EXPOSÉ XXV

LE THÉORÈME D'EXISTENCE

par M. Demazure

Pour être complet, nous donnons dans cet exposé une démonstration du théorème **410**
d'existence des groupes déployés. Comme la démonstration originale de Chevalley (« *Sur certains schémas de groupes semi-simples* », Séminaire Bourbaki, Mai 1961, n°219), elle s'appuie sur l'existence de groupes algébriques semi-simples complexes de tous les types possibles. Le principe d'une démonstration plus satisfaisante, prouvant directement l'existence d'un $\mathbb{Z}$-groupe semi-simple déployé simplement connexe correspondant à une matrice de Cartan donnée a été donné par Cartier (non publié). Signalons cependant que la difficulté n'est pas de donner une construction explicite d'un schéma en groupes, mais de vérifier que le groupe ainsi construit répond bien aux conditions exigées, c'est-à-dire essentiellement que ses fibres sont bien lisses et réductives.

1. Énoncé du théorème

Théorème 1.1. — *Soit* S *un préschéma non vide. Le foncteur*

$$\mathrm{G} \longmapsto \mathscr{R}(\mathrm{G})$$

est une équivalence *de la catégorie des* S*-préschémas en groupes réductifs* épinglés *avec la catégorie des données radicielles réduites épinglées.*

En vertu du théorème d'unicité (Exp. XXIII, 4.1), l'énoncé précédent est équivalent à : **411**

***Corollaire 1.2* (Existence de groupes déployés)**. — *Pour toute donnée radicielle réduite* $\mathscr{R}$*, il existe un* $\mathbb{Z}$*-groupe réductif déployé* G *tel que* $\mathscr{R}(\mathrm{G}) \simeq \mathscr{R}$.

En particulier :

Corollaire 1.3. — *Soit k un corps. Pour tout k-groupe réductif déployable* G_k*, il existe un* $\mathbb{Z}$*-groupe réductif* G *tel que* $\mathrm{G} \otimes_{\mathbb{Z}} k \simeq \mathrm{G}_k$.

(0) version du 14 mai 09

Réciproquement, remarquons d'abord que pour prouver 1.2, il suffit par Exp. XXII, 4.3.1, Exp. XXI, 6.5.10, et le théorème d'unicité, de considérer le cas où la donnée radicielle $\mathscr{R}$ est simplement connexe (et même irréductible si on y tient, par Exp. XXI, 7.1.6). D'autre part, sous les conditions de 1.3, le schéma en groupes G est de type constant (car Spec $\mathbb{Z}$ est connexe) donc de type $\mathscr{R}(\mathrm{G}_k)$; par Exp. XXIII, 5.9, il s'ensuit que la validité de 1.3 pour un groupe G_k donné entraîne l'existence d'un $\mathbb{Z}$-groupe déployé de type $\mathscr{R}(\mathrm{G}_k)$.

Pour démontrer 1.2 et donc 1.1, il suffit donc de prouver 1.3 lorsque k est de caractéristique nulle (par exemple $k = \mathbb{C}$) et G_k simplement connexe (et en particulier semi-simple), ainsi que :

Proposition 1.4. — *Pour toute donnée radicielle réduite simplement connexe $\mathscr{R}$, il existe un $\mathbb{C}$-groupe algébrique semi-simple de type $\mathscr{R}$.*

On peut prouver 1.4 de la manière suivante. On sait d'abord (cf. par exemple, Jacobson, *Lie Algebras*, ch. VII, Theorem 5 [(1)]) qu'il existe une algèbre de Lie semi-simple complexe de type $\mathscr{R}$. Prenant la composante neutre du groupe des automorphismes de cette algèbre, on obtient un $\mathbb{C}$-groupe algébrique semi-simple de type $\mathrm{ad}(\mathscr{R})$. Par *Bible*, 23-01, prop. 1, on en déduit l'existence d'un groupe de type $\mathscr{R}$.

Le reste de cet exposé est consacré à la démonstration de 1.3 pour k de caractéristique nulle et G_k semi-simple. Celle-ci se fera en deux temps : construction d'un « morceau de $\mathbb{Z}$-préschéma en groupes » (°2), étude du groupe obtenu par application du « théorème de Weil » (n°3).

412 Pouréviter des confusions, *nous n'utiliserons pas* dans le numéro 2 la notation abrégée X_k pour désigner le k-préschéma $\mathrm{X} \otimes_{\mathbb{Z}} k$, où X est un $\mathbb{Z}$-préschéma.

2. Théroème d'existence : construction d'un morceau de groupe

2.1. Choisissons une fois pour toutes un déploiement de G_k, noté

$$(\mathrm{G}_k, \mathrm{T}_k, \mathrm{M}, \mathrm{R})$$

(cf. Exp. XXII, 1.13), un système de racines simples Δ de R (définissant le système de racines positives R_+), un *système de Chevalley* $(\mathrm{X}_{r,\,k})_{r\in\mathrm{R}}$ de G_k (Exp. XXIII, 6.1 et 6.2) vérifiant la condition supplémentaire suivante : pour tout $r \in \mathrm{R}$, on a

$$\mathrm{X}_{r,k}\mathrm{X}_{-r,k} = 1.$$

Choisissons enfin sur le sous-groupe de M engendré par R une relation d'ordre totale compatible avec la structure de groupe, telle que les racines > 0 soient les éléments de R_+. On notera alors les racines

$$-r_n < -r_{n-1} < \cdots < -r_1 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n.$$

Pour $r \in \mathrm{R}$, on notera $\mathrm{P}_{r,\,k}$ le groupe vectoriel correspondant à la racine r et

$$p_{r,k} : \mathbb{G}_{a,\,k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}_{r,\,k}$$

(1) N.D.E. : Ajouter références à Serre et Bourbaki...

l'isomorphisme de groupes vectoriels défini par $\mathrm{X}_{r,\,k}$.

2.2. Le déploiement de G comporte en particulier un isomorphisme de k-groupes
$$\mathrm{T}_k \simeq \mathrm{D}_k(\mathrm{M}).$$
Posons $\mathrm{T} = \mathrm{D}(\mathrm{M})$; c'est un $\mathbb{Z}$-tore, et on peut considérer l'isomorphisme précédent **413**
comme un isomorphisme
$$\mathrm{T}_k \simeq \mathrm{T} \otimes_{\mathbb{Z}} k.$$
On a
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) = \mathrm{M},$$
et on considérera les éléments de $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{M}$ comme des caractères de T. On considérera de même les éléments de R^* comme des morphismes de $\mathbb{Z}$-groupes $\mathbb{G}_m \to \mathrm{T}$.

2.3. Pour chaque $r \in \mathrm{R}_+$, soit $\mathbb{G}_a(r)$ une copie du groupe $\mathbb{G}_a$; considérons le $\mathbb{Z}$-préschéma
$$\mathrm{U} = \mathbb{G}_a(r_1) \times \cdots \times \mathbb{G}_a(r_n).$$
Si U_k désigne la partie unipotente du groupe de Borel B_k de G_k défini par R_+, notons
$$a : \quad \mathrm{U} \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_k$$
l'isomorphisme de k-préschémas défini par
$$a(x_1, \ldots, x_n) = p_{r_1,\,k}(x_1) \cdots p_{r_n,k}(x_n).$$

2.4. La loi de groupe de U_k se traduit par des relations de la forme
$$a(x_1, \ldots, x_n) \cdot a(y_1, \ldots, y_n) = a(z_1, \ldots, z_n),$$
où chaque z_h $(h = 1, \ldots, n)$ s'exprime comme un polynôme
$$z_h = x_h + y_h + \mathrm{Q}_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{h-1}),$$
les coefficients de Q_h étant *entiers* (Exp. XXII, 5.5.8 et Exp. XXIII, 6.4). De plus $\mathrm{Q}_h(x_1, \cdots, x_h, 0, \cdots, 0) = 0$.

Munissons U de la loi composition définie par les formules précédentes (qui sont **414**
bien « définies sur $\mathbb{Z}$ »). Comme cette loi induit sur U_k sa loi de groupe, elle est associative, et (0) en est un élément unité (en effet, les deux assertions précédentes s'expriment par des relations entre les polynômes Q_h, et $\mathbb{Z} \to k$ est injectif). Montrons que c'est une loi de groupe : si (x_i) est une section de U (sur un S quelconque), on calcule l'inverse (y_i) de (x_i) par les formules récurrentes :
$$y_i = -x_i - \mathrm{Q}_i(x_i, \cdots, x_{i-1}, y_1, \cdots, y_{i-1})$$
qui sont encore « définies sur $\mathbb{Z}$ ».

En résumé, nous avons construit sur U une loi de groupe telle que l'isomorphisme a précédent soit un isomorphisme de groupes.

Pour chaque $r \in \mathrm{R}_+$, considérons le morphisme
$$p_r : \mathbb{G}_a \longrightarrow \mathrm{U}$$

défini par $p_r(x) = (x_i)$ où $\begin{cases} x_i = x & \text{si} \quad r_i = r \\ x_i = 0 & \text{si} \quad r_i \neq r. \end{cases}$

C'est une immersion fermée et un homomorphisme de groupes ; on notera P_r son image. On a $(x_i) = p_{r_1}(x_1) \cdots p_{r_n}(x_n)$, ce qui prouve que U s'identifie au produit

$$\mathrm{U} = \mathrm{P}_{r_1} \cdot \mathrm{P}_{r_2} \cdots \mathrm{P}_{r_n}.$$

2.5. Faisons opérer $\mathrm{T} = \mathrm{D(M)}$ sur chaque P_r par l'intermédiaire du caractère r ; on vérifie aussitôt que cela définit une opération de T sur le groupe U et on peut construire le produit semi-direct $\mathrm{B} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}$. On a un isomorphisme canonique de k-groupes

$$\mathrm{B} \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_k.$$

415 Si nous prenons maintenant un ordre *quelconque* sur R_+, le morphisme

$$\prod_{r \in \mathrm{R}_+} \mathrm{P}_r \longrightarrow \mathrm{U}$$

défini par le produit dans U est encore un isomorphisme. En effet, comme les deux membres sont des $\mathbb{Z}$-préschémas plats et de présentation finie, on peut se contenter de vérifier l'assertion sur les fibres géométriques ; on est alors ramené la théorie de Lazard (*Bible*, 13-02, prop. 1) : on considère U comme groupe à opérateurs T, et on utilise le fait que les P_r sont deux à deux non isomorphes comme groupes à opérateurs (car les caractères $r \in \mathrm{R}_+$ de T sont deux à deux distincts sur chaque fibre).

2.6. Remplaçant R_+ par $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$, on construit de même des groupes U^-, B^-, P_r $(r \in \mathrm{R}_-)$ et des isomorphismes

$$p_r : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}_r, \qquad r \in \mathrm{R}_-.$$

Introduisons enfin le préschéma produit

$$\Omega = \mathrm{U}^- \times \mathrm{T} \times \mathrm{U};$$

on a un isomorphisme canonique de k-préschémas

$$\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_k^- \times_k \mathrm{T}_k \times_k \mathrm{U}_k \simeq \Omega_k,$$

où Ω_k est la « grosse cellule » de G_k (Exp. XXII, 4.1.2).

À partir de maintenant, nous identifierons $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$ à Ω_k par l'isomorphisme précédent ; nous considérerons U^-, T, U comme des sous-préschémas de Ω, par l'intermédiaire des sections unités. On notera $\underline{e} = ((0), e, (0))$ la « section unité » de Ω.

Notre but est maintenant de mettre une loi de morceau de groupe sur Ω.

416 ***Lemme 2.7***. — *Soit $r \in \Delta$, et soit $w_{r,k}$ l'élément de* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}_k}(\mathrm{T}_k)(k)$ *défini par* $\mathrm{X}_{r,k}$ (rappelons que l'on a par définition

$$w_{r,k} = p_{-r,k}(-1)p_{r,k}(1)p_{-r,k}(-1)).$$

Il existe un ouvert V_r de Ω, contenant la section $\underline{e}$, et un morphisme

$$h_r : \mathrm{V}_r \longrightarrow \Omega,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) $h_r(\underline{e}) = \underline{e}$,

(ii) $(h_r) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *coïncide avec la restriction de* $int(w_{r,k})$ *à* $(\mathrm{V}_r) \otimes_{\mathbb{Z}} k \subset \mathrm{G}_k$.

(iii) *On a* $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{V}_r$ *et* h_r *envoie* T *dans* T. *Pour tout* $s \in \mathrm{R}$, *on a* $\mathrm{P}_s \subseteq \mathrm{V}_r$ *et* h_r *envoie* P_s *dans* $\mathrm{P}_{s_r}(s)$.

En vertu de la définition d'un système de Chevalley (Exp. XXIII, 6.1), il existe pour chaque $s \in \mathrm{R}$ un entier $e_s = \pm 1$ tel que

$$\mathrm{int}(w_{r,k})p_{s,\,k}(x) = p_{s_r(s),\,k}(e_s\,x)$$

pour tout $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \to \operatorname{Spec} k$.

Soit S un préschéma quelconque, écrivons un élément quelconque de $\Omega(\mathrm{S})$ sous la forme

$$u = \left(\Big(\prod_{\substack{s\in \mathrm{R}_-\\ s\neq -r}} p_s(x_s)\Big)\cdot p_{-r}(x_{-r}),\quad t,\quad p_r(x_r)\cdot\Big(\prod_{\substack{s\in \mathrm{R}_+\\ \mathrm{S}\neq r}} \mathrm{P}_s(x_s)\Big)\right),$$

où on a choisi un ordre (quelconque) sur $\mathrm{R}_- - \{-r\}$ et $\mathrm{R}_+ - \{r\}$ (cf. 2.5).

On définit un morphisme $d : \Omega \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ par 417

$$d(u) = r(t) + x_r x_{-r}.$$

Soit V_r l'ouvert Ω_d (c'est-à-dire l'ouvert de Ω défini par « $d(u)$ inversible ») ; il contient $\underline{e}$, T, et chaque P_s, $s \in \mathrm{R}$. Soit

$$h_r : \mathrm{V}_r \longrightarrow \Omega$$

le morphisme défini par $h_r(u) = (a(u), b(u), c(u))$ où

$$\begin{aligned}
a(u) &= \left(\prod_{\substack{\mathrm{S}\in \mathrm{R}_-\\ s\neq -r}} p_{s_r(s)}(e_s x_s)\right)\cdot p_{-r}(-x_r d(u)^{-1})\\
b(u) &= t\cdot r^*(d(u)),\\
c(u) &= p_r(-x_{-r}d(u)^{-1})\cdot\left(\prod_{\substack{s\in \mathrm{R}_+\\ s\neq r}} p_{s_r}(s)(e_s x_s)\right).
\end{aligned}$$

Comme s_r permute les racines positives (resp. négatives) distinctes de r (resp. $-r$), alors $c(u)$ (resp. $a(u)$) est une section de U (resp. U^-) et le morphisme précédent est bien défini. Il vérifie trivialement (i) et (iii). Quant à (ii), cela résulte aussitôt de la définition des e_s, $s \in \mathrm{R}$, et de Exp. XX, 3.12.

Lemme 2.8. — *Il existe des ouverts* V *et* V′ *de* Ω *et des morphismes*

$$h : \mathrm{V} \longrightarrow \Omega,$$
$$h' : \mathrm{V}' \longrightarrow \Omega,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) V *et* V′ *contiennent* e, $h(\underline{e}) = h'(\underline{e}) = \underline{e}$.

418 (ii) *Le morphisme induit par* $h' \circ h : h^{-1}(v') \to \Omega$ *est la restriction du morphisme identique.*

(iii) *Les* k*-morphisme* $h \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *et* $h' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *sont la restriction à* $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *et* $\mathrm{V}' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *d'automorphismes du groupe* G_k.

(iv) V *et* V′ *contiennent* U, T *et* U^- ; h *et* h' *envoient* U *dans* U^-, U^- *dans* U, *et* T *dans* T.

Soit $\overline{w}_0$ l'élément du groupe de Weyl de G_k qui transforme R_+ en R_-. Ecrivons

$$\overline{w}_0 = s_{r_n} \cdots s_{r_1}, \qquad r_i \in \Delta$$

(aucun rapport avec la numérotation de 2.1). Posons

$$\overline{w}_0 = w_{r_n,\,k} \cdots w_{r_1,\,k} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_k}(\mathrm{T}_k)(k).$$

Définissons par récurrence sur $i \leqslant n$ un ouvert V_i de Ω et un morphisme $h_i : \mathrm{V}_i \to \Omega$ par $\mathrm{V}_0 = \Omega$, $h_0 = \mathrm{id}$, et, pour $i = 0, \ldots, n-1$,

$$\mathrm{V}_{i+1} = h_i^{-1}(\mathrm{V}_{r_{i+1}}), \qquad h_{i+1} = h_{r_{i+1}} \circ h_i,$$

où les notations V_{r_j} et h_{r_j} sont celles de 2.7.

Prenons $\mathrm{V} = \mathrm{V}_n$ et $h = h_n$. Les conditions de (i), (iii) et (iv) portant sur V et h sont bien vérifiées ; pour (i) et (iii) cela résulte aussitôt de 2.8, pour (iv), de ce que $h \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est la restriction de $\mathrm{int}(w_0)$ à $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{Z}} k$.

Comme $(\overline{w}_0)^2 = 1$, on a aussi

$$\overline{w}_0 = s_{r_1} \cdots s_{r_n} = (s_{r_1}^3) \cdots (s_{r_n}^3).$$

419 Posant

$$w_0' = (w_{r_1,\,k})^3 \cdots (w_{r_n,\,k})^3,$$

et effectuant la même construction que ci-dessus, on en déduit un ouvert V′ et un morphisme h' vérifiant également (i), (iii), (iv). De plus, $h' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est la restriction de $\mathrm{int}(w_0')$ à $\mathrm{V}' \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Mais pour chaque racine simple $r \in \mathrm{R}_0$, on a $(w_{r,\,k})^4 = e$ (cf. Exp. XX, 3.1), donc $w_0' \cdot w_0 = e$, ce qui montre que $h' \circ h$ induit le morphisme identique dans un ouvert non vide de $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Mais Ω étant lisse et de présentation finie sur $\mathbb{Z}$, $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est schématiquement dense dans Ω, ce qui prouve (ii).

Proposition 2.9. — *Il existe un ouvert* V_1 *de* $\Omega \times \Omega$, *ouvert* V_2 *de* Ω, *des morphismes*

$$\pi : \mathrm{V}_1 \longrightarrow \Omega, \qquad \sigma : \mathrm{V}_2 \longrightarrow \Omega,$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Si* $x \in \Omega(\mathrm{S})$, *alors* $(\underline{e}, x)$ *et* $(x, \underline{e})$ *sont des sections de* V_1 *et*

$$\pi(\underline{e}, x) = \pi(x, \underline{e}) = x.$$

(ii) V_2 *contient* $\underline{e}$ *et* $\sigma(\underline{e}) = \underline{e}$.

(iii) π_k *et* σ_k *sont la restriction des morphismes* $\mathrm{G}_k \times_k \mathrm{G}_k \to \mathrm{G}_k$ *et* $\mathrm{G}_k \to \mathrm{G}_k$ *définis par le produit (resp. l'inverse).*

Démonstration. Soient (v, t, u) et (v', t', u') deux sections de Ω. Alors $h(u)$ est une section de U^-, $h(v')$ est une section de U par 2.8 (iv) et on peut donc considérer $(h(u), e, h(v'))$ comme une section de Ω. Soit V_1 l'ouvert de $\Omega \times \Omega$ défini par la condition :

$$\big((v, t, u), (v', t', u')\big) \in v_1(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow (h(u), e, h(v')) \in \mathrm{V}'(\mathrm{S})$$

(notations de 2.8). Si $\big((v, t, u), (v', t', u')\big)$ est une section de V_1, alors $h'(h(u), e, h(v'))$, **420**
est défini ; c'est une section de Ω que l'on peut décomposer :

$$h'(h(u), e, h(v'))) = (v'', t'', u'').$$

On posera alors

$$\pi\big((v, t, u), (v', t', u')\big) = (v \cdot tv''t^{-1},\ tt''t',\ t'^{-1}u''t' \cdot u').$$

La vérification de (i) est immédiate (par 2.8 (ii)). Pour vérifier la condition de (iii) portant sur π, on voit que

$$h'(h(u), e, h(v')) = uv' = v''t''u''$$

lorsque $u \in \mathrm{U}(\mathrm{S})$, $v \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \to k$, en vertu de 2.8 (iii) et (ii). On construit σ de manière semblable : si (v, t, u) est une section de Ω, $h(u^{-1})$ est une section de U^-, $h(v^{-1})$ une section de U, $h(t^{-1})$ une section de T, donc $(h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1}))$ est une section de Ω et on peut définir un ouvert V_2 de Ω par

$$(v, t, u) \in \mathrm{V}_2(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow (h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1})) \in \mathrm{V}'(\mathrm{S})$$

et un morphisme $\sigma : \mathrm{V}_2 \to \Omega$ par

$$\sigma(v, t, u) = h'(h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1})).$$

On vérifie les conditions sur σ comme ci-dessus.

Corollaire 2.10. — *π est « génériquement associatif » et σ est un « inverse générique » : si x, y, $z \in \Omega(\mathrm{S})$ et si les expressions ci-dessous sont définies (ce qui se produit toujours au-dessus d'un ouvert de Ω contenant la section unité), on a :*

$$\pi(x, \pi(y, z)) = \pi(\pi(x, y), z),$$
$$\pi(x, \sigma(x)) = \underline{e} = \pi(\sigma(x), x).$$

En effet, les deux membres de chacune de ces formules définissent des morphismes **421**
entre $\mathbb{Z}$-préschémas lisses et de présentation finie, qui coïncident sur les fibres génériques, par 2.10 (iii).

Corollaire 2.11. — *Soit $r \in \mathrm{R}$. Pour tout S et tous x, $y \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ tels que $(p_r(x), p_{-r}(y)) \in \mathrm{V}_1(\mathrm{S})$ et $1 + xy \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ (ce qui définit un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\mathrm{S}}$ contenant la section $(0, 0)$), on a :*

$$\pi(p_r(x), p_{-r}(y)) = \left(p_{-r}\left(\frac{y}{1 + xy}\right), r^*(1 + xy), p_r\left(\frac{x}{1 + xy}\right)\right)$$

La démonstration est la même que précédemment, par Exp. XX, 2.1.

3. Théorème d'existence : fin de la démonstration

Posons pour simplifier le langage la définition suivante.

Définition 3.1. — Soient S un préschéma et G un S-préschéma en groupes. On dit que G est *admissible* s'il existe une immersion ouverte de S-préschémas $i : \Omega_S = \Omega \times S \to G$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (V_1)_S \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \Omega_S \times_S \Omega_S \arrow[r, "i \times_S i"] & G \times_S G \arrow[d, "\pi_G"] \\ \Omega_S \arrow[rr, "i_S"] & & G, \end{tikzcd}$$

où l'on note π_G le morphisme de multiplication dans G, est commutatif.

(ii) Il existe un ensemble fini de section $a_j \in \Omega(S)$ tel que les $i(a_j) \cdot i(\Omega_S)$ recouvrent G.

422 Par le « théorème de Weil » (Exp. XVIII, 3.13 (iii) et (iv)), on a :

Lemme 3.2. — *Si pour tout préschéma* S *étale et de type fini sur* $\mathbb{Z}$*, tout* S*-groupe admissible est affine, il existe un* $\mathbb{Z}$*-groupe admissible et affine.*

Or on a :

Lemme 3.3. — *Soient* S *un préschéma et* G *un* S*-groupe admissible. Alors* G *est lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres affines connexes et semi-simples.*

Comme Ω_S est lisse et de présentation finie sur S, à fibres connexes, il en est de même pour G, en vertu de la condition (ii). Pour vérifier 3.3, on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps K. Identifions Ω_K á son image dans G. Il est clair que Ω_K est le produit

$$\prod_{r \in R_-} P_{r,K} \cdot T_K \cdot \prod_{r \in R_+} P_{r,K}$$

des sous-groupes T_K et $P_{r,K}$ ($r \in R$) de G. L'algèbre de Lie de G s'identifie donc à la somme directe

$$\mathrm{Lie}(T_K) \bigoplus \coprod_{r \in R} \mathrm{Lie}(P_{r,K}).$$

Comme l'automorphisme intérieur défini par une section de T_K opère dans $P_{r,K}$, et donc dans $\mathrm{Lie}(P_{r,K})$, par l'intermédiaire du caractère

$$r \in R \subseteq M \simeq \mathrm{Hom}_{K\text{-gr.}}(T_K, \mathbb{G}_{m,K}),$$

la décomposition précédente de Lie(G) est exactement la décomposition sous l'opération adjointe de T. Les racines de G_K par rapport à T_K sont donc les $r \in R$. Appliquons

Exp. XIX, 1.13. Soit T_r le tore maximal de $\mathrm{Ker}(r) \subseteq T_K$ et soit $Z_r = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T_r)$; il nous suffit de prouver que chaque Z_r est réductif. Or $Z_r \cap \Omega_K$ n'est autre que

$$\prod_{\substack{s\in R_-\\ s|_{T_r}=e}} P_{s,K} \cdot T_K \cdot \prod_{\substack{s\in R_+\\ s|_{T_r}=e}} P_{s,K};$$

mais les racines nulles sur T_r sont les multiples rationnels de r, donc r et $-r$; ce qui prouve 423

$$Z_r \bigcap \Omega_K = P_{-r,K} \cdot T_K \cdot P_{r,K}.$$

Pour prouver que Z_r est réductif il suffit, en vertu de Exp. XX 3.4, de prouver que $P_{r,K}$ et $P_{-r,K}$ ne commutent pas, ce qui résulte aussitôt de 2.11.

Il résulte de 3.2 et 3.3 que la démonstration sera achevée si nous prouvons :

Lemme 3.4. — *Si* S *est un préschéma localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$*, et si* G *est un* S*-groupe lisse et de type fini, à fibres affines connexes et semi-simples, alors* G *est affine* (*et donc semi-simple*)*.*

Nota. — Dans Exp. XVI, on a vu que 3.4 est vrai sans hypothèse sur S, mais la démonstration est relativement délicate ; comme ici nous n'avons besoin que du cas particulier 3.4, nous en donnerons une démonstration directe.

Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, qui est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre, et la représentation adjointe de G

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathscr{O}_S}(\mathfrak{g}).$$

Pour prouver que G est affine sur S, il suffit de prouver que le morphisme Ad est affine. Comme G est lisse et à fibres connexes, il est séparé sur S (Exp. VI [(2)]), donc le morphisme Ad est séparé. Utilisant un résultat démontré en appendice (voir 4.1), il suffit de prouver que le morphisme Ad est quasi-fini. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un corps ; en ce cas G est affine, donc semi-simple, et on est ramené à Exp. XXII 5.7.14.

4. Appendice

424

Nous avons utilisé en course de démonstration la proposition suivante :

Proposition 4.1. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien* de dimension $\leqslant 1$, G *et* H *deux* S*-préschémas en groupes de type fini,* $f : G \to H$ *un morphisme de groupes* quasi-fini et séparé*. Alors* f *est affine.*

Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où G est lisse sur S, hypothèse qui est bien vérifiée dans l'application que nous avons faite de la proposition.

(2) N.D.E. : réf. à préciser ...

4.2. Par EGA II, 1.6.4, on peut supposer S réduit. Par les techniques habituelles de passage à la limite, on peut supposer S local. Si $\dim(\mathrm{S}) = 0$, l'assertion est triviale, supposons $\dim(\mathrm{S}) = 1$. Par descente fidèlement plate, on peut même prendre S complet à corps résiduel algébriquement clos. Quitte à normaliser S, on peut (EGA II, 6.7.1 et EGA 0_{IV} 23.1.5) supposer S normal. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet A à corps résiduel algébriquement clos.

4.3. Soit η le point générique de S. Considérons l'image $f_\eta(\mathrm{G}_\eta)$ de G_η dans H_η. C'est un sous-préschéma en groupes fermé de H_η. Soit H' l'adhérence schématique dans H de $f_\eta(\mathrm{G}_\eta)$. Comme $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$ est affine (c'est une immersion fermée), on peut remplacer H par H' et donc supposer H plat sur S et f_η surjectif. Comme f_η est fini, G et H plats, on a

$$\dim(\mathrm{G}_0) = \dim(\mathrm{G}_\eta) = \dim(\mathrm{H}_\eta) = \dim(\mathrm{H}_0)$$

(où on note par un indice « 0 » les fibres spéciales).

4.4. Soient $\mathrm{H}_0^{(0)}, \cdots \mathrm{H}_0^{(n)}$ les composantes irréductibles de H_0, $\mathrm{H}_0^{(0)}$ désignant la composante neutre, et soient z_i $(i = 0, \ldots, n)$ leurs points génériques. Comme chaque
425 anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i}$ est de dimension $\leqslant 1$, le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i} \to \mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i}$ est affine car quasi-fini et séparé (cf. lemme $\cdots$, [(3)] Exp. XVI), donc G est affine sur H au voisinage de z_i. Notant V le plus grand ouvert de H tel que $\mathrm{G}|_{\mathrm{V}}$ soit affine sur V, il en résulte que V contient tous les z_i.

D'autre part, V est évidemment stable par la translation définie par un élément quelconque $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$. Mais on a $\dim(\mathrm{G}_0) = \dim(\mathrm{H}_0)$ et f_0 est fini, donc [(4)]

$$f_0 : \quad \mathrm{G}_0^{(0)}(s_0) \longrightarrow \mathrm{H}_0^{(0)}(s_0)$$

est surjectif. Comme A est complet et G lisse sur S, l'application canonique $\mathrm{G}^{(0)}(\mathrm{S}) \to \mathrm{G}_0^{(0)}(s_0)$ est surjective ; on en déduit que pour tout $h_0 \in \mathrm{H}_0^{(0))}(s_0)$, il existe un $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ tel que $f(g_0) = h_0$. Comme $\mathrm{H}_0^{(0)}(s_0)$ opère transitivement dans chaque $\mathrm{H}_0^{(i)}(s_0)$, il en résulte que $v \supseteq \mathrm{H}_0(s_0)$, donc ($\kappa(s_0)$ étant algébriquement clos) $\mathrm{V} \supseteq \mathrm{H}_0$.

Comme on a évidemment $\mathrm{V} \supseteq \mathrm{H}_\eta$, f_η étant fini, on a $\mathrm{V} = \mathrm{H}$. C.Q.F.D.

(3) N.D.E. : réf. à préciser !

(4) N.D.E. : notant s_0 le point fermé de S,