EXPOSÉ IX

GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF : HOMOMORPHISMES DANS UN SCHÉMA EN GROUPES

par A. Grothendieck

1. Définitions 37

Définition 1.1. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes. On dit que G est un groupe *de type multiplicatif* si G est localement diagonalisable au sens de la topologie fidèlement plate quasi-compacte (cf. IV 6.3), i.e. si pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un S′-groupe diagonalisable (I 4.4 et VIII 1.1).

– On dit que G est de type multiplicatif *quasi-isotrivial* s'il est même localement diagonalisable au sens de la topologie étale (IV 6.3), i.e. si dans la définition précédente, on peut même prendre $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ *étale* surjectif, ou encore (ce qui revient au même, comme on voit en prenant le schéma somme des S′ attachés aux divers $s \in \mathrm{S}$) s'il existe $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ étale et surjectif tel que $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un S′-groupe localement diagonalisable.

– Si on peut même choisir $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ étale surjectif et *fini*, on dit que G est de type multiplicatif *isotrivial*.

– Enfin on dit que G est un groupe de type multiplicatif *localement trivial* (resp. *localement isotrivial*) si tout $s \in \mathrm{S}$ admet un voisinage ouvert U tel que $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}$ soit un U-groupe diagonalisable (resp. un groupe de type multiplicatif isotrivial, i.e. il existe $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ morphisme étale surjectif fini tel que $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un S′-groupe diagonalisable).

Commentaires 1.2. — On notera que les cinq notions précédentes se déduisent toutes de la notion de *groupe diagonalisable* par le processus de localisation, au sens de cinq « topologies » différentes associées à (**Sch**).

On convient de façon générale que lorsque le mot « localement » n'est pas explicité 38
par la désignation de la topologie envisagée, il s'agit de la topologie de Zariski, ce qui est conforme à la terminologie reçue. Dans la terminologie introduite ici, « de type multiplicatif localement trivial » équivaut à « localement diagonalisable » de VIII 1.1,

---

(0) version 1.0 du 8 novembre 2009 : ajouts dans preuve 3.6 bis, 4.4–7, 5.0–6, 6.1, 7.1, 8.2. Revoir 8.1 et 4.5.

de même « trivial » se traduit par « diagonalisable ». Entre les cinq notions introduites, on a le diagramme d'implications suivant, qui résulte des relations correspondantes entre les topologies en jeu :

$$\begin{tikzcd}
& \text{type multiplicatif général} & \\
& \text{quasi-isotrivial} \arrow[u, Rightarrow] & \\
& \text{localement isotrivial} \arrow[u, Rightarrow] & \\
\text{isotrivial} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{localement trivial} \arrow[ul, Rightarrow] \\
& \text{trivial} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Du point de vue pratique, signalons tout de suite que tous les groupes de type multiplicatif que nous rencontrerons seront quasi-isotriviaux ; ainsi, nous verrons dans l'exposé suivant (X 4.5) que lorsque G est *de type fini* sur S, alors G est automatiquement quasi-isotrivial, mais nous donnerons des exemples où il n'est pas localement isotrivial. Nous y verrons de même que G peut être localement trivial, sans être isotrivial ni a fortiori trivial (ce qui implique facilement que les inclusions du diagramme précédent sont strictes).

Par contre, nous y verrons également (X 5.16) lorsque S est localement noethérien et *normal* (plus généralement géométriquement unibranche), alors tout groupe de type multiplicatif de type fini sur S est nécessairement isotrivial, et de plus trivial dès qu'il est localement trivial (ou seulement trivial sur un ouvert dense). Ceci explique que la plupart des groupes de type multiplicatif qu'on rencontrera en pratique seront sans doute isotriviaux, d'autant plus que nous verrons par la suite que les *tores maximaux des schémas en groupes semi-simples* sont automatiquement isotriviaux.

39 ***Définition 1.3***. — Soient S, G comme dans 1.1. On dit que G est un *tore* s'il est localement isomorphe, au sens de la topologie fidèlement plate quasi-compacte, à un groupe de la forme $\mathbb{G}_m^r$ (où r est un entier $\geqslant 0$).

Avec les notations de 1.1, cela signifie donc qu'on peut choisir S' tel que G' soit isomorphe à un groupe de la forme $(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}'})^r$. On notera que l'entier r dépend de $s \in \mathrm{S}$, c'est la *dimension de la fibre* $\mathrm{G}_s = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{S}} \kappa(s)$. C'est une fonction localement constante de s, comme on constate aussitôt. Il y a lieu de généraliser cette remarque :

Définition 1.4. — Soit G un schéma en groupes diagonalisable sur un corps k, donc G est isomorphe à un groupe $\mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, où M est un groupe commutatif ordinaire, défini à isomorphisme près par cette condition, de façon précise $\mathrm{M} \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_{m,k})$ (VIII 1.3). La classe à isomorphisme près de M s'appelle le *type* du groupe diagonalisable G ; il est évidemment invariant par extension du corps de base.

Si maintenant G est un schéma en groupes de type multiplicatif sur un préschéma S quelconque, alors pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe une extension k de $\kappa(s)$ telle que $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Spec}(k)$ soit un k-groupe diagonalisable [(1)], son type est alors indépendant de l'extension choisie d'après la remarque précédente, et sera appelé le *type de* G *en* s, ou type de G_s. En particulier, si G lui-même est diagonalisable, donc isomorphe à un groupe de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, alors pour tout $s \in \mathrm{S}$, le type de G en s est égal à la classe du groupe M.

De façon générale, si G est un groupe de type multiplicatif sur S, M un groupe commutatif ordinaire, on dira que G est *de type* M s'il est de type M en tout point $s \in \mathrm{S}$, en d'autres termes si G est localement isomorphe à $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ au sens de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte.

Remarque 1.4.1. — [(2)] a) On voit immédiatement que pour un groupe de type multiplicatif donné G sur S, la fonction $s \mapsto$ type de G_s est localement constante sur S : en effet, avec les notations de 1.1, si G' est de type M, alors G est de type M sur le voisinage U de s. Il s'ensuit que l'on a une *partition canonique* de S en somme de **40**
préschémas S_i, telle que pour tout i, $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ soit de type M_i, où les M_i sont des groupes commutatifs deux à deux non isomorphes.

b) En particulier, si S est connexe, alors le type des fibres de G est constant i.e. il existe un groupe commutatif M tel que G soit de type M. Enfin, si G est un tore, le type de G en s est caractérisé par l'entier $\dim \mathrm{G}_s$ (en effet, G_s est de type $\mathbb{Z}^n$, où $n = \dim \mathrm{G}_s$).

Remarque 1.5. — a) Il est trivial sur les définitions 1.1 et 1.3 que celles-ci sont « compatibles avec l'extension de la base ». Ainsi, si G est un préschéma en groupes sur S, et $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme de changement de base, alors si G est de type multiplicatif (resp. de type multiplicatif isotrivial, etc.), il en est de même de G'.

b) Lorsque de plus $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est fidèlement plat et quasi-compact, alors si G' est de type multiplicatif, resp. un tore, il en est de même de G. Si de plus $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est étale (resp. fini étale), et G' quasi-isotrivial (resp. isotrivial), il en est de même de G.

c) Enfin, revenant à un morphisme de changement de base quelconque $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, si $s' \in \mathrm{S}'$ et $s = f(s')$, alors le type de G' en s' est égal à celui de G en s, puisque $\mathrm{G}'_{s'} = \mathrm{G}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$.

---

(1) N.D.E. : En effet, il existe par hypothèse un voisinage ouvert U de s et un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ soit diagonalisable ; alors pour tout $s' \in \mathrm{S}'$ au-dessus de s, $\kappa(s')$ est une extension de $\kappa(s)$ et $\mathrm{G}_{s'} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Spec}(\kappa(s'))$ est diagonalisable.

(2) N.D.E. : On a mis le numéro 1.4.1 aux remarques qui suivent, pour des références ultérieures.

2. Extension de certaines propriétés des groupes diagonalisables aux groupes de type multiplicatif

Les extensions dont il s'agit sont des conséquences essentiellement triviales des résultats de l'exposé précédent, compte tenu des définitions 1.1 et de la nature « locale » (au sens de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte) des résultats dont il s'agit.

Définition 2.0. — [3] On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des morphismes fidèlement plats et quasi-compacts.

Proposition 2.1. — *Soit* G *un groupe de type multiplicatif sur un préschéma* S. *On a ce qui suit :*

a) G *est fidèlement plat sur* S, *et affine sur* S (*a fortiori quasi-compact sur* S).

41 b) G *de type fini sur* S $\Longleftrightarrow$ G *de présentation finie sur* S $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par un groupe commutatif de type fini.*

c) G *fini sur* S $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par un groupe commutatif fini* $\Longleftrightarrow$ (*si* S *quasi-compact*) G *est de type fini sur* S *et est annulé par un entier* $n > 0$.

c′) G *entier sur* S $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par un groupe commutatif de torsion.*

d) G *est le groupe unité* $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par le groupe commutatif nul.*

e) G *est lisse sur* S $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par un groupe commutatif de type fini dont le sous-groupe de torsion est d'ordre premier à la caractéristique de* $\kappa(s)$.

Ces énoncés résultent de VIII 2.1, compte tenu que les propriétés dont il s'agit se descendent par morphismes fidèlement plats et quasi-compacts (cf. SGA 1, VIII ou EGA IV_2, § 2).

Utilisant VIII 3.5, on obtient de même :

Proposition 2.2. — *Soit* G *un groupe de type multiplicatif et de type fini sur* S, *alors pour tout entier* $n \neq 0$, *le noyau* ${}_n\mathrm{G}$ *de* $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ *est un groupe de type multiplicatif fini sur* S.

Proposition 2.3. — *Soit* G *un groupe de type multiplicatif sur le préschéma* S, *opérant librement à droite sur le* S-*préschéma* X *affine sur* S. *Alors :*

a) *La relation d'équivalence définie par* G *dans* X *est* $\mathscr{M}$-*effective* (IV 3.4), *de plus* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{G}$ *est affine sur* S.

b) *Si de plus* X *est de présentation finie* (*resp. de type fini*) *sur* S, *il en est de même de* Y.

La première assertion résulte de VIII 5.1, traitant le cas où G est diagonalisable, et
42 de IV 3.5.2, qui permet de s'y ramener, compte tenu que les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ sont des morphismes de descente *effective* pour la

[3] N.D.E. : On a ajouté cette définition, qui apparaît dans les propositions 2.3 et 2.7.

catégorie fibrée des schémas affines sur d'autres, i.e. pour tout Y' affine sur S', muni d'une donnée de descente relativement à $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, cette donnée de descente est effective, i.e. Y' provient d'un Y affine sur S, cf. SGA 1, VIII 2.1.

Pour la deuxième assertion on est ramené également au cas diagonalisable VIII 5.8, car les conditions de finitude envisagées se descendent par morphismes fidèlement plats et quasi-compacts (SGA 1, VIII 3.3 et 3.6 [(4)]). Procédant comme dans VIII, corollaires 5.5 à 5.7, on tire de 2.3 :

Corollaire 2.4. — *Sous les conditions de* 2.3*, le morphisme graphe*

$$\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}$$

est une immersion fermée. Pour toute section σ de X *sur* S*, le morphisme correspondant* $\mathrm{G} \to \mathrm{X}$*, $g \mapsto \sigma \cdot g$ est une immersion fermée.*

En particulier :

Corollaire 2.5. — *Soit u :* $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* monomorphisme *de* S*-préschémas en groupes, avec* G de type multiplicatif *et* H affine sur S*. Alors u est une immersion fermée,* $\mathrm{H}/\mathrm{G} = \mathrm{Y}$ *existe et est affine sur* S*, enfin* H *est un fibré principal homogène sur* Y *de groupe* G_{Y}*.*

Remarque 2.6. — Soit u : $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un monomorphisme de S-préschémas en groupes, G étant de type multiplicatif et de type fini sur S, H étant de présentation finie sur S et séparé sur S. Alors on peut montrer que u est une immersion fermée, en utilisant VIII 7.12 (voir remarque VIII 7.13 b)).

Proposition 2.7. — *Soit u :* $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de* S*-groupes de type multiplicatif, avec* H de type fini *sur* S*. Alors :* 43

(i) $\mathrm{G}' = \operatorname{Ker} u$ *est un* S*-groupe de type multiplicatif, la relation d'équivalence définie par* G' *dans* G *est $\mathscr{M}$-effective, donc* (IV 3.4) *u se factorise en*

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{G}' = \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{H},$$

où $\mathrm{I} \to \mathrm{H}$ *est un monomorphisme* [(5)] *de* S*-groupes ;* I *est de type multiplicatif, la relation d'équivalence dans* H *définie par* I *est $\mathscr{M}$-effective, par suite* $\mathrm{H}' = \mathrm{H}/\mathrm{I}$ *existe, et de plus* H' *est de type multiplicatif.*

(ii) H' *et* I *sont de type fini, et il en est de même de* G' *si* G *l'est.*

Démonstration. Procédant comme pour 2.3 on est ramené au cas où G et H sont diagonalisables, et alors 2.7 se réduit à VIII 3.4.

Notons les corollaires suivants :

(4) N.D.E. : cf. aussi V, 9.1 ou EGA IV_2, 2.7.1.

(5) N.D.E. : et même une *immersion fermée*

Corollaire 2.8. — a) *Soit* S *un préschéma. Alors la catégorie des* S*-groupes de type multiplicatif et de type fini est une catégorie abélienne.*

b) *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme dans cette catégorie, pour que ce soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *dans cette catégorie, il faut et il suffit que* u *soit un monomorphisme de préschémas* (*resp. que* u *soit fidèlement plat, resp. que* u *soit un isomorphisme de préschémas*).

Il suffit de noter que le produit de deux S-groupes de type multiplicatif est encore de type multiplicatif (ce qui est immédiat), évidemment de type fini sur S si les deux facteurs le sont. Le reste de 2.8 résulte immédiatement de 2.7, le détail est laissé au lecteur.

Corollaire 2.9. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de* S*-groupes de type multiplicatif et de type fini. Soit* U *l'ensemble des points* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *soit un monomorphisme* (*resp. fidèlement plat, resp. un isomorphisme*). *Alors* U *est à la fois*
44 *ouvert et fermé, et l'homomorphisme induit* $u_{\mathrm{U}} : \mathrm{G}_{\mathrm{U}} \to \mathrm{H}_{\mathrm{U}}$ *est un monomorphisme* (*resp. fidèlement plat, resp. un isomorphisme*).

Soit P (resp. Q) le noyau (resp. conoyau) de u. Grâce à 2.7, Q existe et P et Q sont de type multiplicatif, de plus la formation de P et de Q commute à tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, en particulier à la formation des fibres. D'autre part, u est un monomorphisme (resp. fidèlement plat, resp. un isomorphisme) si et seulement si $\mathrm{P} = 0$ (resp. $\mathrm{Q} = 0$, resp. $\mathrm{P} = \mathrm{Q} = 0$). On est donc ramené, grâce à ces remarques, à vérifier ceci : si R est un S-groupe de type multiplicatif, alors l'ensemble U des $s \in \mathrm{S}$ tels que $\mathrm{R}_s = 0$ est ouvert et fermé, et $\mathrm{R}_{\mathrm{U}} = 0$. Or ceci est contenu dans la remarque 1.4.1 a).

Corollaire 2.10. — *Soient* G *un* S*-groupe de type multiplicatif et de type fini,* H *et* H' *deux sous-groupes de type multiplicatif.*

a) $\mathrm{H}'' = \mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ *est un sous-groupe de type multiplicatif de* G.

b) *Soit* U *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $\mathrm{H}_s \subseteq \mathrm{H}'_s$ (*resp.* $\mathrm{H}_s = \mathrm{H}'_s$). *Alors* U *est ouvert et fermé, et* $\mathrm{H}_{\mathrm{U}} \subseteq \mathrm{H}'_{\mathrm{U}}$ (*resp.* $\mathrm{H}_{\mathrm{U}} = \mathrm{H}'_{\mathrm{U}}$).

Bien entendu, le signe intersection dans $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ désigne l'intersection au sens fonctoriel, i.e. $\mathrm{H} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{H}'$, qui est évidemment un sous-S-groupe de G ; de même le signe d'inclusion (resp. d'égalité) désigne la relation d'ordre (resp. l'égalité) entre sous-foncteurs de H (et pas l'inclusion (resp. l'égalité) pour les ensembles sous-jacents).

Appliquant d'abord 2.7 au morphisme d'inclusion $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$, on trouve que H est de type fini ; de même H' est de type fini. Il résulte alors de 2.8 que $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ est de type multiplicatif et de type fini (on notera que le foncteur canonique de la catégorie envisagée dans 2.8 dans la catégorie $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ commute aux limites projectives finies).

La formation de $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ commute à l'extension de la base, en particulier à la formation des fibres. D'autre part, $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}'$ (resp. $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$) équivaut à $\mathrm{H}'' = \mathrm{H}$ (resp. $\mathrm{H}'' = \mathrm{H}$ et $\mathrm{H}'' = \mathrm{H}'$). Considérons alors les homomorphismes canoniques $\mathrm{H}'' \to \mathrm{H}$ et $\mathrm{H}'' \to \mathrm{H}'$, alors U est l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que l'homomorphisme induit $\mathrm{H}''_s \to \mathrm{H}_s$ soit un isomorphisme (resp. tels que $\mathrm{H}''_s \to \mathrm{H}_s$ et $\mathrm{H}''_s \to \mathrm{H}'_s$ soient des isomorphismes). En

vertu de 2.9, il s'ensuit que U est ouvert et fermé, et que $H''_U \to H_U$ (resp. $H''_U \to H_U$ 45
et $H''_U \to H'_U$) sont des isomorphismes. D'où la conclusion voulue.

Proposition 2.11. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type multiplicatif et de type fini sur* S, H *un sous-groupe de type multiplicatif de* G, *et* $K = G/H$ (*qui est un groupe de type multiplicatif quotient de* G).

(i) *Supposons* G *trivial i.e. diagonalisable. Alors il existe une partition de* S *en parties* S_i *ouvertes et fermées, telles que pour tout i,* H_{S_i} *et* K_{S_i} *soient diagonalisables. En particulier, si* S *est connexe,* H *et* K *sont diagonalisables.*

(ii) *Même énoncé que dans* (i), *en remplaçant « diagonalisable » par « isotrivial », pourvu que* S *soit connexe, ou localement connexe, ou quasi-compact.*

(iii) *Supposons* G *localement trivial* (*resp. localement isotrivial, resp. quasi-isotrivial*), *alors il en est de même de* K *et de* H.

Démonstration. (i) Par hypothèse on a $G = D_S(M)$, où M est un groupe commutatif de type fini. Pour tout groupe quotient M_i de M, soit $H_i = D_S(M_i)$ le sous-groupe diagonalisable correspondant de G (VIII 3.1). Soit S_i l'ensemble des $s \in S$ tels que $H_s = (H_i)_s$; en vertu de 2.10, S_i est ouvert et fermé, et on a $H_{S_i} = (H_i)_{S_i}$, donc H_{S_i} est diagonalisable, donc aussi K_{S_i} (VIII 3.1). Évidemment les S_i sont deux à deux disjoints, je dis qu'ils recouvrent S. Cela résulte du fait que pour tout s, H_s est diagonalisable, comme sous-groupe du groupe diagonalisable G_s (cf. 8.1 plus loin [(6)]), donc H_s est de la forme $D_{\kappa(s)}(M_i)$, d'après VIII, 1.5 et 3.2 b). Se limitant à la famille des S_i non vides, la conclusion (i) apparaît.

(ii) Par hypothèse, il existe $S' \to S$ étale fini surjectif, tel que $G_{S'}$ soit diagonalisable. Donc tout point de S' a un voisinage U', à la fois ouvert et fermé, tel que $H_{U'}$ et $K_{U'}$ soient diagonalisables. Alors l'image U de U' dans S est à la fois ouverte et fermée, et
$S' \to S$ induit encore un morphisme étale fini surjectif $U' \to U$, donc on voit que tout 46
point s de S a un voisinage U ouvert et fermé tel que H_U et K_U soient isotriviaux. La conclusion (ii) en résulte aussitôt.

(iii) Résulte aussitôt de (i) et (ii) et des définitions. Noter d'ailleurs que le cas « quasi-isotrivial » résultera aussi du fait plus général que « type fini ⇒ quasi-isotrivial », annoncé dans 1.2 (cf. X 4.5).

3. Propriétés infinitésimales : théorèmes de relèvement et de conjugaison

Les propriétés infinitésimales fondamentales des groupes de type multiplicatif découlent du théorème suivant :

Théorème 3.1. — *Soient* S *un schéma* affine, H *un* S*-groupe* de type multiplicatif, $\mathscr{F}$ *un faisceau quasi-cohérent sur* S, *sur lequel* H *opère* (I 4.7). *Alors on a*

$$H^i(H, \mathscr{F}) = 0 \quad \textit{pour} \quad i > 0,$$

où H^i *est la cohomologie de Hochschild étudiée dans* Exp. I, § 5.

---

(6) N.D.E. : On a corrigé la référence erronée à IV 4.7.5. Noter que le n°8 du présent exposé est indépendant des n$^{\text{os}}$ 3 à 7.

En effet, d'après *loc. cit.*, 5.3, la cohomologie de Hochschild s'explicite, en termes des anneaux affines A de S et B de G, et du module M sur A définissant $\mathscr{F}$, comme cohomologie d'un complexe de A-modules $\mathrm{C}^\bullet(\mathrm{H}, \mathrm{M})$, *dont la formation commute à tout changement de base* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$. Par suite, pour un changement de base $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ avec A' *plat* sur A, on aura

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{H}', \mathscr{F}') = \mathrm{H}^i(\mathrm{H}, \mathscr{F}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}',$$

et par suite, si on suppose même A' fidèlement plat sur A, pour prouver que $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}, \mathscr{F})$ est nul, il suffit de prouver qu'il en est ainsi de $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}', \mathscr{F}')$. Cette remarque nous ramène à vérifier 3.1 dans le cas où G est diagonalisable ; dans ce cas cela a été prouvé dans I 5.3.3.

47 Utilisant les résultats de l'Exposé III, nous allons tirer de 3.1 diverses conséquences de nature géométrique :

Théorème 3.2. — *Soient* S *un schéma* affine, S_0 *un sous-schéma affine défini par un idéal* $\mathscr{J}$, H *un groupe de type multiplicatif sur* S, G *un préschéma en groupes quelconque sur* S, $u, v : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *deux homomorphismes de groupes,* $u_0, v_0 : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ *les homomorphisme déduits de* u, v *par le changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$. *Si* $\mathscr{J}^2 = 0$ *et* $u_0 = v_0$, *alors il existe un* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $v = \mathrm{int}(g) \circ u$ *et* $g_0 = e$.

Cela résulte de III 2.1 (ii), et de 3.1 (nullité de H^1).

Corollaire 3.3. — *Sous les conditions préliminaires de* 3.2 *supposons de plus* G lisse *sur* S, *mais en revanche supposons seulement* $\mathscr{J}$ *nilpotent* (*pas nécessairement de carré nul*). *S'il existe* $g_0 \in \mathrm{G}_0(\mathrm{S}_0)$ *tel que* $v_0 = \mathrm{int}(g_0) \circ u_0$, *alors* g_0 *se relève en un* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $v = \mathrm{int}(g) \circ u$.

Par récurrence sur l'entier n tel que $\mathscr{J}^n = 0$, on est ramené au cas où $\mathscr{J}$ est de carré nul. De plus, G étant lisse sur S, on peut relever g_0 en un élément g' de G(S). Quitte à remplacer v par $v' = \mathrm{int}(g') \circ u$, on est alors ramené à la situation 3.2.

Corollaire 3.4. — *Sous les conditions préliminaires de* 3.2, *avec* $\mathscr{J}$ *nilpotent, supposons de plus* u central (*par exemple* G *commutatif*). *Alors* $u_0 = v_0$ *implique* $u = v$.

En effet, la réduction au cas $\mathscr{J}$ de carré nul est encore immédiate, et alors il suffit d'appliquer 3.2. En particulier :

Corollaire 3.5. — *Soient* S, S_0, H, G *comme dans* 3.2, *avec* $\mathscr{J}$ *nilpotent. Soit* u : $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-groupes, tel que* $u_0 : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ *soit l'homomorphisme unité, alors* u *est l'homomorphisme unité.*

48 ***Théorème 3.6***. — *Soient* S *un schéma* affine, S_0 *un sous-schéma défini par un idéal* $\mathscr{J}$ nilpotent, H *un groupe de type multiplicatif sur* S, G *un préschéma en groupes* lisse *sur* S, $u_0 : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ *un homomorphisme des* S_0*-groupes déduits par le changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$.

Alors il existe un homomorphisme $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *de* S*-groupes qui relève* u_0 (*et par* 3.3 *deux tels relèvements* u, u' *sont conjugués par un élément de* G(S) *se réduisant suivant l'élément unité de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$).

Cela résulte de III 2.1 et 2.3, et de 3.1 (nullité de H^2 pour l'existence du relèvement de u_0, nullité du H^1 pour l'unicité à conjugaison près).

On peut prouver de même les variantes suivantes de 3.2 à 3.6 (qui en fait entraînent les énoncés précédents, en les appliquant aux sous-groupes *graphes* des homomorphismes envisagés dans 3.2 à 3.6) :

Théorème 3.2 bis. — *Soient* S *un schéma* affine, S_0 *un sous-schéma défini par un idéal* $\mathscr{J}$, G *un* S*-préschéma en groupes,* H, H′ *des sous-préschémas en groupes, de type multiplicatif,* G_0, H_0, H'_0 *les groupes sur* S_0 *déduits par le changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$. *Si* $\mathscr{J}^2 = 0$ *et* $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}'_0$, *alors il existe* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{H}' = \mathrm{int}(g)(\mathrm{H})$ *et* $g_0 = e$.

Corollaire 3.3 bis. — *Sous les conditions préliminaires de* 3.2 bis, *supposons de plus* G lisse *sur* S, *et* $\mathscr{J}$ *nilpotent* (*pas nécessairement de carré nul*). *Soit* $g_0 \in \mathrm{G}_0(\mathrm{S}_0)$ *tel que* $\mathrm{H}'_0 = \mathrm{int}(g_0)(\mathrm{H}_0)$, *alors* g_0 *se relève en* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{H}' = \mathrm{int}(g)(\mathrm{H})$.

Corollaire 3.4 bis. — *Sous les conditions préliminaires de* 3.2 bis, *supposons* $\mathscr{J}$ *nilpotent,* H *central* (*par exemple* G *commutatif*). *Alors* $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}'_0$ *implique* $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$.

Théorème 3.6 bis. — *Soient* S *un schéma* affine, S_0 *un sous-schéma défini par un idéal* 49
$\mathscr{J}$ nilpotent, G *un* S*-préschéma en groupes* lisse, H_0 *un sous-préschéma en groupes de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$, *de type multiplicatif. Alors :*

(a) *Il existe un sous-préschéma en groupes* H *de* G, *plat sur* S, *tel que* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = \mathrm{H}_0$.

(b) *Un tel* H *est nécessairement de type multiplicatif.*

(c) *Enfin, d'après* 3.2 bis, *deux tels relèvements* H, H′ *de* H_0 *sont conjugués par un élément* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *se réduisant suivant l'élément unité de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$.

Montrons comment on peut prouver 3.2 bis (dont 3.3 bis et 3.4 bis sont une conséquence immédiate) et l'assertion (a) de 3.6 bis. Cette dernière résulte de 3.1 (nullité du H^2) et de III 4.37 (ii). De même 3.2 bis résulte de 3.1 (nullité du H^1) et de III 4.37 (i), du moins lorsque G et H sont *lisses* sur S.

Mais en utilisant les résultats de l'exposé suivant, on peut déduire très simplement 3.2 bis et 3.6 bis, sous la forme générale énoncée ici, de 3.2 resp. 3.6. Pour 3.2 bis, il suffit en effet de noter qu'en vertu de X 2.1, H et H′ sont isomorphes, ce qui nous ramène à 3.2.

Pour 3.6 bis, on note que H_0 est nécessairement de type fini sur S_0 : [(7)] en effet, comme sous-préschéma de G_0, qui est lisse sur S_0, H_0 est localement de type fini sur S_0 ; or, d'après 2.1 a), H_0 est affine sur S_0, donc est de type fini sur S_0. Alors, d'après X 4.5, H_0 est quasi-isotrivial, donc provient, d'après X 2.1, d'un groupe de type multiplicatif H sur S. [(8)] Alors, d'après 3.6, il existe un homomorphisme de S-groupes $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ qui relève l'immersion $\mathrm{H}_0 \hookrightarrow \mathrm{G}_0$; comme H et H_0 (resp. G et G_0) ont même espace topologique sous-jacent, et comme, pour tout $h \in \mathrm{H}$, le morphisme

[(7)] N.D.E. : L'original indiquait : « *par* 2.1 b), *car ses fibres le sont* ». Les éditeurs n'ont pas compris cet argument, et lui ont substitué celui qui suit.
[(8)] N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

$\mathscr{O}_{G,u(h)} \to \mathscr{O}_{H,h}$ est surjectif (car il l'est après réduction modulo $\mathscr{J}$, qui est nilpotent), u est également une immersion (cf. EGA I, 4.2.2).

Enfin, pour *tout* relèvement H de H_0 en un sous-groupe plat de G, H est nécessairement de type multiplicatif d'après X 2.3 [9], ce qui prouve aussi l'assertion (b) de 3.6 bis. (Le lecteur vérifiera que les résultats 3.2 bis à 3.6 bis ne sont pas utilisés dans l'Exposé X, donc qu'il n'y a pas de cercle vicieux !).

Proposition 3.8. — [10] *Soient* S *un préschéma,* S_0 *un sous-préschéma fermé défini par un idéal* $\mathscr{J}$ *localement nilpotent,* G *un* S*-groupe de type multiplicatif,* X *un* S*-préschéma* localement de présentation finie*. On suppose que* G *opère sur* X*, de telle façon que* $G_0 = G \times_S S_0$ *opère trivialement sur* $X_0 = X \times_S S_0$*. Sous ces conditions,* G *opère trivialement sur* X.

50 La démonstration est celle de III 2.4 b) ; on peut aussi se ramener à *loc. cit.* en notant que 3.8 se ramène aussitôt au cas où G est diagonalisable, ce qui est le cas envisagé dans *loc. cit.*

Corollaire 3.9. — *Soient* S, S_0 *comme ci-dessus, et* $u : G \to H$ *un homomorphisme de* S*-groupes, avec* G *de type multiplicatif et* H localement de présentation finie *sur* S*. On suppose que l'homomorphisme* $u_0 : G_0 \to H_0$ *déduit par changement de base* $S_0 \to S$ *est* central*. Alors* u *est* central.

En effet, il suffit d'appliquer 3.8 en faisant X = H, et faisant opérer G sur H par $(g, h) \mapsto \mathrm{int}(u(g)) \cdot h = u(g)\, h\, u(g)^{-1}$.

4. Le théorème de densité

Ce théorème (cf. 4.7 ci-dessous) [*], joint au théorème [11] du N°7, sera l'outil essentiel dans le présent exposé et les deux suivants, pour passer des propriétés infinitésimales des groupes de type multiplicatif, qu'on vient de développer, aux propriétés « finies ».

Définition 4.1. — Soit X un préschéma. On dit qu'une famille $(Z^i)_{i \in I}$ de sous-préschémas de X est *schématiquement dense* si pour tout ouvert U de X, et tout sous-préschéma fermé U′ de U qui majore les $Z^i \cap U$, on a $U' = U$.

On dit qu'un sous-préschéma Z de X est schématiquement dense dans X, s'il en est ainsi de la famille réduite à Z.

[*] Tous les résultats de 4.1 à 4.6 sont contenus dans EGA IV_3, 11.10, auquel nous renvoyons le lecteur pour un exposé en forme de la notion de densité schématique.

[9] N.D.E. : On notera que X 2.3 dépend de façon essentielle du théorème 3.6 du présent exposé.

[10] N.D.E. : On a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de n°3.7.

[11] N.D.E. : théorème « d'algébricité » 7.1.

On voit immédiatement (cf. EGA IV_3, 11.10.1) que la définition équivaut à dire que pour tout ouvert U de X, toute section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$ qui est nulle sur les $\mathrm{Z}^i \cap \mathrm{U}$, est nulle, ce qui signifie aussi que l'intersection des noyaux des homomorphismes canoniques

$$u_i : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \longrightarrow (v_i)_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Z}^i})$$

est nulle, où $v_i : \mathrm{Z}^i \to \mathrm{X}$ est l'immersion canonique. [(12)] Lorsque X est au-dessus d'un préschéma S, ceci équivaut encore à dire que pour tout ouvert U de X et tout couple (u, v) de morphismes de U dans un S-préschéma Y *séparé sur* S, qui coïncident sur les $\mathrm{Z}^i \cap \mathrm{U}$, on a $u = v$. (En effet, la relation $u = v$ équivaut à la relation $\mathrm{U}' = \mathrm{U}$, où U' est l'image inverse de la diagonale de $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ par le S-morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ défini **51**
par (u, v) ; cette diagonale est un sous-préschéma *fermé* de $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ donc U' est un sous-préschéma fermé de U, majorant les $\mathrm{Z}^i \cap \mathrm{U}$ d'après l'hypothèse sur (u, v), donc si la famille (Z^i) est schématiquement dense, on aura $\mathrm{U}' = \mathrm{U}$ d'où $u = v$; on voit l'implication inverse en prenant simplement $\mathrm{Y} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}]$).

Avec la terminologie introduite dans EGA I, fin du N°9.5, dire que le sous-préschéma Z de X est schématiquement dense, signifie aussi que X est identique au *sous-préschéma adhérence de* Z *dans* X.

Lemme 4.2. — *Soient* X *un* S-*préschéma* plat, $(\mathrm{Z}^i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de sous-préschémas de* X, plats *sur* S. *Soit* S_0 *un sous-préschéma de* S, *défini par un idéal* $\mathscr{J}$ nilpotent *; on suppose les modules* $\mathscr{J}^n / \mathscr{J}^{n+1}$ localement libres *sur* S_0.

Soient $\mathrm{X}_0, \mathrm{Z}^i_0$ *déduits de* X, Z^i *par le changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$. *Alors, si la famille* $(\mathrm{Z}^i_0)_{i\in\mathrm{I}}$ *est schématiquement dense dans* X_0, *la famille* $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ *l'est dans* X.

Supposons $\mathscr{J}^{n+1} = 0$ (où $n \geqslant 0$), raisonnons par récurrence sur n, l'assertion étant triviale pour $n = 0$. Définissant les S_m, X_m, Z^i_m par réduction modulo $\mathscr{J}^{m+1}$ comme à l'accoutumée, l'hypothèse de récurrence implique déjà que $(\mathrm{Z}^i_{n-1})_{i\in\mathrm{I}}$ est schématiquement dense dans X_{n-1}. Quitte à remplacer X par un ouvert induit, nous sommes ramenés à prouver que toute section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ qui s'annule sur les Z^i est nulle.

Or la section f_{n-1} de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{n-1}} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}/\mathscr{J}^n\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ définie par f s'annule sur les Z^i_{n-1}, donc est nulle, donc f est une section de $\mathscr{J}^n\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Comme X est plat sur S, on a

$$\mathscr{J}^n\mathscr{O}_{\mathrm{X}} \xleftarrow{\sim} \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}, \qquad \text{où} \quad \mathscr{E} = \mathscr{J}^n = \mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1}.$$

De même, comme chaque Z^i est plat sur S, la restriction f_i de f à Z^i peut être regardée comme une section de :

$$\mathscr{J}^n\mathscr{O}_{\mathrm{Z}^i} \xleftarrow{\sim} \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Z}^i_0} \quad .$$

Par hypothèse, les f_i sont nuls. Or, $\mathscr{E}$ est localement libre par hypothèse, donc il en **52**
est de même de $\mathscr{F} = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$. Donc f est une section du module *localement libre* $\mathscr{F}$ sur X_0, telle que pour tout i sa restriction à Z^i_0 soit nulle. Comme $(\mathrm{Z}^i_0)_{i\in\mathrm{I}}$ est schématiquement dense dans X_0, il s'ensuit aussitôt que f est nulle. C.Q.F.D.

---

(12) N.D.E. : Tous les résultats de densité schématique énoncés dans EGA IV_3, § 11.10 découlent des résultats sur les « *familles séparantes d'homorphismes* » démontrés dans *loc. cit.*, § 11.9, auxquels nous ferons référence dans certaines N.D.E. qui suivent.

Corollaire 4.3. — *Soient* X *un* S-*préschéma* localement noethérien et plat *sur* S, $(\mathrm{Z}^i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de sous-préschémas de* X plats *sur* S. *On suppose que pour tout* $s\in \mathrm{S}$, *la famille* $(\mathrm{Z}^i_s)_{i\in\mathrm{I}}$ *des fibres en s est schématiquement dense dans* X_s. *Alors la famille* $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est schématiquement dense dans* X.

Quitte à remplacer X par un ouvert induit, on est ramené à prouver que toute section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ dont la restriction aux Z^i est nulle, est nulle. [13] Pour ceci, il suffit de prouver que pour tout $x\in\mathrm{X}$, l'image de f dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est nulle. Notons $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, et $\mathfrak{m}_s$ celui de $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, où s est l'image de x dans S. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est noethérien, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{m}_x^n=0$ d'où, a fortiori, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}\mathfrak{m}_s^n=0$

Donc, il suffit de montrer que, pour tout entier n, la section induite par f sur $\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}/\mathfrak{m}_s^{n+1})$ est nulle. Par hypothèse, la famille des fibres $\mathrm{Z}^i_s=\mathrm{Z}^i\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}}\kappa(s)$ est schématiquement dense dans la fibre $\mathrm{X}_s=\mathrm{X}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}}\kappa(s)$ Cela nous ramène donc au cas où S est le spectre d'un anneau local dont l'idéal maximal J est nilpotent, $\mathrm{S}_0=\mathrm{Spec}\,\kappa(s)$, et les hypothèse de 4.2 sont vérifiées, d'où la conclusion.

Lemme 4.4. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien, X *un* S-*préschéma* localement noethérien et plat *sur* S, $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de sous-préschémas de* X plats *sur* S. *On suppose que pour tout* $s\in\mathrm{S}$, *la famille* $(\mathrm{Z}^i_s)_{i\in\mathrm{I}}$ *des fibres en s est schématiquement dense dans* X_s.

Alors, pour tout changement de base $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ (S' *pas nécessairement localement noethérien*), *la famille* $(\mathrm{Z}^{i\prime}_n)_{i\in\mathrm{I}}$ *est schématiquement dense dans* X' (c.-à-d., la famille $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ est *universellement schématiquement dense dans* X *relativement à* S, cf. EGA IV$_3$, Déf. 11.10.8)

Démonstration. [14] Soit f' une section de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$ sur un ouvert U' de X', qui s'annule sur les $\mathrm{Z}^{i\prime}_n$; il faut montrer que f' est nulle. Soit $s'\in\mathrm{S}'$, il suffit de prouver que f' *est nulle en tous les points de* U' *au-dessus de* s'. Soit s l'image de s' dans S ; quitte à remplacer S,S' par les spectres des anneaux locaux en s,s', on peut supposer S,S'
53 locaux, et que s,s' en sont les points fermés. On peut de plus supposer X affine, donc

$$\mathrm{S}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A}),\quad \mathrm{S}'=\mathrm{Spec}(\mathrm{A}'),\quad \mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}),\quad \mathrm{X}'=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}'),\quad \mathrm{B}'=\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$$

où A,A' sont locaux, $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ est un homomorphisme *local*, et A, B sont noethériens. On peut aussi supposer U' affine, de la forme $\mathrm{X}'_{g'}$, avec $g'\in\mathrm{B}'$.

Pour toute sous-A-algèbre A'' de A', on considère $\mathrm{S}''=\mathrm{Spec}(\mathrm{A}'')$ et X'', $\mathrm{Z}^{i\prime\prime}_n$ déduits de X, Z^i par le changement de base $\mathrm{S}''\to\mathrm{S}$, d'où le diagramme :

[13] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[14] N.D.E. : Pour une autre démonstration, utilisant une réduction au cas où S' est localement noethérien (et 4.3 et 4.5 comme ici), voir EGA IV$_3$, 11.9.16 et 11.9.12 (N. B. dans la dernière ligne de la preuve de 11.9.16, remplacer 11.9.5 par 11.9.12).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^i \arrow[d] & \mathrm{Z}_n^{i\prime\prime} \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{Z}_n^{i\prime} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{X} \arrow[d] & \mathrm{X}'' \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{X}' \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{S} & \mathrm{S}'' \arrow[l] & \mathrm{S}' \arrow[l]
\end{tikzcd} .$$

Nous nous limiterons par la suite aux A'' qui sont localisées de sous-A-algèbres de type fini A''_1 de A' en $\mathfrak{m}' \cap \mathrm{A}''_1$ (où $\mathfrak{m}'$ est l'idéal maximal de A'), de sorte que les homomorphismes $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'' \to \mathrm{A}'$ sont locaux. Notons que ces A'' forment une famille filtrante croissante de sous-algèbres dont la réunion est A', donc leur limite inductive est également A'. On a donc de même $\mathrm{B}' = \varinjlim_{\mathrm{A}''} \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}''$. Donc, il existe un A'' et un élément $g'' \in \mathrm{B}'' = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}''$, dont l'image dans B' est g'.

(15) D'après le lemme 4.5 ci-dessous, la propriété que la famille des fibres $(\mathrm{Z}^i_s)_{i\in \mathrm{I}}$ soit schématiquement dense dans X_s est préservée par tout changement de base $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$; par conséquent, comme chaque S'' est localement noethérien, si on remplace S par un S'' approprié, et X, Z^i par X'', $\mathrm{Z}^{i\prime\prime}$, les hypothèses de 4.4 seront préservées.

Donc, quitte à remplacer S par S'' (et X, Z^i par X'', $\mathrm{Z}^{i\prime\prime}$) on peut supposer que g' provient de $g \in \mathrm{B}$. Quitte à remplacer X par l'ouvert $\mathrm{X}_g = \mathrm{U}$, on peut donc supposer que $\mathrm{U}' = \mathrm{X}'$. On voit de même qu'on peut supposer que f' provient d'une section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ sur X.

Soit $\mathrm{Y} = \mathrm{V}(f)$ le sous-schéma de X défini par f, et $\mathrm{Y}^i = \mathrm{Z}^i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ son intersection avec Z^i, qui est un sous-schéma fermé de Z^i, égal à $\mathrm{V}(f^i)$, où f^i est la section de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}^i}$ induite par f. Dénotant par Y', $\mathrm{Y}^{i\prime}$ les S'-schémas déduits des précédents par changement de base, on aura encore

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{V}(f'), \qquad \mathrm{Y}^{i\prime} = \mathrm{Z}^{i\prime} \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{Y}' = \mathrm{V}(f^{i\prime}),$$

et on a les relations analogues pour Y'', $\mathrm{Y}^{i\prime\prime}$. L'hypothèse que f' s'annule sur les $\mathrm{Z}^{i\prime}$ s'exprime par les relations $\mathrm{Y}^{i\prime} = \mathrm{Z}^{i\prime}$ pour tout i (16).

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Pour tout entier $n \geqslant 0$, introduisons le sous-schéma $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$ de S, et les schémas X_n, Y_n, Z^i_n, Y^i_n déduits de X, Y, Z^i, Y^i
par le changement de base $\mathrm{S}_n \to \mathrm{S}$. De façon générale, pour tout S-préschéma P, on 54
posera $\mathrm{P}_n = \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$.

Pour tout n, et $i \in \mathrm{I}$, considérons le foncteur

$$\mathrm{F}^i_n = \prod_{\mathrm{Z}^i_n/\mathrm{S}_n} \mathrm{Y}^i_n/\mathrm{Z}^i_n : \quad (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}_n} \longrightarrow (\mathbf{Ens})$$

(15) N.D.E. : On a ajouté la phrase suivante, et détaillé l'original dans ce qui suit.

(16) N.D.E. : l'original ajoutait : « du moins en tout point x' de X' au-dessus de s' », mais cette restriction semble inutile.

défini par (cf. VIII, 6.4) : pour tout P sur S_n,

$$F^i_n(P) = \Gamma\big((Y^i_n)_P/(Z^i_n)_P\big) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } (Y^i_n)_P \neq (Z^i_n)_P; \\ \{\mathrm{id}\} & \text{si } (Y^i_n)_P = (Z^i_n)_P. \end{cases}$$

Comme S_n est local artinien, et Z^i_n plat donc *essentiellement libre* sur S_n, alors, d'après VIII, 6.4, chaque F^i_n est représentable par un sous-préschéma fermé T^i_n de S_n.

(17) Le complété $\widehat{A}$ de l'anneau local A est noethérien car A l'est, et c'est la limite projective des A_n. Notons K^i_n l'idéal de $A_n = A/\mathfrak{m}^{n+1}$ définissant T^i_n et K^i la limite projective des K^i_n ; c'est un idéal de $\widehat{A}$.

Pour i fixé, $m \geqslant n$ et tout S_n-préschéma P, on a

$$(Y^i_n)_P = Y^i \times_S S_n \times_{S_n} P = Y^i \times_S P = (Y^i_m)_P\ ,$$

et de même $(Z^i_n)_P = (Z^i_m)_P$; il en résulte que F^i_n est la restriction $F^i_m \times_{S_m} S_n$ de F^i_m à $(\mathbf{Sch})_{/S_n}$, d'où $T^i_n = T^i_m \times_{S_m} S_n$. On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K^i_m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & A_m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathscr{O}(T^i_m) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K^i_n \arrow[r] & A_n \arrow[r] & \mathscr{O}(T^i_n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches verticales sont *surjectives*. Ceci a les conséquences suivantes : d'une part, le système projectif $(K^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler, et donc la limite projective des $\mathscr{O}(T^i_n)$ s'identifie à l'anneau topologique quotient $\widehat{A}/K^i$ (cf. EGA 0_{III}, § 13.2). D'autre part, l'application $K^i \to K^i_n$ est *surjective* (cf. [**BEns**], III, § 7.4, Prop. 5), d'où il résulte que $K^i_n \simeq (K^i + \mathfrak{m}^{n+1}\widehat{A})/\mathfrak{m}^{n+1}\widehat{A}$ et $\mathscr{O}(T^i_n) \simeq (\widehat{A}/K) \otimes_A (A/\mathfrak{m}^{n+1})$.

En d'autres termes, $(T^i_n)_n$ est un système inductif de schémas affines artiniens, et la limite inductive $T^i = \varinjlim_n T^i_n$ est un sous-schéma formel fermé du schéma formel $\widehat{S} = \mathrm{Spf}(\widehat{A})$ (cf. EGA I, § 10), dont la réduction modulo $\mathfrak{m}^{n+1}$ est T^i_n.

Soit T le sous-schéma formel fermé de $\widehat{S}$ intersection des T^i, c.-à-d., défini par $K = \sum_i K^i$. Comme $\widehat{A}$ est noethérien, il existe une partie finie J de I, telle que l'on ait $K = \sum_{i\in J} K^i$ (i.e. $T = \bigcap_{i\in J} T^i$). Notons alors que pour tout n, on a $K_n = \sum_{i\in J} K^i_n$ où K_n désigne l'image de K dans A_n.

Rappelons que f^i désigne l'image de $f \in B = \mathscr{O}(X)$ dans $\mathscr{O}(Z^i)$, et $f^{i\prime}$ son image dans $\mathscr{O}(Z^{i\prime}_n) = \mathscr{O}(Z^i) \otimes_A A'$; l'hypothèse $Y^{i\prime} = Z^{i\prime}$ équivaut à la nullité de $f^{i\prime}$. Comme $\mathscr{O}(Z^i) \otimes_A A'$ est la limite inductive des sous-algèbres $\mathscr{O}(Z^i) \otimes_A A''$ (où A'' satisfait aux conditions explicitées plus haut), il existe donc un A'' tel que $Y^{i\prime\prime} = Z^{i\prime\prime}$. A priori, A'' dépend de i, mais on peut trouver un A'' qui marche pour tous les $i \in J$, puisque J est fini. Posons $S'' = \mathrm{Spec}(A'')$ et $S''_{(n)} = S'' \times_S S_n$. (18)

(17) N.D.E. : On a détaillé et corrigé l'original, pour faire voir que la limite projective des anneaux $\mathscr{O}(T^i_n)$ définit un sous-schéma formel fermé du schéma formel $\mathrm{Spf}(\widehat{A})$.

(18) N.D.E. : On a détaillé et corrigé l'original, en faisant la distinction entre $S''_{(n)}$ et le sous-schéma $S''_n = S''_n(s'')$ introduit plus bas.

Comme $Y^{i\prime\prime} \times_{S''} S''_{(n)} = (Y^i_n)_{S''_{(n)}}$ égale $Z^{i\prime\prime} \times_{S''} S''_{(n)} = (Z^i_n)_{S''_{(n)}}$ pour tout $i \in J$, il résulte de la définition des T^i_n que $S''_{(n)} \to S_n$ se factorise par T^i_n pour tout $i \in J$, donc aussi par $T_n = \bigcap_{i\in J} T^i_n$, donc aussi par T^i_n pour *tout* $i \in I$. Notant f'' l'image de f dans $B'' = B \otimes_A A''$, et $f''_{(n)}$ son image dans $B''_{(n)} = B''/\mathfrak{m}^{n+1}B''$, cela signifie que pour tout n, $f''_{(n)}$ s'annule sur les $Z^i \times_S S''_{(n)}$.

Comme les morphismes $A \to A'' \to A'$ sont locaux, l'image s'' de s' dans S'' est le point fermé de S'', correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}''$ de B'', et l'image de s'' dans S est s. Fixons n et notons maintenant S''_n le n-ième voisinage infinitésimal de s'' dans S'', c.-à-d., $\mathrm{Spec}(A''/\mathfrak{m}''^{n+1})$. Posons $B''_n = B''/\mathfrak{m}''^{n+1}B''$ et $Z''^i_n = Z^i \times_S S''_n = \mathrm{Spec}(B''_n)$. Alors, l'image f''_n de $f''_{(n)}$ dans B''_n s'annule sur $Z^{i\prime\prime}_n$, pour tout i. Or, d'après le lemme 4.5 ci-dessous, la famille des fibres

$$Z^{i\prime\prime}_0 = Z^{i\prime\prime}_n \times_{S''_n} \kappa(s'') = Z^i_s \times_{\kappa(s)} \kappa(s'')$$

est schématiquement dense dans la fibre $X''_0 = X''_n \times_{S''_n} \kappa(s'') = X_s \times_{\kappa(s)} \kappa(s'')$. Donc S''_n, X''_n, $(Z^{i\prime\prime}_n)_{i\in I}$, et $S''_0 = \mathrm{Spec}\,\kappa(s'')$ vérifient les hypothèses du lemme 4.2 ; il s'ensuit donc que $f''_n = 0$, i.e. $f'' \in \mathfrak{m}''^{n+1}B''$, ceci pour tout n.

Comme B est noethérien et $B'' = B \otimes_A A''$ est un localisé d'une B-algèbre de type fini, B'' est noethérien, donc ses anneaux locaux séparés pour leur topologie habituelle. Il s'ensuit que f'' est nul en les points x'' de X'' tels que $\mathfrak{m}''B''$ soit contenu dans l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X'',x''}$, i.e. en les points de X'' au-dessus de s''. A fortiori, f' est nul en les points x' de X' au-dessus de s'. C.Q.F.D.

Lemme 4.5.0. — [19] *Soient* X *un* S-*préschéma,* $(Z^i)_{i\in I}$ *une famille de sous-préschémas de* X, *et* $S' \to S$ *un morphisme* fidèlement plat. *Si la famille* $(Z^{i\prime})_{i\in I}$ *est schématiquement dense dans* X', *alors* $(Z^i)_{i\in I}$ *est schématiquement dense dans* X.

Ceci résulte de EGA IV_3, 11.10.5 (i) et 11.9.10 (i). Reste à reporter la démonstration du

Lemme 4.5. — *Soient* X *un préschéma* localement noethérien [20] *sur un corps k,* $(Z^i)_{i\in I}$ *une famille de sous-préschémas de* X, *k' une extension de k,* X' *et* $Z^{i\prime}$ *les préschémas déduits de* X *et* Z^i *par le changement de base k'/k. Pour que* $(Z^i)_{i\in I}$ *soit schématiquement dense dans* X, *il faut et suffit que* $(Z^{i\prime})_{i\in I}$ *le soit dans* X'.

Le « il suffit » découle de 4.5.0, prouvons le « il faut ». [21] D'abord, on peut supposer 55
$X = \mathrm{Spec}(B)$ affine. Pour tout i, soit $(Z^{ij})_{j\in J_i}$ un recouvrement de Z^i par des ouverts affines ; remplaçant $(Z^i)_{i\in I}$ par la famille $(Z^{ij})_{(i,j)\in J}$, où $J = \coprod_{i\in I} J_i$, on peut aussi supposer les Z^i affines.

Soient $g \in B' = B \otimes_k k'$ et $t' \in B'_g$ une section de $\mathscr{O}_{X'}$ sur l'ouvert affine $U' = X'_g$, nulle sur les $Z^{i\prime} \cap U'$, i.e. dont l'image dans chaque $(\mathscr{O}(Z^i) \otimes_k k')_g$ est nulle. Il existe une sous-k-algèbre de type fini A de k' telle que $g \in B_A = B \otimes_k A$ et

[19] N.D.E. : On a inséré ici ce lemme, utilisé dans la démonstration de 4.5 et 4.7.
[20] N.D.E. : Cette hypothèse est en fait superflue, cf. EGA IV_3, 11.10.6 et 11.9.13.
[21] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

$t' \in (\mathrm{B}_{\mathrm{A}})_g$. L'application $\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k \mathrm{A} \to \mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k k'$ étant injective, il en est de même de l'application

$$(\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k \mathrm{A})_g \longrightarrow (\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k k')_g\,;$$

compte tenu de l'hypothèse, ceci implique que l'image de t' dans chaque $(\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k \mathrm{A})_g$ est nulle. Ceci nous ramène à montrer que la famille $(\mathrm{Z}^i_{\mathrm{A}})_{i\in \mathrm{I}}$ est schématiquement dense dans X_{A}, [(22)] ce qui résulte de EGA IV_3, 11.9.10 b).

Notons en passant le résultat suivant, qui servira dans un exposé ultérieur : [(23)]

Corollaire 4.6. — *Soient* X *un* S-*préschéma* plat*,* U *une partie ouverte de* X*. On suppose que pour tout* $s \in \mathrm{S}$*,* U_s *est schématiquement dense dans* X_s*, et que* X *est* localement noethérien*, ou* localement de présentation finie *sur* S*. Alors* U *est schématiquement dense dans* X*.*

56 Supposons pour simplifier U rétrocompact dans X (cf. EGA IV_3, 11.10.10 et 11.9.17 pour le cas général). Le cas X localement noethérien n'est mis que pour mémoire, il est contenu dans 4.3.

Dans le deuxième cas envisagé, on peut évidemment supposer S et X affines, alors X et U sont de présentation finie sur $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. L'anneau A est limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres A_i de type fini. Le « procédé breveté » déjà utilisé (cf. EGA IV_3, 8.8.2 et 8.10.5 (iii)) montre qu'il existe un i, un schéma affine X_i sur $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$ et un ouvert U_i dans X_i, dont X, U se déduisent par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$. Soit E_i la partie de S_i formée des $s \in \mathrm{S}_i$ tels que $(\mathrm{U}_i)_s$ soit schématiquement dense dans $(\mathrm{X}_i)_s$.

[(24)] D'après EGA IV_2, 5.9.9 et 5.10.2, E_i est l'ensemble des $s \in \mathrm{S}_i$ tels que $(\mathrm{U}_i)_s$ contienne l'ensemble $\mathrm{Ass}\,\mathscr{O}_{(\mathrm{X}_i)_s}$ des points « associés » au faisceau structural de $(\mathrm{X}_i)_s$, et d'après EGA IV_3, 11.9.17.1 cette condition est de nature constructible, i.e. E_i est une partie constructible de S_i.

[(24)] D'après 4.5, l'image inverse de E_i par $\mathrm{S}_j \to \mathrm{S}_i$ (resp. par $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$) est E_j (resp. l'ensemble E des $s \in \mathrm{S}$ tels que U_s soit schématiquement dense dans X_s). De plus, par hypothèse, $\mathrm{E} = \mathrm{S}$, qui est aussi l'image inverse par chaque $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$ de S_i. D'après EGA IV_3, 8.3.11, ceci entraîne qu'il existe un $j \geqslant i$ tel que $\mathrm{E}_j = \mathrm{S}_j$, i.e. tel que pour tout $s \in \mathrm{S}_j$, $(\mathrm{U}_j)_s$ soit schématiquement dense dans $(\mathrm{X}_j)_s$.

Alors, en vertu de 4.4 appliqué à $(\mathrm{S}_j, \mathrm{X}_j, \mathrm{U}_j)$ et au changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_j$, il s'ensuit que U est schématiquement dense dans X. On notera d'ailleurs qu'on n'utilise ici 4.4 que dans le cas d'une famille dont l'ensemble d'indices est fini (en fait, réduit à un élément), auquel cas la démonstration de 4.4 se simplifie beaucoup, comme le lecteur constatera par lui-même.

[(22)] N.D.E. : L'original continuait par : « Utilisant 4.3 pour les $\mathrm{X}_{\mathrm{A}'}$, où A' est un quotient de A par une puissance d'un idéal maximal, et le Nullstellensatz de Hilbert, on est ramené au cas où k' est une extension *finie* de k ». On pourrait détailler cette réduction, et poursuivre dans cette voie, car le cas d'une extension finie k'/k est un peu plus simple que le cas plus général traité dans EGA IV_3, 11.9.10 b).

[(23)] N.D.E. : Préciser ceci . . .

[(24)] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Théorème 4.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un groupe de type multiplicatif et* de type fini *sur* S. *Pour tout entier $n > 0$, soit ${}_n\mathrm{G}$ le noyau de $n \cdot \mathrm{id}_\mathrm{G}$. Alors la famille des sous-préschémas $({}_n\mathrm{G})_{n>0}$ de* G *est schématiquement dense* (déf. 4.1).

Nous distinguons deux cas.

a) Cas S localement noethérien. Alors par 4.3 on est ramené aucas où S est le spectre d'un corps k. D'après 4.5.0, on peut supposer k algébriquement clos et G diagonalisable, i.e. de la forme $\mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, où M est un groupe commutatif de type fini. Alors M est de la forme $\Gamma \times \mathbb{Z}^r$, avec Γ fini, donc G est de la forme $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$, avec 57
$\mathrm{G}_1 = \mathrm{D}(\Gamma)$ et $\mathrm{G}_2 = \mathbb{G}_m^r$, et pour n grand multiplicativement (à savoir n multiple de l'ordre de Γ) on aura ${}_n\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times {}_n\mathrm{G}_2$ puisqu'on aura ${}_n\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_1$.

Appliquant encore 4.3 à la projection $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_1$, on est ramené au cas de G_2, i.e. au cas où $\mathrm{G} = \mathbb{G}_m^r$. Comme alors G est réduit, il revient au même de dire que $({}_n\mathrm{G})_{n>0}$ est schématiquement dense dans G, ou que la réunion des ${}_n\mathrm{G}$ est dense dans G pour la topologie habituelle. Comme ${}_n\mathrm{G} = ({}_n\mathbb{G}_m)^r$, on est ramené au cas de $\mathrm{G} = \mathbb{G}_m$, donc G irréductible de dimension 1. Alors cela résulte du fait que l'ensemble réunion des ${}_n\mathrm{G}$ (égal à l'ensemble des racines de l'unité dans k) est *infini*.

b) Cas général. Pour tout point s de S, il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme fidèlement plat quasi-compact $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ soit diagonalisable, i.e. de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{M})$. D'après 4.5.0 à nouveau, on peut se ramener au cas de G', donc on peut supposer G diagonalisable, donc il provient du groupe absolu $\mathrm{H} = \mathrm{D}_\mathbb{Z}(\mathrm{M})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. D'après la preuve de a), pour tout $s \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, la famille $({}_n\mathrm{H}_s)_{n>0}$ est schématiquement dense dans H ; il suffit maintenant d'appliquer 4.4. (25)

Corollaire 4.8. — a) *Soient u, v : $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ deux homomorphismes de* S*-préschémas en groupes, avec* H *de type multiplicatif et* (26) de type fini*, et supposons que pour tout entier $n > 0$, les restrictions de u et v à ${}_n\mathrm{H}$ sont identiques. Alors $u = v$.*

b) *Soient* H_1, H_2 *deux sous-groupes de type multiplicatif et* de type fini *d'un préschéma en groupes* G*, et supposons que pour tout entier $n > 0$, on ait ${}_n\mathrm{H}_1 = {}_n\mathrm{H}_2$, alors $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$.*

La première assertion résulte de la seconde, par considération des sous-groupes H_1 et H_2 de $\mathrm{H} \times \mathrm{G}$, graphes de u et v. Pour prouver b), soit $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2$, c'est un sous-préschéma en groupes de H_i ($i = 1, 2$), il faut montrer qu'il est identique à H_i, or l'hypothèse signifie qu'il majore les ${}_n\mathrm{H}_i$. On est donc ramené à prouver le

Corollaire 4.9. — *Soient* G *un* S*-groupe de type multiplicatif et* de type fini*, et* H *sous-préschéma en groupes qui majore les ${}_n\mathrm{G}$, $n > 0$. Alors* $\mathrm{H} = \mathrm{G}$.

En vertu de 4.7 on est ramené à prouver que le sous-préschéma H est *fermé*, ou 58
encore qu'il est égal ensemblistement à G. Cela nous ramène au cas où S est le spectre

(25)N.D.E. : On aura besoin en X 4.3 de ce résultat pour S non localement noethérien (à savoir, $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}} \otimes_\mathrm{A} \widehat{\mathrm{A}})$, où $\widehat{\mathrm{A}}$ est le complété de l'anneau local noethérien A.

(26)N.D.E. : On a remplacé « diagonalisable » par « de type multiplicatif ».

d'un corps, mais alors tout sous-préschéma en groupes de G est fermé (VI_B 1.4.2), d'où la conclusion.

Remarque 4.10. — Sous les conditions de 4.7, soit m un entier > 0 qui a les propriétés suivantes : pour tout $s \in S$, m n'est pas une puissance de la caractéristique de $\kappa(s)$, et si G_s est de type M, les diviseurs premiers de la torsion de M divisent m. (N. B. cette deuxième condition est toujours vérifiée si G est un tore). Alors la démonstration donnée montre que dans l'énoncé de 4.7 et les corollaires 4.8 et 4.9, on peut se borner à considérer les sous-groupes de la forme ${}_{(m^r)}G$, avec $r > 0$.

D'ailleurs, on voit aussitôt que lorsque G est *lisse* sur S, alors pour tout point $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U de s et un entier $m > 0$, premier à toutes les caractéristiques résiduelles de U, et qui satisfait les conditions précédentes pour G_U. (Prendre par exemple pour m l'ordre de la torsion du type de G en s, cf. 1.4.1 a) et 2.1 e).) Sous ces conditions, on trouve des ${}_{(m^r)}G$ qui sont finis et *étales* sur S, et dont la famille est schématiquement dense, à condition de se restreindre au-dessus de U. Cette remarque permet dans certains cas (notamment ceux faisant intervenir les théorèmes 3.2 et 3.2 bis, cf. XI 6, mais non ceux faisant intervenir les théorèmes 3.6 et 3.6 bis) de se passer du théorème 3.1, faisant intervenir la cohomologie de Hochschild.

5. Homomorphismes centraux des groupes de type multiplicatif

Lemme 5.0. — [27] *Soient* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau* local noethérien*,* $S = \mathrm{Spec}(A)$*, et* H *un schéma* fini *sur* S*, donc* $H = \mathrm{Spec}(B)$*, où* B *est fini sur* A*. Soit* K *un sous-schéma de* H*, tel que par réduction modulo* $\mathfrak{m}^{n+1}$ *on ait* $K_n = H_n$ *pour tout* n*. Alors* $K = H$.

Soit s le point fermé de S. Notons d'abord que K est un sous-schéma *fermé* de H. En effet, c'est a priori un sous-schéma fermé d'un ouvert U de H. Mais K, donc U contient la fibre $K_s = H_s$; comme le morphisme $H \to S$ est fini, donc fermé, il s'ensuit que le complémentaire de U est vide, i.e. $U = H$. Donc K est défini par un idéal I de B. L'hypothèse entraîne que I est contenu dans $\mathfrak{m}^n B$ pour tout n ; comme B est un A-module fini, il est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, d'où $I = 0$.

Théorème 5.1. — *Soient* u*,* v : $H \to G$ *deux homomorphismes de* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini*, et* S localement noethérien *ou* G de présentation finie *sur* S*. Soit* $s \in S$ *tel que* $u_s = v_s$*, et supposons* u_s central*. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $u_U = v_U$.

59 Distinguons les deux cas :

a) S localement noethérien. [28] Soit $K = \mathrm{Ker}(u, v)$ l'image inverse de la diagonale de $G \times_S G$ par le morphisme (u, v) ; c'est un sous-préschéma en groupes de H. Nous voulons trouver U tel que $K_U = H_U$. Notons que, comme S est localement noethérien et H de type fini sur S, alors H est localement noethérien, donc l'immersion $K \hookrightarrow H$

[27] N.D.E. : On a explicité ce lemme, utilisé à plusieurs reprises dans la suite (de façon implicite dans l'original).

[28] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

est de type fini (cf. EGA I, 6.3.5). Donc K est de type fini sur S, donc de présentation finie sur S, puisque S est localement noethérien. Par conséquent, d'après EGA IV_3, 8.8.2.4, pour montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de s tel que $\mathrm{K_U} = \mathrm{H_U}$, il suffit de montrer que $\mathrm{K_{S'}} = \mathrm{H_{S'}}$, où S′ est le spectre de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$. On peut donc supposer S local de point fermé s. Quitte à remplacer l'anneau local noethérien A par son complété $\widehat{\mathrm{A}}$, ce qui introduit un changement de base $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$ fidèlement plat et quasi-compact, on peut même supposer [29] si l'on veut A complet.

En vertu de 3.4 on a $u_n = v_n$ pour tout n, où comme d'habitude l'indice n indique la réduction modulo $\mathfrak{m}^{n+1}$ ($\mathfrak{m}$ étant l'idéal maximal de A). Pour tout entier $m > 0$, dénotant par ${}_m u$, ${}_m v$ les homomorphismes ${}_m\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ induits par u, v, on a donc aussi $({}_m u)_n = ({}_m v)_n$. Ceci étant vrai pour tout n, et ${}_m\mathrm{H}$ étant *fini* sur S en vertu de 2.2, il s'ensuit que ${}_m u = {}_m v$, d'après 5.0. Ceci étant vrai pour tout m, on a donc $u = v$ en vertu de 4.7.

b) G de présentation finie. [30] Comme H est aussi de présentation finie sur S alors, d'après EGA IV_3, 8.8.2, nous pouvons encore supposer S local de point fermé s et prouver qu'alors $u = v$. Si $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un morphisme fidèlement plat quasi-compact et si l'on note f_H le morphisme $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$ et u', $v' : \mathrm{H}' \to \mathrm{G}'$ les morphismes déduits de u, v, alors l'égalité $u' = v'$ entraîne $u' \circ f_\mathrm{H} = v' \circ f_\mathrm{H}$, d'où $u = v$, puisque f_H est un épimorphisme. Donc, quitte à faire une extension fidèlement plate et quasi-compacte de la base, on peut supposer de plus H diagonalisable, donc de la forme $\mathrm{D_S(M)}$, avec M un groupe commutatif de type fini.

Introduisons comme dans la démonstration de 4.6 la famille filtrante croissante des sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini A_i de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$. [30] Notons que $\mathrm{H} = \mathrm{D_S(M)}$ provient, pour tout i, du groupe diagonalisable $\mathrm{H}_i = \mathrm{D}_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{M})$. Comme G est de présentation finie sur S, alors, d'après EGA IV_3, 8.8.2 (voir aussi $\mathrm{VI_B}$, 10.2 et 10.3), il existe un indice i, un préschéma en groupes G_i de présentation finie sur S_i, et des morphismes de S_i-groupes u_i, $v_i : \mathrm{H}_i \to \mathrm{G}_i$ dont u, v proviennent par changement de base. Soit s_i l'image de s dans S_i et soit $\rho_i : \mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{G}_i \to \mathrm{G}_i$ le morphisme de S_i-préschémas défini par $\rho_i(h, g) = u_i(h)\, g\, u_i(h)^{-1}$. Alors, comme u_s est central, $\rho_s = \rho_i \times_{\kappa(s_i)} \kappa(s)$ égale la deuxième projection, il en est donc de même pour ρ_i (puisque $\kappa(s_i) \to \kappa(s)$ est fidèlement plat et quasi-compact), i.e. $(u_i)_{s_i}$ est central. De même, comme $u_s = v_s$ on a $(u_i)_{s_i} = (v_i)_{s_i}$. On peut alors appliquer a) à la situation sur S_i, d'où aussitôt la conclusion annoncée.

Corollaire 5.2. — *Soient* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini, *et* S localement noethérien *ou* G de présentation finie *sur* S. *Soit* $s \in \mathrm{S}$ *et supposons que* u_s *soit l'homomorphisme unité. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* u_U *soit l'homomorphisme unité.*

Corollaire 5.3. — *Soient* u, H, G, *comme dans* 5.2, *supposons de plus* G séparé *sur* S. *Soit* U *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* u_s *soit l'homomorphisme unité. Alors* U *est une partie* ouverte et fermée *de* S, *et* $u_\mathrm{U} : \mathrm{H_U} \to \mathrm{G_U}$ *est l'homomorphisme unité.* 60

[29]N.D.E. : Car K = H si $\mathrm{K}_{\widehat{\mathrm{S}}} = \mathrm{H}_{\widehat{\mathrm{S}}}$, cf. SGA 1, VIII 5.4 ; mais la suite n'utilise pas l'hypothèse « A complet ».

[30]N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Il reste à prouver seulement que U est fermé. Or soit $K = \mathrm{Ker}(u)$, comme G est séparé sur S, K est un sous-préschéma *fermé* de H, et U est l'ensemble des $s \in S$ tels que $K_s = H_s$. On voit alors facilement que U est fermé, par exemple comme application de VIII 6.4 (H étant essentiellement libre sur S d'après VIII 6.3), ou en notant qu'on peut supposer S réduit et U dense dans S, donc schématiquement dense dans S, ce qui implique H_U schématiquement dense dans H puisque H est plat sur S [31], et comme u et l'homomorphisme unité coincïdent sur H_U, ils coïncident sur H.

Corollaire 5.4. — *Soient* S *un préschéma,* H *et* G *deux* S*-groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini *et* G séparé et de présentation finie *sur* S, $\pi : S' \to S$ *un* [32] *épimorphisme effectif universel* (*par exemple, un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, ou un morphisme admettant une section, cf.* IV 1.12) à fibres géométriquement connexes. [33]

Soit $u' : H' \to G'$ *un homomorphisme* central *des* S′*-groupes déduits de* H, G *par le changement de base* $S' \to S$*. Alors, il existe un unique homomorphisme* $u : H \to G$ *de* S*-groupes tel que* $u \times_S S' = u'$*. Lorsque* S′/S *admet une section* g*, alors* u *est le morphisme déduit de* u' *par le changement de base* $g : S \to S'$*.*

Comme π est un épimorphisme effectif universel, il en est de même de $H' \to H$, d'où l'unicité de u, cf. le début de la preuve de 5.1 b). Si π admet une section g, alors $u' = \pi^*(u)$ entraîne $u = g^*\pi^*(u) = g^*(u')$.

Pour l'existence de u, on est ramené, d'après IV 2.3, à montrer que les deux homomorphismes $u''_1, u''_2 : H'' \to G''$ de S″-groupes déduits de u' par les deux changements de base $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : S'' = S' \times_S S' \to S'$, sont identiques. Or ils coïncident sur la diagonale de S″, de façon précise les images inverses de u''_1 et u''_2 par le morphisme diagonal $S' \to S''$ sont identiques (car égales à u'). [34] Comme u''_1 et u''_2 sont centraux, on peut appliquer 5.3 au morphisme $u''_1(u''_2)^{-1}$. Il existe donc une partie *ouverte et fermée* U
61 de S″, contenant la diagonale de S″, telle que u''_1 et u''_2 coïncident au-dessus de U.

Or les fibres de S′/S étant géométriquement connexes, il en est de même de celles de S″/S, qui sont donc a fortiori connexes, d'où résulte que U (contenant les diagonales des dites fibres) contient les dites fibres, donc est égal à S″, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 5.5. — *Soient* S *un préschéma,* K *un* S*-préschéma en groupes* localement de type fini [35] *et* à fibres connexes*,* H *un sous-groupe* de type multiplicatif et de type fini, invariant *dans* K*. Alors* H *est un sous-groupe* central *de* K*.*

---

(31) N.D.E. : et de présentation finie sur S, cf. EGA IV_3, 11.10.5 (ii) et 11.9.10 (ii)

(32) N.D.E. : On a remplacé « morphisme couvrant pour la topologie fidèlement plate et quasi-compacte » par « épimorphisme effectif universel », afin de pouvoir appliquer ceci au morphisme $K \to S$ de 5.5, et l'on a modifié en conséquence le début de la démonstration.

(33) N.D.E. : Ceci est le cas, par exemple, si $S = \mathrm{Spec}\, k$ et $S' = \mathrm{Spec}\, k'$, où k est un corps et k' une extension *radicielle* de k, cf. X, Prop. 1.4.

(34) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

(35) N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse « *localement de type fini* » pour être en accord avec la référence VI_A, 2.4. En fait, on peut montrer que sur un corps, *tout* schéma en groupes connexe est géométriquement connexe.

[36] Notons d'abord que $\pi : \mathrm{K} \to \mathrm{S}$ est à fibres géométriquement connexes, puisque pour un schéma en groupes localement de type fini sur un corps, connexe implique géométriquement connexe (cf. $\mathrm{VI_A}$ 2.4). On peut alors appliquer 5.4 en faisant $\mathrm{G} = \mathrm{H}$ et $\mathrm{S}' = \mathrm{K}$, à l'homomorphisme de K-groupes $u' : \mathrm{H_K} \to \mathrm{H_K}$ défini ensemblistement par $(h, k) \mapsto (khk^{-1}, k)$, qui est central puisque H est commutatif. L'image inverse de u' par la section unité $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{K}$ est l'homomorphisme identique de K, donc par 5.4 il en est de même de $\mathrm{H_K} \to \mathrm{H_K}$, donc H est central dans K.

Énonçons les variantes des résultats précédents pour des sous-groupes centraux de type multiplicatif. On obtient, en procédant comme pour les résultats précédents (et utilisant 3.2 bis) :

Théorème 5.1 bis. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes,* H_1 *et* H_2 *deux sous-préschémas en groupes* de type multiplicatif et de type fini*, avec* $(\mathrm{H}_1)_s$ central*. On suppose* S localement noethérien *ou* G de présentation finie *sur* S*. Alors pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $(\mathrm{H}_1)_s = (\mathrm{H}_2)_s$*, il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $\mathrm{H}_1|_\mathrm{U} = \mathrm{H}_2|_\mathrm{U}$*.*

Corollaire 5.3 bis. — *Sous les conditions précédentes, supposons de plus* G séparé *sur* S*. Soit* U *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $(\mathrm{H}_1)_s = (\mathrm{H}_2)_s$*. Alors* U *est une partie de* S ouverte et fermée*, et* $\mathrm{H}_1|_\mathrm{U} = \mathrm{H}_2|_\mathrm{U}$*.*

Corollaire 5.4 bis. — *Soient* S *un préschéma,* G *un préschéma en groupes* séparé et de présentation finie *sur* S*,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme* couvrant pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte*, et* à fibres géométriquement connexes*,* H' *un sous-groupe* de type multiplicatif et de type fini *de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}'$*.* **62**

Alors il existe un unique sous-groupe H *de* G *tel que* $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}'$*, et* H *est de type multiplicatif et de type fini sur* S*, d'après* 1.1 *et* 2.1 b)*. Si* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *admet une section* g*, alors* H *est l'image inverse du sous-groupe* H' *de* G' *par* $g : \mathrm{S} \to \mathrm{S}'$*.*

Théorème 5.6. — *Soient* S *un préschéma,* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini*,* G de présentation finie *sur* S*.*

a) *Supposons* G à fibres connexes*, et soit* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $u_s : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$ *soit un homomorphisme central. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que l'homomorphisme* $\mathrm{H}|_\mathrm{U} \to \mathrm{G}|_\mathrm{U}$ *induit par* u *soit central.*

b) *Supposons que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$ *soit central. Alors* u *est central.*

[37] Démontrons (a). En procédant exactement comme dans la preuve de 5.1 (b), on peut supposer S local de point fermé s, puis $\mathrm{H} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$ diagonalisable, puis qu'il existe une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de type fini A_i de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ et un morphisme $u_i : \mathrm{D}_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{M}) \to \mathrm{G}_i$ tel que u_{s_i} soit central (où s_i est l'image de s dans S_i) et dont u provienne par changement de base. Ceci nous ramène au cas où S est local noethérien, de point fermé s, et on doit alors prouver que u est central.

[36] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[37] N.D.E. : On a détaillé l'original dans la preuve de a).

Soit K le sous-préschéma $\mathrm{Ker}(v, w)$, où $v, w : \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{G}$ sont définis par

$$v(h, g) = g, \qquad w(h, g) = \mathrm{int}(u(h)) \cdot g = u(h)\, g\, u(h)^{-1}\,.$$

Alors K est un sous-G-groupe du G-groupe $\mathrm{H}_{\mathrm{G}} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$, on veut montrer qu'il est égal à H_{G} lui-même. En vertu de 4.9 on est ramené à prouver qu'il majore les ${}_m(\mathrm{H}_{\mathrm{G}}) = ({}_m\mathrm{H}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ pour tout entier $m > 0$, ce qui nous ramène au cas où $\mathrm{H} = {}_m\mathrm{H}$
63 donc H *fini* sur S.

Soit e l'élément unité de la fibre G_s, alors $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{G},e})$ est un schéma local *noethérien* (G étant de présentation finie sur S noethérien) ; posons $\mathrm{S}'_n = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$, où $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$. Alors $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{K} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}'$ est un sous-préschéma de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et, d'après 3.9, on a $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'_n} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}'_n}$ pour tout n. [38] Comme $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est *fini* sur S′, on conclut de 5.0 (appliqué à l'anneau local noethérien B) que $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$.

D'autre part, comme $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ est noethérien (étant de présentation finie sur S noethérien), l'immersion $\mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ est de type fini (cf. EGA I, 6.3.5), de sorte que K est de type fini, donc de présentation finie sur G. Alors l'égalité $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}'$ entraîne, d'après EGA IV_3, 8.8.2.4, qu'il existe un voisinage ouvert W de e dans G tel que $\mathrm{K} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{W} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{W} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}$. Donc K majore le voisinage ouvert $\mathrm{V} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}$ de la section unité de G_{H} sur H.

Pour tout $t \in \mathrm{H}$, la fibre G_t (étant un $\kappa(t)$-groupe algébrique) est de Cohen-Macaulay (VI_{A}, 1.1.1) donc sans composantes immergées, comme elle est de plus connexe, donc irréductible (VI_{A}, 2.4), elle a pour unique point associé son point générique. Donc, d'après EGA IV_2, 3.1.8, l'ouvert V_t est schématiquement dense dans G_t. En vertu de 4.3, V est donc schématiquement dense dans G_{H}. De plus, comme K est un sous-H-groupe de G_{H}, il induit sur chaque fibre G_h un sous-groupe K_h, et comme ce dernier majore un voisinage ouvert de l'élément neutre et que G_h est connexe, il s'ensuit que $\mathrm{K}_h = \mathrm{G}_h$ d'où $\mathrm{K} = \mathrm{G}_{\mathrm{H}}$ ensemblistement. Ainsi, K est un sous-préschéma *fermé* de G_{H} qui majore le sous-préschéma schématiquement dense V, donc $\mathrm{K} = \mathrm{G}_{\mathrm{H}}$, ce qui prouve a).

Enfin, b) est une conséquence directe de 3.9, compte tenu que pour vérifier qu'un sous-préschéma K de $\mathrm{P} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est identique à P, il suffit de vérifier que pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, où S′ est un quotient artinien d'un anneau local de S, on a $\mathrm{K}' = \mathrm{P}'$.

6. Monomorphismes des groupes de type multiplicatif, et factorisation canonique d'un homomorphisme d'un tel groupe

Lemme 6.1. — *Soient* S *un préschéma* quasi-compact*,* G *un* S*-préschéma en groupes* commutatif, de présentation finie et quasi-fini *sur* S*. Alors il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}} = 0$*, i.e.* $\mathrm{G} = {}_n\mathrm{G}$.

64 Si S est le spectre d'un corps k, alors G est fini sur k, et d'après $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 8.5, il suffit

[38] N.D.E. : On a détaillé et corrigé l'original, en remplaçant « section unité de $(\mathrm{G}_{\mathrm{H}})_n$ sur H_n » par $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'_n}$.

de prendre $n = \deg(\mathrm{G}/k)$. Supposons maintenant $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ local artinien, soient k le corps résiduel de A, $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} k$, et $n_0 = \deg(\mathrm{G}_0/k)$. Distinguons deux cas.

a) k est de caractéristique nulle. Alors G_0 est séparable sur k, donc G est non ramifié sur S. Alors la section unité de G est une immersion ouverte, donc ${}_n\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ est un sous-schéma ouvert de G, donc pour qu'il soit égal à G, il suffit qu'il le soit ensemblistement, on peut donc alors prendre $n = n_0$.

b) k est de caractéristique $p > 0$. Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et $\mathrm{S}_r = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{r+1})$ pour tout r. Soit m un entier tel que $\mathfrak{m}^{m+1} = 0$, je dis qu'on peut prendre $n = p^m n_0$. En effet, procédant par récurrence sur m, et posant $n' = p^{m-1}n_0$, on peut supposer que $n' \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ induit dans $\mathrm{G}_{m-1} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{m-1}$ l'endomorphisme nul.

(39) Notons E l'ensemble des endomorphismes u de G qui ont cette propriété et K le noyau du morphisme de foncteurs en groupes $\mathrm{G} \to \prod_{\mathrm{S}_{m-1}/\mathrm{S}} \mathrm{G}$ (cf. III 0.1.2). Alors E s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{K})$; en particulier la loi de groupe abélien sur E est induite par celle de K. Or, d'après III 0.9, K est le S-foncteur en groupes qui à tout $g : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ associe le k-espace vectoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{G}_0/\mathrm{S}_0}), \mathfrak{m}^m \mathscr{O}_{\mathrm{T}})\,;$$

on a donc $pu = 0$ pour tout $u \in \mathrm{E}$. Donc on a $pn' \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}} = 0$, i.e. $p^m n_0 \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}} = 0$.

Supposons maintenant S noethérien (on s'y ramène dans 6.1 par la réduction habituelle au cas noethérien (40)). Il suffit alors de conjuguer ce qui précède et le

Lemme 6.2. — *Soient* X *un préschéma* quasi-fini *au-dessus de* S noethérien*, et considérons une famille filtrante croissante de sous-préschémas* $(\mathrm{X}^i)_{i\in \mathrm{I}}$*, ayant la propriété suivante :*

$$\begin{cases} \textit{pour tout } s \in \mathrm{S} \textit{ et } n \geqslant 0, \textit{ posant } \mathrm{S}_{s,n} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}/\mathfrak{m}^{n+1}), \textit{ il existe un } i \in \mathrm{I} \\ \textit{tel que } \mathrm{X}^i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{s,n} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{s,n}. \end{cases}$$

Sous ces conditions, il existe un $i \in \mathrm{I}$*, tel que* $\mathrm{X}^i = \mathrm{X}$.

Comme S est noethérien, il existe un ouvert U *maximal* tel que l'on ait $\mathrm{X}|_{\mathrm{U}} = \mathrm{X}^i|_{\mathrm{U}}$ **65**
pour i grand, on va montrer que $\mathrm{U} = \mathrm{S}$. En d'autres termes, on va montrer que si $\mathrm{U} \neq \mathrm{S}$, on peut trouver un U' strictement plus grand que U, et un i tel que $\mathrm{X}|_{\mathrm{U}'} = \mathrm{X}^i|_{\mathrm{U}'}$. Localisant en un point maximal s de $\mathrm{S} - \mathrm{U}$, on est ramené au cas où S est local de point fermé s, et $\mathrm{U} = \mathrm{S} - \{s\}$. (En effet, si l'on note $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$ et s'il existe i tel que $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' = \mathrm{X}^i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ alors, (41) il existe un voisinage ouvert V de

(39) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, en précisant les résultats de l'Exp. III qu'on utilise.

(40) N.D.E. : Comme S est *quasi-compact*, il est recouvert par un nombre *fini* d'ouverts affines, donc on est ramené au cas où $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Alors, comme G est de présentation finie sur S, on peut appliquer EGA IV_3, 8.8.2.

(41) N.D.E. : On a corrigé plus haut $\mathrm{X} - \{s\}$ en $\mathrm{S} - \{s\}$. D'autre part, on rappelle qu'un morphisme quasi-fini est supposé *de type fini*, cf. EGA II, 6.2.3 (et EGA III_2, $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 20 pour la définition de « localement quasi-fini »). Donc ici (S étant noethérien), X est de présentation finie sur S, chaque immersion $\mathrm{X}^i \hookrightarrow \mathrm{X}$ est de type fini (d'après EGA I, 6.3.5), donc X^i est de présentation finie sur S, et l'on peut appliquer EGA IV_3, 8.8.2.

s tel que $X|_V = X^i|_V$, donc en prenant i assez grand pour que $X^i|_U = X|_U$, on aura $X|_W = X^i|_W$, où $W = U \cup V$).

Alors, pour i grand, comme $X|_U = X^i|_U$ on voit que X^i est un sous-préschéma fermé de X défini par un idéal $\mathscr{I}^{(i)}$ de support contenu dans $X_s = X_0 = X \times_S S_0$ (où $S_n = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}^{n+1})$, $S = \mathrm{Spec}(A)$). Comme X_0 est quasi-fini sur S_0, X_0 est une partie fermée finie de X noethérien, donc $\mathscr{I}^{(i)}$ est un module de *longueur finie*. Il s'ensuit qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{I}^{(i)} \cap \mathfrak{m}^{n+1}\mathscr{O}_X = 0$. D'autre part, en vertu de l'hypothèse dans 6.2, on peut supposer (à condition d'augmenter i) que l'image de $\mathscr{I}^{(i)}$ dans $\mathscr{O}_{X_n} = \mathscr{O}_X/\mathfrak{m}^{n+1}\mathscr{O}_X$ est nulle. Cela implique $\mathscr{I}^{(i)} = 0$ donc $X^i = X$. C.Q.F.D.

Lemme 6.3. — *Soient* S *un préschéma,* K *un préschéma en groupes sur* S*,* localement de présentation finie*,* $s \in S$ *tel que* K_s *soit quasi-fini* (*resp. non ramifié*) *sur* $\kappa(s)$ *en l'élément unité. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $K|_U$ *soit localement quasi-fini* (*resp. non ramifié*) *sur* U. [(*)]

Soit en effet V l'ensemble des points x de K tels que, notant t l'image de x dans S, la fibre K_t soit quasi-finie (resp. non ramifiée) sur $\kappa(t)$ en x, i.e. tel que x soit isolé dans K_t (resp. et son anneau local dans K_t une extension séparable de $\kappa(t)$). On sait que V est ouvert puisque K est localement de présentation finie sur S, [(42)] donc si ε désigne la section unité de K, $\varepsilon^{-1}(V)$ est ouvert. Par hypothèse il contient s, donc c'est un voisinage ouvert U de s. Ce dernier fait l'affaire, en d'autres termes $t \in U$ implique que K_t est localement quasi-fini (resp. non ramifié) sur $\kappa(t)$: en effet,
66 comme K_t est un groupe localement de type fini sur $\kappa(t)$, cela résulte du fait qu'il est quasi-fini (resp. non ramifié) sur $\kappa(t)$ au point $\varepsilon(t)$, cf. VI_B 1.3.

Combinant 6.1 et 6.3, on trouve le

Théorème 6.4. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-groupe* de type multiplicatif et de type fini*,* K *un sous-préschéma en groupes* fermé, de présentation finie *sur* S. *Soit* $s \in S$ *tel que* K_s *soit* fini.

Alors il existe un voisinage ouvert U *de* s *tel que* $K|_U$ *soit contenu dans* ${}_nH|_U$ *pour un certain* n, *et a fortiori* (${}_nH$ *étant fini sur* S) *tel que* $K|_U$ *soit fini sur* U.

Utilisant le lemme de Nakayama, on en déduit :

Corollaire 6.5. — *Avec les notations précédentes, supposons que* K_s *soit le groupe unité. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $K|_U$ *soit le groupe unité.*

Corollaire 6.6. — *Soit* $u : H \to G$ *un homomorphisme de* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini*, et* G séparé *sur* S. *On suppose de plus* S localement noethérien*, ou* G localement de présentation finie [(43)] *sur* S.

[(*)]cf. VI_B 2.5 (ii) pour un énoncé plus général.

[(42)]N.D.E. : cf. EGA IV_3, 13.1.4, et EGA IV_4, 17.4.1. Par ailleurs, on a noté t (au lieu de s) l'image de x.

Soit $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $u_s : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$ *soit un monomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* u *induise un monomorphisme* $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$.

Soit en effet $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$, l'hypothèse sur u_s signifie que K_s est le groupe unité, la conclusion que $\mathrm{K}|_{\mathrm{U}}$ est le groupe unité, pour U convenable. Or G étant séparé sur S, K est un sous-groupe *fermé* de H, et dans le cas où on ne suppose pas S localement noethérien mais en revanche G localement de présentation finie sur S, K est localement de présentation finie sur S [43], donc de présentation finie sur S puisqu'il est séparé sur S (H l'étant) et quasi-compact sur S (étant fermé dans H qui est quasi-compact sur S). On peut donc appliquer 6.5, d'où 6.6.

Remarque 6.6.1. — [44] Sous les hypothèses de 6.6, on notera que lorsque de plus G est affine sur S (resp. de présentation finie sur S), $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$ est même une *immersion fermée*, comme on l'a signalé dans 2.5 (resp. 2.6).

Corollaire 6.7. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini *; on suppose* S localement noethérien *ou* G localement de présentation finie *sur* S. 67

Si tous les homomorphismes induits sur les fibres $u_s : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$ *sont des monomorphismes, alors* u *est un monomorphisme.*

Le raisonnement est le même que dans 6.6, l'hypothèse que G soit séparé sur S étant ici inutile pour assurer que K est fermé dans H, puisque l'hypothèse que les u_s sont des monomorphismes implique que K est réduit ensemblistement à la section unité de G.

Théorème 6.8. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini*, et* G séparé *sur* S. *On suppose de plus* S localement noethérien *ou* G de présentation finie *sur* S.

Alors $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$ *est un sous-groupe* de type multiplicatif et de type fini *de* H*, et* u *se factorise en*

$$\mathrm{H} \xrightarrow{u'} \mathrm{H}/\mathrm{K} \xrightarrow{u''} \mathrm{G},$$

où H/K *est* de type multiplicatif et de type fini*,* u' *est l'homomorphisme canonique et est* fidèlement plat (*et affine*)*, et* u'' *est un* monomorphisme.

(N.B. Comme remarqué en 6.6.1, u'' est une immersion fermée si G est affine sur S ou de présentation finie sur S). Il suffit de prouver que K est de type multiplicatif, le reste de la proposition résultant alors de 2.7 et IV 5.2.6.

Supposons d'abord G de présentation finie sur S. Cette hypothèse étant stable par changement de base, on est ramené pour prouver que K est de type multiplicatif, au cas où H est diagonalisable, i.e. $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, où M est un groupe commutatif de type fini. Soit $s \in \mathrm{S}$, alors K_s est un sous-groupe fermé de $\mathrm{H}_s = \mathrm{D}_{\kappa(s)}(\mathrm{M})$, donc

[43] N.D.E. : Il suffit en fait de supposer G *localement de type fini* sur S ; d'après EGA IV_4, 1.4.3 (v), ceci entraîne ($\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ étant de présentation finie) que $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est localement de présentation finie, donc aussi $\mathrm{K} \to \mathrm{S}$ qui s'en déduit par changement de base.

[44] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 6.6.1, pour des références ultérieures.

en vertu de 8.1 [45] est de la forme $D_\kappa(s)(N)$, où N est un groupe quotient de M. Posons $K' = D_S(N)$, alors K′ est un sous-groupe de type multiplicatif de H, soit
68 $v' : K' \to G$ induit par u. [46] Alors v'_s est l'homomorphisme unité par construction, donc en vertu de 5.2 il existe un voisinage ouvert U de s tel que $v'|_U : K'|_U \to G|_U$ soit l'homomorphisme unité. Donc quitte à remplacer S par U, on peut supposer que v' est l'homomorphisme unité, donc que u se factorise en

$$H \xrightarrow{u'} H/K' \xrightarrow{u''} G.$$

Or, puisque u''_s est déduit de u_s en factorisant à travers $H_s \to H_s/\operatorname{Ker}(u_s)$, alors u''_s est un monomorphisme (IV 5.2.6), donc en vertu de 6.6 il existe un voisinage ouvert U de s tel que $u''|_U : (H/K')|_U \to G|_U$ soit un monomorphisme. Donc quitte à restreindre S, on voit que u'' est un monomorphisme, donc $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u') = K'$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} u$ est de type multiplicatif.

La même démonstration est valable si, au lieu de supposer G de présentation finie sur S, on suppose S localement noethérien, du moins dans le cas où H est diagonalisable. Dans le cas où on ne fait pas cette hypothèse sur H, il faut montrer que l'on peut trouver un changement de base couvrant $S' \to S$, avec S′ *localement noethérien*, qui trivialise H. C'est ce qu'on verra en effet dans l'exposé suivant (X 4.6).

7. Algébricité des homomorphismes formels dans un groupe affine

Théorème 7.1. — *Soient* A *un anneau* noethérien*, muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I*-adique,* $S = \operatorname{Spec}(A)$*,* $S_n = \operatorname{Spec}(A/I^{n+1})$*,* H*,* G *des* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif isotrivial*, et* G affine.

Alors l'application canonique

$$(\mathrm{x}) \qquad \theta : \quad \operatorname{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, G) \longrightarrow \varprojlim_n \operatorname{Hom}_{S_n\text{-gr.}}(H_n, G_n)$$

est bijective *(où* H_n*,* G_n *sont les* S_n*-groupes déduits de* H*,* G *par le changement de base* $S_n \to S$*).*

69 Supposons d'abord H diagonalisable, donc de la forme

$$H = \operatorname{Spec} A(M)\,,$$

où $B = A(M)$ est l'algèbre du groupe commutatif M à coefficients dans A. On a aussi $G = \operatorname{Spec}(C)$, où C est une A-algèbre munie d'une application diagonale (satisfaisant aux axiomes connus). Alors les homomorphismes de S-groupes $H \to G$ correspondent bijectivement aux homomorphismes de A-algèbres $\varphi : C \to B$ compatibles avec les applications diagonales, i.e. tels que, pour tout $f \in C$,

$$\Delta_H(\varphi(f)) = (\varphi \otimes \varphi)(\Delta_G(f))$$

[45] N.D.E. : On a corrigé la référence erronée à IV 4.7.5. Noter que le n°8 du présent exposé est indépendant des n^{os} 2 à 7.
[46] N.D.E. : On a corrigé « induit par G » en « induit par u ».

où Δ_{H} et Δ_{G} sont les applications diagonales. On a une description analogue pour les homomorphismes de S_n-groupes $\mathrm{H}_n \to \mathrm{G}_n$, définis par certains homomorphismes de A_n-algèbres $\varphi_n : \mathrm{C}_n \to \mathrm{B}_n$ (où on pose $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}/\mathrm{I}^{n+1}$, $\mathrm{B}_n = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_n$, $\mathrm{C} = \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_n$). Posons

$$\widehat{\mathrm{B}} = \varprojlim_n \mathrm{B}_n \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathrm{C}} = \varprojlim_n \mathrm{C}_n\,,$$

alors $\widehat{\mathrm{B}} = \varprojlim_n \mathrm{A}_n(\mathrm{M})$ s'identifie à un sous-module du produit A^{M} (à savoir celui formé des familles $(a_m)_{m\in\mathrm{M}}$ d'éléments de A qui tendent vers 0 (pour la topologie I-adique) suivant le filtre des complémentaires des parties finies de M). Ceci implique déjà que l'homomorphisme canonique $\mathrm{B} \to \widehat{\mathrm{B}}$ est injectif, [47] puisque le système projectif $\theta(\varphi) = (\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ définit un homorphisme $\widehat{\varphi} = \widehat{\mathrm{C}} \to \widehat{\mathrm{B}}$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathrm{B} \arrow[d] \\ \widehat{\mathrm{C}} \arrow[r, "\widehat{\phi}"] & \widehat{\mathrm{B}} \end{tikzcd} \quad .$$

Prouvons que θ est surjectif : prenons un système projectif $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ et prouvons qu'il provient par réduction d'un φ du premier membre. A priori, (φ_n) définit un homomorphisme sur les algèbres complétées

$$\widehat{\varphi} : \widehat{\mathrm{C}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{B}}\,,$$

et tout revient à voir que son composé $\Phi : \mathrm{C} \to \widehat{\mathrm{C}} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{\mathrm{B}}$ avec l'homomorphisme
canonique $\mathrm{C} \to \widehat{\mathrm{C}}$ applique C dans B. En effet, s'il en est ainsi, on trouve un homo- 70
morphisme de A-algèbres $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$, se réduisant suivant les φ_n, d'où on conclut aussitôt qu'il est compatible avec les applications diagonales (puisque les φ_n le sont, et que $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \to \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}} \mathrm{B}$ est injectif, comme on voit comme ci-dessus en remplaçant M par $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$).

Notons que l'homomorphisme diagonal Δ_{H} de H définit en passant aux complétés un homomorphisme

$$\widehat{\Delta}_{\mathrm{H}} : \widehat{\mathrm{B}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}}\,,$$

et on a un diagramme commutatif (déduit par passage à la limite projective des diagrammes analogues définis par les φ_n) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{G}}"'] & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{H}}"] \\ \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \arrow[r, "\Psi"] & \widehat{\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}} \end{tikzcd} \quad ,$$

où Ψ est le composé

$$\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \xrightarrow{\Phi\otimes\Phi} \widehat{\mathrm{B}} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{B}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}}$$

[47] N.D.E. : On détaillé ce qui suit.

(la dernière flèche est l'homomorphisme canonique évident). Il s'ensuit que pour tout $f \in \mathrm{C}$, $\Phi(f)$ est un élément de $\widehat{\mathrm{B}}$ dont l'image par $\widehat{\Delta}_{\mathrm{H}}$ est un élément « décomposable » de $\widehat{\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}}$, i.e. est dans l'image de $\widehat{\mathrm{B}} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{B}}$.

Notons $(e_m)_{m\in \mathrm{M}}$ la base canonique de $\mathrm{A}(\mathrm{M})$ et $(e_{m,m'})$ celle de $\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}) = \mathrm{A}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}(\mathrm{M})$. Comme $\Delta_{\mathrm{H}}(e_m) = e_m \otimes e_m = e_{m,m}$ pour tout m, il suffit maintenant d'appliquer le

Lemme 7.2. — *Soient* A *un anneau* noethérien, M *un ensemble,* $(a_{m,m'})$ *une famille d'éléments de* A *indexée par* $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$, *telle que*

(i) $a_{m,m'} = 0$ *si* $m \neq m'$ (*i.e. le support de la famille est contenu dans la diagonale de* $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$),

71 (ii) *On a*

$$a_{m,m'} = \sum_i b^i_m c^i_{m'}$$

où les b^i, c^i *sont des éléments de* A^{M} *en nombre fini* (*i.e.* $(a_{m,m'})$ *appartient à l'image de l'homomorphisme canonique* $\mathrm{A}^{\mathrm{M}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{\mathrm{M}} \to \mathrm{A}^{\mathrm{M}\times\mathrm{M}}$).

Sous ces conditions, le support de la famille $(a_{m,m'})$ *est* fini.

En vertu de (i), la famille $(a_{m,m'})$ est déterminée par la connaissance des $a_m = a_{m,m}$. Posons pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathrm{M}} \in \mathrm{A}^{(\mathrm{M})}$:

$$(u \cdot x)_m = \sum_{m'} a_{m,m'}\, x_{m'}\,,$$

i.e. interprétons $(a_{m,m'})$ comme la matrice d'un homomorphisme $u : \mathrm{A}^{(\mathrm{M})} \to \mathrm{A}^{\mathrm{M}}$. Alors en vertu de (i) on a simplement

$$(u \cdot x)_m = a_m x_m\,.$$

D'autre part, en vertu de (ii) on a

$$u \cdot x \in \sum_i \mathrm{A} \cdot b^i,$$

donc $u(\mathrm{A}^{(\mathrm{M})})$ reste dans un A-module de type fini. Par suite, désignant par $(e^m)_{m\in\mathrm{M}}$ la base canonique de $\mathrm{A}^{(\mathrm{M})} \subset \mathrm{A}^{\mathrm{M}}$, les $a_m e^m$ restent dans un A-module de type fini. Comme A est noethérien, le module qu'ils engendrent est lui-même de type fini, ce qui implique (puisque les e^m sont linéairement indépendants) que tous les a_m sauf un nombre fini sont nuls. Cela prouve 7.2 et par suite 7.1 dans le cas où H est diagonalisable.

Prouvons maintenant le cas général de 7.1, où on suppose seulement H isotrivial,
72 i.e. qu'il existe un morphisme fini étale surjectif $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ tel que $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit diagonalisable. Nous utiliserons seulement le fait que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est fini et couvrant (pour la topologie fidèlement plate et quasi compacte, ou simplement pour la topologie canonique de (**Sch**)) – ainsi l'hypothèse « étale » pourrait être remplacée par « plat ».

Soit $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, introduisons de même S'_n et $\mathrm{S}''_n = \mathrm{S}'' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n = \mathrm{S}'_n \times_{\mathrm{S}_n} \mathrm{S}'_n$, et H', G', H'', G'', H'_n, G'_n, H''_n, G''_n déduits de H et G par les changements de base qu'on devine. Noter que H' et H'' sont maintenant diagonalisables. Noter aussi que S' donc S'' est affine, et que si $S' = \mathrm{Spec}(A')$, $S'' = \mathrm{Spec}(A'')$, alors A' et A'' sont séparés et complets pour la topologie définie par IA' resp. par IA'' (puisque A' et A'' sont finis sur A). Comme $S' \to S$ et $S'_n \to S_n$ sont couvrants, on obtient un diagramme commutatif d'applications d'ensembles dont les deux lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G}) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr}}(\mathrm{H}', \mathrm{G}') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "u'"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''\text{-gr}}(\mathrm{H}'', \mathrm{G}'') \arrow[d, "u''"] \\
\varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_n\text{-gr}}(\mathrm{H}_n, \mathrm{G}_n) \arrow[r] & \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'_n\text{-gr}}(\mathrm{H}'_n, \mathrm{G}'_n) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''_n\text{-gr}}(\mathrm{H}''_n, \mathrm{G}''_n).
\end{tikzcd}$$

(N. B. la deuxième ligne est exacte comme limite projective de diagrammes exacts, relatifs aux divers $S'_n \to S_n$). D'après ce qu'on a déjà prouvé (cas diagonalisable), u' et u'' sont bijectifs. Il en est donc de même de u, ce qui achève la démonstration de 7.1.

Corollaire 7.3. — *Sous les conditions de* 7.1, *supposons de plus* G lisse *sur* S, *et soit* $u_0 : H_0 \to G_0$ *un homomorphisme de* S_0*-groupes. Alors il existe un homomorphisme de* S*-groupes* $u : H \to G$ *qui relève* u_0*. Deux tels relèvements* u, u' *sont conjugués par un élément* g *de* G(S) *se réduisant suivant l'élément unité de* $G_0(S_0)$.

Résulte de la conjonction de 3.6 et de 7.1. Pour construire un u, on construit de proche en proche des u_n, ce qui est possible par 3.6, et en vertu de 7.1 le système (u_n) provient d'un u. Étant donné deux relèvements u et u', pour construire g tel **73**
que $u' = \mathrm{int}(g)u$, $g_0 = 1$, on construit de proche en proche des g_n, tels que $g_0 = 1$, g_n se déduit de g_{n+1} par réduction, $u'_n = \mathrm{int}(g_n)u_n$; cela est possible grâce à 3.6. Comme A est séparé et complet, les g_n proviennent d'un $g \in G(S)$ et pour prouver que $u' = \mathrm{int}(g)u$, il suffit d'utiliser *l'injectivité* dans l'assertion 7.1.

Remarque 7.4. — On comparera 7.1 avec EGA III 5.4.1, qui implique que l'énoncé 7.1 est valable si, au lieu de supposer H de type multiplicatif et G affine, on suppose H propre sur S, et G séparé et localement de type fini sur S. Le fait d'avoir un énoncé comme 7.1 *sans hypothèse de propreté* est assez exceptionnel, et doit ici être interprété comme un des aspects de la grande « *rigidité* » de la structure d'un groupe de type multiplicatif. L'énoncé analogue avec $G = H = \mathbb{G}_a$ (groupe additif) est faux en général, comme on voit en prenant A de caractéristique $p > 0$, et définissant les u_n par réduction mod I^{n+1} à partir d'une série formelle additive

$$u(T) = \sum_{n \geqslant 0} a_n T^{p^n},$$

où les a_n sont des éléments de A qui tendent vers 0 pour la topologie I-adique, mais non pour la topologie discrète. L'énoncé 7.1 devient faux également si on y supprime l'hypothèse G affine, même pour $H = \mathbb{G}_m$ (groupe multiplicatif) ; on en voit un exemple (avec A anneau de valuation discrète complet) en partant d'une courbe elliptique sur le corps des fractions K de A, qui se réduit (dans la théorie de réduction de Néron-Kodaira, disons) suivant le groupe $\mathbb{G}_m$ sur le corps résiduel k : [48] on aura donc un schéma en groupes commutatif lisse G sur S, dont la fibre spéciale est $\mathbb{G}_{m,k}$ (ce qui permet grâce à 3.6 de définir un système projectif d'isomorphismes $u_n : \mathrm{H}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}_n$, où $\mathrm{H} = \mathbb{G}_{m,\mathrm{A}}$), mais dont la fibre générique est une variété abélienne, de sorte qu'il n'existe d'autre homomorphisme de S-groupes $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ que 0.

8. Sous-groupes, groupes quotients et extensions de groupes de type multiplicatif sur un corps [*]

Scholie 8.0. — [49] Soient k un corps, H un k-schéma en groupes *affine*. On note $k[\mathrm{H}]$ son algèbre affine et $\mathrm{X(H)} = \mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{H}, \mathbb{G}_{m,k})$ le groupe des caractères de H. D'après le lemme d'indépendance des caractères, X(H) est une partie *libre* de $k[\mathrm{H}]$. Il en résulte que H est diagonalisable si et seulement si X(H) engendre $k[\mathrm{H}]$ comme k-espace vectoriel.

74 ***Proposition 8.1***. — *Soit* G *un schéma en groupes diagonalisable* (*resp. de type multiplicatif*) *sur un corps k* [50]. *Alors pour tout sous-schéma en groupes* H *de* G*,* H *et* G/H *sont diagonalisables* (*resp. de type multiplicatif*).

La définition 1.1 nous ramène aussitôt au cas non respé. Un passage à la limite facile, utilisant $\mathrm{VI_B}$ 11.13 et VIII 3.1, nous ramène au cas où G est de type fini sur k [51]. En vertu de $\mathrm{VI_B}$ 11.16, [52] on peut trouver une famille finie d'éléments non nuls

$$f_i = \sum a_{im}\, m \quad , \quad a_{im} \in k \tag{8.1.1}$$

de l'anneau affine $k(\mathrm{M})$ de $\mathrm{G} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, telle que les points de H (à valeurs dans une k-algèbre arbitraire k') sont les points $g \in \mathrm{G}(k')$ tels que l'on ait

$$\tau_g f_i = \lambda_i(g)\, f_i, \quad \text{avec} \quad \lambda_i(g) \in k', \tag{8.1.2}$$

où τ_g désigne la translation par g. Or on a

$$\tau_g f_i = \sum a_{im}\, \chi_m(g)\, m\,, \tag{8.1.3}$$

[*] Rajouté en Juillet 1969. Ce numéro-remords est indépendant des n^{os} 3 à 7.

[48] N.D.E. : On pourrait expliciter un tel exemple ...

[49] N.D.E. : On a ajouté ce scholie.

[50] N.D.E. : On a ajouté : « *sur un corps k* », implicite dans l'original ; d'autre part, on a remplacé « groupe algébrique » par « schéma en groupes », puisque G n'est pas supposé de type fini.

[51] N.D.E. : Détailler ce « passage à la limite » : ceci utilise 8.0 et aussi l'égalité $\mathrm{G/H} = \varprojlim_i \mathrm{G}_i/\mathrm{H}_i$, cf. $\mathrm{VI_B}$, preuve de 11.17. Pour voir que $\mathrm{H} = \varprojlim_i (\mathrm{H} \cap \mathrm{G}_i)$, utilise-t-on le fait que H est *fermé* dans G ? En utilisant ceci, on peut donner une démonstration directe ...

[52] N.D.E. : Il faudrait sans doute récrire $\mathrm{VI_B}$ 11.16 sous la forme usuelle, plus agréable. En particulier, il suffit ci-dessous d'un seul f_i ...

$\chi_m : \mathrm{G} \to \mathbb{G}_{m,k}$ étant le caractère associé à m, de sorte que (8.1.2) équivaut à la relation

$$\chi_m(g) = \chi_{m'}(g) \quad \text{si} \quad m, m' \in \mathrm{Z}_i\,, \tag{8.1.4}$$

Z_i désignant l'ensemble des $m \in \mathrm{M}$ tels que $a_{im} \neq 0$. Cette relation peut aussi s'écrire **75**

$$\chi_{m'-m}(g) = 1 \quad \text{si} \quad m, m' \in \mathrm{Z}_i\,.$$

Désignant par N le sous-groupe de M engendré par tous les $m' - m$ (i variable, et m, $m' \in \mathrm{Z}_i$), on déduit de la définition de $\mathrm{D}_k(\mathrm{M})$ ($\simeq$ G) que H s'identifie à $\mathrm{D}_k(\mathrm{M}/\mathrm{N})$. Il résulte alors de VIII 3.1 que G/H s'identifie à $\mathrm{D}_k(\mathrm{N})$. C.Q.F.D.

Proposition 8.2. — [53] *Soient k un corps,* H, K *des k-schémas en groupes* de type multiplicatif et de type fini, *et* G *un k-schéma en groupes tel que l'on ait une suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow 1$$

(*ce qui entraîne que* G *est* de type fini *sur k*).

(i) *Si on suppose* G commutatif *ou* K connexe*, alors* G *est de type multiplicatif.*

(ii) *Si* K *et* H *sont* diagonalisables, K *étant un* tore*, alors* G *est diagonalisable.*

Pour la démonstration de (i), le lecteur se reportera à XVII 7.1.1, dont 8.2 (i) est un cas particulier ; le cas d'un corps est traité dans la partie (i) de la démonstration de XVII 7.1.1 (n'utilisant pas les résultats des exposés suivants).

(ii) Supposons maintenant K et H diagonalisables :

$$\mathrm{K} \simeq \mathrm{D}_k(\mathrm{M}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H} \simeq \mathrm{D}_k(\mathrm{N}),$$

[53] et supposons G de type multiplicatif (ce qui est le cas d'après (i) si K est un tore). Alors, d'après X 1.4, G est isotrivial sur k, i.e. il existe une extension finie séparable k'/k telle que $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_k k'$ soit diagonalisable, donc $\mathrm{G}' = \mathrm{D}_{k'}(\mathrm{E})$, pour un groupe commutatif E, et l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{D}_{k'}(\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{D}_{k'}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathrm{D}_{k'}(\mathrm{M}) \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Donc, d'après VIII, 3.1 et 3.2, M est un sous-groupe de E et l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Pour une extension E_0 de N par M *donnée*, considérons le k-groupe diagonalisable $\mathrm{G}_0 = \mathrm{D}_k(\mathrm{E}_0)$; alors le k-foncteur en groupes A des automorphismes de l'extension

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}_0 \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow 1 \tag{3}$$

i.e. le sous-foncteur en groupes de $\underline{\mathrm{Aut}}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{G}_0)$ dont les points sur un k-préschéma T sont les $\phi \in \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{T}\text{-gr.}}(\mathrm{G}_\mathrm{T})$ induisant l'identité sur H_T et sur K_T, s'identifie à $\underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{K}, \mathrm{H})$, qui est, d'après VIII 1.5, le k-groupe constant de valeur $\mathrm{L} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$.

On voit donc que la classification des extensions G de K par H, qui sur une clôture séparable k_s de k deviennent isomorphes à l'extension (3), est la même que celle des

[53] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé, ainsi que sa démonstration.

k-torseurs pour la topologie étale sous le groupe constant L_k. Notant $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, ceux-ci sont classifiés par le groupe de cohomologie galoisienne (L étant un Γ-module trivial) :

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(k, \mathrm{L}_k) = \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{L}) = \mathrm{Hom}_{\text{gr. top.}}(\Gamma, \mathrm{L}).$$

76 Si de plus K est un tore, M est sans torsion, donc L aussi, d'où $\mathrm{Hom}_{\text{gr. top.}}(\Gamma, \mathrm{L}) = 0$; il en résulte que toute extension de K par H est déjà diagonalisable.

Remarque 8.3. — Comme on l'a déjà signalé dans la démonstration de 8.2, la première assertion est énoncée et prouvée sur une base quelconque dans XVII 7.1.1. D'autre part, la deuxième assertion se généralise, avec essentiellement la même démonstration, au cas d'un schéma de base intègre normal (ou plus généralement, géométriquement unibranche), en utilisant X 5.13 plus bas.

Enfin, on peut aussi considérer 8.1 comme un corollaire du résultat (nettement moins trivial) 6.8, également valable sur un schéma de base arbitraire. (54)

Bibliographie

(55)

[BEns] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I-IV, Hermann, 1970.

(54) N.D.E. : Noter toutefois que la démonstration de 6.8 utilise 8.1 !
(55) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé