$\mathbb{H}^*(X,\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} H^*(\Gamma(X,\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/\mathbb{C}})).$$

1. 3. The Algebraic De Rham Cohomology. Let $f : X \longrightarrow S$ be a morphism of schemes (*), and $\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S}$ the complex of sheaves of relative differential forms on X/S (EGA IV 16). Recall that the differential operator d of this complex is not $\underline{O}_X$-linear, but only $f^{-1}(\underline{O}_S)$-linear ($f^{-1}(.)$ denotes the inverse image in the sense of topological spaces, whilst, as usual, $f^*(.)$ denotes the inverse image in the sense of ringed spaces). We define the relative De Rham cohomology of X/S to be the hyper-cohomology

$$H^*_{DR}(X/S) = \mathbb{H}^*(X,\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S}).$$

We have the usual spectral sequence of hypercohomology

$$E_1^{pq} = H^q(X,\Omega^p_{X/S}) \Longrightarrow H^*_{DR}(X/S).$$

If X is affine, this spectral sequence degenerates, yielding a canonical isomorphism

$$H^*_{DR}(X/S) \xrightarrow{\sim} H^*(\Gamma(X,\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S})).$$

(*) Throughout, we follow the new terminology of schemes and separated schemes, instead of preschemes and schemes, respectively, in the old terminology.

One can also consider the relative De Rham cohomology sheaf

$$\underline{\underline{H}}^{i}_{DR}(X/S) = \underline{\underline{R}}^{i} f_{*}(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S}).$$

We have the spectral sequence

$$(1) \qquad E_1^{pq} = R^q f_*(\underline{\Omega}^p_{X/S}) \Longrightarrow \underline{\underline{H}}^{*}_{DR}(X/S).$$

If f is quasi-compact and quasi-separated, one can show that the $\underline{\underline{R}}^i f_*(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S})$ are quasi-coherent Modules on S by using this spectral sequence.

If, moreover, X is <u>smooth</u> on S, the De Rham cohomology sheaves commute with base change, provided we work with <u>derived categories</u> (*). More precisely, if we are given an arbitrary base change

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p} & X' = X \times_S S' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array},$$

then, since $\underline{\Omega}^{\cdot}_{X\ S}$ is flat, being locally free over X which is flat, the Kunneth formula asserts that there is a canonical isomorphism

$$Lg^*(\underline{\underline{R}}\ f_*(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S})) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}\ f'_*(p^*(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S})),$$

whence, since always $p^*(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \underline{\Omega}^{\cdot}_{X'/S'}$,

$$Lg^*(\underline{\underline{R}}\ f_*(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S})) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}\ f'_*(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X'/S'}),$$

which is the assertion that the De Rham cohomology commutes with base change in the sense of derived categories. Note that this does not imply, in general, that the $\underline{\underline{R}}^i f_*(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S})$ commute with base change. However, if S is of characteristic 0, and f is proper and smooth, then one can show by transcendental arguments that the $\underline{\underline{R}}^i f_*(\underline{\Omega}^{\cdot}_{X/S})$ are <u>locally</u>

(*) We use the notation for derived categories given in [6].

free, and hence commute with base change.

If X is proper on S, and S is locally noetherian, then one can show, by using the spectral sequence (1), and the finiteness theorem for proper morphisms (EGA III 3), that the $\underline{\underline{R}}^i f_*(\Omega^\cdot_{X/S})$ are coherent Modules on S. Hence, in particular, if S is the spectrum of a field k, the $H^i_{DR}(X/k)$ are finite dimensional vector spaces over k.

1.4. The Comparison Theorem. Let X be a scheme which is smooth over the complex numbers $\mathbb{C}$. Let X^{an} be the analytic manifold corresponding to X(GAGA [10]), and $\underline{\Omega}^\cdot_{X^{an}/C}$ the complex of sheaves of analytic differential forms on X^{an}. There is the canonical homomorphism of the algebraic into the analytic De Rham cohomology

$$(*)\qquad \underline{\underline{H}}^*(X,\underline{\Omega}^\cdot_{X/\mathbb{C}}) \longrightarrow \underline{\underline{H}}^*(X^{an},\underline{\Omega}^\cdot_{X^{an}/C}).$$

Theorem 1.2. The homomorphism (*) is an isomorphism.

Corollary. The algebraic De Rham cohomology $H^*_{DR}(X/\mathbb{C})$ is canonically isomorphic to $H\ (X^{an},\mathbb{C})$.

The corollary is immediate, since we saw in 1.2 that there is a canonical isomorphism

$$H^*(X^{an},\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H}}^*(X^{an},\underline{\Omega}^\cdot{}_{X^{an}/C}) .$$

The proof of Theorem 1.2 is given in [5], and so we omit it. The proof in general requires Hironaka's resolution of singularities. However, if X is proper on $\mathbb{C}$, it follows immediately from the spectral sequence

$$E_1^{pq} = H^q(X,\underline{\Omega}^p_{X/\mathbb{C}}) \Longrightarrow \underline{\underline{H}}^*(X,\underline{\Omega}^\cdot_{X/\mathbb{C}}) ,$$

together with the analogous spectral sequence for X^{an}, since GAGA shows that the initial terms of these spectral sequences are isomorphic.

1.5. Criticism of the De Rham Cohomology. Let X be a scheme of finite type on a field k.

a) If k is of characteristic 0, and X is smooth over k, the De Rham cohomology has all the good properties one could want, since Theorem 1.2 and Lefschetz principle show that we essentially have the classical complex cohomology.

On the other hand, if k is of characteristic p>0, the De Rham cohomology no longer has good properties. If X is not proper on k, the $H^i(X/k)$ need not be of finite dimension on k. For one always has

$$\Gamma(X, \underline{O}_X)^p \subset H^0_{DR}(X/k),$$

and thus $H^0_{DR}(X/k)$ is certainly not finite dimensional for an affine curve, say. Even if X is proper on k, and thus the De Rham cohomology is finite dimensional, it does not always yield the good Betti numbers. For one always has (*)

$$\dim H^1_{DR}(X/k) \geqslant 2 \dim \mathrm{Pic}_{X/k},$$

and there are examples ([5] , p. 103) where one has strict inequality. At least, the Riemann-Roch theorem shows that the De Rham cohomology does give the good value for the alternating sum of the Betti numbers.

b) The De Rham cohomology seems too closely bound to the assumption of smoothness. On the other hand, one should not restrict

(*) At least if X is geometrically normal.

oneself to the study of smooth schemes only, since the fibers of a morphism of smooth schemes need not be smooth.

c) The classical analytic De Rham cohomology theory suggests a number of important problems for the algebraic theory [5]. For example, if $f : X \longrightarrow Y$ is a smooth morphism of schemes smooth over $\mathbb{C}$, then there is the topological Leray spectral sequence

$$E_2^{pq} = H^p(Y^{an}, R^q f_*^{an}(\mathbb{C})) \Rightarrow H^*(X^{an}, \mathbb{C}).$$

The end of this spectral sequence has, by theorem 1.2, a purely algebraic definition as $H^*_{DR}(X/\mathbb{C})$. As we shall see in 3, the initial term can also be given a purely algebraic definition ([5] p 103). Thus one would like a purely algebraic definition of the spectral sequence.

d) For X proper and smooth on k, the usual duality formalism holds for the De Rham cohomology, the theory being analogous to that given for the Hodge cohomology in [4]. One also has a Lefschetz fixed point formula for the De Rham cohomology, but it only yields the number of fixed points modulo the characteristic of k, since the $H^i_{DR}(X/k)$ are vector spaces on k.

It would be convenient to have a more general duality formalism of the type $f_!$, $f^!$, as developed in [6], for the De Rham cohomology. Such a formalism would give a purely algebraic definition of the singular homology groups of X/k.

To deal with these problems, one must certainly introduce a more general category of coefficients than the De Rham complexes. One of the principal aims of these notes is to propose a definition of such a category of coefficients.

But why worry about the De Rham cohomology when one already has the ℓ-adic cohomology ?

1.6. Criticism of the ℓ-adic cohomology. If X is a scheme of finite type over an algebraically closed field k, and ℓ isany prime number distinct (*) from the characteristic of k, the ℓ-adic cohomology of X is defined to be

$$H^i_\ell(X) = \varprojlim_\nu H^i(X_{et}, \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z}) ,$$

where X_{et} is the etale cohomology of X. Thus the $H^i_\ell(X)$ are modules over the ring Z_ℓ of ℓ-adic integers.

If k is the field of complex numbers $\mathbb{C}$, the comparison theorem for the ℓ-adic cohomology [1] shows that there is a canonical isomorphism

$$H^i_\ell(X) \xrightarrow{\sim} H^i(X^{an}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$$

where $H^i(X^{an}, \mathbb{Z})$ is the classical cohomology of X with integral coefficients. Thus, for given ℓ, the knowledge of the $H^i_\ell(X)$ is equivalent to the knowledge of the rank of $H^i(X^{an}, \mathbb{Z})$ and the ℓ-primary torsion subgroup of $H^i(X^{an}, Z)$. On the other hand, the full knowledge of the structure of the $H^i(X^{an}, Z)$, including all torsion, is equivalent to the knowledge of the $H^i_\ell(X)$ for all ℓ. The comparison theorem shows immediately that the rank of $H^i_\ell(X)$ is finite and independent of ℓ, and that the characteristic polynomial of an endomorphism

(*) the ℓ-adic cohomology is still defined for ℓ equal to the characteristic of k, but it no longer has too many reasonable properties.

of $H^i_\ell(X)$ induced by a k-morphism $X \longrightarrow X$ has rational integral coefficients which are independent of ℓ.

If k is of characteristic $p > 0$, the situation is both intrinsically and technically not so satisfactory. When X is <u>proper</u> over k, the rank of $H^i_\ell(X)$ is <u>finite</u>, but even when X is projective and smooth over k, it is not known whether this rank is independent of ℓ (thus we certainly do not know whether the characteristic polynomial of an endomorphism of $H^i_\ell(X)$ induced by a k-morphism $X \longrightarrow X$ has coefficients which are independent of ℓ). If X is not proper on k, and $\dim(X) > 2$, it is not known whether the rank of $H^i_\ell(X)$ is finite. Further, the cohomological version of the deeper of Lefschetz's classical theorems [13] on the hyperplane sections of a scheme X projective and smooth on k has still not been proven for the ℓ-adic cohomology. In addition to our uncapacity at present to prove such basic facts for the ℓ-adic cohomology, there is the intrinsic fault that the ℓ-adic cohomology has reasonable properties only if ℓ is distinct from the characteristic of k. Thus it cannot yield information on p-torsion in the cohomology (see Tate [12]). Nor will it alone be able to show, in connection with the conjectures of Weil, that there are not powers of p in the denominators of the coefficients of the characteristic polynomial of an endomorphism of $H^i_\ell(X)$ induced by a k-morphism $X \longrightarrow X$ (*).

Thus we seek a <u>p-adic cohomology</u> to complement the ℓ-adic cohomology.

(*) Since these notes were written, it has been pointed out by Lubkin that the integrality question alluded to do fit into the so-called "standard conjectures" when using only ℓ-adic cohomology ; see Kleiman's exposé in this volume.

1.7. Needed properties of a p-adic cohomology. Such a cohomology theory should associate, to each scheme X of finite type over a perfect field k of characteristic $p > 0$, cohomology groups which are modules over an integral domain, whose quotient field is of characteristic 0, and which satisfy all the desirable formal properties (functorality, finite dimensionality, Poincaré duality, Kunneth formula, invariance under base change,...). This cohomology should also, most importantly, explain torsion phenomena, and in particular p-torsion.

The natural coefficient ring for the p-adic cohomology seems to be the ring W(k) of Witt vectors of k. As Serre has pointed out, one cannot take the coefficient ring to be $\mathbb{Z}_p$ or not even $\mathbb{Q}_p$. For there exist elliptic curves X such that End(X) is a maximal order of a quaternion algebra on $\mathbb{Z}$ and $\mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}_p$ is a field (Deuring [2]). Now the existence of a reasonable cohomology of X with coefficients in $\mathbb{Q}_p$ would imply that $H^i_p(X)$ is of dimension 2 on $\mathbb{Q}_p$, and that the mapping $u \longmapsto u^1$ is a representation of the opposite algebra of End(X) in $H^1_p(X)$. Thus we would have a representation of the field of quaternions $\mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}_p$ in a vector space of dimension 2 on $\mathbb{Q}_p$, which is obviously impossible. Hence the coefficient ring for our p-adic cohomology will have to be some extension of $\mathbb{Q}_p$.

1.8. Proposals for a p-adic Cohomology. We only mention two such proposals, namely Monsky and Washnitzer's method via special affine liftings (which we discuss in n° 2), and the method using the fppf (faithfully flat and finite presentation) topology.

By analogy with the ℓ-adic cohomology, the essential idea of the fppf topology approach was to consider the cohomology of X/k, with respect to the fppf topology, with coefficient groups in the category C^{ν} of finite schemes of $\mathbb{Z}/p^{\nu}\mathbb{Z}$-modules. Examples of such schemes of modules are

$$\mathbb{Z}/p^{\nu}\mathbb{Z},\ \mu_{p^{\nu}} = \operatorname{Ker}(G_m \xrightarrow{p^{\nu}} G_m)\ ,\quad \alpha_{p^{\nu}} = \operatorname{Ker}(G_a \xrightarrow{p^{\nu}} G_a)\quad .$$

More precisely, one hopes to prove the following conjectural theorem, with X proper on k, say :

(<u>Conjectural Theorem</u>). <u>There exists a complex</u> $L_{\cdot}^{\nu}$ <u>in the category</u> C^{ν} <u>of sheaves of</u> $\mathbb{Z}/p^{\nu}\mathbb{Z}$<u>-modules on Spec</u>$(k)_{fppf}$, <u>with</u> $H_i(L_{\cdot}^{\nu}) \in C^{\nu}$, <u>such that for each complex</u> $G^{\cdot}$ in C^{ν} :

$$\underline{\underline{H}}^{*}(X_{fppf}, G^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{*}_{C_{\nu}}(L_{\cdot}^{\nu}, G^{\cdot})\quad .$$

The <u>homology</u> of X/k in dimension i would then be $(H_i(L_{\cdot}^{\nu}))_{\nu \geq 0}$, which is a "profinite algebraic group scheme" over k.

This apparently works well if X is of dimension 1, and yields, as it should, the Tate module $T_p(J) = ({}_{p^{\nu}}J)_{\nu \geq 0}$ for the first homology group of X (J being the Jacobian of X) (*). However, Artin has remarked that the cohomology of X, with respect to the fppf topology, and with coefficients in a scheme of $\mathbb{Z}/p^{\nu}\mathbb{Z}$-modules, vanishes in dimension $> \dim(X)+1$. Thus, if $\dim(X) > 1$, Poincaré duality cannot hold for this homology. Nevertheless, this homology should have interesting relations with the eventual p-adic cohomology. For it can still be hoped that, if X is proper, smooth, and connected, say, one can recover the "good" p-adic cohomology groups $H^i_p(X)$, for $i \leq \dim(X)+1$,

(*) and "correct" higher cohomology groups.

as suitable "Dieudonné modules" associated to the profinite groups $(H_i(L_\bullet^\vee))$, - and hence also all $H_p^i(X)$ if we grant Poincaré duality for the conjectural p-adic cohomology groups $H_p^i(X)$.

2. The Cohomology of Monsky and Washnitzer.

2.1. Approach via liftings.

Suppose X_0 is a scheme on a perfect field k of characteristic $p > 0$, and suppose that there exists a lifting of $X_0 \longrightarrow k$ to a scheme X proper and smooth on $S = \operatorname{Spec} W(k)$ ($W(k)$ is the ring of Witt vectors of k). The essential idea of Monsky and Washnitzer's theory is perhaps that the De Rham cohomology of the lifting, $H_{DR}^i(X/S)$, is determined up to canonical isomorphism by X_0 alone, and does not depend on the particular lifting $X \longrightarrow S$ of X_0. Their idea was then that the De Rham cohomology $H_{DR}^i(X/S)$ of a lifting, which are finite dimensional vector spaces on $W(k)$ since X is proper on S, would be the p-adic cohomology of X_0. This approach yields the right Betti numbers (namely, the Betti numbers of the generic fiber of a lifting $X \longrightarrow S$), since the comparison theorem of n° 1 shows that the De Rham cohomology of the generic fiber yields the correct Betti numbers.

A first difficulty with this approach is that no such lifting of $X_0 \longrightarrow k$ exists, in general.

If X_0/k is affine, we can at least find a lifting of X_0/k to a formal scheme $\mathfrak{X}$ on S. One might then consider the hypercohomology

$$\underline{\underline{H}}^*(\mathfrak{X}, \underline{\Omega}^\bullet_{\mathfrak{X}/S})$$

where $\underline{\Omega}^{\cdot}_{\mathfrak{X}/S} = \varprojlim \underline{\Omega}_{\mathfrak{X}_n/S_n}$, $S = \mathrm{Spec}(W(k)/\mathfrak{m}^{n+1})$ ($\mathfrak{m}$ being the maximal ideal of $W(k)$), and $X_n = \mathfrak{X} \times_S S_n$. Since $\mathfrak{X}$ is affine, there is a canonical isomorphism

$$\underline{\underline{H}}^*(\mathfrak{X}, \underline{\Omega}^{\cdot}_{\mathfrak{X}/S}) \xrightarrow{\sim} H^*(\Gamma(\mathfrak{X}, \underline{\Omega}^{\cdot}_{\mathfrak{X}/S})) \quad .$$

Now consider the particular case when $X_0 = \mathrm{Spec}\ k\ [t]$. Then $\mathfrak{X}$ = Specf $W\{t\}$, where $W\{t\}$ is the ring of all formal power series $\Sigma a_n t^n$, $a_n \in W(k)$, such that $v_{\mathfrak{m}}(a_n) \to \infty$ as $n \to \infty$. Thus

$$H^1(\Gamma(\mathfrak{X}, \underline{\Omega}^{\cdot}_{\mathfrak{X}/S})) = W\{t\}/dW\{t\},$$

where d is formal differentiation of power series. But there clearly exist power series $\Sigma a_n t^n$ in $W\{t\}$ such that $\sum_n \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ is <u>not</u> in $W\{t\}$, and hence $H^1(\Gamma(\mathfrak{X}, \underline{\Omega}^{\cdot}_{\mathfrak{X}/S}))$ is not zero, nor even finite dimensional when tensored with the field of fractions K of W. Thus this cohomology is not satisfactory. However, note that this cohomology would have been zero, if, instead of considering the ring $W\{t\}$ of all convergent power series, we considered the ring $W^{\dagger}\{t\}$ of all power series $\Sigma a_n t^n$, $a_n \in W(k)$, such that

$$v_{\mathfrak{m}}(a_n) \geq \rho n \quad \text{for n sufficiently large,}$$

for some real number $\rho > 0$. This leads us to Monsky and Washnitzer's method of constructing their liftings.

2.2. <u>Monsky and Washnitzer's liftings.</u>

Monsky and Washnitzer's method was to first lift <u>affine</u> schemes. To this end, they introduced a class of algebras which we shall call

M-W-algebras ("w.c.f.g. algebras" in their terminology [8]). As before, let k be a perfect field of characteristic $p > 0$, and $W = W(k)$ the ring of Witt vectors on k. Denote by $W^{+}\{t_1, \ldots, t_n\}$ the ring of formal power series $\sum a_{i_1 \ldots i_n} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}$, $a_{i_1 \ldots i_n} \in W(k)$, such that

$$v_{\mathfrak{m}}(a_{i_1 \ldots i_n}) \geq \rho\,(i_1 + \ldots + i_n) \text{ for } i_1 + \ldots + i_n \text{ sufficiently large,}$$

for some real number $\rho > 0$. Then a M-W-algebra is defined to be any quotient of such an algebra $W^{+}\{t_1, \ldots, t_n\}$. These M-W-algebras are similar to the building blocks used by Tate in his theory of rigid analytic spaces [11].

Then Monsky and Washnitzer prove essentially the following assertions [8]:

a) If A_0 is an algebra of finite type and smooth over k (and satisfies a further mild, and probably unnecessary condition), then there exists a M-W-algebra A, which is flat (and hence "smooth") on W, and a k-isomorphism

$$\varphi : A \otimes_W k \xrightarrow{\sim} A_0 \quad .$$

b) If A and B are any two such flat M-W-algebras lifting A_0, they are isomorphic. More generally, if A and B are two M-W-algebras over W, A being "smooth", then any homomorphism $A_0 \longrightarrow B_0$ lifts to a homomorphism $A \longrightarrow B$.

c) If A is a M-W-algebra, one defines $\Omega^1_{A/W}$ by the universal property for W-derivations of A into separated A-modules, and then as usual, one defines $\Omega^p_{A/W} = \Lambda^p \Omega^1_{A/W}$, thereby obtaining a complex of M-W-algebras. Then, if $u : A \longrightarrow B$ is a homomorphism of M-W-algebras smooth on W, the induced homomorphism

$$u^* : \underline{\underline{H}}^*(\Omega^\cdot_{A/W}) \longrightarrow \underline{\underline{H}}^*(\Omega^\cdot_{B/W})$$

depends only on the induced homomorphism $u_o : A_o \longrightarrow B_o$.

Thus, if A_o is a variable finitely generated smooth k-algebra,

$$A_o \longmapsto H^*(\Omega^\cdot_{A/W})$$

is a well defined "cohomology functor" from the category of such algebras to the category of modules on W.

By localizing the above functor with respect to the Zariski topology, Monsky and Washnitzer construct cohomology sheaves $\underline{H}^*_{WM}(X_o)$ for each scheme X_o smooth on k. The global sections of these sheaves yield satisfactory global invariants in dimension 0 and 1 for smooth schemes on k. To obtain global invariants in higher dimensions, Monsky and Washnitzer introduced the site $X_{o_{WM}}$ of M-W-liftings of X_o. The underlying category of this site has as objects all pairs (U_o, A), where U_o is a Zariski open set of X_o, and A a M-W-lifting of the coordinate ring of U_o, and its morphisms are defined in the obvious fashion. The topology is "that of Zariski". The complexes $\Omega^\cdot_{A/W}$ define a complex of sheaves $\underline{\Omega}_{X_o}$ on this site, and one takes the hypercohomology

$$H^*_{WM}(X_o) = \underline{\underline{H}}^*(X_{o_{WM}}, \underline{\Omega}^\cdot_{X_o}) \quad .$$

When X_o is affine, this can be shown (as Grothendieck understood from

Washnitzer) to be just the functor (*). On the other hand, when X_0 is proper and has a proper and smooth lifting $X \longrightarrow S$, we should have a canonical isomorphism

$$H^*_{WM}(X_0) \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X/S) ,$$

which would establish the invariance property of the $H^*_{DR}(X/S)$ relative to the various liftings $X \longrightarrow S$ of X_0 considered in (2.1).

2.3. Remarks on Monsky and Washnitzer's method.

Their theory gives a p-adic cohomology theory, their cohomology groups being modules over the ring W of Witt vectors of k.

According to their published work, they have only proven their fundamental invariance assertion modulo torsion, i.e. after tensoring by the quotient field K of W. However in a private communication, as Grothendieck understood it, Washnitzer indicated that they have been able to remove this restriction. It is of course of essential importance to have a theory with coefficients in W, rather than in K.

Their method semms too closely bound to differential forms, which practically limits its applications to smooth schemes. For this reason perhaps, they have so far not overcome certain technical difficulties, and have been unable so far to prove some of the usual properties for their cohomology : for example, that their cohomology groups are of finite rank on W, even when X_0 is projective on k.

Nevertheless, they have been able to utilize their theory to give a form of the Lefschetz fixed point theorem, using completely continuous operators, and, by applying this to the frobenius endomorphism of a smooth scheme over a finite field, they prove the rationality of the zeta function of this scheme (in a way similar to that of Dwork).

3. Connections on the De Rham cohomology.

For the definition of a connection and a stratification on a sheaf, see Appendix I of these notes.

3.1. Consequence of Monsky and Washnitzer's invariance result.

For simplicity, we assume that Monsky and Washnitzer have proven their invariance assertion in its more precise formulation : namely, given an X_o smooth on a field k of characteristic $p > 0$, and any two liftings $h : X \longrightarrow S$ and $h' : X' \longrightarrow S$ of X_o/k to schemes proper and smooth on $S = \operatorname{Spec} W(k)$, then there is a canonical (in the sense that it yields a transitive system of isomorphisms between all such liftings) isomorphism

$$\underline{\underline{R}}\, h_*(\underline{\Omega}^{\bullet}{}_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}\, h'_*(\underline{\Omega}^{\bullet}{}_{X'/S})$$

in the derived category of $\underline{O}_S$-modules.

We now derive a consequence of this invariance assertion for an algebraic family of such liftings. Suppose

$$f : Y \longrightarrow M$$

is an algebraic family of liftings of X_o/k to schemes proper and smooth on S, in the following sense : we are given a morphism $M \longrightarrow S$ of finite type, and a proper and smooth morphism $f : Y \longrightarrow M$. Then, for each section g of M on S, passing through a fixed point t_o in the fiber of the closed point of S, the morphism $f_g : X_g \longrightarrow S$ given by base change by g

$$\begin{array}{ccc} Y & \longleftarrow & Y \times_M S \\ \downarrow & & \downarrow f_g \\ M & \xleftarrow{g} & S \end{array}$$

is a lifting of $X_o = X_{t_o}$ to a proper and smooth scheme on S. Consider the complex of sheaves on M

$$\underline{K}^{\bullet} = \underline{\underline{R}}\, f_*(\underline{\Omega}^{\bullet}_{Y/M}) \quad .$$

Then, since f is smooth, the De Rham cohomology commutes with base change (in the derived category sense), and thus there is a <u>canonical</u> isomorphism

$$\underline{\underline{R}}\,(f_g)_*(\underline{\Omega}^{\bullet}_{X_g/S}) \xrightarrow{\sim} Lg^*(\underline{K}^{\bullet}) \quad .$$

But, by Monsky and Washnitzer's invariance result, the various

$$\underline{\underline{R}}(f_g)_*(\underline{\Omega}^{\bullet}_{X_g/S})$$

are canonically isomorphic to each other for the different sections g of M on S passing through t_o. Hence, the complexes of sheaves

$$Lg^*(\underline{K}^{\bullet}) = Lg^*(\underline{\underline{R}}\, f_*(\underline{\Omega}^{\bullet}_{Y/M})$$

on S, for the different sections g of M on S passing through t_o, are <u>canonically isomorphic</u> to each other (*).

This strongly suggests that the complex of sheaves

$$\underline{\underline{R}}\, f_*(\underline{\Omega}^{\bullet}_{Y/M})$$

has a <u>stratification</u>, in the derived category of $\underline{O}_M$-Modules, in a neighbourhood of t_o. However, by considering families of elliptic curves on k, we shall see in (3.5) that this does not appear to be so, thereby raising a puzzle. However, we shall first give some indications in the positive direction.

(*) in the derived category, of course.

3.2. <u>The transcendental connection</u>. Suppose that S is a scheme of finite type over the complex field $\mathbb{C}$. Let $f : X \longrightarrow S$ be a proper and smooth scheme above S. Then, by the Comparison Theorem for algebraic and analytic De Rham cohomology, the coherent analytic sheaf on S^{an} defined by the coherent algebraic sheaf $\underline{\underline{R}}^i f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X/S})$ on S is canonically isomorphic to the sheaf

$$R^i f_*^{an}(\mathbb{Z}_{X^{an}}) \otimes_{\mathbb{Z}_{S^{an}}} \underline{\mathcal{O}}_{S^{an}}$$

(where $\mathbb{Z}_{X^{an}}$ is the constant sheaf of integers on X^{an}). Now there is a canonical absolute integrable connection on this analytic sheaf, namely the canonical connection on the tensor product, characterized by the condition that its horizontal sections are those of the subsheaf

$$R^i f_*^{an}(\mathbb{C}_{X^{an}}) = R^i f_*^{an}(\mathbb{Z}_{X^{an}}) \otimes_{\mathbb{Z}_{S^{an}}} \mathbb{C}_{S^{an}} \quad .$$

It will turn out that this transcendental connection comes from a connection on the algebraic De Rham cohomology sheaf $\underline{\underline{R}}^i f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X/S})$. Moreover, this latter connection can be defined by purely <u>algebraic</u> means.

3.3. <u>The algebraic connection of Gauss-Manin</u>. Manin [7], generalizing an idea of Gauss, gave the following algebraic construction of this connection. Let k be a field, and K a separable extension of k. Each derivation ∂ of k extends to a derivation $\bar{\partial}$ of K. The derivation $\bar{\partial}$ operates in a natural fashion on the De Rham complex $\Omega^\bullet_{K/k}$, and so on the De Rham cohomology $H^i_{DR}(K/k)$, and Manin shows that the operation of $\bar{\partial}$ on $H^i_{DR}(K/k)$ depends only on $\bar{\partial}$ and not on the extension $\bar{\partial}$ of ∂ . Thus the derivations of k operate on the

$H^i_{DR}(K/k)$ in such a fashion (see Appendix I) as to define an absolute integrable connection on the $H^i_{DR}(K/k)$.

If now X is a smooth model of the function field K, Manin shows that the connection on $H^1_{DR}(K/k)$ induces one on $H^1_{DR}(X/k)$, by the canonical injection $H^1_{DR}(X/k) \hookrightarrow H^1_{DR}(K/k)$.

We can put Manin's birational construction in a more general setting. Let us first recall Cartan's homotopy formula.

Let $f : X \longrightarrow S$ be a morphism of schemes, and let ∂ be an $f^{-1}(\underline{O}_S)$-derivation of $\underline{O}_X$, i.e. $\partial \in \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\underline{\Omega}^1_{X/S}, \underline{O}_X)$. Then there is the $\underline{O}_X$-homomorphism, $i(\partial) : \underline{\Omega}^p_{X/S} \longrightarrow \underline{\Omega}^{p-1}_{X/S}$, called inner product, defined by

$$i(\partial)(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \langle dx_i, \partial \rangle dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_p.$$

Further, ∂ induces an $f^{-1}(\underline{O}_S)$-homomorphism

$$\Theta(\partial) : \underline{\Omega}^\bullet_{X/S} \longrightarrow \underline{\Omega}^\bullet_{X/S} ,$$

which is defined on $\underline{\Omega}^0_{X/S} = \underline{O}_X$ by $\Theta(\partial)(x) = \langle \partial , dx \rangle$, and then extended to $\underline{\Omega}^\bullet_{X/S}$ by imposing that it commutes with d, and that its action on all products (interior, exterior, and scalar) is given by the classical formula for the derivative of a product. Cartan's homotopy formula is then

$$\Theta(\partial) = i(\partial)d + di(\partial)$$

(the proof is immediate since both sides commute with d and agree on $\underline{\Omega}^0_{X/S}$). Thus the endomorphism $\Theta(\partial)$ of $\underline{\Omega}^\bullet_{X/S}$ induced by the $f^{-1}(\underline{O}_S)$-derivation ∂ of $\underline{O}_X$ is homotopic to zero.

Now suppose that f is formally smooth and affine. Let ∂ be a derivation of $\underline{O}_S$. Then one can locally on S lift ∂ to a derivation of O_X. For it suffices to show that, if $A \longrightarrow B$ is a formally smooth morphism of rings, then we can extend a derivation of A to a derivation of B. But this follows immediately from the standard exact sequence (EGA 0_{IV} 20).

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B,B) \longrightarrow \mathrm{Der}_Z(B,B) \longrightarrow \mathrm{Der}_Z(A,B) \longrightarrow \mathrm{Exalcom}_A(B,B) \longrightarrow \cdots$$

and the fact that $\mathrm{Exalcom}_A(B,B) = 0$, since $A \longrightarrow B$ is formally smooth. Further, Cartan's homotopy formula immediately shows that the action of the local lifting on the De Rham complex depends up to homotopy only on the derivation ∂ , and *not* on the local lifting. Thus it follows that one can make the derivations of $\underline{O}_S$ operate on the De Rham cohomology sheaf $\underline{H}^i_{DR}(X/S)$, and one hopes therefore to define an absolute integrable connection on it. Of course, the difficulty with this method, when f is not affine, is that one cannot in general lift the derivations of $\underline{O}_S$ locally on S to derivations of $\underline{O}_X$.

3.4. *Construction of the absolute canonical connection on the De Rham cohomology*. By using again what is essentially Cartan's homotopy formula, we now construct an absolute connection, in the sense of *derived categories*, on the De Rham cohomology $\underline{\underline{R}}f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X/S})$ of an arbitrary *smooth* morphism $f : X \longrightarrow S$, and even a slightly stronger structure, as we shall see. In the case when the $\underline{\underline{R}}^i f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X/S})$ are *locally free* (and therefore commute with base change), our proof also shows that there is an absolute connection on the $\underline{\underline{R}}^i f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X/S})$.

To give such a connection is equivalent to constructing, for each diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & & X' \arrow[d, "f'"] & X'' \arrow[dl, "f''"] \\ S & & S' \arrow[ll, shift right, "q_1"'] \arrow[ll, shift left, "q_2"] & \end{tikzcd}$$

where $h : S \hookrightarrow S'$ is a closed immersion defined by an ideal I of square zero, q_1, q_2 are two retractions of h, and $f' : X' \longrightarrow S'$, $f'' : X'' \longrightarrow S'$ are smooth liftings of $f : X \longrightarrow S$ given by base change by q_1, q_2, an isomorphism

$$\underline{\underline{R}}\, f'_*(\underline{\Omega}^\bullet{}_{X'/S'}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}\, f''_*(\underline{\Omega}^\bullet{}_{X''/S'})$$

(satisfying the natural condition of transitivity for a third $q_3 : S' \longrightarrow S$). For, since f is smooth and hence commutes with base change in the sense of derived categories, this means that we have given a canonical isomorphism

$$\underline{\underline{L}}\, q_1^* \,(\underline{\underline{R}}\, f_*(\underline{\Omega}^\bullet{}_{X/S})) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{L}}\, q_2^*(\underline{\underline{R}}\, f_*(\underline{\Omega}^\bullet{}_{X/S})),$$

which is precisely the definition of a connection in the sense of derived categories. Our construction does not use the two retractions q_1, q_2, and is valid for <u>any</u> two smooth liftings X', X'' of $f : X \longrightarrow S$.

Let $\underline{G}$ denote the sheaf of germs of S'-automorphisms of X' which induce the identity on X, and $\underline{P}$ the sheaf of germs of S'-isomorphisms from X' onto X'', which induce the identity on X. Then there is a canonical isomorphism [SGA 1 III]

$$\underline{G} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(\underline{\Omega}^1{}_{X/S}, I\,\underline{O}_{X'}) = \underline{\mathrm{Der}}_S(\underline{O}_X) \otimes_{\underline{O}_X} I\,\underline{O}_{X'} \ .$$

Further, $\underline{P}$ is a right "torsor" (=principal homogenous sheaf) under $\underline{G}$. Note also that there are canonical isomorphisms of $\underline{O}_X$-modules

$$\underline{\Omega}^p{}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \underline{\Omega}^p{}_{X'/S'} \otimes_{\underline{O}_{X'}} \underline{O}_X \,, \quad I\,\underline{O}_{X'} \xrightarrow{\sim} I\,\underline{O}_{X''} \ ,$$

and we shall identify these canonically isomorphic Modules.

We have the following morphisms. Firstly, there is the canonical morphism

$$u : \underline{P} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S'}^{(o)}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{X'/S'}, \underline{\Omega}^{\bullet}_{X''/S'}) \quad (*)$$

induced by the canonical morphism $\underline{P} \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{X''/S'}, \underline{\Omega}^{\bullet}_{X''/S'})$ given by transport of structure. Secondly, there is the canonical morphism of interior product

$$i : \underline{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S'}^{(-1)}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{X'/S'}, \underline{\Omega}^{\bullet}_{X''/S'}),$$

which is defined by

$$i(\partial)(f'dx'_1 \wedge \ldots \wedge d'x'_n) = pf' \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \langle \partial, dx'_j \otimes 1 \rangle \, p_* \ldots$$
$$\ldots (d'x'_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d'x'_j} \wedge \ldots d'x'_n)$$

where $\partial \in \Gamma(U, \underline{G})$, $f' \in \Gamma(U, \underline{O}_{X'})$, and $p \in \Gamma(U, \underline{P})$. This definition does not depend on the particular section $p \in \Gamma(U, P)$. Finally, there is the canonical morphism

$$\theta : \underline{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S'}^{(o)}(\Omega^{\cdot}_{X'/S'}, \underline{\Omega}^{\cdot}_{X''/S'})$$

which is defined on $\underline{\Omega}^{o}_{X'/S'} = \underline{O}_{X'}$ by $\theta(\partial)(f') = \langle \partial, d'f' \otimes 1 \rangle$, and then extended to $\underline{\Omega}^{\cdot}_{X'/S'}$ by imposing that it commutes with d', d'', and that its action on all products is given by the classical formula for the derivative of a product. Then

$$(*) \qquad \theta(\partial) = i(\partial)d' + d'' i(\partial).$$

Further, we have the relations

$$(**) \quad \begin{cases} u(p\partial) = u(p) + \theta(\partial) \\ \theta(\partial + \partial') = \theta(\partial) + \theta(\partial') \end{cases} .$$

Now we can express the fact that $\underline{P}$ is a principal homogenous space under $\underline{G}$ by giving an extension of $\underline{G}$ by $\mathbb{Z}$ (the constant sheaf of integers)

$$0 \longrightarrow \underline{G} \xrightarrow{e} \overline{\underline{G}} \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(*) the subscript S' denotes $f^{-1}(\underline{O}_{S'})$-homomorphisms.

together with a $\underline{G}$-isomorphism

$$\underline{P} \longrightarrow j^{-1}(1).$$

Let $\underline{H}^\bullet = \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{S'}(\underline{\Omega}^\bullet_{X'/S'}, \underline{\Omega}^\bullet_{X''/S'})$, and let the complex $\underline{L}^\bullet$ be defined by

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots\longrightarrow 0 \longrightarrow & \underline{L}^{-1} & \xrightarrow{d} & \underline{L}^{0} & \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & \parallel & & \parallel & \\ & \underline{G} & \xrightarrow{e} & \underline{G} & \end{array}$$

Then there is a morphism

$$\varphi : \underline{L}^\bullet \longrightarrow \underline{H}^\bullet$$

defined by the conditions

$$\varphi^{(-1)} = i \ , \ \varphi^{(0)}|\underline{P} = u \ , \ (\varphi^{0}\, d = \theta) \ .$$

In the derived category of abelian sheaves on the underlying topological space of X, there is an isomorphism

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \underline{L}^\bullet \ ,$$

whence we obtain from φ a canonical homomorphism in the derived category of $\mathbb{Z}$-Modules

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \underline{H}^\bullet \quad , \ \text{i.e. an element } \Psi \in \mathbb{R}^{0}\,\Gamma_X(\underline{H}^\bullet) \ .$$

Composing with the canonical morphism

$$\underline{H}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}\ \underline{\mathrm{Hom}}_{S'}(\underline{\Omega}^\bullet_{X'/S'} \ , \ \underline{\Omega}^\bullet_{X''/S'})$$

we obtain a canonical element of $\mathbb{R}^{0}\Gamma_X(\underline{H}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}^{0}_{D(f^{-1}(\underline{O}_{S'}))}(\underline{\Omega}^\bullet_{X'/S'}, \underline{\Omega}^\bullet_{X''/S''})$.

This canonical element is seen to be an isomorphism by observing that it leads to a transitive system of morphisms between the complexes $\underline{\Omega}^\bullet_{X'/S'}$ for the different liftings X'/S' of X/S, and that it is the identity when $X' = X''$. Applying the functor $\mathbb{R}f_*$, we get the desired isomorphism $\mathbb{R}f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X'/S'}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X''/S''})$, which defines our canonical connection.

3.5. The non-existence of canonical stratifications on the De Rham cohomology. One may hope that the connection just constructed can be deduced from a stronger infinitesimal structure, namely a stratification (cf. Appendix). We show that this is not so. Let k be a field of characteristic $p>0$, and M/S the modular scheme of all elliptic curves defined on k. Then it is not possible to define a stratification relative to k on the De Rham cohomology sheaf

$$\underline{H}^1_{DR}(M/S) ,$$

with "reasonable" functorial properties, namely, compatible with morphisms of elliptic curves and with base change. For, the iterated frobenius homomorphism $M \longrightarrow M^{(p^2)}$ induces a homomorphism

$$(*) \qquad \pi : \underline{H}^1_{DR}(M/S)^{(p^2)} \longrightarrow \underline{H}^1_{DR}(M/S) \quad ,$$

which must be compatible with the stratifications. Now the fiber M_s of M at a point $s \in S$ has Hasse invariant zero if and only if the

$$\pi_s : H^1_{DR}(M_s/K(s))^{(p^2)} \longrightarrow H^1_{DR}(M_s/K(s))$$

induced by $(^*)$ is zero. But the existence of stratifications compatible with π would imply that, if $(^*)$ induces the zero endomorphism on the fiber at $s \in S$ of $\underline{H}^1_{DR}(M/S)$, then it would induce the zero endomorphism on all fibers of $\underline{H}^1_{DR}(M/S)$ in some neighbourhood of $s \in S$. But this is impossible, since, p being fixed, there are only finitely many elliptic curves of Hasse invariant zero.

4. The infinitesimal topos and stratifying topos.

We now turn to the definition of a more general category of coefficients for the De Rham cohomology. To this end we introduce two ringed topos, the infinitesimal topos and the stratifying topos.

We shall see later that in fact these two topos work well only in characteristic 0, and at the end of these notes we propose the definition of two more ringed topos, the crystalline topos and connecting topos, the sheaves of modules of which seem to define the good categories of coefficients for the generalized De Rham cohomology in arbitrary characteristic.

4.1. The infinitesimal topos. Let X be a scheme above the base S. We first define the infinitesimal site of X/S, Inf(X/S). The underlying category of Inf(X/S) has as objects all "nilpotent" S-immersions $U \hookrightarrow T$, i.e. those defined by a nilpotent ideal on T, U being any open set of X. The morphisms of this category are defined in the natural fashion. The topology on the category is generated by the pretopology defined by taking, as covering families of $U \longrightarrow T$, those defined by Zariski open coverings (T_i) of T, to each T_i being associated the immersion $U_i \hookrightarrow T_i$, where $U_i = U \times_T T_i$.

A sheaf of sets on Inf(X/S) (or an infinitesimal sheaf on X/S) can be identified with a system of sheaves of sets $F_{(U,T)}$ on T, one for each object $U \longrightarrow T$ of Inf(X/S), together with, for each morphism $(U \longrightarrow T) \longrightarrow (U' \longrightarrow T')$, a homomorphism of the inverse image of $F_{(U',T')}$ on T into $F_{(U,T)}$, such that this homomorphism is an isomorphism when $T \longrightarrow T'$ is an open immersion, and that the resulting system of homomorphisms is transitive. The same description holds for sheaves of groups, rings etc. Thus, in particular, if for each object $U \longrightarrow T$ of Inf(X/S), we take the structural sheaf of rings of T, we obtain a sheaf of rings on Inf(X/S), which we denote by

$\underline{O}_{X_{\mathrm{inf}}}$. The category of all sheaves of sets on $\mathrm{Inf}(X/S)$ is therefore a ringed topos, which we call the <u>infinitesimal topos</u> of X/S, and which we denote by $(X/S)_{\mathrm{inf}}$ or (if S is understood implicitly) by X_{inf}.

Note that $\mathrm{Inf}(X/S)$ does not have a final object, in general.

4.2. <u>The stratifying topos</u>. As we shall see shortly, the reason for introducing the <u>stratifying site</u> of X/S, $\mathrm{Strat}(X/S)$, is that we can interpret a Module on X, fortified with a stratification relative to S, as a "special" sheaf on this site.

$\mathrm{Strat}(X/S)$ is defined as follows. Its underlying category is the full subcategory of $\mathrm{Inf}(X/S)$ consisting of those objects $U \longrightarrow T$ such that there exists locally a retraction $T \longrightarrow X$. The category $\mathrm{Strat}(X/S)$ is fortified with the induced topology. Note that if X is smooth on S, then $\mathrm{Strat}(X/S)$ and $\mathrm{Inf}(X/S)$ are the same.

Sheaves on $\mathrm{Strat}(X/S)$ can be described in exactly the same way as sheaves on $\mathrm{Inf}(X/S)$. In particular, there is also a canonical sheaf of rings $\underline{O}_{X_{\mathrm{strat}}}$ on $\mathrm{Strat}(X/S)$, obtained by taking, for each object $U \longrightarrow T$ of $\mathrm{Strat}(X/S)$, the structural sheaf of rings of T. Thus the category of all sheaves on $\mathrm{Strat}(X/S)$ is a ringed topos, which we denote by $(X/S)_{\mathrm{strat}}$ or often just X_{strat}.

We now turn to the interpretation of stratified Modules on X as "special" Modules on $\mathrm{Strat}(X/S)$. Define an $\underline{O}_{X_{\mathrm{strat}}}$-Module F to be "special" if, for each morphism $(U \longrightarrow T) \longrightarrow (U' \longrightarrow T')$, the homomorphism of the inverse image (in the sense of <u>ringed spaces</u>) of $F_{(U',T')}$ into

$F_{(U,T)}$ is an <u>isomorphism</u>. Then the category of special $\underline{O}_{X_{strat}}$ -Modules is equivalent to the category of Modules on X fortified with a stratification relative to S. To see this, recall (see Appendix I) that, if F is a Module on X fortified with a stratification relative to S, then for each diagram of S-morphisms

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[d, hook] \\ S & Z \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ul, shift left=2, "f_2"'] \end{tikzcd}$$

where $Y \hookrightarrow Z$ is a nilpotent immersion, and f_1, f_2 are any two extensions of f, there is a <u>canonical</u> isomorphism

$$f_1^*(F) \xrightarrow{\sim} f_2^*(F)$$

which yields a transitive system of isomorphisms between the inverse images of F by the various extensions of f. Now, if F is a Module on X fortified with a stratification relative to S, we associate the Module F on Strat(X/S) defined by taking, for each object

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & U \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, hook] \\ S & T \end{tikzcd}$$

of Strat(X/S), $F_{(U,T)}$ to be $g^*(F)$, where g is some retraction of T to X (which exists locally). Note that, since F is fortified with a stratification, this definition does not depend, up to canonical isomorphism, on the particular extension g of $i : U \hookrightarrow X$. Further, this Module F on Strat(X/S) is a "special" Module. For if

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & U \arrow[l, "i"'] \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[d] \arrow[ll, bend right] \\ S & T \arrow[ul] \arrow[r, "j"] & T' \arrow[ull, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

is any morphism of Strat(X/S), then it is clear that g and $g'j$ are extensions of i, and thus, since F is stratified, there is a canonical isomorphism

$$j^* g'^*(F) \simeq g^*(F)$$

i.e. the Module F on Strat (X/S) is "special". Conversely, if F is a "special" Module on Strat(X/S), it is clear that $F_{(X,X)}$ is a Module on X fortified with a stratification relative to S.

4.3. <u>The fundamental theorem</u>. One principal aim of these notes is to sketch a proof of the following theorem.

<u>Theorem</u> 4.1. <u>If</u> S <u>is of characteristic</u> 0, <u>and</u> X <u>is smooth on</u> S, <u>there is a canonical isomorphism</u>

$$H^*(X_{inf}, \underline{O}_{X_{inf}}) \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X/S) \quad .$$

The significance of this theorem is clear. It not only gives a description of the De Rham cohomology without using differential forms, but it also gives a sufficiently general context in which to study the De Rham cohomology. Further, we shall deduce that the canonical connection on the De Rham cohomology in characteristic 0 comes from a stratification which has a natural interpretation in terms of the infinitesimal site. It seems likely that the same theorem will hold in arbitrary characteristic if we replace the infinitesimal site by the <u>crystalline site</u>, whose definition will be given at the end of these notes. Of course, when S is of characteristic 0, the crystalline site is just the infinitesimal site.

Finally, combining Theorems 4.1 and 1.2, we see that the following conjecture is true when X is smooth on $\mathbb{C}$:

<u>Conjecture 4.2. If X is locally of finite type (not necessarily smooth) over $\mathbb{C}$, there are canonical isomorphisms</u>

$$H^*(X_{strat},\underline{O}_{X_{strat}}) \xrightarrow{\sim} H^*(X_{inf},\underline{O}_{X_{inf}}) \xrightarrow{\sim} H^*(X^{an},\mathbb{C}).$$

A canonical homomorphism

$$H^*(X_{strat},\underline{O}_{X_{strat}}) \longrightarrow H^*_{DR}(X/\mathbb{C})$$

which, it is conjectured, is an isomorphism and hence by (1.2) yields $H^*(X_{strat},O_{X_{strat}}) \xrightarrow{\sim} H^*(X^{an},\mathbb{C})$, is defined in n° 6. A heuristic argument in favour of this conjecture is also given in (5.5). The truth of this conjecture (which seems very plausible) would imply that the infinitesimal (or stratifying) topos allows, for schemes of finite type over a field of characteristic 0, a reasonable, purely algebraic, analogue of the classical transcendentally defined complex cohomology. (Compare with the tentative description of singular homology [5]).

5. <u>Čech calculations.</u>

We now consider the cohomology of the infinitesimal topos and the stratifying topos (*).

5.1. <u>The stratifying topos.</u> Let X be a scheme above the base S. The category Strat(X/S) does not, in general, have a final object. However, the sheaf of sets $\tilde{X}$ on Strat(X/S), represented by the object $X \xrightarrow{1_X} X$ of Strat(X/S), <u>covers</u> the final object of the stratifying topos. Note that this is only true for the stratifying

(*) For a general discussion of the cohomology of a topos, see (SGA 4 V).

site, and is not true, in general, for the infinitesimal site. Thus, if F is any Module on Strat(X/S), we have the Leray spectral sequence

$$H^*(X_{strat}, \dot{F}) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(\nu \longmapsto H^q(\tilde{X}^{\nu+1}, \dot{F}))$$

($\tilde{X}^{\nu+1}$ denotes the product of $\tilde{X}$ with itself $\nu + 1$ times). The sheaf $\tilde{X}^{\nu+1}$ is usually not representable for $\nu \geq 1$. But it is an inductive limit of representable sheaves, namely

$$\dot{\tilde{X}}^{\nu+1} = \varinjlim_i \widetilde{(\Delta^{\nu}_{X/S}(i))}$$

where $\Delta^{\nu}_{X/S}(i)$ is the ith infinitesimal neighbourhood of the diagonal of $X_{(S)} = X \times_S \dots \times_S X$ ($\nu + 1$ times) endowed with the diagonal augmentation, the $\sim$ denoting the sheaf on Strat(X/S) represented by this object.

In all that follows in n° 5, we suppose that the Module F satisfies the following two conditions (which could be considerably relaxed) :

(1) For each object $U \hookrightarrow T$, $F_{(U,T)}$ is quasi-coherent.

(2) For each morphism

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow j \\ U' & \hookrightarrow & T' \end{array}$$

of Strat(X/S) such that $j : T \hookrightarrow T'$ is an immersion, we have $F_{(U,T)} = j^*(F_{(U',T')})$.

Now for each object $U \longrightarrow T$ of Strat(X/S), there is a canonical isomorphism

$$H^*_{strat}((U \longrightarrow T), \dot{F}) \xrightarrow{\sim} H^*_{zar}(T, \dot{F}_{(U,T)}) \ .$$

Suppose that X is affine, whence the $\Delta^{\nu}_{X/S}(i)$ are also affine. Thus

$$H^q_{strat}((X \longrightarrow \Delta^{\nu}_{X/S}(i),F) = 0 \quad \text{if } q > 0 \quad .$$

Further, by Mittag-Leffler style arguments, it can be shown that

$$H^q(\widetilde{X}^{\nu+1},F) = H^q(\varinjlim_i \Delta^{\nu}_{X/S}(i),F) = \varinjlim_i H^q(\Delta^{\nu}_{X/S}(i),F),$$

whence

$$H^q(\widetilde{X}^{\nu+1},F) = 0 \quad \text{if} \quad q > 0,$$

$$H\ (\widetilde{X}^{\nu+1},F) = \varprojlim_i \ F(\Delta^{\nu}_{X/S}(i)) \quad .$$

Hence the Leray spectral sequence degenerates, yielding a canonical isomorphism

$$(^*) \qquad H^*(X_{strat},F) \xrightarrow{\sim} H^*(\nu \longmapsto F(X^{\nu}_{/X})) \quad ,$$

where $X^{\nu}_{/X}$ denotes the formal scheme $\varinjlim \Delta^{\nu}_{X/S}(i)$.

Now no longer assume that X is affine. Then we introduce, for each non-negative integer ν , the sheaf $\mathcal{F}^{\nu}$ on X_{zar} defined by

$$\mathcal{F}^{(\nu)} : \quad U \longmapsto F(U^{\nu}_{/U}) = \varprojlim_i \ F(\Delta^{\nu}_{U/S}(i)) \quad ,$$

where $U^{\nu}_{/U}$ denotes the formal scheme $\varinjlim \Delta^{\nu}_{U/S}(i)$. For variable ν , the $\mathcal{F}^{(\nu)}$ form a cosimplicial sheaf $\mathcal{F}^*$ on X_{zar}. Taking a covering of X by affine open sets, and utilising the isomorphism $(^*)$ in the affine case, we deduce that there is a canonical isomorphism

$$H^*(X_{strat},F) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H}}^*(X_{zar},\mathcal{F}^*) \quad .$$

In particular, we have then the spectral sequence

$$H^*(X_{strat},F) \Leftarrow E_2^{pq} = H^p(\nu \longmapsto H^q(X_{zar},\mathcal{F}^{(\nu)})).$$

giving back the isomorphism $(^*)$ when X is affine.

5.2. <u>The infinitesimal topos</u>. It is not usually true that the sheaf $\widetilde{X}$ represented by the object $X \xrightarrow{1_X} X$ of $\mathrm{Inf}(X/S)$ covers the final object of the infinitesimal topos. However, let us assume that we can find an S-immersion $X \hookrightarrow Y$, with Y formally smooth on S (for example, this is possible if X and S are affine, or if X is quasi-projective on S and S admits an ample Module). Then consider the sheaf on Inf(X/S) "represented" (we put " " since $X \hookrightarrow Y$ may not be an object of Inf(X/S)) by $X \to Y$, namely

$$\check{Y} : (U,T) \longmapsto \mathrm{Hom}((U,T),(X,Y)) \quad .$$

One can also describe this sheaf by

$$\check{Y} = \varinjlim_{i} \widetilde{Y(i)} \quad ,$$

where Y(i) denotes the ith infinitesimal neighbourhood of X in Y, and, as usual, $\sim$ denotes the sheaf on Inf(X/S) represented by the object. Since Y is formally smooth on S, $\check{Y}$ covers the final object of Inf(X/S). Hence, if F is any Module on Inf(X/S), we have the Leray spectral sequence

$$H^*(X_{inf},F) \Leftarrow E_2^{pq} = H^p(\nu \longmapsto H^q(\check{Y}^{\nu+1},F)) \quad .$$

Assume that F satisfies the conditions (1) and (2) given in (5.1). Then, if X is affine, the same argument as in the stratifying case shows that this spectral sequence degenerates, yielding a canonical isomorphism

$$(*) \qquad H^*(X_{inf},F) \xrightarrow{\sim} H^*(\nu \longmapsto F(Y^{\nu}_{/X})) \quad ,$$

where $Y^{\nu}_{/X}$ is the formal completion of $Y^{\nu}_{(S)} = Y \times_S \cdots \times_S Y$ ($\nu+1$ times) along X.

If we no longer assume X affine, we introduce, for each non-negative integer ν, the sheaf $\mathcal{F}^{(\nu)}$ on X_{zar} defined by

$$\mathcal{F}^{(\nu)} : U \longmapsto \varprojlim_{i} F(U \to U_Y^{\nu}(i)) = F(Y^{\nu}_{/U}) \quad ,$$

where $Y^{\nu}_{/U}$ is the formal completion of $Y^{\nu}_{(S)}$ along U. For variable ν, we obtain a cosimplicial sheaf $\mathcal{F}^*$ on X_{zar}. Taking a covering of X by affine open sets, and utilizing the isomorphism $(^*)$ in the affine case, we deduce that there is a canonical isomorphism

$$H^*(X_{inf},F) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H}}^*(X_{zar},\mathcal{F}^*) \quad .$$

Thus there is the spectral sequence

$$H^*(X_{inf},F) \Leftarrow E_2^{pq} = H^p(\nu \longmapsto H^q(X_{zar},\mathcal{F}^*)) \quad ,$$

yielding back the isomorphism $(^*)$ when X is affine.

5.3. Stratification on the De Rham cohomology in characteristic 0. As before, suppose there is an S-immersion $X \hookrightarrow Y$. Assume we are given a second scheme X_o on S, and a nilpotent immersion

$$X_o \hookrightarrow X \ .$$

Then there is the obvious functor

$$u_* : Inf(X/S) \longrightarrow Inf(X_o/S) \quad .$$

If F_o is a sheaf on $Inf(X_o/S)$, we define its "restriction" F to $Inf(X/S)$ to be its direct image by the functor u_*, namely

$$F = u^* F_o \quad : (U \to T) \longmapsto F\,(U_o \hookrightarrow U \hookrightarrow T) \quad .$$

Now, for each non-negative integer ν, and each open set U of X, there is a canonical isomorphism

$$Y^{\nu}_{/U} \xrightarrow{\sim} Y^{\nu}_{/U_o} \ ,$$

where U_o is the open set of X_o corresponding to U(U and U_o are fortified with their induced structural sheaves). Hence, if $\mathcal{F}_o^*$ and $\mathcal{F}^*$ denote the cosimplicial sheaves on $X_{zar} = X_{o\,zar}$ associated with

F_o and F, respectively, there is a canonical isomorphism

$$\mathcal{F}_o^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^* ,$$

whence a canonical isomorphism

$$H^*((X_o/S)_{inf}, \dot{F}) \xrightarrow{\sim} H^*((X/S)_{inf}, \dot{F}) \quad .$$

Note that we could remove the assumption that X can be immersed in Y formally smooth on S by taking an affine open covering of X and utilizing this isomorphism in the affine case (*).

Before turning to the significance of this isomorphism, let us note that this result is not true if we take the stratifying site instead of the infinitesimal site. Indeed, let us assume $S = \mathrm{Spec} A$, and that X lies over $S_o = \mathrm{Spec}(A/J)$. As every object of the stratifying site of X_o/S lies in fact over S_o, it follows that the sheaf $\underline{O}_{(X/S)_{strat}}$ is a sheaf of A_o-modules, hence its cohomology groups are A_o-modules, i.e. A-modules annihilated by $\mathfrak{J}$, which is generally not true for the cohomology of $\underline{O}_{(X/S)_{strat}}$. This shows that if A_o is of char. $p > 0$, the cohomology invariants defined by $(X_o/S)_{strat}$ are also modules over a ring of char. $p > 0$, contrarily to what can be achieved using the infinitesimal topos instead.

Now let X be a smooth scheme on S. Suppose that we are given a nilpotent immersion $S_o \hookrightarrow S$, so that

$$X_o = X \times_S S_o \leftarrow X$$

is a nilpotent immersion. If we consider X_o as a scheme on S, instead of S_o, then the above shows that, for each Module F_o on $\mathrm{Inf}(X_o/S)$, there is a canonical isomorphism

$$H^*((X_o/S)_{inf}, \dot{F}) \xrightarrow{\sim} H^*((X/S)_{inf}, \dot{F}) \quad .$$

(*) We can get trivially the preceding isomorphism, without restriction on X nor F, by observing that the functor u_* is exact on sheaves of sets.

Thus the right hand side is <u>independent</u>, up to canonical isomorphism, of the particular lifting of X_o/S_o to a smooth scheme on S.

In particular, if we take $F_o = O_{X_{o\,inf}}$, so that $F = \underline{O}_{X_{inf}}$, and assume that S is of characteristic 0, then Theorem 4.1 (which will be proven in n° 6), shows that there is a canonical isomorphism

$$H^*((X/S)_{inf}, \underline{O}_{X_{inf}}) \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X/S) \quad .$$

Hence the De Rham cohomology groups $H^i_{DR}(X/S)$ can be identified with the $H^i(X_o/S)_{inf},\ X_{o\,inf})$, and hence are <u>independent</u>, up to canonical isomorphism, of the particular lifting of X_o/S_o to a smooth scheme on S,S being of characteristic 0. This does not directly imply that the De Rham cohomology sheaf $\underline{\underline{R}}^i f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X/S})$ is fortified with an absolute stratification, as this sheaf does not commute with base change. However, one could develop the previous considerations for the relative De Rham cohomology in the sense of derived categories, and in this way, one could show that

$$\underline{\underline{R}}\, f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X/S}) \ ,$$

where $f : X \longrightarrow S$ is a smooth morphism and S is of characteristic 0, is fortified with an absolute stratification. In fact this would show more, namely that $\underline{\underline{R}}\, f_*(\underline{\Omega}^\bullet_{X/S})$ is an absolute <u>crystal</u>, i.e. it extends canonically to <u>all</u> infinitesimal neighbourhoods of S, and not just those with retractions onto S.

5.4. <u>Differential operators</u>. We note that differential operators (EGA IV 16) arise naturally in the context of the infinitesimal and stratifying sites, via the cosimplicial sheaves $\mathfrak{P}^*$. For example, let

$\mathcal{F}^*$ be the cosimplicial sheaf on X_{zar} associated with $\underline{O}_{X_{strat}}$. Then, for each positive integer ν, there are the $\nu + 1$ canonical homomorphisms of sheaves of rings

$$p_i^\nu \ : \ \underline{O}_X \to \mathcal{F}(\nu)$$

(induced by the family of canonical homomorphisms $p_i^\nu(n) : \underline{O}_X \to \underline{O}_{\Delta^\nu_{X/S}(n)}$ $n = 0, 1, \ldots, i = 0, \ldots, \nu + 1$). If we choose one of these canonical homomorphisms, say p_o^ν, to give $\mathcal{F}(\nu)$ the structure of an $\underline{O}_X$-algebra, then the remaining morphisms (which are not $\underline{O}_X$-linear), or rather their truncations

$$p_i^\nu(n) \ : \ \underline{O}_X \longrightarrow \underline{O}_{\Delta^\nu_{X/S}(n)}$$

can be interpreted as differential operators from $\underline{O}_X$ to $\underline{O}_{\Delta^\nu_{X/S}(n)}$. For $\nu = 1$, this truncation is just the "universal differential operator of order n on $\underline{O}_X$" (EGA IV 16).

5.5. <u>Analogy with cochains of Čech-Alexander</u>. If X is a topological space, and A any abelian group, the sheaf of germs of cochains, of Čech-Alexander of degree ν, with values in A, is defined to be the sheaf $C^{(\nu)}(X;A)$ associated with the presheaf

$$U \longmapsto F^{\nu+1}(U;A).$$

where $F^{\nu+1}(U,A)$ is the group of functions from $U^{\nu+1}$ into A, modulo the subgroup of functions which vanish in some neighbourhood of the diagonal of $U^{\nu+1}$. For variable ν, we obtain a cosimplicial sheaf $\mathbb{C}^*(X,A)$ on X, and, under suitable assumptions on X (*), it can be shown that the cohomology of $\Gamma C^*(X;A)$ is in fact the cohomology of X with coefficients in A.

(*) The complex $C^*(X;A)$ being clearly a resolution of the constant sheaf X, it is enough that each F^ν be a <u>sheaf</u> (as it will be necessarily flask).

It is natural to ask if a similar result holds when we take the "functions" on the formal completion $X^{(\nu)}_{/X}$ of $X^{(\nu)} = X \times_S \cdots \times_S X$ ($\nu+1$ times) along X the diagonal, X being a scheme over S. More precisely, let X be a proper scheme over the complex field $\mathbb{C}$. Then we have the spectral sequence for the stratifying cohomology

$$H^*(X_{strat}, \underline{O}_{X_{strat}}) \Leftarrow E_2^{pq} = H^p(\nu \mapsto H^q(X^\nu_{/X}, \underline{O}_{X^\nu_{/X}})) \quad .$$

Since X is proper on $\mathbb{C}$, the $H^q(\Delta^\nu_X(i), \underline{O}_{\Delta^\nu_X(i)})$ are finite dimensional vector spaces on $\mathbb{C}$, and a Mittag-Leffler style argument then shows that

$$H^q(X^\nu_{/X}, \underline{O}_{X^\nu_{/X}}) = \varprojlim_i H^q(\Delta^\nu_X(i), \underline{O}_{\Delta^\nu_X}(i)) \quad ,$$

whence

$$E_2^{pq} = \varprojlim_i H^p(\nu \mapsto H^q(\Delta^{(\nu)}_X(i), \underline{O}_{\Delta^\nu_X(i)}) \quad .$$

Now, by GAGA [10], we can interpret the $H^q(\Delta^\nu_X(i), \underline{O}_{\Delta^\nu_X}{}_X(i))$ as the cohomology of the corresponding analytic sheaf on the corresponding analytic manifold. Hence, defining the sheaf

$$\mathcal{F}^{(\nu)}_{X^{an}} : \; U \longmapsto (U^\nu_{/U}, \underline{O}_{U_{/U}})$$

on X^{an} (where the formal completion is in the sense of analytic manifolds), there is a canonical isomorphism

$$H^*(X_{strat}, \underline{O}_{X_{strat}}) \xrightarrow{\sim} H^*(X^{an}, \mathcal{F}_{X^{an}}) \quad .$$

We are then led to the following conjecture.

<u>Conjecture</u> 5.1. <u>For any analytic space</u> $\mathfrak{X}$, <u>the complex</u> $\mathcal{F}^*_{\mathfrak{X}}$ <u>is a resolution of the constant sheaf</u> $\mathbb{C}$.

There is a heuristic argument in favour of this conjecture. Define the <u>formal</u> <u>fiber</u> $\widehat{\mathcal{F}}^{(\nu)}_{\mathfrak{X},x}$ of $\mathcal{F}^{(\nu)}_{\mathfrak{X}}$ at $x \in \mathfrak{X}$ to be

$$\mathcal{F}^{(\nu)}_{\mathfrak{X},x} = \varprojlim_i \underline{O}_{\Delta^\nu_{\mathfrak{X}}(i),x} \; ,$$

where $\wedge$ denotes the completion of the local rings on the right hand side. Then the complex $\widehat{\mathcal{F}}^*_{\mathfrak{X},x}$ of formal fibers at $x \in \mathfrak{X}$ is a resolution of the field $\mathbb{C}$.

Note that if the (purely local) conjecture 5.1 were true, then we would know that, for a scheme X proper on $\mathbb{C}$, there is a canonical isomorphism

$$H^*(X_{strat}, \underline{O}_{X_{strat}}) \xrightarrow{\sim} H^*(X^{an}, \mathbb{C}) \quad .$$

This, together with 1.2, gives some support for conjecture 4.2.

6. Comparison of the Infinitesimal and De Rham Cohomologies.

6.1. The basic Idea. Let X be a scheme above S, and F a quasi-coherent Module on X fortified with a stratification relative to S. Then, as was shown in (4.2), F defines a Module F_{strat} on Strat(X/S). In (5.1), it was shown that we could associate with F_{strat} a complex of differential operators of infinite order

$$C^*(F) = \mathcal{F}^*$$

on X_{zar}, where

$$C^{(\nu)}(F) = \mathcal{F}^{(\nu)} = \varprojlim_i F(X, \Delta^{\nu}_{X/S}(i))$$

(recall that $\Delta^{\nu}_{X/S}(i)$ denotes the ith infinitesimal neighbourhood of the diagonal of $X_{(S)}^{\nu} = X \times_S \ldots \times_S X$ (ν+1 times) , and that $F(X, \Delta^{\nu}_{X/S}(i))$ is the inverse image of F by any of the $\nu + 1$ canonical projections $\Delta^{\nu}_X(i) \longrightarrow X$, all of these inverse images being canonically isomorphic because of the stratification on F). It was then shown that there is a canonical isomorphism

$$H^*(X_{strat}, F) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H}}^*(X_{zar}, C^*(F)) \quad .$$

Thus we have shown that the stratifying cohomology of a stratified sheaf can be interpreted as the Zariski hypercohomology of a complex of "differential operators of infinite order". In the following, we shall show that a converse relation holds, i.e. the Zariski hypercohomology of any complex of differential operators can be expressed as the stratifying hypercohomology of a suitable complex of stratified sheaves. Applying this to the De Rham complex $\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/S}$ we shall thus prove theorem 4.1.

Our method will be to construct a functor $Q^{\circ}(.)$ from the category $\mathrm{Dif}(X/S)$ of Modules on X, with morphisms differential operators relative to S, to the category of Artin-Riesz pro-Modules on X fortified with a stratification relative to S. The functor $Q^{\circ}(.)$ will be called the formalizing functor, and it can be viewed intuitively as "linearizing" differential operators.

In the particular case when $\mathrm{diag}_{X/S} : X \longrightarrow X \times_S X$ is nilpotent, so that a stratification on F relative to S is a descent on F relative to S, the functor $Q^{\circ}(.)$ can be taken to be $Q^{\circ}(F) = f^{*}f_{*}(F)$, where $f : X \longrightarrow S$ is the structural morphism of X/S.

6.2. Definition of $Q^{\circ}(.)$. We first recall the definition of the category of Artin-Riesz pro-objects of a category C. The objects of this category are pro-objects (A_i) of C indexed by $\mathbb{Z}$, whilst the set of morphisms between two such objects (A_i) and (B_i) is defined to be

$$\varinjlim_{k} \mathrm{Hom}((A_i)_k, (B_i)) \quad ,$$

where $(A_i)_k$ denotes the pro-object obtained from (A_i) by shifting k places to the right, i.e. its ith component is A_{i+k}, (k is any integer). In other words, a morphism from (A_i) to (B_i) is given by a commutative diagram (suitable k)

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & A_{i+k+1} & \longrightarrow & A_{i+k} & \longrightarrow & A_{i+k+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots \longrightarrow & B_{i+1} & \longrightarrow & B_i & \longrightarrow & B_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

We next consider the category of Artin-Riesz pro-objects of the category of sheaves on the underlying space of X.

As before, let $\Delta_X^\nu(i)$ be the ith infinitesimal neighbourhood of the diagonal of $X^\nu_{(S)}$, and let $P^\nu(i)$ be the structural sheaf of $\Delta_X^\nu(i)$. For variable i, we obtain a pro-object P^ν of the category of sheaves on the underlying space of X, and for variable ν, the P^ν form a cosimplicial pro-object P . In particular, $P^o = \underline{O}_X$, and for any ν, there are the $\nu+1$ canonical homomorphisms of pro-rings

$$p_j^\nu \ : \underline{O}_X \longrightarrow P^\nu \qquad (j = 0,\dots,\nu) \quad .$$

These $\nu + 1$ homomorphisms are distinct, in general, and hence define distinct structures of an $\underline{O}_X$-algebra on P^ν. The $\underline{O}_X$-algebra structure on P^ν defined by p_o^ν (resp. p_ν^ν) will be called the <u>extreme left</u> (resp. <u>extreme right</u>) structure, and will be written on the left (resp. right).

We define the cosimplicial pro-object Q^* by

$$Q^\nu = P^{\nu+1} \qquad (*).$$

For each non-negative integer ν, there is the canonical homomorphism of pro-rings $\alpha^\nu : P^\nu \longrightarrow Q^\nu$ defined by the canonical injection $\alpha : \{0, 1,\dots, \nu\} \longrightarrow \{0,1,\dots, \nu,\nu + 1\}$, where $\alpha(h) = h$.

(*) More precisely, as a functor on totally ordered finite sets, Q^* is défined as $I \longmapsto P(I \amalg \{a\})$, where $I \amalg \{a\}$ is deduced from I "by adding a first element a".

In other words, there is a homomorphism of cosimplicial rings

$$\alpha^* : P^* \longrightarrow Q^* .$$

Now let M be an $\underline{O}_X$-Module. For each non-negative integer ν, define

$$Q^\nu(M) = Q^\nu \otimes_{\underline{O}_X} M ,$$

where the tensor product is taken with respect to the extreme <u>right</u> structure of an $\underline{O}_X$-Module on Q^ν. Then $Q^\nu(M)$ is clearly a Q^ν-Module, hence an $\underline{O}_X$-bimodule (the left structure being given by the extreme left structure on Q^ν, and the right structure by the extreme right structure on Q^ν), and a P^ν-Module by restriction of scalars via the canonical homomorphism $\alpha^\nu : P^\nu \longrightarrow Q^\nu$. This structure of a P^ν-Module on $Q^\nu(M)$ commutes with the right structure of an $\underline{O}_X$-module on $Q^\nu(M)$.

Let N be a second $\underline{O}_X$-Module, and $D : M \longrightarrow N$ a <u>differential operator</u> from M to N, i.e. a homomorphism of sheaves of abelian groups which factors (uniquely) in the form

$$M \longrightarrow P^1(k) \otimes_{\underline{O}_X} M \longrightarrow N \qquad \text{(k some non-negative integer)},$$

where the first morphism is the obvious one, and the second morphism is an $\underline{O}_X$-Module homomorphism with respect to the left structure on $P^1(k) \otimes_{\underline{O}_X} M$. Then, since there is a unique homomorphism of $\underline{O}_X$-modules (with respect to the right structures)

$$S(i) : P^{\nu+1}(k+i) \longrightarrow P^{\nu+1}(i) \otimes_{\underline{O}_X} P^{\nu+1}(k) ,$$

such that the diagram

$$\begin{tikzcd}
\underline{O}_X \arrow[r, "P^{\nu+1}_{\nu+1}(k+i)"] \arrow[d, "P^{\nu+1}_{\nu+1}(k)"'] & P^{+1}(k+i) \arrow[d, "\delta(i)"] \\
P^{\nu+1}(k) \arrow[r] & P^{\nu+1}(i) \otimes_{\underline{O}_X} P^{\nu+1}(k)
\end{tikzcd}$$

is commutative, the differential operator $D : M \longrightarrow N$ induces, for each non-negative integer i, a homomorphism

$$P^{\nu+1}(i+k)\otimes_{\underline{O}_X} M \longrightarrow P^{\nu+1}(i)\otimes_{\underline{O}_X} M \quad ,$$

i.e. an Artin-Riesz homomorphism $Q^{\nu}(D) : Q^{\nu}(M) \longrightarrow Q^{\nu}(N)$. Further it is clear that $Q^{\circ}(D)$ is linear with respect to the extreme left structure. Thus $Q^{\circ}(.)$ is a functor from Diff(X/S), the category of Modules on X, with differential operators as morphisms, to the category of Artin-Riesz pro-Modules on $\underline{O}_X$.

6.3. Properties of $Q^{\circ}(.)$. The fundamental property of the functor $Q^{\circ}(.)$ is that, for each Module $M, Q^{\circ}(M)$ is fortified with a canonical stratification relative to S. We call $Q^{\circ}(M)$ the formalization of M.

Further, one can recover M from $Q^{\circ}(M)$ as the subsheaf of horizontal sections, this subsheaf being endowed with the structure induced from the extreme right structure of $Q^{\circ}(M)$. A differential operator $D : M \longrightarrow N$ is recovered from $Q^{\circ}(D)$ as the morphism induced on the subsheaf of horizontal sections.

Finally, we note that the cosimplicial pro-Module $Q^{*}(M)$ on P^{*} is just the cosimplicial pro-Module associated with the stratified pro-Module $Q^{\circ}(M)$, i.e. if $n \leq m$, $Q^{n}(M)$ is obtained from $Q^{m}(M)$ by base change with respect to any of the canonical morphisms $P^{n} \longrightarrow P^{m}$.

6.4. Interpretation of Zariski hypercohomology of a complex of differential operators as a stratifying hypercohomology. Let $M^{\cdot}$ be a complex of differential operators on X bounded from below. Then one checks easily, by looking term by term, that

$$\varprojlim \; Q^*(M^\bullet)$$

is a resolution of $M^\bullet$, and thus there is a canonical isomorphism

$$\underline{\underline{H}}^*(X_{zar}, M^\bullet) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H}}^*(X_{zar}, \varprojlim \; Q^*(M^\bullet)) \quad .$$

Now, since $Q^\circ(M^\bullet)$ is a complex of stratified $\underline{O}_X$-pro-Modules, it defines, as described in (4.2) (where, of course, one passes to the limit <u>after</u> taking the inverse image), a complex of sheaves $Q^\circ(M^\bullet)_{strat}$ on Strat(X/S). Then the argument given in (5.1) shows that there is a canonical isomorphism

$$\underline{\underline{H}}^*(X_{strat}, Q^\circ(M^\bullet)_{strat}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H}}^*(X_{zar}, C^*(Q^\circ(M^\bullet)_{strat})) \quad ,$$

where $C^*(Q^\circ(M^\bullet{}_{strat})$ is the Zariski complex of differential operators associated with the stratifying complex $Q^\circ(M^\bullet)_{strat}$. But, by construction

$$C^*(Q^\circ(M^\bullet)_{strat}) = \varprojlim \; Q^*(M^\bullet) \quad ,$$

and thus there is a canonical isomorphism

$$\underline{\underline{H}}^*(X_{zar}, M^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^*(X_{strat}, Q^\circ(M^\bullet)_{strat}) \quad .$$

Hence, in particular, there is the spectral sequence

$$(^*) \qquad E_2^{pq} = H^p(X_{strat}, \underline{H}^q(Q^\circ(M^\bullet)_{strat})) \Rightarrow \underline{\underline{H}}^*(X_{zar}, M^\bullet) \quad .$$

6.5. <u>Proof of theorem 4.1</u>. Let F be a module on X, endowed with a stratification relative to S, and F_{strat} the associated Module on Strat(X/S). Then it is well known that the differential operators of the De Rham complex $\underline{\Omega}^\bullet_{X/S}$ extend to differential operators on

$$\underline{\Omega}^\bullet_{X/S} \otimes_{\underline{O}_X} F$$

thereby making this latter a complex of differential operators. Thus, interpreting the Zariski hypercohomology of this complex in terms of stratifying hypercohomology, we have

$$\underline{\underline{H}}^*(X_{zar}, \underline{\Omega}^{\bullet}_{X/S} \otimes_{\underline{O}_X} F) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H}}^*(X_{strat}, Q^{\circ}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/S} \otimes_{\underline{O}_X} F)_{strat})$$

Now there is always a canonical homomorphism

$$F_{strat} \longrightarrow Q^{\circ}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/S} \otimes_{\underline{O}_X} F)_{strat} \quad ,$$

and hence a canonical homomorphism

$$(**) \qquad H^*(X_{strat}, F_{strat}) \longrightarrow \underline{\underline{H}}^*(X_{zar}, \underline{\Omega}^{\bullet}_{X/S} \otimes_{O_X} F) \quad .$$

We would have liked ($**$) to be an isomorphism, but unfortunately, this is not always true, as will be explained shortly. However, this is so if we assume that S is of <u>characteristic</u> 0 and X is <u>smooth</u> on S, because under these conditions a formal variant of Poincaré's lemma shows that

$$H^q(Q^{\circ}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/S} \otimes F)_{strat}) = \begin{cases} 0 \text{ if } q > 0 \\ F_{strat} \text{ if } q = 0 \end{cases} .$$

The spectral sequence ($*$) then degenerates, showing that ($**$) is an isomorphism, as asserted. Taking $F = \underline{O}_X$, we have therefore proven Theorem 4.1.

The following example shows that ($**$) is not an isomorphism, in general. Let X/S be an abelian scheme, where S is the spectrum of a local artinian ring with residue field of characteristic $p > 0$, and G the formal group associated with X/S. Then the spectral sequence of the end of (5.1) yields :

$$E_2^{pq} = H^p(G, H^q(X_{zar}, \underline{O}_X)) \Rightarrow H^*(X_{strat}, \underline{O}_{X_{strat}}) \quad ,$$

and if G is a formal torus, $E_2^{pq} = 0$ if $p > 0$, so that the spectral sequence degenerates, yielding an isomorphism

$$H^i(X_{strat}, \underline{O}_{X_{strat}}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{zar}, \underline{O}_X)$$

and hence

$$H^i(X_{strat}, \underline{O}_{X_{strat}}) = 0 \quad \text{if } i > \dim X$$

But the De Rham cohomology of X/S is certainly not zero in dimension 2 dim X

7. The crystalline topos and connecting topos.

7.1. Inadequacy of infinitesimal topos. Let X_0 be a scheme above a perfect field k of characteristic $p > 0$. Then, regarding X_0 as being above $S = \mathrm{Spec}W(k)$ instead of k, the infinitesimal cohomology

$$H^*((X_0/S)_{inf}, \underline{O}_{X_0})$$

is a graded module on W(k). One might hope that it would be a good p-adic cohomology, at least for X_0 proper over k. However, this is not so. For example, if X_0/k is an abelian scheme, which from the formal point of view is a torus, then one finds, using the example given in the last section, that

$$H^i((X_0/S)_{inf}, \underline{O}_{X_0}) = 0 \quad \text{if } i > \dim X_0 \quad (\text{instead of } i > 2\dim X_0),$$

contrarily to what we expect from p-adic cohomology.

7.2. The crystalline topos and connecting topos. Let X be a scheme on any base S. We modify the definition of the infinitesimal site Inf(X/S) to obtain the crystalline site Cris(X/S) as follows. The underlying category of Cris(X/S) has as objects all nilpotent S-immersions $U \hookrightarrow T$, U being an open set of X, and the ideal on T defining this immersion being endowed with a nilpotent divided power structure [9] (*). We again take the topology on Cris(X/S) to be that of Zariski. If S is of characteristic 0, Cris(X/S) and Inf(X/S) are the same, since every ideal admits a unique divided power structure.

In complete analogy with the relation between the infinitesimal site and the stratifying site, we define the connecting site Conn(X/S) of X on S as follows. The underlying category of Conn(X/S) is the full subcategory of Cris(X/S) consisting of those objects $U \longrightarrow T$ "for which there exists" an extension of $U \hookrightarrow X$ to an S-morphism $T \longrightarrow X$. Thus, if X is smooth on S, Cris(X/S) and Conn(X/S) are equal.

It seems likely that the theory given in these notes for Inf(X/S) and Strat(X/S) will hold for Cris(X/S) and Conn(X/S), without the hypothesis that S be of characteristic 0. The principal points to be proven are the following.

a) If we are given X/S and X_0/S, and a nilpotent immersion $X_0 \hookrightarrow X$, there is a canonical isomorphism

$$H^*(X_{cris}, \underline{O}_{X_{cris}}) \xrightarrow{\sim} H^*(X_{0\,cris}, \underline{O}_{X_{0\,cris}}) \quad .$$

b) If X is smooth on S, there is a canonical isomorphism

$$H^*(X_{cris}, \underline{O}_{X_{cris}}) \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X/S) \quad .$$

Once these two results have been established, we would know that we have a good definition of p-adic cohomology, at least for

---

(*) A divided power structure $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ is called nilpotent, if $\gamma_{n_1}(\lambda_1)\ldots\gamma_{n_r}(\lambda_r) = 0$ for $\lambda_1,\ldots\lambda_r \in \mathfrak{J}$ and $\Sigma\, n_i = n$ large.

(**) This statement is not correct as given, a slightly more sophisticated form turns out to be correct. Since these notes were written, P. Berthelot has proved b) and the correct version of a).

algebraic schemes in characteristic $p > 0$, which are proper. Namely, if X_0 is a scheme on a perfect field k of characteristic $p > 0$, the p-adic cohomology of X would be

$$H^*((X_0/S)_{\mathrm{cris}}, \underline{O}_{X_0}) \quad ,$$

where, as usual, $S = \mathrm{Spec}\ W(k)$ (*). This p-adic cohomology would then satisfy the following crucial test. If X_0/k lifts to a proper and smooth scheme X/S, then there is a canonical isomorphism

$$H^*((X_0/S)_{\mathrm{cris}}, \underline{O}_{X_0}) \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X/S) \quad .$$

This can be deduced from a) and b) as follows. Let $S_n = \mathrm{Spec}\ W_n(k)$, and $X_n = X \times_S S_n$. Then there is a canonical isomorphism

$$H^*((X_0/S)_{\mathrm{cris}}, \underline{O}_{X_0}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^*((X/S_n)_{\mathrm{cris}}, \underline{O}_X) \quad .$$

Applying a), we obtain a canonical isomorphism

$$\varprojlim_n H^*((X/S_n)_{\mathrm{cris}}, \underline{O}_X) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^*((X_n/S_n)_{\mathrm{cris}}, \underline{O}_X),$$

and applying b), a canonical isomorphism

$$\varprojlim_n H^*((X_n/S_n)_{\mathrm{cris}}, \underline{O}_{X_n}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^*_{DR}(X_n/S_n) \quad ,$$

and since there is a canonical isomorphism (EGA III 4)

$$\varprojlim H^*_{DR}(X_n/S_n) \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X/S)$$

the assertion follows. Of course, a) would also allow us (in analogy to 5.3) to give an intrinsic interpretation of the canonical connection on the De Rham cohomology, etc.

(*) We would get essentially the same crystalline site if we took $S = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$, so that the crystalline cohomology is defined without any reference to such a thing as the ring of Witt vectors !

7.3. Once a) and b) have been verified, it will easily follow that all requirements for a reasonable p-adic cohomology theory will be satisfied, for proper and smooth schemes X_0 over k which "lift" to W, and the need of systematically developping the formal properties of the crystalline cohomology of an arbitrary scheme X/S, modelled on those proven for the ℓ-adic cohomology, will be quite clear. It can be hoped it will yield good invariants (and correct Betti numbers) even if X_0 does not lift, or is not smooth.

7.4. Motivation for definition of crystalline site. Finally, we note that introduction of divided powers in the definition of the crystalline site was practically imposed by the need to define the first Chern class $c(L) \in H^2(X_{cris}, O_{X_{cris}})$ of an invertible sheaf L on X_{zar} in arbitrary characteristic, by analogy with the classical definition in characteristic 0. There is an obvious "forgetful" functor

$$u^* : \mathrm{Cris}(X/S) \longrightarrow \mathrm{Zar}(X/S)$$

and thus an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathfrak{J} \longrightarrow \underline{O}_{X_{cris}} \longrightarrow u_* \underline{O}_{X_{zar}} \longrightarrow 0$$

and similarly an exact sequence of multiplicative groups

$$0 \longrightarrow (1+\mathfrak{J}) \longrightarrow \underline{O}_{X_{cris}}^* \longrightarrow u_* \underline{O}_{X_{zar}}^* \longrightarrow 0 \quad .$$

If $(U \hookrightarrow T, \Theta)$ is any object of Cris(X/S), where Θ denotes the divided power structure on the ideal defining the immersion $U \hookrightarrow T$, then $\mathfrak{J}(U \hookrightarrow T)$ = global sections of the ideal defining the immersion $U \hookrightarrow T$. Utilizing the divided power structure Θ (which, more explicitely, consists of the family of mappings $x \longmapsto x^{(n)}$ for $n \geq 1$) on this ideal, we can define the logarithmic and exponential homomorphisms on $\mathfrak{J}$ resp $1 + \mathfrak{J}$ by

$$\exp(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} x^{(n)}, \quad \log(1 + x) = \sum_{n\geq 1} (n-1)!(-1)^n x^{(n)} ,$$

and these homomorphisms establish isomorphisms

$$(*) \qquad (1 + \mathfrak{J}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{J} \quad .$$

To the invertible sheaf L on X_{zar}, there corresponds the canonical element of $H^1(X_{zar}, \underline{O}^*_{X_{zar}})$ and so a canonical element of $H^1(X_{cris}, u_*\underline{O}^*_{X_{zar}})$. Utilizing the isomorphism $(^*)$, and the exact sequences of cohomology, one immediately obtains a canonical element in $H^2(X_{cris}, \mathfrak{J})$ and hence an element $c(L) \in H^2(X_{cris}, \underline{O}_{X_{cris}})$, which is the required Chern class of L. It can be thus viewed as an obstruction to lifting L to an inversible sheaf on the crystallin site.

7.5. Remarks on the non proper case. If X_0 is a non proper (an affine, say) scheme over a perfect field k of char. $p > 0$, and $S = \mathrm{Spec}(W)$, then the calculation of De Rham cohomology made in 2.1 in the case of the formal affine line shows that the crystalline cohomology $H^*((X_0/S)_{cris}, \underline{O}_{X_0\,cris})$ is no longer reasonable, as it gives modules of infinite rank over the ring $W(k) = W$ of Witt vectors. This seems to give clear evidence that some approach making use of Monsky-Washnitzer's liftings, together with the underlying idea of the crystalline topos, has to be worked out, whether we like it or not. A possible first approach is to attach to X_0 the ringed site whose objects are triples $(U_0 = \mathrm{Spec}(A_0), U = \mathrm{Spec}(A), D)$ of an affine open subset U_0 of X_0, a Monsky-Washnitzer algebra A over W, endowed with a surjective W-homomorphism $A \longrightarrow A_0$ (the augmentation), this A (or rather its spectrum in a suitable sense) playing the part of the infinitesimal thickenings in the definition of the crystalline site, and of a (topologically nilpotent) divided power structure D on the augmentation ideal J of A. Morphisms between objects are defined in an evident way, and as topology one may take tentatively the one deduced from Zariski topology on X_o, as in the definition of the infinitesimal site (4.1). The corresponding topos could be called the Monsky-Washnitzer topos of X_o over k, say $(X_o/k)_{WM}$, and one may expect that the cohomology of this topos, with coefficients in its canonical sheaf of local rings, yields the correct Betti numbers of X_o (namely the same as the ℓ-adic theories for $\ell \neq p$, when k is algebraically closed). One regrettable feature of such a theory, in comparison to the theory of crystalline cohomology, which works also for unequal characteristic schemes, is that it seems so closely tied up with the assumption of a perfect groundfield of char. $p > 0$.

Appendix

Let X be a scheme above the base S, and F a Module on X. For each positive integer n, let $\Delta^1(n)$ be the nth infinitesimal neighbourhood of the diagonal of $X \times_S X$, and $\Delta^2(n)$ the nth infinitesimal neighbourhood of the diagonal of $X \times_S X \times_S X$. Then there is the usual diagram of canonical projections

$$X \underset{p_2(n)}{\overset{p_1(n)}{\leftleftarrows}} \Delta^1(n) \overset{\xleftarrow{p_{31}(n)}}{\underset{\xleftarrow[p_{21}(n)]{}}{\xleftarrow{p_{32}(n)}}} \Delta^2(n) \quad .$$

An n-connection on F relative to S is an isomorphism

$$\varphi : p_1(n)^*(F) \xrightarrow{\sim} p_2(n)^*(F)$$

satisfying the cocycle condition

$$p_{31}^*(\varphi) = p_{32}^*(\varphi)\, p_{21}^*(\varphi) \quad .$$

A stratification on F relative to S is a system of an n-connection for each positive integer n, in such a fashion that these various n-connections are compatible or glue together, i.e. if $n' \leq n$, the n'-connection induced by the given n-connection is the given n'-connection.

If X is smooth on S, a 1-connection on F relative to S is equivalent to a mapping

$$\rho : \underline{\mathrm{Der}}_S(\underline{O}_X) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_S(F)$$

satisfying the following condition

$$\rho(\alpha\partial) = \alpha\rho(\partial)$$

$$\rho(\partial + \partial') = \rho(\partial) + \rho(\partial')$$

$$\rho(\partial)(\alpha f) = \partial(\alpha) f + \alpha\, \rho(\partial)(f)$$

where $\alpha \in \Gamma(U, \underline{O}_X)$, $\partial \in \Gamma(U, \mathrm{Der}_S(\underline{O}_X))$, $f \in \Gamma(U, F)$.

We say that this 1-connection is integrable if

$$\rho(\partial\partial' - \partial'\partial) = \rho(\partial)\rho(\partial') - \rho(\partial')\rho(\partial) \quad .$$

There are various other ways of expressing the fact that a sheaf F has a connection or stratification relative to S, but we do not give these. We only mention that the classical definition of a connection on a vector bundle is a particular case of the above, and that, if X is of characteristic 0 and smooth over S, a stratification is equivalent to an integrable 1-connection. Needless to say, this last assertion is false in non-zero characteristic.

References.

[1] Artin, M., Grothendieck, A., J.L. Verdier, Cohomologie étale des schémas. Sém. Géom. Alg. IHES, 1963-64 (SGA 4), à paraître dans North Holland Pub. Cie.

[2] Deuring,M., Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, Abh. Math. Sem.,14,1941.

[3] J. Dieudonné, A. Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. IHES, 4,8,...

[4] Grothendieck,A.,Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents, Sem. Bourbaki,149.

[5] Grothendieck,A.,On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties, Publ. Math. IHES, 29.

[6] Hartshorne,R., Residues and Duality, Springer Lect. notes in Mathematics,20,1966.

[7] Manin,U.,Rational points of Algebraic Curves on Function Fields, Transl. Amer. Math. Soc.,

[8] Monsky,P.,Washnitzer,G.,Formal Cohomology, Mimeographed Lect. Notes at Princeton.

[9] Roby,N.,Les Algèbres à Puissances Divisées, Bull. Sc. Math. France, 89, p.75-91,1965.

[10] Serre,J-P.,Géométrie algébrique et Géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier,6,p.1-42,1955-56.

[11] Tate,J.,Rigid Analytic Spaces, Mimeographed notes at IHES.

[12] Tate,J.,Conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a Géometric Analogue, Sém. Bourbaki,306.

[13] Lefschetz,S.,L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier-Villars, Paris 1924.