EXPOSÉ VIII

GROUPES DIAGONALISABLES

par A. Grothendieck

1. Bidualité

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, que nous identifions comme d'habitude à une sous-catégorie 1
pleine de $\widehat{\mathscr{C}} = \mathbf{Hom}(\mathscr{C}, (\mathbf{Ens}))$ (cf. Exp. I). Soit I un foncteur-groupe commutatif, i.e. un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ muni d'une structure de groupe commutative (cf. I, 2.1). [1] Pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$, l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}, \mathrm{I})$ est muni d'une structure de groupe commutative, induite par celle de I. Pour tout groupe G dans $\widehat{\mathscr{C}}$, soit

$$\mathrm{D}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$$

le sous-objet de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$ défini, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, par :

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{D}(\mathrm{G})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}, \mathrm{I}_{\mathrm{S}}),$$

où $\mathrm{G}_{\mathrm{S}} = \mathrm{G} \times \mathrm{S}$ et $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} = \mathrm{I} \times \mathrm{S}$ sont considérés comme des S-groupes, i.e. des groupes dans $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathrm{S}}$. Alors, D(G) est un sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$. De cette façon on obtient un foncteur contravariant D de la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes dans la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes commutatifs.

Le deuxième membre de (x) peut aussi s'interpréter comme le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathrm{G} \times \mathrm{S}, \mathrm{I})$ formé des morphismes $\mathrm{G} \times \mathrm{S} \to \mathrm{I}$ qui sont « *multiplicatifs par rapport au premier argument* G ». D'ailleurs, les formules précédentes valent plus généralement lorsque S est un objet quelconque de $\widehat{\mathscr{C}}$, ne provenant pas nécessairement de $\mathscr{C}$.

Si maintenant on prend pour S un groupe dans $\widehat{\mathscr{C}}$, que nous noterons G', alors dans le premier membre $\mathrm{Hom}(\mathrm{G}', \mathrm{D}(\mathrm{G}))$ de (x), on peut distinguer le sous-ensemble
$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}', \mathrm{D}(\mathrm{G}))$ formé des morphismes qui respectent les structures de groupe de G' 2
et D(G). Il correspond alors au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}', \mathrm{I})$ formé des morphismes qui sont multiplicatifs par rapport au premier *et* par rapport au deuxième argument,

[0] version 1.1 du 8 novembre 2009 : ajouts dans 1.2, 1.4, 1.7, 3.1, 3.4, 4.5.1, 6.4, 6.8 – 1.5.1 et section 7 à revoir

[1] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

— qu'on pourra appeler morphismes bilinéaires de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}'$ dans I, ou accouplements de G et G′ à valeurs dans I. On trouve ainsi

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}', \mathrm{D}(\mathrm{G})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{bil.}}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}', \mathrm{I}), \tag{xx}$$

qui est un isomorphisme fonctoriel en le couple $(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$. Comme le deuxième membre est symétrique en G et G′, on en déduit une bijection fonctorielle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}', \mathrm{D}(\mathrm{G})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{D}(\mathrm{G}')). \tag{xxx}$$

En d'autres termes, « il revient au même » de se donner un homomorphisme de groupes $\mathrm{G}' \to \mathrm{D}(\mathrm{G})$, ou un homomorphisme de groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{D}(\mathrm{G}')$, l'un et l'autre se ramenant en effet à la donnée d'un accouplement $\mathrm{G} \times \mathrm{G}' \to \mathrm{I}$.

Appliquons ceci au cas où $\mathrm{G}' = \mathrm{D}(\mathrm{G})$, et à l'homomorphisme identique $\mathrm{G}' \to \mathrm{D}(\mathrm{G})$, on trouve alors un *homomorphisme canonique*

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{D}(\mathrm{G})). \tag{xxxx}$$

Définition 1.0. — [(2)] On dira que G est *réflexif* (relativement à I) si l'homomorphisme précédent est un isomorphisme. On notera que cela implique que G est commutatif.

On voit ainsi que :

Proposition 1.0.1. — *Le foncteur* D *induit une anti-équivalence de la catégorie des* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes réflexifs avec elle-même.*

En particulier, si G, H sont deux groupes réflexifs, D induit un *isomorphisme* :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{D}(\mathrm{H}), \mathrm{D}(\mathrm{G}))$$

(il suffit même que H soit réflexif, comme on voit sur la formule (xxx)).

3 ***Définition 1.0.2.*** — Comme d'habitude, nous dirons alors qu'un $\mathscr{C}$-groupe G est *réflexif*, s'il est réflexif en tant que $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe (sans nous préoccuper si D(G) est représentable ou non).

On obtient ainsi, par D, une anti-équivalence de la catégorie des $\mathscr{C}$-groupes réflexifs G tels que D(G) soit représentable, avec elle-même.

Remarque 1.0.3. — Signalons pour finir ces généralités, que la formation des duaux D(G) commute à l'extension de la base, qui transforme donc groupes réflexifs en groupes réflexifs.

Nous nous intéressons par la suite au cas où $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$, catégorie des préschémas sur S, et $\mathrm{I} = \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, le « groupe multiplicatif sur S », cf. exposé I. Pour tout groupe ordinaire M, nous considérons le S-groupe M_{S}. On voit aussitôt que pour tout préschéma en groupes J sur S, on a un isomorphisme canonique (fonctoriel en M et J, et compatible avec l'extension de la base) :

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathrm{J}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M}, \mathrm{J}(\mathrm{S})).$$

[(2)] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.0, 1.0.1, ... afin de mettre en évidence les définitions et énoncés qui s'y trouvent.

Appliquant ceci à $J = I = \mathbb{G}_{m,S}$ et à un S' variable sur S, on trouve un isomorphisme fonctoriel :

$$D(M_S)(S') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{gr.}(M, \mathbb{G}_m(S')). \tag{1.0.4}$$

On retrouve donc le foncteur déjà considéré dans I, 4.4, aussi noté $D_S(M)$, qui est représentable pour M commutatif, puisque

$$D_S(M) = D(M_S) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_S(M),$$

où $\mathscr{O}_S(M)$ désigne l'algèbre du groupe M à coefficients dans $\mathscr{O}_S$. (Notons d'ailleurs dans le cas général que D(M) ne change pas si on remplace M par M rendu abélien, de sorte qu'on ne perd rien en supposant M commutatif).

Définition 1.1. — Un préschéma en groupes G sur S est dit *diagonalisable* s'il est isomorphe à un schéma de la forme $D_S(M) = D(M_S) = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(M_S, \mathbb{G}_m)$ pour un groupe commutatif M convenable. 4

On dit que G est *localement diagonalisable*, si tout point de S admet un voisinage ouvert U, tel que $G|_U$ soit diagonalisable.

Théorème 1.2. — *Soit* Γ *un schéma en groupes commutatifs constant sur* S*, i.e. isomorphe à un schéma en groupes de la forme* M_S*, où* M *est un groupe commutatif ordinaire. Alors* Γ *est réflexif, i.e. l'homomorphisme canonique*

$$\Gamma \longrightarrow D(D(\Gamma))$$

est un isomorphisme. [(3)] *Le groupe diagonalisable* $D(M_S)$ *est donc aussi réflexif.*

Compte tenu des définitions, cela résulte de l'énoncé suivant (qu'on appliquera à un préschéma S' sur S) :

Corollaire 1.3. — *Soit* $G = D(M_S)$*. Alors tout homomorphisme de* S*-groupes*

$$u : G \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S}$$

est défini par une section uniquement déterminée de M_S *sur* S*, i.e. par une application localement constante, uniquement déterminée, de* S *dans* M*.*

Démonstration. Comme par définition on a

$$\mathbb{G}_{m,S} = GL(1)_S = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_S\text{-mod.}}(\mathscr{O}_S),$$

on voit que la donnée d'un homomorphisme de groupes $G \to \mathbb{G}_{m,S}$ équivaut à la donnée sur $\mathscr{O}_S$ d'une structure de G-$\mathscr{O}_S$-module, compatible avec la structure de $\mathscr{O}_S$-module naturelle sur $\mathscr{O}_S$ (cf. I, 4.7). Par I, 4.7.3, cela revient aussi à la donnée d'une *graduation de type* M sur $\mathscr{O}_S$, i.e. d'une décomposition de $\mathscr{O}_S$ en somme directe de modules $\mathscr{L}_m$ ($m \in M$). Or il est bien connu qu'un facteur direct d'un module localement libre de type fini est localement libre de type fini, donc chaque $\mathscr{L}_m$ est, au voisinage de chaque point de S, soit nul soit libre de rang 1, et dans ce cas identique à $\mathscr{O}_S$ dans ce voisinage. Soit S_m l'ouvert de S formé des points où c'est cette seconde alternative qui se produit. Exprimant que $\mathscr{O}_S$ est la somme directe des $\mathscr{L}_m$, on voit que la réunion des S_m est S, et que les S_m sont deux à deux disjoints. Donc la donnée d'un 5

[(3)] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

homomorphisme de groupes $\mathrm{G} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ équivaut à la donnée d'une décomposition de S comme réunion d'ouverts S_m ($m \in \mathrm{M}$) deux à deux disjoints, i.e. à la donnée d'une application localement constante de S dans M. Cela établit 1.3 donc 1.2.

Corollaire 1.4. — *Un groupe diagonalisable est réflexif ; il en est donc de même d'un groupe localement diagonalisable. Si* M, N *sont deux groupes commutatifs ordinaires, l'homomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{M_S}, \mathrm{N_S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{D}(\mathrm{N_S}), \mathrm{D}(\mathrm{M_S}))$$

est bijectif.

[(4)] L'isomorphisme précédent étant compatible à l'extension de la base, on en déduit un isomorphisme de S-foncteurs en groupes :

$$(1) \qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{M_S}, \mathrm{N_S}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{D}(\mathrm{N_S}), \mathrm{D}(\mathrm{M_S})) .$$

Pour tout S-préschéma T, on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{M_S}, \mathrm{N_S})(\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}, \Gamma(\mathrm{N_T}/\mathrm{T})),$$

et, d'après I 1.8, $\Gamma(\mathrm{N_T}/\mathrm{T})$ est le groupe abélien des applications localement constantes $\mathrm{T} \to \mathrm{N}$. D'autre part, soit $\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})_{\mathrm{S}}$ le S-groupe constant associé au groupe abélien ordinaire $\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. On a un homomorphisme évident de S-foncteurs en groupes commutatifs :

$$(2) \qquad \mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\theta} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{M_S}, \mathrm{N_S}),$$

qui est toujours un monomorphisme. De plus, c'est un *isomorphisme* si M est *de type fini.* [(5)]

On déduit de ce qui précède le point (a) du corollaire suivant ; le point (b) en découle d'après les résultats de descente « rappelés » en 1.7. [(6)]

6 ***Corollaire 1.5***. — a) *Soient* M, N *deux groupes commutatifs ordinaires,* M de type fini*, alors on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{D}(\mathrm{N_S}), \mathrm{D}(\mathrm{M_S})) ;$$

par conséquent $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{D}(\mathrm{N_S}), \mathrm{D}(\mathrm{M_S}))$ *est* représentable.

[(4)] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

[(5)] N.D.E. : En effet, si l'on note F(M) (resp. G(M)) le membre de gauche (resp. de droite) de (2), et si $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{F(M)} = \mathrm{F}(\mathrm{M}_1) \oplus \mathrm{F}(\mathrm{M}_2)$, et de même pour G. Ceci nous ramène à vérifier que θ est un isomorphisme lorsque $\mathrm{M} = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, pour un entier $r \geqslant 0$. Dans ce cas, $\mathrm{F(M)} = ({}_r\mathrm{N})_{\mathrm{S}}$, où ${}_r\mathrm{N}$ est le noyau de $r \cdot \mathrm{id_N}$, et, pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'homomorphisme

$$\mathrm{F(M)(T)} = \Gamma({}_r\mathrm{N_T}/\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{G(M)(T)} = {}_r\Gamma(\mathrm{N_T}/\mathrm{T})$$

est bijectif, d'où le résultat voulu.

[(6)] N.D.E. : L'original énoncait après 1.5 : « On en conclut plus généralement que si G, H sont localement diagonalisables, H étant *de type fini*, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est représentable ». On a inclus cette assertion dans l'énoncé de 1.5, et l'on a explicité sa démonstration en 1.7.

b) *Plus généralement, si* G, H *sont localement diagonalisables,* H *étant* de type fini*, alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *est* représentable.

[(7)] On conclut de 1.5 :

Corollaire 1.6. — *Sous les conditions de* 1.5*, si* S *est* connexe*, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{D_S(N)},\mathrm{D_S(M)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$$

et

$$\mathrm{Isom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{D_S(N)},\mathrm{D_S(M)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M},\mathrm{N}).$$

1.7. Descente de la représentabilité. — [(8)] On « rappelle » dans ce paragraphe quelques résultats de descente, qui seront fréquemment utilisés dans la suite.

Scholie 1.7.1. — Soient S un préschéma et X, Y, T des S-préschémas. Si (T_i) est un recouvrement ouvert de T, et si l'on pose $\mathrm{T}_{ij} = \mathrm{T}_i \cap \mathrm{T}_j = \mathrm{T}_i \times_{\mathrm{T}} \mathrm{T}_j$ alors, comme la donnée d'un morphisme de T-préschémas $\mathrm{X_T} \to \mathrm{Y_T}$ est locale sur T, on a une suite exacte d'ensembles :

$$(1) \qquad \mathrm{Hom_T}(\mathrm{X_T},\mathrm{Y_T}) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}_i}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_i},\mathrm{Y}_{\mathrm{T}_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}_{ij}}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_{ij}},\mathrm{Y}_{\mathrm{T}_{ij}})$$

i.e. $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est un S-foncteur *local*, c.-à-d., un faisceau sur $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ munie de la topologie de Zariski.

Plus généralement, d'après IV 4.5.13, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est un *faisceau* sur $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ pour toute topologie moins fine que la topologie canonique, par exemple pour la topologie (fpqc).

Si G, H sont des S-préschémas en groupes, on en déduit que le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est un *faisceau* pour la topologie (fpqc) (donc a fortiori un foncteur *local*).

Lemme 1.7.2. — [(9)] *Soit* F *un* S*-foncteur* local.

(i) *On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert* (S_i) *de* S *tel que la restriction* $\mathrm{F}_i = \mathrm{F} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ *de* F *à chaque* S_i *soit* représentable *par un* S_i*-préschéma* X_i*. Alors* F *est* représentable *par un* S*-préschéma* X.

(ii) *On suppose que* F *est un* faisceau (fpqc) *et qu'il existe un morphisme fidèlement plat et quasi-compact* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *tel que la restriction* $\mathrm{F}' = \mathrm{F} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *de* F *soit* représentable *par un* S'*-préschéma* X'*. Alors* X' *est muni d'une* donnée de descente (cf. IV 2.1) *relativement à* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Si de plus cette donnée de descente est effective (*ce qui est le cas si* X' *est* affine sur S')*, alors* F *est* représentable *par un* S*-préschéma* X.

[(7)] N.D.E. : Il faudrait ajouter un énoncé 1.5.1 traitant le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$, considéré dans X 5.10 et 5.11 ...

[(8)] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, pour expliciter le caractère « local sur S » de la représentabilité de certains faisceaux sur S, utilisé maintes fois dans la suite (et de façon implicite dans l'original).

[(9)] N.D.E. : Voir aussi la remarque XI 3.4.

Démonstration. (i) Il résulte de l'hypothèse que $X_i \times_S S_j$ et $X_j \times_S S_i$ représentent tous les deux la restriction de F à $S_{ij} = S_i \times_S S_j$ donc, d'après le lemme de Yoneda, il existe un unique isomorphisme de S_{ij}-préschémas

$$c_{ji} : \quad X_i \times_S S_j \xrightarrow{\sim} X_j \times_S S_i \ ;$$

on a alors des isomorphimes de préschémas au-dessus de $S_{ijk} = S_i \times_S S_j \times S_k$:

$$\begin{tikzcd}
X_i \times_S S_j \times S_k \arrow[r, "c_{ji}\times \mathrm{id}_{S_k}"] \arrow[d, equal] & X_j \times_S S_i \times_S S_k \arrow[r, equal] & X_j \times_S S_k \times_S S_i \arrow[d, "c_{kj}\times \mathrm{id}_{S_i}"] \\
X_i \times_S S_k \times_S S_j \arrow[r, "c_{ki}\times \mathrm{id}_{S_j}"] & X_k \times_S S_i \times_S S_j \arrow[r, equal] & X_k \times_S S_j \times_S S_i
\end{tikzcd}$$

et comme tous ces objets représentent la restriction de F à S_{ijk}, ce diagramme est commutatif, i.e. les c_{ji} vérifient la relation de cocyle usuelle $c_{kj} \circ c_{ji} = c_{ki}$.

Il en résulte que les X_i se recollent en un S-préschéma X tel que $X \times_S S_i = X_i$ pour tout i. Pour tout Y au-dessus de S_i, on a donc

$$(*) \qquad F(Y) = F_i(Y) = \mathrm{Hom}_{S_i}(Y, X \times_S S_i) = \mathrm{Hom}_S(Y, X) = h_X(Y).$$

Puis, pour $Y \to S$ arbitraire, les $Y_i = Y \times_S S_i$ forment un recouvrement ouvert de Y ; posons $Y_{ij} = Y_i \times_Y Y_j = Y \times_S S_{ij}$. Comme F (resp. h_X) est un foncteur local par hypothèse (resp. puisque la topologie de Zariski est moins fine que la topologie canonique), alors F(Y) et $h_X(Y)$ s'identifie tous les deux, compte-tenu de $(*)$, au noyau de la double flèche :

$$\begin{tikzcd}
\prod_i F(Y_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & \prod_{i,j} F(Y_{ij}) \arrow[d, equal] \\
\prod_i h_X(Y_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j} h_X(Y_{ij}) .
\end{tikzcd}$$

Ceci prouve (i).

(ii) Il résulte de l'hypothèse que $F''_1 = F' \times_{S'} S''_1$ (où $S''_1 = S'' = S' \times_S S'$ considéré comme S'-préschéma via la 1ère projection) est représenté par $X''_1 = X' \times_{S'} S''_1$; de même, $F''_2 = F' \times_{S'} S''_2$ est représenté par $X''_2 = X' \times_{S'} S''_2$. Or $F''_1 = F \times_S S'' = F''_2$, donc il existe un (unique) S''-isomorphisme $c : X''_1 \xrightarrow{\sim} X''_2$; alors, si l'on note q_i (resp. p_{ji}) la projection de $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$ sur le i-ème facteur (resp. sur les facteurs i et j), $X'''_i = X' \times_{S'} S'''_i$ (où $S'''_i = S'''$ considéré comme S'-préschéma via q_i), et $p^*_{ji}(c) : X'''_i \xrightarrow{\sim} X'''_j$ l'isomorphisme de S'''-préschemas déduit de c par changement de base, on obtient un diagramme d'isomorphismes de S'''-préschémas :

$$\begin{tikzcd}
X'''_1 \arrow[r, "p^*_{21}(c)"] \arrow[dr, "p^*_{31}(c)"'] & X'''_2 \arrow[d, "p^*_{32}(c)"] \\
& X'''_3
\end{tikzcd}$$

et comme tous ces objets représentent la restriction de F à S''', ce diagramme est commutatif, i.e. on a la relation de cocyle usuelle $p_{32}^*(c) \circ p_{21}^*(c) = p_{31}^*(c)$, i.e. c est une donnée de descente sur X' relativement à $S' \to S$ (cf. IV 2.1).

Supposons de plus que cette donnée de descente soit *effective*, i.e. qu'il existe un S-préschéma X tel que $X' \simeq X \times_S S'$ (d'après SGA 1, VIII 2.1, ceci est le cas si X' est *affine sur* S' [10]). Alors, pour tout $Y \to S'$, on a

$$(**) \qquad F(Y) = F'(Y) = \mathrm{Hom}_{S'}(Y, X \times_S S') = \mathrm{Hom}_S(Y, X) = h_X(Y).$$

Puis, pour $Y \to S$ arbitraire, posons $Y' = Y \times_S S'$ et $Y'' = Y' \times_Y Y' \simeq Y \times_S S''$. Alors $Y' \to Y$ est, comme $S' \to S$, fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme $\mathscr{M}$-effectif (où $\mathscr{M}$ = famille des morphismes fidèlement plats quasi-compacts), i.e. la relation d'équivalence

$$Y' \times_Y Y' \rightrightarrows Y'$$

est $\mathscr{M}$-effective et a pour quotient Y. Comme F (resp. h_X) est un faisceau (fpqc) par hypothèse (resp. puisque la topologie (fpqc) est moins fine que la topologie canonique), alors F(Y) et $h_X(Y)$ s'identifie tous les deux, compte-tenu de $(**)$, au noyau de la double flèche :

$$\begin{array}{ccc} F(Y') & \rightrightarrows & F(Y' \times_Y Y') \\ \| & & \| \\ h_X(Y') & \rightrightarrows & h_X(Y' \times_Y Y'). \end{array}$$

Ceci prouve (ii).

Corollaire 1.7.3. — *Soit* F *un* faisceau (fpqc) *sur* $(\mathbf{Sch})_{/S}$. *On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert* (S_i) *de* S *et pour chaque* i *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact* $S_i' \to S_i$ *tel que la restriction* $F_i' = F \times_S S_i'$ *soit* représentable *par un* S_i'*-préschéma* X_i' affine sur S_i'. *Alors* F *est* représentable *par un* S*-préschéma* X affine sur S (*tel que* $X \times_S S_i' = X_i'$ *pour tout* i).

Si de plus chaque $X_i' \to S_i'$ *est une immersion fermée* (*resp. un morphisme fini étale*), *il en est de même de* $X \to S$.

La première assertion découle de 1.7.2. Pour la seconde, il suffit de vérifier que chaque morphisme $X \times_S S_i \to S_i$ est une immersion fermée (resp. fini et étale), ce qui résulte de EGA IV_2, 2.7.1 (resp. et IV_4, 17.7.3).

Remarque 1.7.4. — L'assertion 1.5 (b) découle, comme annoncé, de 1.7.1 et 1.7.2 (i).

2. Propriétés schématiques des groupes diagonalisables

Elles sont résumées dans la

[10] N.D.E. : Pour un autre critère d'effectivité, voir plus loin X 5.4–5.6.

Proposition 2.1. — *Soient* S *un préschéma non vide,* M *un groupe commutatif ordinaire,* $\mathrm{G} = \mathrm{D}(\mathrm{M_S})$ *le* S*-groupe diagonalisable défini par* M. *On a ce qui suit :*

a) G *est fidèlement plat sur* S, *et affine sur* S (*a fortiori quasi-compact sur* S).

b) M *de type fini* $\Longleftrightarrow$ G *de type fini sur* S $\Longleftrightarrow$ G *de présentation finie sur* S.

c) M *fini* $\Longleftrightarrow$ G *fini sur* S $\Longleftrightarrow$ G *de type fini sur* S *et annulé par un entier* $n > 0$. *Alors* $\deg(\mathrm{G/S}) = \mathrm{Card}(\mathrm{M})$.

7 c′) M *un groupe de torsion* $\Longleftrightarrow$ G *entier sur* S.

d) $\mathrm{M} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{G} =$ S*-groupe unité.*

e) M *de type fini, et l'ordre de son sous-groupe de torsion est premier aux caractéristiques résiduelles de* S $\Longleftrightarrow$ G *est lisse sur* S.

La vérification de a) à d) est triviale, et laissée au lecteur. Prouvons e). Si G est lisse sur S, il est localement de présentation finie sur S, donc de présentation finie sur S puisqu'il est affine sur S, donc M est de type fini. Donc on peut supposer déjà M de type fini, donc G de présentation finie sur S. Alors [(11)] G est lisse sur S si et seulement si ses fibres géométriques le sont, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos k. Écrivant $\mathrm{M} = \mathrm{T} \times \mathrm{L}$, avec T sous-groupe de torsion et L libre, $\mathrm{L} \simeq \mathbb{Z}^r$, on aura $\mathrm{D}(\mathrm{M}) = \mathrm{D}(\mathrm{T}) \times \mathrm{D}(\mathrm{L})$, où $\mathrm{D}(\mathrm{L}) \simeq \mathbb{G}_m^r$ est lisse sur k. Donc $\mathrm{G} = \mathrm{D}(\mathrm{M})$ est lisse sur k si et seulement si D(T) l'est, ce qui signifie, puisque D(T) est fini sur k de degré égal à l'ordre n de T, que $\mathrm{D}(\mathrm{T})(k)$ a n éléments. Or T est isomorphe à une somme de groupes $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, n étant le produit des n_i, donc D(T) est produit des $\mathrm{D}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}) = \boldsymbol{\mu}_{n_i}$ (schéma en groupes des racines n_i-èmes de l'unité), donc
$$\mathrm{card}(\mathrm{D}(\mathrm{T})(k)) = \prod_i \mathrm{card}\,\boldsymbol{\mu}_i(k)$$
où $\mathrm{card}\,\boldsymbol{\mu}_i(k) =$ (nombre des racines n_i-èmes de l'unité dans k) $\leqslant n_i$, l'égalité étant atteinte si et seulement si n_i est premier à la caractéristique p de k. Donc on a $\mathrm{card}(\mathrm{D}(\mathrm{T})(k)) = n$ (où $n = \prod_i n_i$) si et seulement si tous les n_i sont premiers à p, i.e. si et seulement si n est premier à p. C.Q.F.D.

3. Propriétés d'exactitude du foncteur $\mathrm{D_S}$

Théorème 3.1. — *Soient* S *un préschéma, et*
$$0 \longrightarrow \mathrm{M}' \xrightarrow{\ u\ } \mathrm{M} \xrightarrow{\ v\ } \mathrm{M}'' \longrightarrow 0$$
8 *une suite exacte de groupes commutatifs ordinaires. Considérons la suite d'homomorphismes transposés :*
$$0 \longrightarrow \mathrm{D_S}(\mathrm{M}'') \xrightarrow{\ v^t\ } \mathrm{D_S}(\mathrm{M}) \xrightarrow{\ u^t\ } \mathrm{D_S}(\mathrm{M}') \longrightarrow 0.$$

(i) v^t *induit un isomorphisme de* $\mathrm{D_S}(\mathrm{M}'')$ *avec le noyau de* u^t, *et* u^t *est fidèlement plat et quasi-compact.*

---

(11) N.D.E. : (puisque G est plat sur S, d'après a))

(ii) [12] $D_S(M')$ *représente le faisceau quotient* (fpqc) $D_S(M)/D_S(M'')$.

Notons $\mathscr{M}$ la famille des morphismes fidèlement plats quasi-compacts. D'abord, (ii) découle de (i) (cf. IV, 4.6.5.1). En effet, la relation d'équivalence dans $D_S(M)$ définie par u^t est la même que celle définie par le sous-groupe $\mathrm{Ker}(u^t) = D_S(M'')$; comme $u^t \in \mathscr{M}$, cette relation d'équivalence est $\mathscr{M}$-effective (cf. IV, 3.3.2.1), et donc $D_S(M')$ représente le faisceau quotient pour la topologie (fpqc) (cf. IV, 4.6.5).

La première assertion de (i) est une conséquence triviale de la définition des foncteurs $D_S(-)$; plus généralement on aura pour toute suite exacte

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

(sans zéro à gauche), une suite transposée *exacte* :

$$0 \longrightarrow D_S(M'') \longrightarrow D_S(M) \longrightarrow D_S(M') \ .$$

(Ceci est valable plus généralement dans le contexte du début du N° 1). D'autre part, comme $D_S(M)$ et $D_S(M')$ sont affines sur S, u^t est nécessairement un morphisme affine, a fortiori quasi-compact (ceci quel que soit l'homomorphisme $u : M' \to M$). La seconde assertion de (i) résultera donc du point a) dans le

Corollaire 3.2. — *Soient* S *un préschéma non vide,* $u : M' \to M$ *un homomorphisme de groupes commutatifs ordinaires,* $u^t : G \to G'$ *l'homomorphisme transposé. Alors :*

a) *Pour que u soit un monomorphisme, il faut et il suffit que u^t soit fidèlement plat.*

b) *Pour que u soit un épimorphisme, il faut et il suffit que u^t soit un monomorphisme* (*et alors u^t est même une immersion fermée*).

Pour prouver a), on note que si u est un monomorphisme, alors $\mathscr{O}_S(M)$ est un module sur $\mathscr{O}_S(M')$ admettant une base non vide (savoir, le système de sections défini par 9
n'importe quel système de représentants de M modulo M′), a fortiori il est fidèlement plat. Réciproquement, s'il en est ainsi, alors $u^t : \mathscr{O}_S(M') \to \mathscr{O}_S(M)$ est injectif, ce qui (pour $S \neq \varnothing$) implique que $u : M' \to M$ est injectif.

Pour prouver b), on note que si u est un épimorphisme, alors $\mathscr{O}_S(M') \to \mathscr{O}_S(M)$ est surjectif, donc u^t est une immersion fermée et a fortiori un monomorphisme. Inversement, s'il en est ainsi, alors $\mathrm{Ker}\, u^t =$ groupe unité, or posant $M'' = \mathrm{Coker}\, u$, on a vu que $\mathrm{Ker}\, u^t \simeq D_S(M'')$, donc par 2.1 d) on a $M'' = 0$ donc u est un épimorphisme.

On conclut de 3.1 de la façon habituelle :

Corollaire 3.3. — *Soit* $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$ *une suite exacte de groupes commutatifs ordinaires, considérons la suite transposée*

$$G'' \xrightarrow{v^t} G \xrightarrow{u^t} G'.$$

Alors v^t induit un morphisme fidèlement plat et quasi-compact de G'' *dans* $\mathrm{Ker}\, u^t$*, et ce dernier est un groupe diagonalisable isomorphe à* $D_S(v(M)) = D_S(\mathrm{Coker}\, u)$.

[12] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit, et l'on a détaillé la démonstration en conséquence.

Corollaire 3.4. — *Soient* S *un préschéma,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de* S-*préschémas en groupes localement diagonalisables, avec* H de type fini *sur* S. *Posons* $\mathrm{G}' = \operatorname{Ker} u$. *Alors :*

a) G' *est localement diagonalisable, il est de type fini sur* S *si* G *l'est.*

b) *Le quotient* G/G' *« existe », de façon plus précise la relation d'équivalence définie par* G' *dans* G *est* $\mathscr{M}$*-effective* (*où* $\mathscr{M}$ = *ensemble des morphismes fidèlement plats quasi-compacts, cf.* IV, 3.4). *De plus* G/G' *est localement diagonalisable, de type fini sur* S.

c) *L'homomorphisme* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *se factorise de façon unique en*

$$\mathrm{G} \xrightarrow{\ v\ } \mathrm{G}/\mathrm{G}' \xrightarrow{\ w\ } \mathrm{H},$$

10 *où* v *est l'homomorphisme canonique* (*donc* v *est fidèlement plat et quasi-compact*). *De plus* w *est une immersion fermée, et a fortiori un monomorphisme.*

Enfin, le quotient $\mathrm{H}' = \mathrm{H}/\operatorname{Im} w = \operatorname{Coker} w = \operatorname{Coker} u$ *existe ; de façon précise la relation d'équivalence définie par* G/G' *dans* H *est* $\mathscr{M}$*-effective, et* H' *est de type fini sur* S.

La première assertion de c) est conséquence de b), par définition du quotient G/G' (cf. IV, 3.2.3). [13] Montrons que le faisceau (fpqc) quotient $\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\mathrm{G}'}$ est représentable. Ceci se vérifie localement sur S, de même que toutes les autres assertions ; on peut donc supposer G et H diagonalisables, de la forme $\mathrm{D_S(M)}$ et $\mathrm{D_S(N)}$.

Comme H est de type fini sur S, alors N est de type fini, d'après 2.1 b), donc, d'après 1.5, u est défini par un homomorphisme $u' : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$. Alors, en vertu de 3.1 et 3.2, G' est isomorphe à $\mathrm{D_S}(\operatorname{Coker} u')$ et $\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\mathrm{G}'}$ est représentable par $\mathrm{D_S}(\operatorname{Im} u')$; de plus, considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} u' \longrightarrow \mathrm{N} \xrightarrow{\ w'\ } \operatorname{Im} u' \longrightarrow 0\,,$$

on obtient que w est une immersion fermée, et que le quotient $\mathrm{H}' = \mathrm{H}/\operatorname{Im} w$ est $\mathrm{D_S}(\operatorname{Ker} u')$; celui-ci est de type fini sur S puisque N, et donc $\operatorname{Ker} u'$, est de type fini.

Remarques. — Le résultat d'existence de quotients 3.4 sera substantiellement généralisé au N°5.

D'autre part, on notera que dans le présent N° et le précédent, l'hypothèse $\mathrm{S} \neq \varnothing$ n'est intervenue que pour assurer la validité de certaines réciproques, permettant de déduire de certaines hypothèses sur des S-groupes diagonalisables des propriétés pour les groupes ordinaires correspondants. Les résultats en sens « direct » sont valables sans restriction sur S, et les démonstrations données ici s'appliquent dans le cas général.

Corollaire 3.5. — *Soit* G *un préschéma en groupes diagonalisable sur* S, *et soit* n *un entier* $\neq 0$. *Alors le sous-groupe* ${}_n\mathrm{G}$ *de* G, *noyau de l'homomorphisme* $n \cdot \mathrm{id_G} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, *est entier sur* S, *et fini sur* S *si* G *est de type fini sur* S.

[13] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

En effet, si $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, alors ${}_n\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}/n\mathrm{M})$ en vertu de 3.1, et on conclut par 2.1 b), c), c′).

4. Torseurs sous un groupe diagonalisable

11

Soient S un préschéma, et $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ un groupe diagonalisable sur S. Nous nous proposons de déterminer les G-*torseurs* (ou G-*fibrés principaux homogènes*) sur S, au sens de la « topologie fidèlement plate quasi-compacte », cf. Exp. IV, 5.1. Rappelons qu'un préschéma P sur S, à groupe d'opérateurs G, est dit *un torseur* ou *principal homogène* si tout point de S admet un voisinage ouvert U et un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$, tel que $\mathrm{P}' = \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un fibré à opérateurs isomorphe à $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ (opérant sur lui-même par translations à droite). Comme G est affine sur S, il en résulte par SGA 1, VIII 5.6 que P *est nécessairement affine sur* S. Notons aussi que puisque G est lui-même fidèlement plat et quasi-compact sur S, alors P est principal homogène sous G si et seulement si il est « formellement principal homogène », et s'il est de plus fidèlement plat et quasi-compact sur S (cf. IV, 5.1.6).

Rappelons d'autre part (Exp. I, 4.7.3) que la donnée d'un S-préschéma P *affine sur* S à groupe d'opérateurs $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ revient à la donnée d'une algèbre quasi-cohérente commutative *graduée de type* M sur S, i.e. d'une algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$ sur S, munie d'une décomposition en somme directe (en tant que module) :

$$\mathscr{A} = \coprod_{m \in \mathrm{M}} \mathscr{A}_m,$$

avec

$$\mathscr{A}_m \cdot \mathscr{A}_{m'} \subseteq \mathscr{A}_{m+m'} \qquad \text{pour} \quad m, m' \in \mathrm{M}.$$

Ceci posé, la réponse au problème posé plus haut est donnée par la

Proposition 4.1. — *Pour que le préschéma* P *à groupe d'opérateurs* $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$*, défini par l'algèbre* $\mathscr{A}$ *graduée de type* M*, soit un fibré principal homogène sous* G*, il faut et il suffit que* $\mathscr{A}$ *satisfasse les conditions suivantes :*

a) *Pour tout* $m \in \mathrm{M}$*,* $\mathscr{A}_m$ *est un module inversible sur* S*.*

b) *Pour* m*,* $m' \in \mathrm{M}$*, l'homomorphisme* 12

$$\mathscr{A}_m \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}_{m'} \longrightarrow \mathscr{A}_{m+m'}$$

induit par la multiplication dans $\mathscr{A}$*, est un isomorphisme.*

La nécessité des conditions est immédiate par descente, car elles sont vérifiées dans le cas où P est le fibré principal homogène trivial, i.e. $\mathscr{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$. Pour la suffisance, on note que a) implique déjà que P est fidèlement plat sur S, il est de toutes façons quasi-compact sur S (étant affine sur S), donc il reste à vérifier qu'il est formellement principal homogène sous G, i.e. que l'homomorphisme bien connu

$$\mathrm{P} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{P} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{P}$$

est un isomorphisme. Or sur les algèbres affines, cet homomorphisme s'explicite comme l'homomorphisme

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{M}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$$

qui en bidegré (m, n) (où $m, n \in \mathrm{M}$) est donné par

$$x_m \otimes y_n \mapsto x_m y_n \otimes e_n.$$

Du point de vue degrés, cet homomorphisme est compatible avec l'homomorphisme $\mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M} \times \mathrm{M}$ donné par

$$(m, n) \longmapsto (m + n, n),$$

qui est un isomorphisme. Cela montre que b) exprime précisément (indépendamment de a)) que P est formellement principal homogène, et établit 4.1.

Notons aussi qu'on obtient, par descente fidèlement plate :

Corollaire 4.2. — *Les conditions de* 4.1 *impliquent que l'homomorphisme*

$$\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathscr{A}_0$$

est un isomorphisme.

13 Si par exemple $\mathrm{M} = \mathbb{Z}$, alors sous les conditions de 4.1 on voit que $\mathscr{A}$ est essentiellement connu quand on connaît $\mathscr{A}_1 = \mathscr{L}$, savoir

$$\mathscr{A} \simeq \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}$$

(isomorphisme d'algèbres graduées). On retrouve ainsi le résultat bien connu :

Corollaire 4.3. — *Il y a une équivalence entre la catégorie des fibrés principaux homogènes* P *sur* S *de groupe* $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$*, et la catégorie des modules inversibles* $\mathscr{L}$ *sur* S (*en prenant comme morphismes pour définir l'une et l'autre catégorie, les isomorphismes pour les structures entrant en jeu*). *On obtient deux foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre en associant à tout* P *le composant de degré* 1 *de son algèbre affine* $\mathbb{Z}$*-graduée, et en associant à tout* $\mathscr{L}$ *le spectre de l'algèbre* $\mathbb{Z}$*-graduée* $\coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}$.

En particulier :

Corollaire 4.4. — *Le groupe des classes de fibrés principaux homogènes sur* S *de groupe* $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$*, est isomorphe au groupe* Pic(S) *des classes de modules inversibles sur* S*, i.e. à* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{\times})$.

Compte tenu que $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est le schéma des automorphismes du module $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, on voit que 4.4 est équivalent à l'énoncé suivant, qui est une des variantes du « théorème 90 » de Hilbert.

Corollaire 4.5. — *Tout fibré principal homogène sur* S *de groupe* $\mathbb{G}_m$ *est localement trivial* (*au sens de la topologie de Zariski*).

Remarque 4.5.1. — On notera que l'énoncé précédent n'est plus vrai en général pour un groupe tel que $\boldsymbol{\mu}_n$, ou pour une « forme tordue » de $\mathbb{G}_m$; par exemple l'unique forme tordue de $\mathbb{G}_m$ sur le corps $\mathbb{R}$ des réels donne un groupe de 1-cohomologie égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[14] En effet, soit $\mathbb{S}^1$ le noyau du morphisme de norme $\mathrm{N} : \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$; c'est une $\mathbb{C}/\mathbb{R}$-forme tordue de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$. L'équation $\mathrm{N}(z) = -1$ dans $\prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$ définit un $\mathbb{S}^1$-torseur X sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$, localement trivial pour la topologie étale, mais non trivial puisque $\mathrm{X}(\mathbb{R}) = \varnothing$. Montrons que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a une suite exacte de $\mathbb{R}$-groupes algébriques commutatifs lisses :

$$1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \longrightarrow 1$$

qui donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie étale (ou de cohomologie galoisienne) :

$$0 \longrightarrow \mathbb{S}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\mathrm{N}} \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \longrightarrow \cdots$$

Or (voir par exemple XXIV, 8.4), $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{C}, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$, et ce dernier est nul d'après 4.5 (ou, ici, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos). On obtient donc un isomorphisme $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}^\times/\mathrm{N}(\mathbb{C}^\times) \simeq \{\pm 1\}$.

Nous aurons besoin au N° suivant du résultat suivant :

Proposition 4.6. — *Sous les conditions de* 4.1, *les conditions* a) *et* b) *sont équivalentes aux conditions suivantes :* 14

a$'$) $\mathscr{O}_\mathrm{S} \to \mathscr{A}_0$ *est un isomorphisme.*

b$'$) *Pour tout* m *dans* M (*il suffit : dans un système de générateurs de* M), *on a :*

$$\mathscr{A}_m \cdot \mathscr{A}_{-m} = \mathscr{A}_0.$$

La nécessité étant évidente, compte tenu de 4.2 [15], on va se ramener à prouver le

Corollaire 4.7. — *Soit* $\mathrm{A} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_n$ *un anneau* $\mathbb{Z}$*-gradué, tel que*

$$\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_{-1} = \mathrm{A}_0.$$

Alors les A_n *sont des* A_0*-modules inversibles, et pour* n, $n' \in \mathbb{Z}$, *l'homomorphisme*

$$\mathrm{A}_n \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_{n'} \longrightarrow \mathrm{A}_{n+n'}$$

induit par la multiplication dans A, *est un isomorphisme.*

Par hypothèse, il existe des $f_i \in \mathrm{A}_1$, $g_i \in \mathrm{A}_{-1}$, tels que

$$(*) \qquad \sum_i f_i g_i = 1.$$

Comme la conclusion à établir est locale sur $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0)$, [16] et comme, d'après $(*)$, $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0)$ est recouvert par les ouverts affines $\mathrm{D}(f_i g_i)$, on est ramené au cas où il existe un élément $f \in \mathrm{A}_1$, *inversible* dans A. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f^n est un élément de A_n inversible dans A, donc définit un isomorphisme $h \mapsto f^n h$ de A_0 sur A_n. De plus,

[14] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
[15] N.D.E. : On a corrigé 4.1 en 4.2.
[16] N.D.E. : On a détaillé le passage qui suit.

ceci montre que l'on obtient un isomorphisme $A_0[t, t^{-1}] \to A$ de A_0-algèbres graduées en envoyant t dans f, ce qui achève la démonstration de 4.7.

Alors, sous les conditions de 4.6, 4.7 implique déjà que les $\mathscr{A}_m$ ($m \in M$) sont inversibles. Pour prouver la condition 4.1 *b*), on peut donc supposer que $\mathscr{A}_m$ et $\mathscr{A}_{m'}$ ont des bases f_m et $f_{m'}$, ayant des inverses $f_m^{-1} \in \Gamma(\mathscr{A}_{-m})$ et $f_{m'}^{-1} \in \Gamma(\mathscr{A}_{-m'})$. Alors le produit par $f_m^{-1} f_{m'}^{-1} \in \Gamma(\mathscr{A}_{-m-m'})$ définit un homomorphisme $\mathscr{A}_{m+m'} \to \mathscr{A}_0 \simeq \mathscr{O}_S$, transformant l'image de $f_m \otimes f_{m'}$ en la section 1 de $\mathscr{O}_S$. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}_m \otimes \mathscr{A}_{m'} \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "w"] & \mathscr{A}_{m+m'} \arrow[r, "v"] & \mathscr{A}_0 \simeq \mathscr{O}_S \end{tikzcd}$$

w et v sont donc des épimorphismes de faisceaux inversibles, donc des isomorphismes, donc u est un isomorphisme. C.Q.F.D.

5. Quotient d'un schéma affine par un groupe diagonalisable opérant librement

15

[17] On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des morphismes fidèlement plats quasi-compacts, et l'on rappelle que l'on considère des torseurs au sens de la topologie (fpqc).

Théorème 5.1. — *Soient* S *un préschéma,* M *un groupe commutatif ordinaire,* $G = D_S(M)$ *le groupe diagonalisable sur* S *qu'il définit,* P *un* S*-préschéma* affine sur S *sur lequel* G *opère* librement *à droite.*

Alors la relation d'équivalence définie par G *dans* P *est* $\mathscr{M}$*-effective*(cf. IV, 3.4), *i.e. le quotient* $X = P/G$ *existe et* P *est un torseur sur* X *de groupe* $G_X = D_X(M)$. *De plus,* P/G *est affine sur* S *; de façon précise, si* P *est défini par l'algèbre* $\mathscr{A}$ *graduée de type* M, *alors* P/G *est isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}_0)$, *où* $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}^G$ *est le composant de degré* 0 *de* $\mathscr{A}$.

Démonstration. Posons $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_0)$, alors on a un morphisme naturel $P \to X$, déduit de $\mathscr{A}_0 \to \mathscr{A}$, qui est invariant par les opérations de G. De cette façon, P devient un X-préschéma, affine sur X, avec groupe d'opérateurs $G_X = D_X(M)$, et l'hypothèse que G opère librement sur P/S implique que G_X opère librement sur P/X. Tout revient à montrer que P est un fibré principal homogène sous G_X, utilisant le fait que $\mathscr{B}_0 = \mathscr{O}_X$, où $\mathscr{B}$ est l'algèbre graduée de type M sur X qui définit P/X. On peut alors supposer X = S et S affine, donc P est affine, donné par un anneau A gradué de type M dont la partie homogène de degré m sera notée A_m, de sorte que $S = \mathrm{Spec}(A_0)$. Compte tenu de 4.6, il reste à vérifier que l'on a :

$$(x) \qquad A_m \cdot A_{-m} = A_0 \qquad \text{pour tout} \quad m \in M.$$

On constate d'ailleurs par un calcul immédiat que (x) équivaut à dire que $P \times_S G \to P \times_S P$ est une *immersion fermée*, et non seulement un monomorphisme (selon l'hy-
16 pothèse que G opère librement), i.e. que l'homomorphisme sur les anneaux affines

[17] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

$$\theta : \quad \mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A(M)}$$

est surjectif [18]. Cela donne 5.1 lorsqu'on suppose que la relation d'équivalence définie par G dans P est fermée. Nous allons cependant montrer que cette hypothèse est déjà conséquence du fait que G opère librement, (ce qui est d'ailleurs implicitement contenu dans le théorème 5.1, puisque $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ doit être isomorphe à $\mathrm{P} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{P}$, qui est fermé dans $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ puisque X est affine sur S donc séparé sur S).

Soit $\mathrm{R} = \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$. L'hypothèse que G opère librement, i.e. que $\mathrm{R} \to \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ est un monomorphisme, s'écrit en disant que le morphisme diagonal

$$\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \underset{(\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P})}{\times} \mathrm{R} = \mathrm{R}'$$

est un isomorphisme. On a $\mathrm{R} = \mathrm{Spec(A(M))}$ et

$$\mathrm{R}' = \mathrm{Spec(A(M \times M)/K)} \quad {}^{(19)}$$

où K est l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$x_m\,(e_{m,0} - e_{0,m}), \qquad \text{avec} \quad m \in \mathrm{M},\ x_m \in \mathrm{A}_m;$$

soit $\phi : \mathrm{A(M \times M)} \to \mathrm{A(M)}$ l'homorphisme surjectif d'anneaux défini par

$$x\,e_{m,n} \longmapsto x\,e_{m+n} \qquad (m, n \in \mathrm{M},\ x \in \mathrm{A})$$

(où les e_m, resp. $e_{m,n} = e_m \otimes e_n$, sont les éléments de la base canonique de A(M), resp. A(M×M)). Alors le morphisme diagonal $\mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ correspond à l'homomorphisme

$$\overline{\phi} : \mathrm{A(M \times M)/K} \longrightarrow \mathrm{A(M)}$$

obtenu en passant au quotient par K. Or le noyau de $\overline{\phi}$ est l'idéal K′ engendré par les

$$d_m = e_{m,0} - e_{0,m}.$$

On a $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$, et l'hypothèse que G opère librement sur P, i.e. que $\overline{\phi}$ soit un isomorphisme, équivaut à l'égalité $\mathrm{K}' = \mathrm{K}$, qui s'exprime par les relations **17**

$$\text{(xx)} \qquad d_m \in \mathrm{K} = \sum_p \mathrm{A(M \times M)}\,\mathrm{A}_p\,d_p, \qquad \text{pour tout } m \in \mathrm{M}.$$

Utilisant la tri-graduation naturelle de A(M × M), et le fait que le premier degré de d_m est nul, cela signifie qu'on peut écrire d_m comme somme d'éléments de la forme

$$f\,e_{r,s}\,(e_{p,0} - e_{0,p}) \qquad \text{avec} \quad f \in \mathrm{A}_{-p} \cdot \mathrm{A}_p,$$

et utilisant le fait que le degré total de d_m est m, on peut se borner à des termes tels que

$$r + s + p = m.$$

---

(18) N.D.E. : En effet, pour tout $b \in \mathrm{A}$, $a_m \in \mathrm{A}_m$, on a $\theta(b \otimes a_m) = ba_m \otimes e_m$, donc la surjectivité de θ équivaut à (x).

(19) N.D.E. : on a noté K l'idéal noté J dans l'original, afin de le distinguer des idéaux J_p de A_0 qui apparaissent dans (xxx). D'autre part, on a explicité plus loin que les relations (xx) équivalent à l'égalité $\mathrm{K} = \mathrm{K}'$ (voir ce qui suit).

Donc on doit avoir, pour tout $m \in \mathrm{M}$, une expression :

$$\text{(xxx)} \qquad \begin{cases} d_m = e_{m,0} - e_{0,m} = \sum_{r,s} \lambda_{r,s}\,(e_{m-s,s} - e_{r,m-r}) \\ \text{avec} \quad \lambda_{r,s} \in \mathrm{J}_p = \mathrm{A}_p \cdot \mathrm{A}_{-p} \subseteq \mathrm{A}_0\,, \quad p = m-(r+s). \end{cases}$$

Il faut en conclure la relation (x), i.e. les relations

$$\text{(xxxx)} \qquad \mathrm{J}_n = \mathrm{A}_0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathrm{M}.$$

Or pour ceci, il suffit d'établir la même relation modulo tout idéal maximal de A_0. Comme les hypothèses faites sont invariantes par une telle réduction, on peut supposer déjà que A_0 est un *corps.*

Lemme 5.2. — *Sous les conditions précédentes* (*avec* A_0 *un corps*)*, si* $\mathrm{M} \neq 0$*, il existe un* $p \in \mathrm{M} - \{0\}$ *tel que* $\mathrm{J}_p = \mathrm{A}_0$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, alors la somme du dernier membre de (xxx) serait nulle, pour tout $m \in \mathrm{M}$, ce qui est absurde.

18 ***Corollaire 5.3***. — *Sous les conditions précédentes, mais sans plus supposer que* A_0 *soit un corps, il existe un nombre fini d'éléments* $p_i \in \mathrm{M} - \{0\}$*, tels que* $\sum_i \mathrm{J}_{p_i} = \mathrm{A}_0$.

En effet, on applique le résultat 5.2 aux situations déduites de A/A_0 par réduction modulo les idéaux maximaux de A_0. [20]

Corollaire 5.4. — *Supposons à nouveau* A_0 *un corps. Alors pour tout sous-groupe* N *de* M *tel que* $\mathrm{N} \neq \mathrm{M}$*, il existe un* $p \in \mathrm{M} - \mathrm{N}$ *tel que* $\mathrm{J}_p = \mathrm{A}_0$.

En effet, soit $\mathrm{M}' = \mathrm{M}/\mathrm{N}$, et considérons l'anneau A' gradué de type M', dont l'anneau sous-jacent est A, et dont la graduation est donnée par

$$\mathrm{A}'_{m'} = \coprod_{m \in h^{-1}(m')} \mathrm{A}_m,$$

où $h : \mathrm{M} \to \mathrm{M}' = \mathrm{M}/\mathrm{N}$ est l'homomorphisme canonique. Géométriquement, cette construction revient à considérer le sous-groupe $\mathrm{G}' = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}')$ de G, et la structure sur P de schéma à groupe d'opérateurs G' induite par les opérations de G. Il est alors évident que G' opère librement sur P', i.e. le couple $(\mathrm{M}', \mathrm{A}')$ satisfait aux hypothèses de 5.3. On obtient donc

$$1 = \sum f_i g_i \quad \text{avec} \quad f_i \in \mathrm{A}'_{m'_i} \quad , \quad g_i \in \mathrm{A}'_{-m'_i} \quad \textit{et} \quad m'_i \in \mathrm{M}' - \{0\},$$

d'où aussitôt la conclusion 5.4 en prenant les composantes du deuxième membre suivant A_0, et utilisant que A_0 est un corps.

Notons maintenant que

$$\mathrm{J}_p \cdot \mathrm{J}_q \subseteq \mathrm{J}_{p+q} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_p = \mathrm{J}_{-p},$$

[20] N.D.E. : Il résulte de 5.2 que $\sum_{p \neq 0} \mathrm{J}_p = \mathrm{A}_0$, donc 1 s'écrit comme une somme finie $\sum_i x_i$, avec $x_i \in \mathrm{J}_{p_i}$.

donc si N désigne l'ensemble des $m \in M$ tels que $J_p = A_0$, on voit que N est un *sous-groupe* de M. Utilisant 5.4 on voit qu'il est égal à M. Cela achève la démonstration du théorème 5.1.

Comme nous l'avons signalé en cours de démonstration, le théorème 5.1 implique : 19

Corollaire 5.5. — *Sous les conditions de* 5.1*, le morphisme graphe*

$$P \underset{S}{\times} G \longrightarrow P \underset{S}{\times} P$$

est une immersion fermée.

On en conclut aussitôt :

Corollaire 5.6. — *Soit* σ *une section de* P *sur* S*. Alors le morphisme* $g \mapsto \sigma \cdot g$ *de* G *dans* P *défini par* σ *est une immersion fermée.*

Corollaire 5.7. — *Soient* G, H *deux* S*-groupes, avec* G diagonalisable*,* H affine sur S*, et soit* $u : G \to H$ *un homomorphisme de* S*-groupes qui soit un* monomorphisme*. Alors* u *est une immersion fermée,* $H/G = X$ *existe et* H *est un fibré principal homogène sur* X *de groupe* G_X*, enfin* X *est affine sur* S.

Corollaire 5.8. — *Sous les conditions de* 5.1*, si* P *est de type fini* (*resp. de présentation finie*) *sur* S*, il en est de même de* $X = P/G$.

En effet, il résulte de l'hypothèse que les fibres de G_X sont de type fini, donc G_X est de présentation finie sur X par 2.1 b), donc P étant un torseur sous G_X est de présentation finie sur X [21]. Comme il est aussi fidèlement plat sur X, notre conclusion résulte alors de Exp. V, Prop. 9.1.

6. Morphismes essentiellement libres, et représentabilité de certains foncteurs de la forme $\prod_{Y/S} Z/Y$ [(*)]

20

Définition 6.1. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de préschémas. On dit que f est *essentiellement libre*, ou encore que X *est essentiellement libre sur* S, si on peut trouver un recouvrement de S par des ouverts affines S_i, pour tout i un S_i-préschéma S'_i *affine et fidèlement plat* sur S_i, et un recouvrement $(X'_{ij})_j$ de $X'_i = X \times_S S'_i$ par des ouverts affines X'_{ij}, tels que pour tout (i, j), l'anneau de X'_{ij} soit un module *libre* sur l'anneau de S'_i. [22]

(*) Le présent numéro est indépendant de la théorie des groupes diagonalisables ; sa place naturelle serait dans VI_B.

(21) N.D.E. : cf. EGA II, 2.7.1 (vi).

(22) N.D.E. : On peut remplacer « libre » par « projectif », cf. 6.8 plus bas. D'autre part, cette notion est à rapprocher de celle de S-préschéma plat et *pur*, introduite et développée dans [**RG71**] ; voir en particulier *loc. cit.*, 1ère partie, 3.3.12 et 2ème partie, 3.1.4.1.

Proposition 6.2. — a) *Si* X *est essentiellement libre sur* S, *il est* plat *sur* S, *la réciproque étant vraie si* S *est artinien.*

b) *Si* S *est le spectre d'un corps, tout* S*-préschéma est essentiellement libre sur* S.

c) *Si* X *est essentiellement libre sur* S, *et si* $S' \to S$ *est un morphisme de changement de base,* $X' = X \times_S S'$ *est essentiellement libre sur* S'. *La réciproque est vraie si* $S' \to S$ *est fidèlement plat et quasi-compact.*

La démonstration est immédiate, en utilisant pour la réciproque dans a) le fait qu'un module plat sur un anneau local artinien est libre. [23]

Proposition 6.3. — *Soit* H *un* S*-préschéma en groupes diagonalisable* (*plus généralement, qui devient diagonalisable par extension fidèlement plate quasi-compacte convenable de tout ouvert affine de* S, *i.e.* H *est « de type multiplicatif » , cf.* IX 1.1). *Alors* H *est essentiellement libre sur* S.

En effet, si H est diagonalisable, il est affine sur S et défini par une algèbre qui est un $\mathscr{O}_S$-module libre.

L'introduction de la définition 6.1 est justifiée par le

21 ***Théorème 6.4***. — *Soient* S *un préschéma,* Z *un* S*-préschéma* essentiellement libre, Y *un sous-préschéma* fermé *de* Z. *Considérons le foncteur suivant* [24]

$$F = \prod_{Z/S} Y/Z : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \qquad F(S') = \Gamma(Y_{S'}/Z_{S'}) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } Z_{S'} \neq Y_{S'}; \\ \{\mathrm{id}_{Z_{S'}}\} & \text{si } Z_{S'} = Y_{S'}. \end{cases}$$

Ce foncteur est représentable par un sous-préschéma fermé de S. [25]

[26] Notons d'abord que F est un *faisceau* pour la topologie (fpqc) : comme $F(S') = \varnothing$ ou $\{pt\}$ pour tout S', ceci se ramène à vérifier que si (S_i) est un recouvrement ouvert de S (resp. $S' \to S$ un morphisme fidèlement et quasi-compact), et si chaque $Y_{S_i} \to Z_{S_i}$ (resp. si $Y'_S \to Z_{S'}$) est un isomorphisme, il en est de même de $Y \to Z$; or ceci est clair (resp. résulte de SGA 1, VIII 5.4 ou EGA IV_2, 2.7.1).

De plus, d'après SGA 1, VIII 2.1 et 5.5, les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts sont de *descente effective* pour la catégorie fibrée des flèches d'immersion fermée. Ceci nous permet de nous borner avec les notations de 6.1 au cas où $S = S'_i$.

Soit alors (Z_j) un recouvrement de Z par des ouverts affines tels que $\mathscr{O}(Z_j)$ soit un module libre sur $A = \mathscr{O}(S)$, et soient $Y_j = Y \cap Z_j$ et $F_j : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur défini en termes de (Z_j, Y_j) comme F en termes de (Z, Y). C'est un sous-foncteur du foncteur final, et on a évidemment $F = \bigcap_j F_j$, ce qui nous ramène à

---

[23] N.D.E. : En effet, soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local artinien, k son corps résiduel, M un A-module arbitraire, $(x_i)_{i \in I}$ des éléments de M dont les images forment une base de $M/\mathfrak{m}M$ sur k. Soient F le A-module libre de base $(e_i)_{i \in I}$, et $\phi : F \to M$ le A-morphisme défini par $\phi(e_i) = x_i$. Alors $Q = \mathrm{Coker}\,\phi$ vérifie $Q = \mathfrak{m}Q$, d'où, puisque $\mathfrak{m}$ est nilpotent, $Q = 0$. Supposons de plus M *plat* sur A ; alors $K = \mathrm{Ker}\,\phi$ vérifie $K \otimes_A k = 0$, i.e. $K = \mathfrak{m}K$, d'où $K = 0$.

[24] N.D.E. : cf. II.1, où ce foncteur est noté $\prod_{Z/S} Y$.

[25] N.D.E. : On a corrigé Z en S.

[26] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; voir ausi 1.7.3.

prouver que chaque F_j est représentable par un sous-schéma fermé T_j de S (car alors F sera représentable par le sous-schéma fermé T intersection des T_j). On peut donc supposer Z également affine, $Z = \operatorname{Spec}(B)$, où B est un A-module libre. Soit J une partie de B définissant le sous-schéma Y de Z, et soit K l'idéal dans A engendré par les $u_i(J) \subseteq A$, où les $u_i : B \to A$ sont les formes coordonnées par rapport à la base choisie. On constate aussitôt que $T = \mathscr{V}(K) = \operatorname{Spec}(A/K)$ satisfait à la condition voulue, ce qui achève la démonstration.

Exemples 6.5. — Donnons des exemples importants de foncteurs qui se ramènent à des foncteurs $\prod_{Z/S} Y/Z$ du type envisagé dans 6.4 et pour lesquels il est utile par la suite d'avoir des critères de représentabilité. On désigne par S un préschéma, par X, Y, Z etc. des préschémas sur S.

a) Donnons-nous un S-morphisme

$$q : X \longrightarrow \underline{\operatorname{Hom}}_S(Y, Z), \tag{x}$$

(« X opère sur Y, à valeurs dans Z »), i.e. un morphisme

$$r : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow Z. \tag{xx}$$

Considérons un sous-préschéma Z' de Z, d'où un monomorphisme 22

$$\underline{\operatorname{Hom}}_S(Y, Z') \longrightarrow \underline{\operatorname{Hom}}_S(Y, Z)$$

qui fait du premier foncteur un sous-foncteur du second, soit X' l'image inverse de ce sous-foncteur par (x), c'est le sous-foncteur de X tel que $X'(T)$ soit l'ensemble des $x \in X(T)$ tels que $q(x) : Y_T \to Z_T$ se factorise par Z'_T. Ce foncteur X' peut se décrire de la façon suivante : on pose $P = X \times_S Y$, soit P' l'image inverse de Z' par $r : P \to Z$, alors on a un isomorphisme évident

$$X' \simeq \prod_{P/X} P'/P. \tag{xxx}$$

On obtient donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z' *fermé dans* Z*, le sous-foncteur* X' *de* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X.

b) Donnons-nous deux façons de faire opérer X sur Y à valeurs dans Z, i.e. deux morphismes

$$q_1, q_2 : X \rightrightarrows \underline{\operatorname{Hom}}_S(Y, Z),$$

et posons $X' = \operatorname{Ker}(q_1, q_2)$: c'est le sous-foncteur de X tel que $X'(T)$ soit l'ensemble des $x \in X(T)$ tels que les deux morphismes $q_1(x)$, $q_2(x) : Y_T \rightrightarrows Z_T$ soient égaux. Or la donnée de q_1, q_2 équivaut à la donnée d'un morphisme

$$q : X \longrightarrow \underline{\operatorname{Hom}}_S(Y, Z \underset{S}{\times} Z),$$

ou encore, d'un morphisme $r : X \times_S Y \to Z \times_S Z$; posons alors $U = Z \times_S Z$, soit U' le sous-préschéma diagonal de $Z \times_S Z$, alors X' n'est autre que l'image inverse du sous-foncteur $\underline{\operatorname{Hom}}_S(Y, U') \to \underline{\operatorname{Hom}}_S(Y, U)$ par q, donc peut se mettre sous la forme (xxx), avec $P = X \times_S Y$, et P' = image inverse de la diagonale par r, i.e. noyau de 23
$X \times_S Y \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} Z$. On est donc sous les conditions de (a).

On voit par suite que : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z *séparé sur* S*, alors le sous-foncteur* X′ *de* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X*.*

c) Donnons-nous un morphisme

$$q : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}),$$

i.e. « X opère sur Y ». Soit X′ le « noyau » de ce morphisme, i.e. le sous-foncteur X′ de X tel que X′(T) soit l'ensemble des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que $q(x) : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit l'identité. Ce foncteur est justiciable de b), comme on voit en introduisant un deuxième homomorphisme

$$q' : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y})$$

« en faisant opérer X trivialement sur Y ». Donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et séparé sur* S*, le sous-foncteur noyau de* q *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X.

d) Sous les conditions de c), considérons le sous-foncteur Y′ de Y « des invariants sous X », donc Y′(T) est l'ensemble des $y \in \mathrm{Y}(\mathrm{T})$ tels que le morphisme correspondant $\overline{q}(y) : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit « le T-morphisme constant de valeur y ». Introduisant q' comme dans c), et les homomorphismes correspondants à q et q' :

$$\overline{q}, \overline{q'} : \ \mathrm{Y} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

on voit que Y′ est précisément $\mathrm{Ker}(\overline{q}, \overline{q'})$, et est donc justiciable encore de b) (avec les rôles de X, Y renversés et Z = Y).

Par suite, *si* X *est essentiellement libre sur* S*,* Y *séparé sur* S*, alors le sous-foncteur* Y′ *de* Y *des invariants sous* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* Y*.*

24 **e)** Des constructions du type explicité dans les exemples précédents sont surtout fréquentes en théorie des groupes. Ainsi, lorsque G est un S-préschéma en groupes opérant sur le S-préschéma X :

$$q : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}),$$

le noyau de q (« le sous-groupe de G opérant trivialement ») est un sous-schéma fermé de G pourvu que X soit essentiellement libre et séparé sur S (exemple c)), et le sous-objet X^{G} des invariants est un sous-préschéma fermé de X, pourvu que G soit essentiellement libre sur S, et X séparé sur S [(27)] (exemple d)).

Soient Y, Z des sous-préschémas de X ; considérons le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ de G (« *transporteur de* Y *en* Z ») dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que l'automorphisme correspondant de X_{T} satisfasse $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$ i.e. induise un morphisme $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ se factorisant en $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$. Donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S*, et* Z *fermé dans* X*, alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *est un sous-préschéma fermé de* G (exemple a)).

On peut aussi considérer le *transporteur strict de* Y *en* Z*,* [(28)] dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) = \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$, qui n'est autre que

(27) N.D.E. : On a corrigé S_{X} en S.

(28) N.D.E. : noté $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$.

$\underline{\mathrm{Transp}}_G(Y, Z) \cap \sigma(\underline{\mathrm{Transp}}_G(Z, Y))$, où σ est la symétrie de G. Par suite, *si* Y *et* Z *sont essentiellement libres sur* S *et fermés dans* X, *le transporteur strict de* Y *en* Z *est un sous-préschéma fermé de* G.

Un cas important est celui où X = G, G opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs. Si H est un sous-préschéma de G, le transporteur strict de H en H est aussi appelé le *normalisateur* de H dans G, et noté $\underline{\mathrm{Norm}}_G\,H$. Donc : *si* H *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G, *essentiellement libre sur* S, *alors* $\underline{\mathrm{Norm}}_G\,H$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de* G.

Soit enfin Z un sous-préschéma de G, alors son *centralisateur* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(Z)$ dans G est le sous-foncteur en groupes de G défini par le procédé de d), quand on considère que « Z opère sur G » par les opérations induites par celles de G ; donc *si* Z *est essentiellement libre sur* S *et* G *est séparé sur* S, $\underline{\mathrm{Centr}}_G(Z)$ *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G. En particulier, *si* G *est essentiellement libre et séparé sur* 25
S, *alors le* centre C *de* G, *qui n'est autre que* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(G)$, *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G.

Lorsque S est le spectre d'un corps, 6.3 b) montre que dans les exemples a) à e) ci-dessus, les conditions « essentiellement libre » sont automatiquement satisfaites, il ne reste que des conditions de séparation. Se rappelant qu'un préschéma en groupes sur un corps est nécessairement séparé, on trouve par exemple :

Corollaire 6.7. — [29] *Soit* G *un préschéma en groupes sur un corps* k. *Alors :*

– *Pour tout sous-préschéma* Z *de* G, *le centralisateur de* Z *dans* G *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G ; *c'est en particulier le cas pour le centre* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(G)$ *de* G.

– *Plus généralement, si* u, v : $X \to G$ *sont des morphismes de préschémas,* $\underline{\mathrm{Transp}}_G(u, v)$ *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G.

– *Pour deux sous-préschémas* Y, Z *de* G, *avec* Z *fermé,* $\underline{\mathrm{Transp}}_G(Y, Z)$ *est un sous-préschéma fermé de* G. *Si* Y *est également fermé, on a la même conclusion pour* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(Y, Z)$.

– *Pour* tout *sous-préschéma* en groupes [30] H *de* G, *le* normalisateur $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G.

Remarque 6.8. — [31] Soient A un anneau commutatif, M un A-module, $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$; munissons le A-module $\mathrm{End}_A(M)$ de la topologie de la convergence ponctuelle discrète, c.-à-d., une base de voisinage de 0 est formée par les sous-A-modules suivants, où $n \in \mathbb{N}$ et $m_1, \ldots, m_n \in M$:

$$K(m_1, \ldots, m_n) = \{u \in \mathrm{End}_A(M) \mid u(m_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n\}.$$

On dit que M est un A-module *quasi-libre* si l'image du morphisme canonique $\Theta : M \otimes_A M^\vee \to \mathrm{End}_A(M)$ contient dans son adhérence id_M, c.-à-d., si la condition suivante

[29] N.D.E. : On a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de 6.6.
[30] N.D.E. : En effet, sur un corps k, tout sous-préschéma en groupes de G est *fermé*, cf. VI_A, 0.6.1.
[31] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier on a ajouté le lemme 6.8.1.

est vérifiée :

$$(*)\qquad \begin{cases} \text{pour tous } m_1, \ldots, m_n \in \mathrm{M}, \text{ il existe } x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{M} \text{ et } f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{M}^\vee \\ \text{tels que } m_i = \Theta(\sum_{s=1}^r x_s \otimes f_s)(m_i) = \sum_{s=1}^r f_s(m_i)\, x_s \text{ pour } i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

(Dans ce cas, $\operatorname{Im}\Theta$ est dense dans $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ car pour tout $u \in \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$, on a $u(m_i) = \sum_{s=1}^r f_s(m_i)\, u(x_s) = \Theta(\sum_{s=1}^r u(x_s) \otimes f_s)(m_i)$.)

Notons d'abord que cette propriété est stable par changement de base. En effet, soient $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ un morphisme d'anneaux, $\mathrm{M}' = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$, et $m'_1, \ldots, m'_n \in \mathrm{M}'$, alors $m'_i = \sum_j m_{ij} \otimes b_{ij}$ ($m_{ij} \in \mathrm{M}$, $b_{ij} \in \mathrm{A}'$) ; par hypothèse, il existe $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{M}$ et $f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ tels que $m_{ij} = \sum_s x_s\, f_s(m_{ij})$ pour tout i, j. Notons $\phi \circ f_s$ l'image de f_s dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{M}, \mathrm{A}')$; alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a :

$$\big(\sum_s x_s \otimes \phi \circ f_s\big)(m'_i) = \sum_{s,j} x_s \otimes \phi(f_s(m_{ij}))\, b_{ij} = \sum_j \big(\sum_s x_s\, f_s(m_{ij})\big) \otimes b_{ij} = m'_i\,,$$

ce qui prouve que M' est quasi-libre sur A'.

Notons aussi que tout A-module projectif P est quasi-libre (il existe des A-morphismes $\mathrm{A}^{(\mathrm{I})} \xrightarrow{\pi} \mathrm{P} \xrightarrow{\tau} \mathrm{A}^{(\mathrm{I})}$ tels que $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{P}}$, notons (e_i) la base canonique de $\mathrm{A}^{(\mathrm{I})}$ et f_i la forme linéaire $e_i^* \circ \tau$ sur P ; si $m_1, \ldots, m_n \in \mathrm{P}$, il existe une partie finie J de I telle que $m_k = \sum_{i \in \mathrm{J}} f_i(m_k)\, \pi(e_i)$ pour $k = 1, \ldots, n$).

Alors, le théorème 6.4 reste valable en remplaçant dans l'énoncé de la définition 6.1 le mot « libre » par « projectif » ou, plus généralement, par « quasi-libre ». En effet, en procédant comme dans la démonstration de 6.4, on se ramène à prouver le

Lemme 6.8.1. — *Soient* M *un* A*-module* quasi-libre*,* N *un sous-module,* F *le foncteur covariant* (A-algèbres) $\to$ (**Ens**) *tel que* $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{pt}\}$ *si* $\mathrm{M}_{\mathrm{B}} = (\mathrm{M}/\mathrm{N})_{\mathrm{B}}$*, et* $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \varnothing$ *sinon. Alors il existe un idéal* K *de* A *tel que* $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{pt}\}$ *si et seulement si le morphisme* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *se factorise par* A/K*, i.e. on a un isomorphisme fonctoriel en* B *:*

$$\mathrm{F}(\mathrm{B}) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{A-alg.}}(\mathrm{A}/\mathrm{K}, \mathrm{B}).$$

Démonstration. Soit (n_j) un système de générateurs de N, et soit F_j le sous-foncteur du foncteur final $\underline{\mathbf{e}}$ ($\underline{\mathbf{e}}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{pt}\}$ pour tout B) correspondant au sous-module $\mathrm{A}n_j$. On a $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{pt}\}$ si et seulement si l'image de chaque n_j dans M_{B} est nulle, donc F est l'intersection des foncteurs F_j. Ceci nous ramène au cas où N est engendré par un élément n.

Soit $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ une A-algèbre ; si l'image $n \otimes 1$ de n dans M_{B} est nulle, alors pour tout $f \in \mathrm{M}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ on a $0 = f(n) \otimes 1 = \phi(f(n))$. D'autre part, comme M est quasi-libre, il existe $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{M}$ et $f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{M}^\vee$ tels que $n = \sum_s f_s(n)\, x_s$, d'où $n \otimes 1 = \sum_s x_s \otimes \phi(f_s(n))$. Il en résulte que $n \otimes 1 = 0$ si et seulement si ϕ se factorise par A/K, où K est l'idéal engendré par les $f_s(n)$ pour $s = 1, \ldots, r$. Ceci prouve le lemme.

7. Appendice : Sur les monomorphismes de préschémas en groupes

Le résultat démontré dans le présent numéro est inutile pour la suite du séminaire, sauf X 8.8 et XV et XVI. Il s'appuie de façon essentielle sur le théorème d'existence de groupes quotients de l'Exposé $\mathrm{VI_A}$. [32]

Le corollaire 5.7 conduit à se demander sous quelles conditions on peut affirmer qu'un monomorphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de S-groupes est une immersion, voire une immersion fermée. **26**

Nous avons vu dans $\mathrm{VI_B}$ 1.4.2 qu'il en est ainsi si S est le spectre d'un corps, pourvu que G soit de type fini sur k et H localement de type fini sur k. On en conclut aisément que le même résultat reste valable si on suppose seulement S artinien. [33]

D'autre part, il est facile de donner des exemples de monomorphismes bijectifs qui ne sont pas des immersions, S étant par exemple la droite affine sur un corps, ou le spectre d'un anneau de valuation discrète. On prendra par exemple $\mathrm{H} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$, $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}_2$, où G_1 est le sous-groupe ouvert de H, complémentaire du point fermé x distinct de 0 de la fibre $\mathrm{H}_s \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (où s désigne un point fermé fixé de S), et G_2 le sous-schéma fermé de H qui est somme du sous-schéma réduit à la section unité, et du sous-schéma fermé réduit défini par le point fermé x. On constate aisément que G_2 est bien stable pour la multiplication de H, donc est un schéma en groupes. Les immersions $\mathrm{G}_i \to \mathrm{H}$ $(i = 1, 2)$ définissent alors un homomorphisme de S-groupes $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \to \mathrm{H}$, qui est évidemment un monomorphisme bijectif (et en plus une immersion locale), mais n'est pas une immersion. (On constate que G et H sont réduits, G ayant trois composantes irréductibles disjointes, alors que H n'a que deux composante irréductibles). On notera que $\mathrm{G}_1 \to \mathrm{H}$ donne aussi un exemple d'un sous-groupe ouvert G de H qui n'est pas fermé (contrairement à ce qui a lieu pour les groupes algébriques sur un corps). La théorie de la dégénérescence des courbes elliptiques fournit d'autres exemples de ce dernier phénomène, avec de plus H *lisse* sur S de dimension relative 1, G à fibres connexes.

Il est possible [*] par contre que dès qu'on suppose G *plat* sur S, et (disons) G et H *de présentation finie* sur S, un monomorphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de S-groupes soit automatiquement une immersion. Nous allons prouver un résultat de cette nature, moyennant des hypothèses supplémentaires.

Notons d'abord que l'on peut supposer S *affine*, et (grâce à l'hypothèse de présentation finie sur G et H, qui permet de se ramener au cas du spectre d'un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$ [34]) S *noethérien.* Alors G et H sont noethériens. Dire que $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est une immersion fermée, (resp. une immersion) revient alors à dire que u est un monomorphisme (ce qui est vrai par hypothèse) et que u est propre (resp. et que u est **27**

[*] En fait, M. Raynaud a construit un contre-exemple, avec G lisse à fibres connexes, cf. XVI 1.1 c). Si on ne suppose pas G à fibres connexes, on peut prendre $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_2)$, $\mathrm{G} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$ privé du point fermé non neutre, $\mathrm{H} = (\boldsymbol{\mu}_2)_{\mathrm{S}}$.

[32] N.D.E. : cf. Exp. $\mathrm{VI_A}$, Théorèmes 3.2 et 3.3.2.

[33] N.D.E. : tenir compte des ajouts faits dans $\mathrm{VI_B}$ ...

[34] N.D.E. : cf. EGA IV_3, § 8, et Exp. $\mathrm{VI_B}$, § 10.

propre en tout point de $u(\mathrm{G})$ [35]. Le critère valuatif de propreté nous assure qu'il suffit de vérifier que pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, avec S' le spectre d'un anneau de valuation discrète, complet si on y tient, le morphisme $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ a la même propriété de propreté. (Le cas de la propreté locale a été oublié dans EGA II 7.3, et figurera en remords dans EGA IV [*]). Cela nous ramène donc au cas où S *est lui-même le spectre d'un anneau de valuation discrète complet*, — sous réserve que les hypothèses supplémentaires sur G, H, u que nous serions amenés à formuler soient stables par changement de base.

Soient alors s (resp. s') le point fermé (resp. le point générique) de S. Alors les homomorphismes induits sur les fibres

$$u_s : \mathrm{G}_s \longrightarrow \mathrm{H}_s \qquad \text{et} \qquad u_{s'} : \mathrm{G}_{s'} \longrightarrow \mathrm{H}_{s'}$$

sont des immersions fermées, puisque ce sont des monomorphismes de schémas en groupes de type fini sur des corps ($\mathrm{VI_B}$ 1.4.2). Nous pouvons donc identifier $\mathrm{G}_{s'}$ à un sous-schéma fermé de $\mathrm{H}_{s'}$. Or on a le résultat suivant :

Lemme 7.1. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète,* s' *son point générique,* H *un* S*-préschéma,* L' *un sous-préschéma fermé de la fibre générique* $\mathrm{H}_{s'}$*, de sorte que* L' *est aussi un sous-préschéma de* H*.*

Alors l'adhérence schématique L' *dans* H (*i.e. le plus petit sous-préschéma fermé de* H *majorant* L'*,* cf. EGA I 9.5) *existe et est aussi l'unique sous-préschéma fermé de* H*, plat sur* S*, dont la fibre générique soit* L'*. De plus, la formation de* L *est fonctorielle par rapport à un couple* $(\mathrm{H}, \mathrm{L}')$ *variable, et commute à la formation de produits cartésiens sur* S*.*

28 *En particulier, si* H *est un* S*-groupe et* L' *un sous-groupe de* $\mathrm{H}_{s'}$*, alors* L *est un sous-groupe de* H*.*

La démonstration est immédiate et laissée au lecteur [**]. Appliquant ceci à la situation H, $\mathrm{G}_{s'}$, on voit que le monomorphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ se factorise en $\mathrm{G} \to \mathrm{L} \to \mathrm{H}$, où L est un sous-groupe de H qui est un sous-préschéma fermé, *plat* sur S, et où $\mathrm{G} \to \mathrm{L}$ induit un isomorphisme pour les fibres génériques. Alors $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est une immersion (resp. une immersion fermée) si et seulement si $u' : \mathrm{G} \to \mathrm{L}$ l'est. Cela nous ramène donc au cas où H *est plat sur* S *et* $u_{s'} : \mathrm{G}_{s'} \to \mathrm{H}_{s'}$ *un isomorphisme*, (sous réserve que les hypothèses supplémentaires que nous aurions à formuler sur G, H, u soient respectées lorsqu'on remplace H par un sous-préschéma en groupes fermé). Comme alors H est l'adhérence schématique de $\mathrm{H}_{s'}$, si u est une immersion, alors $u(\mathrm{G})$ sera un sous-préschéma [36] de H qui majore $\mathrm{H}_{s'}$, donc son adhérence schématique sera également H, et par suite $u(\mathrm{G})$ sera un sous-préschéma ouvert de H. Par suite, nous devrons prouver en fait que u est une immersion *ouverte*, (resp. un *isomorphisme* si nous voulions établir que u est une immersion fermée). Comme G et H sont plats

[*] cf. EGA IV_3, 15.7.
[**] cf. EGA IV_2, 2.8.

[35] N.D.E. : cf. EGA IV_3, 8.11.5 et 15.7.1
[36] N.D.E. : On a supprimé le mot « fermé ».

sur S, il revient au même de dire que les morphismes induits sur les fibres sont des immersions ouvertes, resp. des isomorphismes (cf. SGA 1, I 5.7), et comme il en est déjà ainsi de $u_{s'}$, *on est ramené à prouver que* u_s *est une immersion ouverte, resp. un isomorphisme.*

Notons d'abord que, puisque G et H sont plats sur S, la dimension de leurs fibres reste constante ($\mathrm{VI_B}$ 4.3). Comme G et H ont même fibre générique, il s'ensuit que cette dimension est la même pour G et H, donc $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ est un *monomorphisme* de groupes algébriques *de même dimension.* On en conclut facilement que G_s est ouvert dans H_s, et en fait est ensemblistement une réunion de composantes connexes de H_s (on est ramené au cas où le corps de base est algébriquement clos, et G et H réduits, donc lisses sur k, où c'est immédiat...). Donc $\mathrm{H}_s - \mathrm{G}_s$ est fermé dans H_s, donc dans H, donc son complémentaire H′ dans H est ouvert, et c'est évidemment un 29
ouvert stable pour la loi de groupe de H. Donc, quitte à remplacer H par H′, on peut, pour prouver que u est une immersion, se ramener (avec la réserve habituelle) au cas où, en plus des hypothèses précédentes, on suppose *u bijectif*, i.e. $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *bijectif.* On est donc en tous cas ramené à prouver que u ou encore u_s est un isomorphisme, moyennant le cas échéant l'hypothèse de bijectivité.

Supposons donc d'abord que u est bijectif. Si H_s est *réduit*, on peut évidemment conclure que u_s est un isomorphisme, car G_s s'identifie à un sous-schéma fermé de H_s ayant même ensemble sous-jacent. En particulier, si $k = \kappa(s)$ est de caractéristique nulle, tout groupe algébrique sur k est réduit d'après Cartier (cf. $\mathrm{VI_B}$, 1.6.1, ou $\mathrm{VII_B}$, 3.3.1, ou EGA IV_4, 16.12.2 et 17.12.5) et on a ainsi obtenu :

Proposition 7.2. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de préschémas en groupes de présentation finie sur* S. *Supposons que u soit un monomorphisme,* G *plat sur* S, *et les corps résiduels de* S *de caractéristique nulle. Alors u est une immersion.*

Lorsque $\kappa(s)$ est de caractéristique $p > 0$, nous allons nous borner au cas où G *est commutatif.* Alors (avec les réductions faites) H est également commutatif, car c'est l'adhérence schématique de $\mathrm{H}_{s'}$ qui est isomorphe à $\mathrm{G}_{s'}$ donc commutatif. Pour tout entier $n \geqslant 0$, nous posons $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{V}/\mathfrak{m}^{n+1})$, (où V est l'anneau de valuation qui définit S et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal), $\mathrm{G}_n = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$, $\mathrm{H}_n = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$. Pour tout entier $m > 0$, nous introduisons aussi les sous-groupes ${}_m\mathrm{G}$ et ${}_m\mathrm{H}$ de G et H, noyaux de la puissance m-ème. On définit de même ${}_m(\mathrm{G}_n) = ({}_m\mathrm{G})_n$, qu'on notera simplement ${}_m\mathrm{G}_n$, et de même pour H.

En vertu de $\mathrm{VI_A}$ 3.2, on peut former les quotients $\mathrm{Q}_n = \mathrm{H}_n/\mathrm{G}_n$, alors Q_n est un schéma en groupes commutatifs sur S_n, plat sur S_n, et $\mathrm{H}_n \to \mathrm{Q}_n$ est un morphisme fidèlement plat de noyau G_n. Comme la formation des quotients commute à l'extension de la base [37], on a

$$\mathrm{Q}_n \simeq \mathrm{Q}_m \underset{\mathrm{S}_m}{\times} \mathrm{S}_n \quad \text{pour} \quad m \geqslant n,$$

en particulier la fibre $\mathrm{Q}_n \times_{\mathrm{S}_n} \mathrm{S}_0$ n'est autre que $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{H}_0/\mathrm{G}_0$. Comme G_0 a même 30
ensemble sous-jacent que H_0, alors Q_0 est réduit ensemblistement à un seul point :

[37] N.D.E. : Mettre ceci en évidence dans les Exp. V et $\mathrm{VI_A}$...

c'est un groupe *purement infinitésimal.* Par suite, chaque Q_n est *fini* et plat sur S_n. Donc Q_n est défini par une algèbre C_n sur $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}/\mathfrak{m}^{n+1}$ qui est un module libre de type fini sur cet anneau, et pour $m \geqslant n$, on a $\mathrm{C}_n = \mathrm{C}_m \otimes_{\mathrm{V}_m} \mathrm{V}_n$, isomorphisme respectant l'application diagonale également. On obtient donc un module libre de type fini $\mathrm{C} = \varprojlim \mathrm{C}_n$ sur $\mathrm{V} = \varprojlim \mathrm{V}_n$, et les applications diagonales des C_n définissent une application diagonale de C, de sorte que $\mathrm{Q} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C})$ devient un schéma en groupes fini et plat sur S, tel que

$$\mathrm{Q} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_n = \mathrm{Q}_n$$

pour tout n.

Lemme 7.3. — [38] *Soient* K *un corps,* Q *un schéma en groupe fini sur* K*, de degré* n*. Alors le morphisme de puissance* n*-ème dans* Q *est nul.*

Cf. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 8.5.

Remarque 7.3.1. — L'énoncé 7.3 garde un sens pour un schéma en groupes Q/S fini et localement libre sur S, S étant un préschéma de base quelconque. Il serait intéressant de trouver une démonstration dans ce cas général

On notera que 7.3 (i.e. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 8.5) prouve en tous cas que l'énoncé envisagé est vrai si S est *réduit*, comme on voit en appliquant 7.3 aux fibres de Q en les points maximaux (i.e. points génériques des composantes irréductibles) de S. [39]

En particulier, sous les conditions de la démonstration précédente, où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et Q est commutatif, on trouve que $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Q}} = 0$. D'ailleurs, ici n est une puissance p^{ν_0} de la caractéristique résiduelle, et on trouve le

31 ***Corollaire 7.4***. — Q *et les* Q_n *étant comme ci-dessus, et leur degré commun étant* p^{ν_0}*, on aura* $p^{\nu_0} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Q}} = 0$ *et par suite* $p^{\nu_0} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Q}_n} = 0$ *pour tout* n*.*

Corollaire 7.5. — *Supposons de plus* G_0 *lisse sur* k*, et l'homomorphisme* $p \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}_0}$ *plat* (*ce qui revient à dire, en vertu de la structure des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos* $\overline{k}$*, que* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *ne contient pas de sous-groupe isomorphe au groupe additif*)*. Alors pour tout* $\nu \geqslant \nu_0$ *et* $n > 0$*, le groupe* ${}_{p^\nu}\mathrm{H}_n$ *est plat sur* S_n*.*

En effet, il résulte de $p^{\nu_0} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Q}_n} = 0$ que $p^{\nu} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}_n}$ se factorise à travers G_n, de sorte qu'on aura un diagramme commutatif :

[38] N.D.E. : On a supprimé ici l'hypothèse que Q soit commutatif, et l'on a modifié 7.3.1 en conséquence. Noter que si Q n'est pas commutatif, le morphisme de puissance n-ème n'est pas en général un homomorphisme de groupes.

[39] N.D.E. : Ajouter ceci dans $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ – D'autre part, l'énoncé est vrai pour tout S si Q est *commutatif*, cf. le théorème de Deligne dans [**TO70**], p. 4.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_n \arrow[r, "p^\nu\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{H}_n}"] \arrow[dr, "v_n"] & \mathrm{H}_n \\ \mathrm{G}_n \arrow[u, "u_n"] \arrow[r, "p^\nu\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{G}_n}"] & \mathrm{G}_n \arrow[u, "u_n"'] \end{tikzcd} .$$

Je dis que v_n est *plat*. En effet, comme H_n et G_n sont plats sur S_n, on est ramené à vérifier que v_0 est plat (SGA 1, IV 5.9), donc on peut supposer que $n = 0$ d'où $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(k)$. Comme $p\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{G}_0}$ donc $p^\nu\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{G}_0}$ est plat, son image est un sous-groupe ouvert *induit* G'_0 de G_0, et comme $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$ est surjectif, il s'ensuit que v_0 prend ses valeurs dans G'_0, donc peut être considéré comme un homomorphisme dans G'_0. Comme son composé avec u_0 est un épimorphisme, c'est un épimorphisme, donc c'est un homomorphisme plat dans G'_0, donc un homomorphisme plat dans G_0. Donc v_n est plat, donc $\mathrm{Ker}\, v_n = {}_{p^\nu}\mathrm{H}$ est plat sur S. C.Q.F.D.

Remarque. — Nous n'avons pas utilisé explicitement le fait que G_0 soit lisse sur k ; mais il est facile de voir que c'est une conséquence du fait que $p\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ soit plat, c'est **32**
pourquoi nous avons explicité cette condition dans l'hypothèse du corollaire 7.5.

Lemme 7.6. — *Soit $u : \mathrm{G}\to\mathrm{H}$ un monomorphisme surjectif de groupes algébriques commutatifs sur un corps k de caractéristique $p > 0$, considérons le groupe* (*purement infinitésimal*) $\mathrm{Q} = \mathrm{H}/\mathrm{G}$, *alors il existe un entier ν_1 tel que pour $\nu \geqslant \nu_1$ la suite*

$$0 \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{G} \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{Q} \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Il suffit d'assurer l'exactitude en Q, et pour ceci d'assurer que l'homomorphisme

$$\text{(x)} \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Q},e} \longrightarrow \mathscr{O}_{{}_{p^\nu}\mathrm{H},e}$$

des anneaux locaux en les éléments neutres est injectif (N.B. se rappeler que Q est réduit à l'élément e ensemblistement). Or on a un homomorphisme naturel

$$\text{(xx)} \qquad \mathscr{O}_{{}_{p^\nu}\mathrm{H},e} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{H},e}/\mathfrak{m}^{p^\nu},$$

où $\mathfrak{m}$ est l'idéal d'augmentation (i.e. l'idéal maximal) de $\mathscr{O}_{\mathrm{H},e}$, comme on voit en notant que $p^\nu\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{H}}$ s'annule sur le noyau de « l'homomorphisme de Frobenius itéré » F^ν ; le composé des homomorphismes (x) et (xx) est aussi égal au composé naturel

$$\text{(xxx)} \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Q},e} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{H},e} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{H},e}/\mathfrak{m}^{p^\nu}.$$

Or $\mathscr{O}_{\mathrm{Q},e} \to \mathscr{O}_{\mathrm{H},e}$ est injectif, puisque $\mathrm{H}\to\mathrm{Q}$ est un épimorphisme donc est plat, d'autre part $\mathscr{O}_{\mathrm{Q},e}$ est artinien, enfin l'intersection dans $\mathscr{O}_{\mathrm{H},e}$ des $\mathfrak{m}^{p^\nu}$ est réduit à 0, donc aussi l'intersection de leurs traces sur $\mathscr{O}_{\mathrm{Q},e}$. Par suite l'une de ces traces est **33**
réduite à 0, ce qui prouve que (xxx) est injectif, et a fortiori (x) est injectif.

Lemme 7.7. — *Sous les conditions de* 7.5 *il existe un* ν_1 *tel que, pour* $\nu \geqslant \nu_1$ *et tout* n*, la suite de* S_n*-groupes*

$$0 \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{G}_n \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{H}_n \xrightarrow{w_n} \mathrm{Q}_n \longrightarrow 0$$

soit exacte, (*de façon précise* w_n *est fidèlement plat et son noyau est* ${}_{p^\nu}\mathrm{G}_n$).

On prend ν_1 comme dans 7.6 appliqué à $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$, et $\nu_1 \geqslant \nu_0$ (où $p^{\nu_0} = \operatorname{rang} \mathrm{Q}_0$). Il faut seulement vérifier que w_n est fidèlement plat. Or en vertu de 7.5, ${}_{p^\nu}\mathrm{H}$ est plat sur S_n, et comme Q_n l'est aussi, on est ramené à vérifier que $w_0 : {}_{p^\nu}\mathrm{H}_0 \to \mathrm{Q}_0$ est fidèlement plat i.e. est un épimorphisme, ce qui est vrai d'après le choix de ν_1.

Corollaire 7.8. — *Supposons de plus* H *séparé sur* S*, plus généralement que* ${}_{p^\nu}\mathrm{H}$ *soit séparé sur* S *pour tout* ν*, et que* ${}_{p^\nu}\mathrm{G}$ *soit fini sur* S *pour tout* ν*. Alors les schémas en groupes* ${}_{p^\nu}\mathrm{G}$ *et* ${}_{p^\nu}\mathrm{H}$ *sont finis et plats sur* S *pour* $\nu \geqslant \nu_1$*, et on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{G} \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{H} \xrightarrow{w} \mathrm{Q} \longrightarrow 0.$$

Comme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est surjectif, il en est de même du morphisme induit ${}_{p^\nu}\mathrm{G} \to {}_{p^\nu}\mathrm{H}$, et comme le premier membre est fini sur S et le deuxième séparé sur S, il s'ensuit que le deuxième membre est fini sur S. Pour vérifier alors que ${}_{p^\nu}\mathrm{G}$ et ${}_{p^\nu}\mathrm{H}$ sont aussi plats sur S, il suffit de vérifier qu'il en est ainsi de ${}_{p^\nu}\mathrm{G}_n$ et ${}_{p^\nu}\mathrm{H}_n$ pour tout n, ce qui est contenu dans 7.5. Enfin, la suite exacte de 7.8 provient des suites exactes 7.7 pour n variable.

34 Prenant les fibres génériques dans la suite exacte 7.8 et se rappelant que $u_{s'} : \mathrm{G}_{s'} \to \mathrm{H}_{s'}$ est un isomorphisme, on trouve $\mathrm{Q}_{s'}$ = groupe unité, d'où (puisque Q est plat sur S) Q = groupe unité, d'où Q_s = groupe unité, donc $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ est un isomorphisme. Donc :

Proposition 7.9. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de préschémas en groupes de présentation finie sur le préschéma* S*. On suppose :*

a) u *est un monomorphisme.*

b) G *est plat sur* S.

c) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $\kappa(s)$ *soit de caractéristique résiduelle* $p > 0$*, on veut que les conditions suivantes soient vérifiées pour l'homomorphisme* $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ *de préschémas en groupes sur* $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$ *déduit de* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *par le changement de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *:*

- G' *est commutatif,*
- *la fibre spéciale* $\mathrm{G}'_0 = \mathrm{G}_s$ *est lisse sur* $\kappa(s)$,
- *pour tout entier* $\nu > 0$, ${}_{p^\nu}\mathrm{G}'$ *est fini sur* S' *et* ${}_{p^\nu}\mathrm{H}'$ *est séparé sur* S'.

Sous ces conditions, u *est une immersion.*

Il suffit de remarquer que dans c), la condition que ${}_p\mathrm{G}'$ soit fini sur S' implique que ${}_p\mathrm{G}'_0$ est fini sur $\kappa(s)$, ce qui implique déjà que $\mathrm{G}'_0 \otimes_{\kappa(s)} \overline{\kappa(s)}$ n'a pas de sous-groupe isomorphe au groupe additif, de sorte qu'on est sous les hypothèses de 7.5.

Remarque 7.10. — Des exemples de M. Raynaud (XVI 1.1 a) et b)) montrent qu'on ne peut dans c) abandonner ni l'hypothèse que les ${}_{p^\nu}\mathrm{G}'$ soient finis sur S', ni celle que les ${}_{p^\nu}\mathrm{H}'$ soient séparés sur S'.

Nous voulons maintenant des conditions assurant que u est une immersion *fermée.* Nous conservons donc les hypothèses précédant 7.9 mais en ne supposant plus u surjectif (seulement u un isomorphisme sur les fibres génériques). Nous savons déjà que $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est une immersion ouverte, il en est donc même de $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$, dont **35**
l'image contient donc la composante connexe de l'élément neutre $(\mathrm{H}_0)^0$. Notons que comme G_0 est lisse sur k et « sans composante additive » sur la clôture algébrique de k, il en est de même de H_0. Or on a le

Lemme 7.11. — *Soit* H *un groupe algébrique commutatif sur un corps* k, *tel que* $\mathrm{H} \otimes_k \overline{k}$ *ne contienne pas de sous-groupe isomorphe à* $\mathbb{G}_a$. *Soit* $n =$ *degré* H/H^0, *alors l'homomorphisme*

$$ {}_n\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}/\mathrm{H}^0 $$

est surjectif.

On peut supposer en effet k algébriquement clos, et alors cela résulte du fait bien connu que $\mathrm{H}^0(k)$ est un groupe *divisible.*

Supposons maintenant (revenant à notre situation $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$) que les ${}_n\mathrm{G}$ $(n > 0)$ sont *propres* sur S, et les ${}_n\mathrm{H}$ sont *séparés sur* S. Notons d'autre part que les ${}_n\mathrm{H}$ sont *plats* sur S. En effet, il suffit de le voir en les points au-dessus de s, on est ramené alors à prouver que $n \cdot \mathrm{id}_\mathrm{H}$ est plat en les points au-dessus de s, et pour ceci on est ramené à vérifier que $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}_0}$ est plat, ce qui équivaut (comme nous l'avons déjà noté) au fait que $(\mathrm{H}_0)^0$ est lisse [40] sur k et n'a pas de composante $\mathbb{G}_a$ sur la clôture algébrique de k. Comme $(\mathrm{H}_0)^0 = (\mathrm{G}_0)^0$, cela résulte de l'hypothèse analogue faite sur G_0. D'autre part les ${}_n\mathrm{H}$ sont séparés sur S puisque H l'est, donc le morphisme ${}_n\mathrm{G} \to {}_n\mathrm{H}$ est propre, donc son image est fermée. Comme cette image contient la fibre générique de ${}_n\mathrm{H}$ (puisque $u_{s'} : \mathrm{G}_{s'} \to \mathrm{H}_{s'}$ est un isomorphisme) et que ${}_n\mathrm{H}$ est plat sur S, donc identique à l'adhérence de sa fibre générique, il s'ensuit que ${}_n\mathrm{G} \to {}_n\mathrm{H}$ est *surjectif,* donc ${}_n\mathrm{G}_0 \to {}_n\mathrm{H}_0$ est surjectif. Se rappelant que $\mathrm{G}_0 \supset (\mathrm{H}_0)^0$ et appliquant 7.11, on trouve que $\mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$ est surjectif, donc u est surjectif. On obtient ainsi :

Proposition 7.12. — *Avec les notations de* 7.9, *supposons que les conditions* a) *et* b) *soient vérifiées, ainsi que la condition* c′) (*plus forte que* c)), *obtenue en exigeant que* **36**
pour tout entier $n > 0$ (*non seulement de la forme* p^ν), ${}_n\mathrm{G}'$ *soit fini sur* S' *et* ${}_n\mathrm{H}'$ *séparé sur* S'. *Sous ces conditions,* u *est une immersion fermée.*

Remarque 7.13. — a) On vérifie facilement que l'hypothèse de séparation faite sur les ${}_n\mathrm{H}$ implique en fait que H est séparé sur S. C'est d'ailleurs contenu formellement dans 7.12 en y prenant pour G le S-groupe unité. Notons aussi que lorsque S est localement noethérien, on peut dans 7.9 se borner à supposer H localement de type fini sur S (au

[40] N.D.E. : On a actualisé la terminologie, remplaçant « simple » par « lisse » (voir, par exemple, la note (1) de A. Grothendieck dans SGA 1, Exp. II).

lieu de : de type fini sur S), la démonstration donnée s'appliquant telle quelle ; pour 7.12 on supposera de plus que les fibres de H sont de type fini.

b) Utilisant 7.12, il n'est pas difficile de prouver que si $u : G \to H$ est un monomorphisme de S-préschémas en groupes de présentation finie, avec G diagonalisable (ou plus généralement, « de type multiplicatif ») et H séparé sur S, alors u est une immersion fermée, – ce qui constitue une généralisation satisfaisante de la première conclusion énoncée dans 5.7. Lorsque G est lisse sur S, il suffit d'appliquer 7.12, et le cas général se ramène facilement à celui-là. Lorsqu'on ne suppose plus H séparé sur S, on peut encore montrer que u est une immersion ; dans le cas où G est un tore, ce fait résulte d'ailleurs également de ce qui suit.

c) Lorsque dans 7.9 on suppose G à fibres connexes, on peut dans la condition 7.9 c) abandonner l'hypothèse que les ${}_{p^\nu}H'$ soient séparés sur S′. En effet, avec les réductions faites dans la démonstration, on peut supposer H plat sur S et u bijectif, donc H à fibres connexes, donc H séparé sur S en vertu du théorème de Raynaud (VI_B 5.5). (41)

Bibliographie

(42)

[RG71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. math. **13** (1971), 1-89.

[TO70] J. Tate, F. Oort, *Group schemes of prime order*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. (4) **3** (1970), 1-21.

(41) N.D.E. : préciser dans VI_B § 5 cette attribution, qui figurait dans SGAD 1965, en signalant les modifications entre SGAD et le Lect. Notes 151.

(42) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé