EXPOSÉ $\mathrm{VI_B}$

GÉNÉRALITÉS SUR LES PRÉSCHÉMAS EN GROUPES

par J.E. Bertin

Cet exposé, qui ne correspond à aucun exposé oral du séminaire, est destiné à **318**
regrouper un certain nombre de résultats techniques couramment utilisés concernant les préschémas en groupes [*].

1. Morphismes de groupes localement de type fini sur un corps

1.1. Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes [1] et $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de A-groupes. Alors u induit un homomorphisme de groupes $u(\mathrm{A}) : \mathrm{G}(\mathrm{A}) \to \mathrm{H}(\mathrm{A})$. Comme H(A) opère sur H par translation à droite, $u(\mathrm{A})$ définit par restriction une opération de G(A) sur H. Cette opération est compatible avec le morphisme u et l'opération de G(A) sur G définie par translation à droite. Comme G(A) opère transitivement sur les points strictement rationnels de G (voir $\mathrm{VI_A}$ 0.4 pour la définition), on voit que ces points « se comportent tous de la même manière à l'égard de u » ; de là sourdent les propriétés suivantes :

Proposition 1.2. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A-*groupes* localement de type fini *sur* A. *Alors l'ensemble* $u(\mathrm{G})$ *est* fermé *dans* H *et on a* $\dim \mathrm{G} = \dim u(\mathrm{G}) + \dim \operatorname{Ker} u$.

Comme u commute avec les symétries de G et H, l'image $u(\mathrm{G})$ est invariante par **319**
la symétrie de H ; il en est donc de même de $\overline{u(\mathrm{G})}$, son adhérence dans H. Soit d'autre part L l'ensemble des points de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$ dont les deux projections appartiennent à $\overline{u(\mathrm{G})}$; il est clair que L est l'image du morphisme $u \times_{\mathrm{A}} u : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$; donc

[0] version du 21/10/09 (modifs récentes dans 8.1–2, 9.3, 11.3.1, 11.6–11.10.1, 11.15–16, 12.5 ; sections 5, 10, 11 et 12 à terminer).

[*] Cet exposé a été assez sérieusement remanié depuis son édition multigraphiée, notamment les §§ 10 et 11 ont été entièrement rerédigés.

[1] N.D.E. : Rappelons la convention adoptée au début de $\mathrm{VI_A}$: un A-groupe est un A-*préschéma en groupes*.

le morphisme de multiplication de H envoie L dans $u(\mathrm{G})$, autrement dit $u(\mathrm{G})\cdot u(\mathrm{G}) = u(\mathrm{G})$. D'autre part le lemme 1.2.1 ci-dessous montre que $\overline{\mathrm{L}}$, adhérence de L dans H, est l'ensemble des points de $\mathrm{H}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{H}$ dont les deux projections appartiennent à $\overline{u(\mathrm{G})}$; donc $\overline{u(\mathrm{G})}\cdot\overline{u(\mathrm{G})} = \overline{u(\mathrm{G})}$ de sorte que le sous-préschéma réduit de H qui a pour espace sous-jacent $\overline{u(\mathrm{G})}$ est muni naturellement d'une structure de groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$, où k est le corps résiduel de A (cf. $\mathrm{VI_A}$ 0.2).

Montrons la première assertion de 1.2. [2] Quitte à remplacer u par $u_{\text{réd}} : \mathrm{G}_{\text{réd}} \to \mathrm{H}_{\text{réd}}$, on peut supposer $\mathrm{A} = k$ et G, H réduits. Soit k' une clôture algébrique de k ; notons $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ le morphisme déduit de u par changement de base, et π la projection $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$. Il est clair que $u'(\mathrm{G}') \subseteq \pi^{-1}(u(\mathrm{G}))$; réciproquement, si $h' \in \mathrm{H}'$ vérifie $\pi(h') \in u(\mathrm{G})$ alors, comme le groupe $\mathrm{Aut}_k(k')$ agit transitivement sur la fibre $\pi^{-1}(\pi(h))$, il existe $g' \in \mathrm{G}'$ tel que $u'(g') = h'$. On a donc l'égalité

$$u'(\mathrm{G}') = \pi^{-1}(u(\mathrm{G})).$$

Or, comme π est (fidèlement) plat et quasi-compact, $u(\mathrm{G})$ est fermé dans H si et seulement si $\pi^{-1}(u(\mathrm{G}))$ est fermé dans H', d'après EGA IV_2, 2.3.12. On peut donc supposer k algébriquement clos.

Comme $\overline{u(\mathrm{G})}$, muni de la structure de sous-préschéma fermé réduit, est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})$, c'est donc, dans ce cas, un k-préschéma en groupes, d'après $\mathrm{VI_A}$.0.2. Donc, remplaçant H par $\overline{u(\mathrm{G})}$, nous pouvons supposer u dominant.

Alors $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement dans l'ensemble des composantes connexes de H et il suffit de montrer que $u(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H}^0$ est fermé. On est ainsi ramené au cas où H est connexe, donc irréductible et de type fini ($\mathrm{VI_A}$ 2.4). Alors u est de type fini puisque quasi-compact et localement de type fini ; comme H est noethérien, $u(\mathrm{G})$ est constructible (EGA IV_1, 1.8.5), donc contient un ouvert V de H (EGA 0_{IV}, 9.2.3), et alors, d'après $\mathrm{VI_A}$.0.5, on a $\mathrm{H} = \mathrm{V}\cdot\mathrm{V} \subseteq u(\mathrm{G})\cdot u(\mathrm{G}) = u(\mathrm{G})$.

Montrons la seconde assertion. Rappelons tout d'abord que le foncteur $\mathrm{Ker}\, u$ (cf. I,
320 2.3.6.1) est représentable par $u^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de H. Lorsque u est localement de type fini, $\mathrm{Ker}\, u$ est donc localement de type fini sur A. On se ramène comme précédemment, grâce cette fois-ci à EGA IV_2, 4.1.4, au cas où A est un corps algébriquement clos k. On peut de plus supposer G et H irréductibles et de type fini et u dominant : en effet, k étant algébriquement clos, il est clair que les composantes connexes de G, sur l'ensemble desquelles $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement, ont toutes même dimension, et que si u^0 est la restriction de u à G^0, alors $(\mathrm{Ker}\, u)^0 \subseteq \mathrm{Ker}\, u^0$, et $\dim \mathrm{Ker}\, u^0 = \dim \mathrm{Ker}\, u$. On voit de même qu'alors u est de type fini sur k. Si h désigne le point générique de H, on a $\dim u^{-1}(h) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}$ (EGA IV_3, 10.6.1 (ii)). D'après EGA IV_3, 9.2.3 et 9.2.6, l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $\dim u^{-1}(y) = \dim u^{-1}(h)$ contient un ouvert non vide V. Puisque u est dominant, $\mathrm{U} = u^{-1}(\mathrm{V})$ est alors un ouvert non vide de G, et contient un point fermé x de G, puisque G est un préschéma de Jacobson (EGA IV_3, 10.4.6). Alors la translation à

[2] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a détaillé la réduction au cas où A est un corps algébriquement clos.

droite r_x est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\, u$ sur $u^{-1}(u(x))$, si bien que :

$$\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim u^{-1}(u(x)) = \dim u^{-1}(h) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}.$$

C.Q.F.D.

Lemme 1.2.1. — *Soient* $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *deux morphismes* quasi-compacts *et* dominants *de préschémas sur un anneau local artinien* A *; alors* $f \times_{\mathrm{A}} g : \mathrm{X}' \times_{\mathrm{A}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{Y}$ *est* dominant (*et* quasi-compact)*.*

En effet, on a $f \times_{\mathrm{A}} g = (\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g) \circ (f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'})$. Il suffit donc de montrer que $f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g$ sont dominants. On peut pour cela remplacer A par son corps résiduel k. Dans ce cas, X et Y$'$ sont plats sur $\mathrm{A} = k$, et comme $f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}$ (resp. $\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g$) est déduit de f (resp. g) par le changement de base plat $\mathrm{Y}' \to \mathrm{A}$ (resp. $\mathrm{X} \to \mathrm{A}$), il est dominant (et quasi-compact), d'après EGA IV_2, 2.3.7.

Contre-exemple 1.2.2. — Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$. Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, $u(\mathrm{G})$ n'est pas fermé dans H. 321

Proposition 1.3. — [(3)] *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe* localement de type fini*,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* A*-groupes,* x *un point de* G*.*

a) *Si* u *est* quasi-fini (*resp.* non ramifié) au point x*, alors* u *est* localement quasi-fini [(4)]*,* (*resp.* non ramifié).

b) *Supposons de plus* G plat *sur* A*. Pour que* u *soit* plat (*resp.* lisse*,* étale)*, il faut et il suffit qu'il le soit* au point x*.*

Démonstration. On suppose que u possède en x l'une des propriétés ci-dessus. Notons que u est localement de type fini, puisque $\mathrm{G} \to \mathrm{Spec(A)}$ l'est. Démontrons d'abord a) et b) en supposant G *plat* sur A.

Soit K une clôture algébrique de $\kappa(x)$. D'après le lemme V.4.1.1, il existe une A-algèbre plate A_1, locale, de corps résiduel K. Alors $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_1$ possède un

(3)N.D.E. : Dans l'original, 1.3, 1.3.1 et 1.3.1.1 sont énoncés pour A un *corps*. Pour être complet, on a traité le cas d'un anneau local artinien arbitraire ; ceci utilise VI_{A} 1.2 et met en évidence le rôle joué par l'hypothèse de platitude dans ces énoncés. Par exemple, soient k un corps, $\mathrm{A} = k[\delta]$, où $\delta^2 = 0$, H le A-groupe constant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{A}}$, et G le sous-A-groupe fermé de H dont la composante non neutre est réduite ; alors $u : \mathrm{G} \hookrightarrow \mathrm{H}$ est un isomorphisme local au point unité e, mais n'est pas plat au point $g \neq e$ (et il en est de même pour le morphisme structural π_{G}).

(4)N.D.E. : Rappelons qu'un morphisme de préschémas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est dit de type fini (resp. de présentation finie, resp. quasi-fini) *en* x, s'il existe des ouverts affines : V contenant $f(x)$, et U contenant x, tels que $f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ et que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$ soit une $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{V})$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie, resp. et si de plus $f^{-1}(f(x'))$ est fini sur $\kappa(x')$, pour tout $x' \in \mathrm{U}$ (voir aussi la N.D.E. (39) de l'Exp. V)). On dit que f est localement quasi-fini (resp. de type fini, de présentation finie) s'il l'est en tout point x. D'autre part, on dit que f est lisse (resp. non-ramifié, resp. étale) *en* x s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que le morphisme $f|_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ soit lisse (resp. non-ramifié, resp. étale). Au vu de ces définitions, il est clair que l'ensemble des points où f est de présentation finie, resp. de type fini, quasi-fini, lisse, non-ramifié, étale, est un *ouvert* de X. De plus, comme le lieu de platitude d'un morphisme localement de présentation finie est ouvert (EGA IV_3, 11.3.1), alors l'ensemble des points de X où f est *de présentation finie et plat* est aussi ouvert dans X. Tout ceci sera utilisé à de nombreuses reprises dans la suite.

point rationnel x_1 au-dessus de x. Soit $u_1 : \mathrm{G}_1 \to \mathrm{H}_1$ le morphisme déduit de u par le changement de base fidèlement plat et quasi-compact $\mathrm{A} \to \mathrm{A}_1$. Il suffit de montrer que u_1 est plat, resp. localement quasi-fini, resp. non-ramifié, lisse ou étale, car alors il en sera de même de u : pour « plat » et « localement quasi-fini », cela résulte du Lemme 7.4 de l'Exp. V (voir aussi EGA IV_2, 2.2.10 et 2.7.1 (xvi), où l'on peut remplacer « quasi-fini » par « localement quasi-fini ») ; pour les trois autres propriétés, cela résulte de EGA IV_4, 17.7.3 (ii).

Comme G_1 est un schéma de Jacobson (cf. EGA IV_3, 10.4.7) et comme l'ensemble W_1 des points de G_1 où u_1 est plat (resp. quasi-fini, non ramifié, lisse, ou étale), est stable par générisation (resp. ouvert), il suffit de montrer que tout point *fermé* y_1 de G_1 appartient à W_1 .

D'après la démonstration de VI_{A} 1.2, l'anneau local de G_1 au point x_1 (resp. y_1) possède un quotient artinien B'_1 (resp. B'_2) qui est fini et libre sur A_1 ; alors $\mathrm{A}' = \mathrm{B}'_1 \otimes_{\mathrm{A}_1} \mathrm{B}'_2$ est une A_1-algèbre A' locale, *finie et libre*, $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}_1} \mathrm{A}'$ possède un unique point x' (resp. y') au-dessus de x_1 (resp. y_1), et x', y' sont *strictement rationnels* sur A'.

Notons $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ le morphisme déduit de u_1 par le changement de base *fini et libre* $\mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}'$. Puisque les propriétés considérées sont préservées par changement de base, u' vérifie la propriété en question au point x'. Comme $x', y' \in \mathrm{G}'(\mathrm{A}')$, on peut considérer l'automorphisme $r_{y'} \circ r_{x'}^{-1}$ de G', qui envoie x' sur y' ; par conséquent, u' possède en y' la propriété en question. Alors, comme le morphisme $\mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}'$ est fidèlement plat et de présentation finie, u_1 vérifie en x_1 la propriété en question : pour « plat » et « localement quasi-fini », cela résulte, à nouveau, de V.7.4 ; pour les trois autres propriétés, cela résulte de EGA IV_4, 17.7.4. Ceci prouve l'assertion b), et aussi l'assertion a) sous l'hypothèse que G soit plat sur A.

Démontrons maintenant a) en général. Soit y un point arbitraire de G, et soit $u_k : \mathrm{G}_k \to \mathrm{H}_k$ le morphisme déduit de u par le changement de base $\mathrm{A} \to k$. D'après ce qui précède, u_k est quasi-fini (resp. non ramifié) au point $y \in \mathrm{G}_k$. On en déduit qu'il existe un ouvert affine $\mathrm{V} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$ de H contenant $u(y)$, et un ouvert affine $\mathrm{U} = \operatorname{Spec} \mathrm{C}$ de G contenant y, tels que $u(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ et que, notant v la restriction de u à U, le morphisme $v_k : \mathrm{U}_k \to \mathrm{V}_k$ obtenu par changement de base, soit quasi-fini (resp. non ramifié). De plus, puisque G est localement de type fini sur A, on peut supposer que C est une algèbre de type fini sur A, donc a fortiori sur B.

Comme, pour tout $x' \in \mathrm{U}$, le $\kappa(v(x'))$-préschéma $v^{-1}(v(x'))$ est fini (resp. non ramifié), ceci entraîne que v est quasi-fini (resp. que v est non ramifié, pourvu que l'on vérifie qu'il est de présentation finie).

Or, dans le cas où v_k est non ramifié, $\mathrm{C}_k = \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} k$ est une algèbre de présentation finie sur $\mathrm{B}_k = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} k$, et il résulte du point (ii) du lemme 1.3.1.2 plus bas que C est une B-algèbre de présentation finie. Ceci achève la démonstration de 1.3, modulo le lemme 1.3.1.2 plus bas. C.Q.F.D.

Corollaire 1.3.1. — *Soient* A *un anneau local artinien et* G *un* A*-groupe.*

a) G *est* localement quasi-fini (*resp.* non ramifié) *sur* A *si, et seulement si, il est* quasi-fini (*resp.* non ramifié) *sur* A en un point.

b) *Supposons de plus* G plat *sur* A*. Alors* G *est* lisse (*resp.* étale) *sur* A *si et seulement si, il l'est* en un point.

En effet, si G vérifie l'une des conditions de a) ou b) en un point x, il existe un voisinage ouvert U de x qui est de type fini sur A. Par conséquent, il suffit d'appliquer 1.3 au cas où H est le A-groupe unité, compte-tenu du lemme suivant :

Lemme 1.3.1.1. — *Soient* A *un anneau local artinien et* G *un* A*-groupe. S'il existe un* **322**
ouvert non vide *de* G de type fini *sur* A*, alors* G *est* localement de type fini *sur* A.

Soit k le corps résiduel de A. D'après le lemme 1.3.1.2 ci-dessous, on peut supposer $\mathrm{A} = k$.

Soit V l'ouvert de G formé des points où G est de type fini sur k ; par hypothèse, $\mathrm{V} \neq \varnothing$. Comme G est un préschéma de Jacobson, alors V contient un point fermé y et, pour montrer que $\mathrm{V} = \mathrm{G}$, il suffit de montrer que tout point fermé de G appartient à V.

Soit U un ouvert affine contenant y et *de type fini* sur k, et soit x un point fermé de G. Soit k' une extension de k composée des extensions $\kappa(x)$ et $\kappa(y)$. Alors, il existe un point x' (resp. y') de $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \otimes_k k'$, rationnel sur k', se projetant sur x (resp. y). Posons $\mathrm{U}' = \mathrm{U} \otimes_k k'$. Alors $\mathrm{W}' = x'y'^{-1} \cdot \mathrm{U}'$ est un ouvert de G' contenant x' et de type fini sur k'. La projection $\mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ étant surjective et finie localement libre, donc ouverte (EGA IV_2, 2.4.6), la projection de W' sur G est un ouvert W de G contenant x et de type fini sur k, d'après EGA IV_3, 11.3.16 (voir aussi Exp. V, Prop. 9.1) [(5)]. Ceci prouve 1.3.1.1, et donc 1.3.1, modulo le point (i) du lemme ci-dessous.

Lemme 1.3.1.2. — *Soient* B *un anneau,* $\mathfrak{n}$ *un idéal* nilpotent *et* de type fini *de* B*, et* C *une* B*-algèbre. On suppose que* $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ *est une* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n})$*-algèbre* de type fini.

(i) *Alors,* C *est une* B*-algèbre* de type fini.

(ii) *Si de plus* $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ *est* de présentation finie *sur* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n})$*, alors* C *est* de présentation finie *sur* B.

On peut supposer $\mathfrak{n}^2 = 0$. Alors $\mathfrak{n}\mathrm{C}$ est un $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$-module, engendré par un nombre fini d'éléments $\xi_1, \ldots, \xi_r \in \mathfrak{n}$. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de C dont les images engendrent $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ comme $(\mathrm{B}/\mathfrak{n})$-algèbre, on voit facilement que les x_i engendrent C comme B-algèbre. Ceci prouve (i).

Notons ϕ le morphisme surjectif $\mathrm{B}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{C}$ ainsi obtenu, et supposons de plus que $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ soit de présentation finie sur $\mathrm{B}/\mathfrak{n}\mathrm{B}$. Alors, d'après EGA IV_1, 1.4.4, le noyau du morphisme $\overline{\phi} : (\mathrm{B}/\mathfrak{n})[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ est un idéal de type fini. Soient $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$ des éléments de $\mathrm{B}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ dont les images engendrent cet idéal. Alors, on voit facilement que $\operatorname{Ker} \phi$ est engendré par $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$ et $\xi_1, \ldots, \xi_r$. Ceci prouve (ii), et achève la démonstration de 1.3 a), 1.3.1.1 et 1.3.1.

[(5)] N.D.E. : On a substitué ces références, qui suffisent pour le résultat voulu, à la référence dans l'original à EGA IV_4, 17.7.5.

Corollaire 1.3.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* A-*groupes* localement de type fini. *Les assertions suivantes sont équivalentes :* [6]

(i) u *est* universellement ouvert*,*

(ii) u *est* ouvert*,*

(iii) u *est* ouvert en un point de G*,*

(iv) *le morphisme* $u^0 : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{H}^0$ *déduit de* u *est* dominant*,*

(iv′) u^0 *est* surjectif*,*

(v) *il existe une composante connexe* $\mathrm{G}^{\wedge}$ *de* G *telle que, si* $\mathrm{H}^{\wedge}$ *désigne la composante connexe de* H *contenant* $u(\mathrm{G}^{\wedge})$*, le morphisme* $u^{\wedge} : \mathrm{G}^{\wedge} \to \mathrm{H}^{\wedge}$ *déduit de* u *soit* dominant*.*

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iv′) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont claires, et comme G^0 est de type fini sur A ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), alors $u^0(\mathrm{G}^0)$ est fermé dans H^0, d'après 1.2, donc (iv) $\Rightarrow$ (iv′). D'autre part, puisque G^0 (resp. $\mathrm{G}^{\wedge}$) est ouvert dans G ($\mathrm{VI_A}$ 2.3) et que H^0 (resp. $\mathrm{H}^{\wedge}$) est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1), on voit que (ii) entraîne (iv) (resp. que (iii)
323 entraîne (v)). Reste donc à montrer que (v) implique (i).

L'ouvert $\mathrm{G}^{\wedge}$ (resp. $\mathrm{H}^{\wedge}$) de G (resp. H) sera muni de sa structure de préschéma induit, et $u^{\wedge}$ désignera le morphisme $\mathrm{G}^{\wedge} \to \mathrm{H}^{\wedge}$ déduit de u. Soit k le corps résiduel de A. Comme le changement de base $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est un homéomorphisme universel, on peut supposer $\mathrm{A} = k$. Puisque $\mathrm{G}^{\wedge}$ est quasi-compact sur k ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1) et $\mathrm{H}^{\wedge}$ séparé sur k ($\mathrm{VI_A}$ 0.2), alors $u^{\wedge}$ est *quasi-compact* et dominant ; d'après EGA IV_2, 2.3.7, il en est donc de même de $u^{\wedge} \otimes_k \overline{k}$, où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k. Alors, puisque $\mathrm{G}^{\wedge} \otimes_k \overline{k}$ est réunion de composantes connexes de $\mathrm{G} \otimes_k \overline{k}$, le morphisme $u \otimes_k \overline{k} : \mathrm{G} \otimes_k \overline{k} \to \mathrm{H} \otimes_k \overline{k}$ vérifie l'assertion (v). Nous sommes ainsi ramenés au cas où $\mathrm{A} = k$ est un corps algébriquement clos, compte tenu de EGA IV_2, 2.6.4.

Dans ce cas, nous pouvons de plus remplacer u par $u_{\text{réd}}$, et nous sommes ramenés au cas où H est réduit. Alors $\mathrm{H}^{\wedge}$ est réduit, et le théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.1) affirme que, puisque $u^{\wedge}$ est dominant, $u^{\wedge}$ (donc aussi u) est plat au point générique de $\mathrm{G}^{\wedge}$, si bien que u est plat (1.3), donc universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6).

Proposition 1.4. — *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A-*groupes* localement de type fini. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* propre*,*

(ii) *il existe* $h \in \mathrm{H}$ *tel que la fibre* $u^{-1}(h)$ *soit* non vide et propre sur $\kappa(h)$*,*

(iii) $\operatorname{Ker} u$ *est* propre sur A*.*

Il est clair que (i) entraîne (iii), et que (iii) entraîne (ii). D'autre part, il résulte des
324 hypothèses que u est de type fini et, puisque G est séparé ($\mathrm{VI_A}$ 0.3), u l'est aussi (EGA I, 5.5.1). Il reste donc à montrer que l'assertion (ii) entraîne que u est universellement fermé, si bien que nous pouvons supposer A égal à son corps résiduel k. Soient k' une

[6] N.D.E. : On pourrait ajouter la condition : « u est plat ».

clôture algébrique de $\kappa(h)$, $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ le morphisme déduit de u par changement de base, h' l'unique point de H' au-dessus de h ; alors la fibre $u'^{-1}(h') = u^{-1}(h) \times_{\kappa(h)} k'$ est non-vide et propre, et il suffit de montrer que u' est propre (EGA IV_2, 2.6.4). On peut donc supposer que k est algébriquement clos et $h \in \mathrm{H}(k)$.

Nous avons vu (1.2) qu'alors $u(\mathrm{G})$ est l'ensemble sous-jacent à un sous-préschéma en groupes réduit fermé de H ; toute immersion fermée étant propre (EGA II, 5.4.2), nous pouvons supposer que u est surjectif, et que H est réduit. Puisque u est surjectif, le groupe $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement sur l'ensemble des points fermés de H ; quel que soit le point fermé y de H, $u^{-1}(y)$ est donc propre sur $\kappa(y)$. D'après EGA IV_3, 9.6.1, l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $u^{-1}(y)$ ne soit pas propre sur $\kappa(y)$ est localement constructible ; puisqu'il ne contient aucun point fermé, il est vide (EGA IV_4, 10.1.2).

[7] Considérons alors le point générique η de H^0 ; d'après ce qui précède, la fibre $u^{-1}(\eta) = \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \operatorname{Spec} \kappa(\eta)$ est propre sur $\kappa(\eta)$. De plus, on a les carrés cartésiens ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \operatorname{Spec} \kappa(\eta) \arrow[r, "\tau_{\mathrm{G}}"] \arrow[d, "u''"'] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta} \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & \mathrm{G} \arrow[d, "u"] \\
\operatorname{Spec} \kappa(\eta) \arrow[r, "\tau"] & \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta} \arrow[r] & \mathrm{H}
\end{tikzcd} ,$$

où τ (et donc aussi τ_{G}) est fini et surjectif. Alors, $\tau \circ u''$ est propre, et comme τ_{G} est surjectif, u' est universellement fermé. Or, on a vu que u est séparé et de type fini, donc u' l'est aussi. Par conséquent, u' est propre.

Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta}$ est la limitive inductive des anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})$, pour V parcourant les ouverts non vides de H^0, il résulte de EGA IV_3, 8.1.2 a) et 8.10.5 (xii), qu'il existe un ouvert non vide V de H^0 tel que la restriction de u au-dessus de l'ouvert V soit propre. Il est clair alors que les $g \cdot \mathrm{V}$, pour $g \in \mathrm{G}(k)$, forment un recouvrement ouvert de H tel que, pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$, la restriction de u au-dessus de l'ouvert $g \cdot \mathrm{V}$ soit propre ; on en déduit que u est propre (EGA IV_2, 2.4.3 (vii)).

Corollaire 1.4.1. — *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* A-*groupes* localement de type fini. *Les assertion suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est* localement quasi-fini*,*

(ii) *u est* quasi-fini en un point*,*

(iii) $\operatorname{Ker} u$ est discret*,*

(iv) *la restriction de u à chaque composante connexe de* G *est* finie*.*

Enfin, si u est quasi-compact*, ces assertions sont équivalentes à la suivante :* **325**

(v) *u est* fini*.*

[7] N.D.E. : On a détaillé l'argument dans ce qui suit.

Il est clair que (iv) entraîne (iii), que (iii) entraîne (ii) (EGA I, 6.4.4), et que dans le cas où u est quasi-compact, les assertions (iv) et (v) sont équivalentes. On a déjà vu en 1.3 que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

Montrons enfin que (i) entraîne (iv). Soit $G^{\frown}$ une composante connexe de G ; puisque $G^{\frown}$ est de type fini sur A (VI_A 2.4.1) et que G et H sont séparés (VI_A 0.2), alors, d'après EGA I, 5.5.1 et 6.3.4, la restriction $u^{\frown}$ de u à $G^{\frown}$ est séparée et de type fini.

Il suffit donc de montrer que $u^{\frown}$ est universellement fermé ; nous pouvons donc supposer que A est égal à son corps résiduel k, et même que k est algébriquement clos (EGA IV_2, 2.6.4), car $G^{\frown} \otimes_A \overline{k}$, où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k, est la somme d'un nombre fini de composantes connexes de $G \otimes_A \overline{k}$. Soit alors g un point fermé de $G^{\frown}$, si $u^0 : G^0 \to H$ est la restriction de u à G^0, on a $u^{\frown} = r_{u(g^{-1})} \circ u^0 \circ r_g$, où r_g désigne la translation à droite par g, et pour montrer que $u^{\frown}$ est propre, il suffit de montrer que u^0 est propre. Par hypothèse, u est localement quasi-fini, donc la fibre $\operatorname{Ker} u$ est discrète (et non vide) ; nous avons vu que u^0 est de type fini, donc la fibre $\operatorname{Ker} u^0$ est finie (EGA II, 6.2.2), donc propre, et non vide ; donc u^0 est propre (1.4), donc fini (EGA III_1, 4.4.2) puisqu'il est quasi-fini.

Corollaire 1.4.2. — *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : G \to H$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A-*groupes* localement de type fini. *Les assertions suivantes sont équivalentes :* (8)

(i) *u est une* immersion fermée*,*

(ii) *u est un* monomorphisme*,*

326 (iii) $\operatorname{Ker} u$ *est* trivial*, c.-à-d., isomorphe au k-groupe unité.*

En particulier, tout sous-préschéma (9) en groupes de H est fermé*.*

Il est clair que (i) entraîne (ii), et si l'on considère les foncteurs que représentent respectivement G et H, il est immédiat que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si $\operatorname{Ker} u$ est le k-groupe unité, $\operatorname{Ker} u$ est une fibre propre et non vide, donc (1.4) u est un monomorphisme propre, et de présentation finie puisque H est localement noethérien (EGA IV_1, 1.6.1), donc est une immersion fermée (EGA IV_3, 8.11.5).

La dernière assertion résulte de ce que, puisque H est localement noethérien, toute immersion $G \to H$ est quasi-compacte (EGA I, 6.6.4).

Contre-exemple 1.4.3. — Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe $\mathbb{G}_{a,k}$. Soit $u : G \to H$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, $\operatorname{Ker} u = 0$, mais u n'est pas une immersion fermée (cf. 1.2.2).

---

(8) N.D.E. : L'hypothèse que G et H soient localement de type fini peut être enlevée, car d'après [**Per76**, 4.2.4] : tout monomorphisme quasi-compact $u : G \to H$ entre préschémas en groupes sur un corps k est une immersion fermée ; voir aussi [**DG70**, III.3.7.2 b)] pour le cas où G et H sont affines (auquel cas tout morphisme $G \to H$ est affine (EGA II, 1.6.2 (v)), donc quasi-compact).

(9) N.D.E. : On rappelle que, par définition (EGA I, 4.1.3), un sous-préschéma a pour espace sous-jacent un sous-espace localement fermé. D'autre part, pour ce cas particulier, voir aussi VI_A, 0.6.1, valable sans hypothèses de finitude.

Nous utiliserons plus loin les deux résultats suivants qui auraient dû figurer dans l'Exposé $\mathrm{VI_A}$:

Lemme 1.5. — [(10)] *Soient k un corps et* G *un k-groupe* localement de type fini. *Alors :*

(i) *Toute composante irréductible de* G *a* même dimension *que* G*,*

(ii) *quel que soit $g \in \mathrm{G}$, on a* $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{G}$.

Montrons (i), en reprenant la démonstration de $\mathrm{VI_A}$, 2.4.1. Soit $\mathrm{G}^{\frown}$ une composante irréductible de G. Si $\mathrm{G}^{\frown}$ contient un point rationnel sur k, elle se déduit de G^0 par translation, donc $\dim \mathrm{G}^{\frown} = \dim \mathrm{G}^0$.

Sinon, soit x un point arbitraire de $\mathrm{G}^{\frown}$ et soit k' une extension normale de k contenant $\kappa(x)$. Posons $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \otimes_k k'$. D'après $\mathrm{VI_A}$ 2.4, $\mathrm{G}^0 \otimes_k k'$ est la composante neutre G'^0 de G', et on a vu dans la démonstration de $\mathrm{VI_A}$ 2.4.1, que $\mathrm{G}^{\frown} \otimes_k k'$ est réunion de composantes irréductibles $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ de G' qui contiennent chacune un point rationnel sur k'. Par conséquent, $\dim \mathrm{G}'^0 = \dim \mathrm{C}_i = \dim \mathrm{G}^{\frown} \otimes_k k'$, et, puisque la dimension est invariante par extension du corps de base (EGA IV_2, 4.1.4), on obtient

$$\dim \mathrm{G}^{\frown} = \dim \mathrm{G}^{\frown} \otimes_k k' = \dim \mathrm{G}^0 \otimes_k k' = \dim \mathrm{G}^0.$$

Ceci prouve (i).

L'assertion (ii) en découle. En effet, soient g un point de G et C la composante connexe de G contenant g. Par définition (EGA 0_{IV}, 14.1.2), $\dim_g \mathrm{G}$ est la borne inférieure des entiers $\dim \mathrm{U}$, pour U parcourant les voisinages ouverts de g ; on a donc $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{U}_0$ pour un certain U_0. Puisque $\dim \mathrm{V} \leqslant \dim \mathrm{U}$ si $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$, on peut supposer $\mathrm{U}_0 \subseteq \mathrm{C}$. Alors, comme C est irréductible et de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$, 2.4.1), on a $\dim \mathrm{U}_0 = \dim \mathrm{C}$ (= deg. $\mathrm{tr}_k\, \kappa(\xi)$, où ξ est le point générique de C), d'après EGA IV_2, 5.2.1. On a donc $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{C} = \dim \mathrm{G}$. C.Q.F.D.

Proposition 1.6. — [(11)] *Soient* S *un préschéma de* caractéristique zéro *et* G *un* S-*préschéma en groupes,* localement de présentation finie sur S en tout point de la section unité $\varepsilon(\mathrm{S})$. *Pour que* G *soit* lisse sur S en tout point de la section unité*, il faut et il suffit que le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\omega_{\mathrm{G/S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{G/S}})$,* (*appelé module conormal à la section unité de* G)*, soit* localement libre. 327

Rappelons qu'un préschéma S est dit de *caractéristique zéro* si pour tout point fermé x de S, le corps $\kappa(x)$ est de caractéristique zéro.

Rappelons aussi (II 4.11) que, si π désigne le morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$, on a $\Omega^1_{\mathrm{G/S}} = \pi^*(\omega_{\mathrm{G/S}})$, si bien qu'il revient au même de dire que le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre, ou que le $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module $\Omega^1_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre.

---

(10) N.D.E. : L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est un fait général (cf. EGA 0_{IV}, 14.1.6), et (i) $\Rightarrow$ (ii) découle du fait que si X est un préschéma irréductible de type fini sur un corps, on a $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{U}$ pour tout ouvert non vide U de X ; le point essentiel ici est donc d'établir l'assertion (i). En conséquence, on a légèrement modifié l'énoncé et la démonstration du lemme.

(11) N.D.E. : Dans l'énoncé, on a remplacé « le long de la section unité » par « en tout point de la section unité » ; d'autre part, à la fin de la démonstration, on a explicité les résultats de EGA IV_4 cités en référence.

S'il existe un voisinage ouvert U de $\varepsilon(\mathrm{S})$ qui soit lisse sur S, alors, d'après EGA IV_4, 17.12.3 et 16.10.1, U est *différentiellement lisse* sur S et donc $\Omega^1_{\mathrm{U/S}}$ est localement libre, ainsi que $\omega_{\mathrm{G/S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{U/S}})$.

Réciproquement, si $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre, il en est de même de $\Omega^1_{\mathrm{G/S}} = \pi^*(\omega_{\mathrm{G/S}})$. Comme S est de caractéristique 0, le critère jacobien (EGA IV_4, 16.12.2) entraîne donc que G est différentiellement lisse sur S. Alors, il résulte de EGA IV_4, 17.12.5, que G est lisse sur S en tout point de la section unité.

Corollaire 1.6.1 (Cartier). — *Étant donné un corps k de* caractéristique zéro*, tout k-groupe* localement de type fini *sur k est* lisse *sur k.*

En effet, il est alors clair que le k-module $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est localement libre, donc, d'après 1.6, G est lisse sur k au point unité e, et donc lisse sur k (1.3.1).

2. « Propriétés ouvertes » des groupes et des morphismes de groupes localement de présentation finie

2.0. Dans tout ce qui suit, S désignera un préschéma quelconque ; un S-préschéma en groupes sera appelé un S-*groupe*. Étant donné un S-groupe G, nous noterons ε la section unité, c la symétrie et μ le morphisme de multiplication $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$. Pour tout S-préschéma X, nous noterons π ou π_{X} le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$.

328 Étant donnée une propriété $\mathscr{P}(u)$ pour un morphisme de S-préschémas $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, nous dirons que $\mathscr{P}(u)$ est *stable par changement de base* si, chaque fois que u vérifie $\mathscr{P}(u)$, il en est de même du morphisme $u_{(\mathrm{Y}')}$, quel que soit le S-morphisme $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$. On dit que $\mathscr{P}(u)$ est de *nature locale pour la topologie $\mathcal{T}$* (cf. Exp. IV, §§ 4 et 6) si $\mathscr{P}(u)$ vérifie les deux conditions suivantes :

a) $\mathscr{P}(u)$ est stable par changement de base,

b) chaque fois qu'il existe une famille de S-morphismes $\mathrm{Y}_i \to \mathrm{Y}$ couvrante pour la topologie $\mathcal{T}$ et telle que chacun des morphismes $u_{(\mathrm{Y}_i)}$ vérifie $\mathscr{P}(u)$, alors u vérifie $\mathscr{P}(u)$.

Proposition 2.1. — *Soit $\mathscr{P}(u)$ une propriété pour un morphisme de* S*-préschémas, de nature locale pour la topologie* (fpqc)*. Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de* S*-groupes. Supposons* G plat *et* universellement ouvert *sur* S.

Soit W le plus grand ouvert de H *au-dessus duquel u vérifie la propriété $\mathscr{P}(u)$ et soit* $\mathrm{V} = u^{-1}(\mathrm{W})$*. Alors* $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ *est un ouvert de* S *et* V *est un* sous-préschéma en groupes ouvert *de* $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$*.*

L'existence d'un plus grand ouvert W de H au-dessus duquel u vérifie $\mathscr{P}(u)$ résulte de ce que $\mathscr{P}(u)$ est de nature locale pour la topologie de Zariski. Puisque π_{G} est universellement ouvert, $\pi_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est un ouvert U de S. Il suffit de montrer que V est un sous-préschéma en groupes de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$. Nous pouvons donc supposer que $\mathrm{U} = \mathrm{S}$.

Posons alors

$$\mathrm{G}' = \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{V}, \quad \mathrm{H}' = \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{V}, \quad \mathrm{V}' = \mathrm{V} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{V}, \quad \mathrm{W}' = \mathrm{W} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{V} \quad \text{et} \quad u' = u_{(\mathrm{V})};$$

soit W'_1 le plus grand ouvert de H' au-dessus duquel u' vérifie $\mathscr{P}(u)$; puisque V est plat et universellement ouvert sur S, il en est de même de H' sur H, et le lemme 2.1.1 ci-dessous montre que $W'_1 = W'$. Considérons alors l'automorphisme de V-préschémas a **329**
(resp. b) de G' (resp. H'), translation à droite par le symétrique de la section diagonale δ (resp. par le symétrique de $u(\delta)$), défini par

$$a(g, v) = (g \cdot v^{-1}, v), \qquad (\text{resp. } (h, v) = (h \cdot u(v^{-1}), v)),$$

quels que soient le morphisme $T \to S$, $g \in G(T)$, $v \in V(T)$ et $h \in H(T)$. Il est clair que $u' \circ a = b \circ u'$, ce qui montre que W' est stable par b, donc que V' est stable par a, si bien que V est un sous-préschéma en groupes de G.

Lemme 2.1.1. — *Soit $\mathscr{P}(u)$ une propriété pour un* S-*morphisme u, de nature locale pour la topologie* (fpqc). *Considérons un carré cartésien de morphismes de* S-*préschémas :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} ,$$

où g est plat et ouvert. *Soit* W (*resp.* W'_1) *le plus grand ouvert de* Y (*resp.* Y') *au-dessus duquel f (resp. $f' = f_{(Y')}$) vérifie $\mathscr{P}(u)$. Alors $W'_1 = W \times_Y Y'$.*

Posons $W' = W \times_Y Y'$; puisque $\mathscr{P}(u)$ est stable par changement de base, on a $W' \subseteq W'_1$. Comme g est ouvert, $W_1 = g(W'_1)$ est un ouvert de Y. Posons $V_1 = f^{-1}(W_1)$ et $V'_1 = V_1 \times_{W_1} W'_1$; il est clair que $V'_1 = f'^{-1}(W'_1)$. Puisque g est plat et ouvert, le morphisme $W'_1 \to W_1 = g(W'_1)$ déduit de g est surjectif, plat et ouvert, donc couvrant pour la topologie (fpqc) (cf. IV.6.3.1 (iv)). Puisque le morphisme $V'_1 \to W'_1$ déduit de f' vérifie $\mathscr{P}(u)$, il en est de même du morphisme $V_1 \to W_1$ déduit de f, donc $W_1 \subseteq W$, et $W'_1 \subseteq g^{-1}(W_1) \subseteq g^{-1}(W) = W'$; donc $W' = W'_1$. C.Q.F.D.

Remarque 2.1.2. — Un grand nombre de propriétés pour un morphisme sont de nature locale pour la topologie (fpqc) ; citons celles d'être plat, (universellement) ouvert, (localement) de type fini, de présentation finie, quasi-fini (cf. EGA IV_2, 2.5.1, 2.6.1 et 2.7.1), lisse, étale, non-ramifié (EGA IV_4, 17.7.3).

La démonstration de 2.1 n'utilise en fait que des *changements de base par des morphismes plats* ; la proposition s'appliquera donc à une propriété vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie (fpqc), et stable par changements de base par des morphismes plats (exemple : celle d'être quasi-compact et dominant). **330**

Bien entendu, on peut énoncer une proposition analogue concernant les propriétés de nature locale pour une topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la topologie de Zariski, la condition à vérifier sur G étant alors que π_G soit universellement ouvert et couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

En particulier, si G est plat et localement de présentation finie sur S, on a un énoncé analogue pour les propriétés stables par changements de base par des morphismes plats et localement de présentation finie, et vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie (fpqc) (par exemple, celles d'être régulier, réduit, de Cohen-Macaulay, etc. (EGA IV_2, 6.8)).

[(12)] On rappelle que, si X est un S-préschéma, on note $\pi_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ son morphisme structural.

Proposition 2.2. — *Soient* G *et* H *deux* S-*groupes et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S-*groupes. Alors :*

(i) *Supposons* G *ou* H plat *sur* S*, et* G *ou* H localement de présentation finie *sur* S*, et soit* V le plus grand ouvert *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit* plate et localement de présentation finie (*resp.* lisse*, resp.* étale)*. Alors* $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$ *est un ouvert de* S*, et* V *est un* sous-préschéma en groupes ouvert *de* $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$*.*

(ii) *Supposons* G *ou* H universellement ouvert *sur* S*, et soit* V le plus grand ouvert *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit* universellement ouverte*. Alors* $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$ *est un ouvert de* S*, et* V *est un* sous-préschéma en groupes ouvert *de* $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$*.*

Montrons d'abord (i). Montrons que la restriction π_{V} de π_{G} à V est plate et localement de présentation finie :

331 a) Si π_{G} est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_{V}.

b) Si π_{H} est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_{V}, comme composé de la restriction de u à V et de π_{H}.

Donc, dans les quatre cas envisagés dans l'énoncé, π_{V} est plat et localement de présentation finie, donc universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6). Posons $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$; U est donc un ouvert de S. Il suffit alors de montrer que V est un sous-préschéma en groupes ouvert de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$; nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons alors $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$. Alors, V étant plat et localement de présentation finie sur S, il en est de même de H′ sur H. D'après EGA IV_4, 17.7.4, V′ est alors le plus grand ouvert de G′ tel que la restriction de u' à V′ soit plate et localement de présentation finie (resp. lisse, resp. étale). Les automorphismes a et b étant définis comme dans la démonstration de 2.1, il est alors clair que V′ est stable par a, donc que V est un sous-préschéma en groupes de G.

Montrons (ii). La restriction π_{V} de π_{G} à V est un morphisme universellement ouvert, soit parce qu'il en est de même de π_{G}, soit comme composé de la restriction de u à V et de π_{H} dans le cas où π_{H} est universellement ouvert. Posons $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$; U est alors un ouvert de S. Il suffit de montrer que V est un sous-préschéma en groupes ouvert de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$. Nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons comme précédemment $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$. Alors $\pi_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ est surjectif et universellement ouvert, il en est de même

[(12)]N.D.E. : On a ajouté ce rappel, afin de préciser dans la proposition 2.2 que $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$. D'autre part, signalons que, dans le cas (i) de la proposition, l'ouvert V est formé de *tous* les points de G en lesquels u est lisse, resp. étale, resp. de présentation finie et plat, cf. la N.D.E. (4). Par contre, dans le cas (ii), V est le plus grand ouvert contenu dans l'ensemble E des points de G en lesquels u est universellement ouvert, mais E n'est pas nécessairement ouvert, comme le montre l'exemple suivant (EGA IV_3, 14.1.3 (i)) : soient k un corps, $\mathrm{H} = \mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$, où $\mathrm{A} = k[x]$, et G le S-groupe $\operatorname{Spec} \mathrm{A}[y]/(xy)$; alors le lieu E égale la section unité de G, qui n'est pas ouverte.

de $G' \to G$, si bien que V' est le plus grand ouvert de G' tel que la restriction de 332
u' à V' soit universellement ouverte, en vertu de (EGA IV_3, 14.3.4 (i) et (ii)). Les automorphismes a et b étant définis comme précédemment, il est alors clair que V' est stable par a, donc que V est un sous-préschéma en groupes de G.

Corollaire 2.3. — *Soient* G *un* S-*groupe et* V le plus grand ouvert *de* G *qui soit* plat et localement de présentation finie (*resp.* lisse, étale, universellement ouvert) *sur* S. *Alors* $U = \pi_V(V)$ *est un ouvert de* S, *et* V *est un* sous-préschéma en groupes ouvert *de* $G|_U$.

Il suffit d'appliquer 2.2 au cas où H est le S-groupe unité et où u est l'unique morphisme de S-groupes $G \to H$, car alors π_H est un morphisme et $\pi_G = \pi_H \circ u$.

Corollaire 2.4. — *Soit* G *un* S-*groupe ; s'il existe un* voisinage X de la section unité *ayant une* (*ou plusieurs*) *des propriétés suivantes :*

> X *est* plat et localement de présentation finie (*resp.* lisse, étale, universellement ouvert) *sur* S,

alors il existe un sous-préschéma en groupes ouvert *de* G *ayant les mêmes propriétés.*

Il suffit d'appliquer 2.3 en remarquant qu'ici avec les notations de 2.2, on a $\varepsilon(S) \subseteq V$, donc $U = S$.

Proposition 2.5. — [(13)] *Soit* $u : G \to H$ *un morphisme de* S-*groupes.*

(i) *Supposons que* G (*resp.* H) *soit* de présentation finie et plat (*resp.* de type fini) *sur* S aux points de sa section unité. *Alors, les ensembles :*

$$U_{\text{plat}} \supseteq U_{\text{lisse}} \supseteq U_{\text{ét.}},$$

formés des points $s \in S$ *tels que* u_s *soit* plat (*resp.* lisse, étale), *sont* ouverts *dans* S.

Si de plus G (*resp.* H) *est* localement de présentation finie et plat (*resp.* localement 333
de type fini) *sur* S, *alors l'ensemble* V_{plat} (*resp.* V_{lisse}, $V_{\text{ét.}}$) *des points de* G *où* u *est* plat (*resp.* lisse, *resp.* étale) *est l'image inverse par* π_G *de* U_{plat} (*resp.* U_{lisse}, $U_{\text{ét.}}$).

(ii) *Supposons que, pour tout* $s \in S$, G_s *soit* localement de type fini sur $\kappa(s)$ (*condition vérifiée si* G *est de type fini sur* S *aux points de la section unité* (1.3.1.1)), *et que* u *soit* localement de type fini (*resp.* localement de présentation finie) aux points de la section unité *de* G. *Alors, les ensembles :*

$$U_{\text{l.q.f.}} \supseteq U_{\text{n.r.}}$$

formés des $s \in S$ *tels que* u_s *soit* localement quasi-fini (*resp.* non ramifié) *sont* ouverts *dans* S.

Si de plus u *est* localement de type fini (*resp.* localement de présentation finie), *alors l'ensemble* $V_{\text{l.q.f}}$ (*resp.* $V_{\text{n.r.}}$) *des points de* G *où* u *est* quasi-fini (*resp.* non ramifié) *est l'image inverse par* π_G *de* $U_{\text{l.q.f}}$ (*resp.* $U_{\text{n.r.}}$).

[(13)] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé et la démonstration, et dans (i) on a affaibli l'hypothèse sur H, en remplaçant « de présentation finie » par « de type fini ».

Montrons (i). Notons d'abord (1.3.1.1) que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Soit Y l'ouvert de H formé des points où π_{H} est de type fini, et soit X_1 l'ouvert de $u^{-1}(\mathrm{Y})$ formé des points où π_{G} est de présentation finie. D'après EGA IV_3, 11.3.1, l'ensemble X des points de X_1 où π_{G} est de présentation finie et *plat* est ouvert dans X_1, donc dans G.

Soit $u_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ le morphisme déduit de u. Puisque Y (resp. X) contient la section unité de H (resp. G), la restriction π_{X} de π_{G} à X est surjective, et le morphisme $\mathrm{S} \to \mathrm{X}$ déduit de ε_{G} est une S-section de X.

Considérons les ensembles : $\mathrm{W}_{\mathrm{plat}} \supseteq \mathrm{W}_{\mathrm{lisse}} \supseteq \mathrm{W}_{\mathrm{ét.}}$, formés des points de X où u_{X} est plat (resp. lisse, resp. étale). Il est clair que $\mathrm{W}_{\mathrm{lisse}}$ et $\mathrm{W}_{\mathrm{ét.}}$ sont ouverts dans X, cf. la N.D.E. (4). D'autre part, comme π_{Y} est localement de type fini et $\pi_{\mathrm{X}} = \pi_{\mathrm{Y}} \circ u_{\mathrm{X}}$ localement de présentation finie, alors, d'après EGA IV_1, 1.4.3 (v), u_{X} est localement de présentation finie. Par conséquent, le lieu de platitude W_{X} de u_{X} est ouvert dans X (EGA IV_3, 11.3.1).

Soit $x \in \mathrm{X}$ et posons $s = \pi_{\mathrm{X}}(x)$; alors d'après EGA IV_2, 11.3.10, (combiné avec EGA IV_4, 17.5.1, resp. 17.6.1), x appartient à $\mathrm{W}_{\mathrm{plat}}$ (resp. $\mathrm{W}_{\mathrm{lisse}}$, $\mathrm{W}_{\mathrm{ét.}}$) si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, étale) au point x, ou, ce qui revient au même d'après 1.3, si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, étale).

Par conséquent, pour « $\flat$ = plat, lisse ou étale », on a $\mathrm{U}_\flat = \varepsilon_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{W}_\flat)$ et $\mathrm{W}_\flat =$
334 $\pi_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{U}_\flat)$. Comme $\mathrm{W}_\flat$ est ouvert dans X, donc dans G, la première égalité montre que $\mathrm{U}_\flat$ est ouvert dans S.

La seconde assertion de (i) résulte de ce qu'on vient de voir, car alors, $\mathrm{Y} = \mathrm{H}$, $\mathrm{X} = \mathrm{G}$, et $\mathrm{W}_\flat = \mathrm{V}_\flat$, donc $\mathrm{V}_\flat = \pi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U}_\flat)$.

Montrons l'assertion (ii). Soient $\mathrm{V}_{\mathrm{l.t.f.}} \supseteq \mathrm{V}_{\mathrm{l.q.f}}$ les ouverts de G formés des points en lesquels u est de type fini (resp. quasi-fini). Posons $\mathrm{X} = \mathrm{V}_{\mathrm{l.t.f.}}$ et notons u_{X} la restriction de u à X. Par hypothèse, X contient $\varepsilon(\mathrm{S})$. Soit $x \in \mathrm{X}$ et posons $s = \pi_{\mathrm{X}}(x)$.

Si u est quasi-fini en x alors, par changement de base, u_s est quasi-fini en x, et donc, comme G_s est supposé localement de type fini, u_s est localement quasi-fini, d'après 1.3.1.

Réciproquement, si u_s est localement quasi-fini, alors $u_{\mathrm{X}}^{-1}(u_{\mathrm{X}}(x)) \subseteq u_s^{-1}(u_s(x))$ est un ensemble fini. Comme $u_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ est localement de type fini, il résulte du théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3) qu'il existe un voisinage ouvert W de x dans X tel que la fibre $u_{\mathrm{X}}^{-1}(u_{\mathrm{X}}(x'))$ soit discrète, pour tout $x' \in \mathrm{W}$. Donc, d'après EGA II, 6.2.2 (et EGA III_2, $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 20), u_{X} est quasi-fini en x.

Par conséquent, on a $\mathrm{U}_{\mathrm{l.q.f.}} = \varepsilon_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{V}_{\mathrm{l.q.f.}})$ et $\mathrm{V}_{\mathrm{l.q.f.}} = \pi_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{U}_{\mathrm{l.q.f.}})$, et la première égalité montre que $\mathrm{U}_{\mathrm{l.q.f.}}$ est ouvert dans S.

Si de plus G est localement de type fini sur S, alors $\mathrm{X} = \mathrm{G}$, et donc $\mathrm{V}_{\mathrm{l.q.f}}$ est l'image inverse par π_{G} de $\mathrm{U}_{\mathrm{l.q.f.}}$. Ceci prouve la première moitié de (ii).

Considérons maintenant les ouverts $\mathrm{V}_{\mathrm{l.p.f.}} \supseteq \mathrm{V}_{\mathrm{n.r.}}$, formés des points où u est de présentation finie (resp. non ramifié), et supposons que $\mathrm{Z} = \mathrm{V}_{\mathrm{l.p.f.}}$ contienne la section unité de G. Soit $z \in \mathrm{Z}$; posons $s = \pi_{\mathrm{Z}}(z)$ et $h = u_{\mathrm{Z}}(z)$.

Si u est non-ramifié en z alors, par changement de base, u_s est non-ramifié en z, et donc, comme G_s est supposé localement de type fini, u_s est non-ramifié, d'après 1.3.1.

Réciproquement, si u_s est non ramifié au point z, alors la fibre $u_s^{-1}(h) = u^{-1}(h)$ est non ramifiée sur $\kappa(h)$ au point z. Comme Z est un ouvert de G, alors la fibre $u_{\mathrm{Z}}^{-1}(h) = u_s^{-1}(h) \cap \mathrm{Z}$ est non ramifiée sur $\kappa(h)$ au point z. Comme u_{Z} est localement de présentation finie, ceci entraîne, d'après EGA IV_4, 17.4.1, que u_{Z} est non ramifié au point z.

On a donc $\mathrm{U}_{\mathrm{n.r.}} = \varepsilon_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{V}_{\mathrm{n.r.}})$ et $\mathrm{V}_{\mathrm{n.r.}} = \pi_{\mathrm{Z}}^{-1}(\mathrm{U}_{\mathrm{n.r.}})$, et la première égalité montre que $\mathrm{U}_{\mathrm{n.r.}}$ est ouvert dans S.

Si de plus G est localement de présentation finie sur S, alors Z = G, et donc $\mathrm{V}_{\mathrm{n.r.}}$ est l'image inverse par π_{G} de $\mathrm{U}_{\mathrm{n.r.}}$. Ceci achève la preuve de l'assertion (ii).

Corollaire 2.6. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes qui soit un morphisme* radiciel (*ce qui est le cas si* u *est un* monomorphisme (EGA I, 3.5.4)). *On suppose* G (*resp.* H) localement de présentation finie et plat (*resp.* localement de type fini) *sur* S. *Alors l'ensemble* U *des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* u_s *soit une immersion ouverte est* ouvert *dans* S, *et la restriction de* u *au-dessus de* U *est une* immersion ouverte.

D'après 2.5 (i), l'ensemble U′ des points $s \in \mathrm{S}$ tels que u_s soit étale est ouvert dans S. Puisque u est radiciel, il en est de même de u_s, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, donc d'après EGA IV_4, 17.9.1, on a U = U′, ce qui montre que U est ouvert. Enfin, d'après 2.5 (i), la restriction de u au-dessus de U est étale ; puisque u est radiciel, cette restriction est une immersion ouverte (EGA IV_4, 17.9.1).

Proposition 2.7. — *Soit* G *un* S*-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* non ramifié *sur* S aux points de la section unité*,*

(ii) *la section unité est une* immersion ouverte*,*

(iii) G *est* de présentation finie *sur* S aux points de la section unité*, et quel que* **335**
soit $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* non ramifié *sur* $\kappa(s)$.

Si, de plus, on suppose G localement de présentation finie *sur* S*, alors chacune des trois conditions précédentes est équivalente à la suivante :*

(iv) G *est* non ramifié *sur* S.

L'équivalence des assertions (i) et (ii) résulte du lemme plus général 2.7.1 ci-dessous. Remarquons (1.3.1.1) que l'une ou l'autre des conditions (i) ou (iii) entraîne que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Alors (EGA IV_4, 17.4.1), l'assertion (i) équivaut au fait que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, G_s est non ramifié sur $\kappa(s)$ au point e_s, unité de G_s, ou encore (1.3.1), au fait que G_s est non ramifié sur $\kappa(s)$, donc les assertions (i) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si G est localement de présentation finie sur S, les assertions (iii) et (iv) sont équivalentes (EGA IV_4, 17.4.1).

Lemme 2.7.1. — *Soit* G *un* S*-préschéma muni d'une section* ε. *Pour que* G *soit* non ramifié sur S aux points de cette section*, il faut et il suffit que* ε *soit une* immersion ouverte.

La condition est nécessaire, d'après EGA IV_4, 17.4.1 $a) \Rightarrow b'')$. Réciproquement, si ε est une immersion ouverte, alors la restriction à $\varepsilon(\mathrm{S})$ du morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est un isomorphisme, donc G est non ramifié sur S aux points de $\varepsilon(\mathrm{S})$.

Corollaire 2.8. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes. Supposons que, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *soit* localement de type fini *sur* $\kappa(s)$.

336 a) *Si* u *est* localement de type fini*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* localement quasi-fini*,*

(ii) *quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *est* localement quasi-fini*,*

(iii) $\mathrm{Ker}\, u$ *est* localement quasi-fini *sur* S*,*

(iv) *les fibres de* $\mathrm{Ker}\, u$ *sont* discrètes.

b) *Si* u *est* localement de présentation finie*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(v) u *est* non ramifié*,*

(vi) *quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *est* non ramifié*,*

(vii) $\mathrm{Ker}\, u$ *est* non ramifié

(viii) *la section unité* $\mathrm{S} \to \mathrm{Ker}\, u$ *est une* immersion ouverte.

Les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (v) $\Leftrightarrow$ (vi) résultent de 2.5 (ii), et le rappel 2.8.1 ci-dessous montre que (i) $\Rightarrow$ (iii) et (v) $\Rightarrow$ (vii).

Pour tout $s \in \mathrm{S}$, notons e_s l'élément unité de H_s. Alors (iii) (resp. (vii)) entraîne que, pour tout $s \in \mathrm{S}$,
$$(\mathrm{Ker}\, u)_s = \mathrm{Ker}\, u_s = u_s^{-1}(e_s)$$
est localement quasi-fini (resp. non ramifié) sur $\kappa(s) = \kappa(e_s)$, donc que u_s est quasi-fini (resp. non ramifié) au point unité de G_s, donc, d'après 1.3, que u_s est localement quasi-fini (resp. non ramifié). Donc (iii) $\Rightarrow$) (ii) et (vii) $\Rightarrow$ (vi). Enfin, (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) d'après 1.4.1, et (vii) $\Leftrightarrow$ (viii) d'après 2.7.

Rappel 2.8.1. — Rappelons (I, 2.3.6.1) qu'étant donné un morphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de S-groupes, on appelle *noyau de* u, et on note $\mathrm{Ker}\, u$, le sous-foncteur en groupes de G défini en posant, quel que soit le morphisme $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$
$$(\mathrm{Ker}\, u)(\mathrm{T}) = \{a \in \mathrm{G}(\mathrm{T}) \mid u \circ a = \varepsilon_{\mathrm{H}} \circ f\}.$$
Il est clair (EGA I, 4.4.1) que ce foncteur est représentable par le S-groupe $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} = u^{-1}(\varepsilon_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}))$, noté simplement $\mathrm{Ker}\, u$. En particulier, le morphisme structural $\mathrm{Ker}\, u \to \mathrm{S}$ se déduit de u par changement de base.

Lemme 2.9. — *Soit* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme admettant une* S*-section* ε.

337 (i) *Si* π *est injectif, il est entier* (*).

(*) C'est aussi un cas particulier de EGA IV_4, 18.12.11, car π est évidemment un homéomorphisme universel.

(ii) *Si* π *est* localement de type fini*, et si, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, π_s *est un* isomorphisme*, alors* π *est un* isomorphisme [(*)].

Remarquons tout d'abord que, d'après le lemme 2.9.1 ci-dessous, π, étant un homéomorphisme, est un morphisme affine.

Si π est injectif, ε est surjectif. Puisque ε est une immersion surjective, $\varepsilon(\mathrm{S})$ est isomorphe au sous-préschéma fermé de X défini par un nilidéal [(14)] $\mathfrak{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Puisque ε est une S-section du morphisme π, on a une décomposition en somme directe : $\mathscr{O}_{\mathrm{X}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus \mathfrak{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Puisque $\mathfrak{I}$ est un nilidéal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, $\mathfrak{I}$ est évidemment entier sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, donc $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ est entier sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, et π est entier.

Supposons maintenant que π soit localement de type fini. Comme $\pi \circ \varepsilon = \mathrm{id}_{\mathrm{S}}$, alors ε est localement de présentation finie (EGA IV_1, 1.4.3 (v)), donc $\mathfrak{I}$ est un idéal *de type fini* de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ (EGA IV_1, 1.4.1). Quel que soit $s \in \mathrm{S}$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_s} = \kappa(s) \oplus (\mathfrak{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \kappa(s))$. Par hypothèse, ε est un isomorphisme, donc $\mathfrak{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \kappa(s) = 0$, pour tout $s \in \mathrm{S}$, donc a fortiori $\mathfrak{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \kappa(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, ce qui entraîne, d'après le lemme de Nakayama, que $\mathfrak{I} = 0$, donc que π est un isomorphisme.

Lemme 2.9.1. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de préschémas qui soit un* homéomorphisme*; alors* f *est un morphisme* affine [(**)].

Il suffit de montrer que tout point $y \in \mathrm{Y}$ possède un voisinage ouvert W tel que la 338
restriction de f au-dessus de W soit un morphisme affine. Soit donc $y \in \mathrm{Y}$, et soit V un voisinage ouvert affine de y dans Y. Soit $\mathrm{V}' = f^{-1}(\mathrm{V})$. Alors V' est un voisinage ouvert de $x = f^{-1}(y)$ dans X. Il existe un voisinage ouvert affine W' de x dans X contenu dans V'. Posons alors $\mathrm{W} = f(\mathrm{W}')$. Alors W est un voisinage ouvert de y dans Y contenu dans le schéma affine V, donc W est un schéma. Puisque W' est un schéma affine, la restriction de f au-dessus de W est alors un morphisme affine (EGA II, 1.2.3).

Corollaire 2.10. — *Soit* G *un* S*-groupe* localement de type fini*. Supposons que, quel soit* $s \in \mathrm{S}$, G_s *soit le* $\kappa(s)$*-groupe unité, alors* G *est le* S*-groupe unité.*

Plus généralement :

Corollaire 2.11. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-morphisme* localement de type fini*. Pour que* f *soit un* monomorphisme*, il faut et il suffit que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, f_s *soit un* monomorphisme*.*

Il est clair que la condition est nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. Si, pour tout $s \in \mathrm{S}$, f_s est un monomorphisme, a fortiori pour tout $y \in \mathrm{Y}$, f_y est un monomorphisme ; nous pouvons donc supposer que $\mathrm{Y} = \mathrm{S}$.

(*) C'est aussi une conséquence immédiate de EGA IV_4, 18.12.6.

(**) cf. EGA IV_4, 18.12.7.1 pour un résultat un peu plus général, se prouvant par la même démonstration.

(14) N.D.E. : c.-à-d., un idéal formé d'éléments nilpotents.

D'après EGA I, 5.3.8, pour montrer que f est un monomorphisme, il suffit de montrer que $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est un isomorphisme, ou, ce qui revient au même, que la première projection $p : X \times_S X \to X$ est un isomorphisme. Mais, si f_s est un monomorphisme, il résulte de même de EGA I, 5.3.8, que la première projection $X_s \times_{\kappa(s)} X_s \to X_s$ (qui s'identifie à p_s) est un isomorphisme. Or p possède la S-section
339 Δ_f, donc le lemme 2.9 affirme que si pour tout $s \in S$, p_s est un isomorphisme, alors il en est de même de p. C.Q.F.D.

Corollaire 2.12. — *Soit* G *un* S*-préschéma possèdant une* S*-section* ε. *Supposons que le morphisme structural* $\pi : G \to S$ *soit* fermé. *Soit* $s \in S$ *tel que* π *soit* de présentation finie au point $\varepsilon(s)$, *et que* $\varepsilon_s : \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to G_s$ *soit un* isomorphisme (*ou, ce qui revient au même, que* $\pi_s : G_s \to \mathrm{Spec}\,\kappa(s)$ *soit un isomorphisme*). *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *dans* S *tel que* $\varepsilon \times_S U : U \to G \times_S U$ *soit un* isomorphisme.

Soit V l'ensemble des points de G où π est non ramifié ; on sait que V est ouvert (cf. N.D.E. (4)) et contient $\varepsilon(s)$. Donc $W = \varepsilon^{-1}(V)$ est un ouvert de S contenant s, et tel que pour tout $t \in W$, π soit non ramifié en $\varepsilon(t)$. On vérifie aisément que si π est fermé, il en est de même de $\pi \times_S W$, donc nous pouvons supposer que $W = S$.

Alors $G \setminus \varepsilon(S)$ est une partie fermée X de G (2.7.1), ne rencontrant pas G_s donc, puisque π est fermé, $\pi(X)$ est une partie fermée F de S ne rencontrant pas s ; posons $U = S \setminus F$; alors U est un ouvert de S tel que $\varepsilon \times_S U$ soit un isomorphisme de U sur $G|_U$.

3. Composante neutre d'un groupe localement de présentation finie

3.0. Étant donnée une partie A (resp. B) d'un S-préschéma X (resp. Y), par abus de notation, $A \times_S B$ désignera la partie de $X \times_S Y$ formée des points dont la première projection appartient à A et la deuxième à B.

Étant donnée une partie A d'un S-groupe G, nous dirons que A est *stable pour la loi de groupe de* G si on a : $c(A) \subseteq A$ et $\mu(A \times_S A) \subseteq A$.

340 ***Définition 3.1***. — Soit G un S-foncteur en groupes vérifiant la condition suivante :

(+) quel que soit $s \in S$, le foncteur $G_s = G \otimes_S \kappa(s)$ est représentable.

On notera alors $\underline{G^0_s}$ la composante connexe de l'élément neutre du $\kappa(s)$-groupe G_s [(15)]. On définit un sous-S-foncteur en groupes de G, appelé *composante neutre de* G, noté G^0, en posant quel que soit le morphisme $T \to S$:

$$G^0(T) = \{u \in G(T) \mid \forall\, s \in S, \quad u_s(T_s) \subset \underline{G^0_s}\}.$$

On a ainsi défini le foncteur $G \mapsto G^0$ de $(\widehat{\mathbf{Sch}}_{/S})$-gr. dans $(\widehat{\mathbf{Sch}}_{/S})$-gr.

(15) N.D.E. : C'est une notation légèrement abusive, mais qui est compatible avec les notations de $\mathrm{VI_A}$, 2.3 lorsque cette composante connexe est l'espace topologique sous-jacent à un sous-préschéma en groupes *ouvert* G^0 de G, cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.2.bis.

Remarque 3.2. — (i) Soit G un S-foncteur en groupes vérifiant la condition (+), alors Lie $(\mathrm{G}^0/\mathrm{S}) = \mathrm{Lie}\,(\mathrm{G}/\mathrm{S})$, en vertu de l'exposé II. [16]

(ii) Soient G et G′ deux S-foncteurs en groupes vérifiant (+), alors :

a) si $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{G}'$, alors $\mathrm{G}^0 \subseteq \mathrm{G}'^0$,

b) si $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{G}'$ et $\mathrm{G}'^0 \subseteq \mathrm{G}$, alors $\mathrm{G}^0 = \mathrm{G}'^0$,

c) si pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est *localement de type fini* sur $\kappa(s)$, alors G^0 satisfait la propriété (+), d'après $\mathrm{VI_A}$.2.3, et on a $(\mathrm{G}^0)^0 = \mathrm{G}^0$.

Proposition 3.3. — *Soit* G *un* S-*foncteur en groupes vérifiant la condition* (+) *et soit* S′ *un* S-*préschéma. Alors* $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')^0 = \mathrm{G}^0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$*, autrement dit le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^0$ *commute aux changements de base, i.e. le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}})\text{-gr.} \arrow[r, "\mathrm{G}\mapsto\mathrm{G}^0"] \arrow[d] & (\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}})\text{-gr.} \arrow[d] \\
(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}'}})\text{-gr.} \arrow[r] & (\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}'}})\text{-gr.}
\end{tikzcd}$$

Il suffit en effet de vérifier que, pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, dont on désigne par s l'image 341
dans S, on a : $\mathrm{G}^0_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s') = ((\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}') \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(s'))^0$, ce qui résulte de $\mathrm{VI_A}$ 2.1.1, car $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}') \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(s') = \mathrm{G}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$.

Cas particulier 3.4. — Soit G un S-préschéma en groupes ; notons $\underline{\mathrm{G}^0}$ le sous-ensemble de G réunion des $\underline{\mathrm{G}^0_s}$ lorsque s parcourt S. Alors $\underline{\mathrm{G}^0}$ est une partie de G stable pour la loi de groupe de G (cf. 3.0), et quel que soit le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ on a :

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}') = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid u(\underline{\mathrm{S}'}) \subset \underline{\mathrm{G}^0}\}.$$

Lorsque $\underline{\mathrm{G}^0}$ est une partie ouverte de G, il est clair que G^0 est représentable par le sous-préschéma de G induit sur l'ouvert $\underline{\mathrm{G}^0}$.

Proposition 3.5. — *Soient* S *un préschéma* quasi-compact *et* quasi-séparé*, et* G *un* S-*groupe à* fibres localement de type fini*. Il existe alors un* ouvert quasi-compact U *de* G *contenant* $\underline{\mathrm{G}^0}$*.*

La section unité ε étant une immersion, $\varepsilon(\mathrm{S})$ est un sous-espace quasi-compact de G, donc il existe un ouvert quasi-compact V de G qui contient $\varepsilon(\mathrm{S})$. Puisque S est quasi-séparé, et que V est quasi-compact, V est quasi-compact sur S (EGA IV_1, 1.2.4), donc $\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ est quasi-compact sur S, donc quasi-compact. Alors $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} = \mu(\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V})$ est quasi-compact. Posons $\mathrm{V}_s = \mathrm{V} \cap \mathrm{G}_s$ et $\mathrm{V}^0_s = \mathrm{V} \cap \mathrm{G}^0_s$. Alors V^0_s est un ouvert de G^0_s, dense dans G^0_s puisque G^0_s est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), donc $\mathrm{V}^0_s \cdot \mathrm{V}^0_s = \mathrm{G}^0_s$ ($\mathrm{VI_A}$ 0.5), ce qui montre que $\mathrm{V}_s \cdot \mathrm{V}_s \supseteq \mathrm{G}^0_s$, donc que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \supseteq \underline{\mathrm{G}^0}$. Enfin, puisque $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}$ est quasi-compact, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}$ et a fortiori $\underline{\mathrm{G}^0}$.

---

[16] N.D.E. : préciser ce point. . .

Corollaire 3.6. — *Soit* G *un* S-*groupe à* fibres localement de type fini et connexes. *Alors* G *est* quasi-compact sur S.

342 Notre assertion étant locale sur S (EGA I, 6.6.1), on est ramené au cas où S est affine ; d'après 3.5, il existe alors un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{G^0} = G$, donc G est quasi-compact, donc quasi-compact sur le schéma affine S (EGA I, 6.6.1).

Proposition 3.7. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie *; alors :*

(i) $\underline{G^0}$ *est* ind-constructible [17] *dans* G.

(ii) *Si de plus* G *est* quasi-séparé sur S*, et* S quasi-compact *et* quasi-séparé*, alors* $\underline{G^0}$ *est* constructible.

(iii) *Par conséquent, si* G *est* quasi-séparé sur S*,* $\underline{G^0}$ *est* localement constructible.

Montrons d'abord la première assertion. Puisque π est localement de présentation finie, étant donné $s \in S$, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(U) \subseteq V$ et que le morphisme $\pi' : U \to V$ déduit de π soit de présentation finie. Posons alors $T = \varepsilon^{-1}(U)$ et $W = {\pi'}^{-1}(T)$. Alors le morphisme $\pi'' : W \to T$ déduit de π' est de présentation finie, et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : T \to W$ déduit de ε.

Pour tout $t \in T$, comme G^0_t est irréductible (VI_A 2.4), $W \cap G^0_t$ est dense dans G^0_t, donc irréductible, donc connexe : c'est donc la composante connexe de ${\pi''}^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. Il résulte alors de EGA IV_3, 9.7.12, que la réunion W^0 des $W \cap G^0_t$, pour $t \in T$, est localement constructible dans W. D'autre part, il résulte de VI_A 0.5, que $W^0 \cdot W^0 = \underline{G^0} \cap \pi^{-1}(T)$. Or, puisque π est localement de présentation finie, il en est de même de μ (VI_A 0.1), donc du morphisme $\mu'' : W \times_T W \to \pi^{-1}(T)$ déduit de μ.

Comme W^0 est localement constructible dans W, alors $W^0 \times_T W^0$ est localement constructible dans $W \times_T W$, et donc $\underline{G^0} \cap \pi^{-1}(T) = \mu''(W^0 \times_T W^0)$ est ind-constructible dans $\pi^{-1}(T)$, d'après EGA IV_1, 1.9.5 (viii). Ceci montre que $\underline{G^0}$ est ind-constructible dans G.

343 Supposons maintenant S quasi-compact et quasi-séparé et G quasi-séparé sur S ; alors (3.5), il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{G^0}$. Puisque G est quasi-séparé sur S, G est quasi-séparé, donc l'ouvert U est rétrocompact (EGA IV_1, 1.2.7), et il suffit de montrer que $\underline{G^0}$ est constructible dans U (EGA 0_{III}, 9.1.8). De plus, U étant quasi-compact, donc quasi-compact sur S (EGA IV_1, 1.2.4), et quasi-séparé sur S, la restriction de π_G à U est de présentation finie, et d'après (EGA IV_3, 9.7.12), $\underline{G^0}$ est localement constructible dans U, donc constructible dans U, puisque U est quasi-compact et quasi-séparé (EGA IV_1, 1.8.1).

Corollaire 3.8. — *Soient* S_0 *un préschéma* quasi-compact *et* quasi-séparé*,* I *un ensemble préordonné filtrant croissant,* $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ *un système inductif de* $\mathscr{O}_{S_0}$*-algèbres commutatives et* quasi-cohérentes*,* $\mathscr{A} = \varinjlim \mathscr{A}_i$*,* $S_i = \operatorname{Spec} \mathscr{A}_i$ *pour* $i \in I$*, et* $S = \operatorname{Spec} \mathscr{A}$ (cf. EGA II, 1.3.1)*. Soit* G *un* S_0*-préschéma en groupes* localement de présentation finie*. Alors l'application canonique* $\varinjlim G^0(S_i) \to G^0(S)$ *est* bijective*.*

[17] N.D.E. : Pour la définition, voir EGA IV_1, 1.9.3.

Puisque G est localement de présentation finie sur S, l'application canonique $\varinjlim \mathrm{G}(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}(\mathrm{S})$ est bijective, d'après EGA IV_2, 8.14.2 c). Il s'ensuit immédiatement que l'application canonique $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $s \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{G}(\mathrm{S})$. Il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que s se factorise au moyen de $s_i \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_i)$ à travers $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$; par hypothèse, $s^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0}) = \mathrm{S}$. Mais, d'après 3.7, G^0 est ind-constructible dans S, donc $s_i^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0})$ l'est dans S_i. Il résulte alors de EGA IV_2, 8.3.4, qu'il existe un indice $j \geqslant i$ tel que $s_j^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0}) = \mathrm{S}_j$, où s_j est l'application déduite de s_i par le changement de base $\mathrm{S}_j \to \mathrm{S}_i$. Cela montre que $s_j \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_j)$, donc que s provient d'un élément de $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i)$. **344**

Proposition 3.9. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie. *Supposons que* G^0 *soit* représentable *; alors le morphisme canonique* $i : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ *est une* immersion ouverte *; de plus,* G^0 *est* quasi-compact *sur* S.

Puisque G^0 est un sous-foncteur du foncteur G, le morphisme i est un monomorphisme, donc est radiciel. D'après la définition du foncteur G^0, on vérifie immédiatement sur la définition (EGA IV_3, 17.1.1) que i est un morphisme formellement étale (en remarquant que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est l'image de i dans G). Enfin, il résulte de la caractérisation (EGA IV_3, 8.14.2 c)) des S-préschémas localement de présentation finie à l'aide du foncteur qu'ils représentent, et de 3.8, que, puisque G est localement de présentation finie sur S, il en est de même de G^0. Donc i est localement de présentation finie ; c'est donc un morphisme radiciel et étale ; donc une immersion ouverte (EGA IV_4, 17.9.1).

D'autre part, la dernière assertion résulte de 3.6.

Théorème 3.10. — *Soit* G *un* S-*groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* lisse *sur* S aux points de la section unité.

(ii) G *est* plat et localement de présentation finie *sur* S aux points de la section unité*, et pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$.

(iii) *Il existe un sous-préschéma en groupes ouvert* G' *de* G*,* lisse *sur* S.

(iv) G^0 *est* représentable *par un sous-préschéma ouvert de* G*,* lisse *sur* S.

Il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i), et, d'après 1.3.1 et 2.4, (i) entraîne (ii) et (iii). De plus, (ii) $\Rightarrow$ (i) d'après EGA IV_4, 17.5.1.

Montrons enfin que (iii) entraîne (iv). Le lemme 3.10.1 ci-dessous montre que G' contient $\underline{\mathrm{G}^0}$, et que $\underline{\mathrm{G}'^0} = \underline{\mathrm{G}^0}$. Il suffit donc de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ouvert dans G, car **345**
on a déjà vu (3.4) qu'alors G^0 sera représentable par le sous-préschéma en groupes lisse induit par G' sur l'ouvert $\underline{\mathrm{G}'^0} = \underline{\mathrm{G}^0}$. On peut donc supposer que $\mathrm{G}' = \mathrm{G}$.

Pour montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ouvert, il suffit de montrer que tout $s \in \mathrm{S}$ possède un voisinage T dans S tel que $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ soit ouvert dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$. Soit $s \in \mathrm{S}$. Puisque $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$, alors π est localement de présentation finie, donc on peut construire, comme dans la démonstration de 3.7, un ouvert T de S contenant s, et un ouvert W de G contenant $\varepsilon(s)$, tels que le morphisme $\pi'' : \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ déduit de π soit de présentation finie et admette comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε. Pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ est alors la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. Puisque

π est lisse, il en est de même de π'' qui est donc réduit et de présentation finie. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.5, la réunion W^0 des $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}_t^0$ pour $t \in \mathrm{T}$ est *ouverte* dans W.

D'autre part, d'après VI_A 0.5, on a $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0 = \underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$, et il faut montrer que ceci est ouvert dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$. Nous pouvons donc supposer désormais que $\mathrm{T} = \mathrm{S}$; il reste à montrer que $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$ est ouvert dans G. Puisque π est universellement ouvert, il en est de même de μ (VI_A 0.1). Donc, puisque W^0 est ouvert dans G, il en est de même de $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0 = \mu(\mathrm{W}^0 \times_\mathrm{S} \mathrm{W}^0)$. C.Q.F.D.

Ce résultat sera amélioré en 4.4.

Lemme 3.10.1. — *Soit* G *un* S*-groupe à* fibres localement de type fini. *Alors tout sous-préschéma en groupes ouvert* G′ *de* G *contient* $\underline{\mathrm{G}^0}$, *et vérifie :* $\underline{\mathrm{G}^0} = \underline{\mathrm{G}'^0}$.

Soit $s \in \mathrm{S}$; posons $\mathrm{G}''_s = \mathrm{G}'_s \cap \mathrm{G}^0_s$; alors G''_s est un ouvert de G^0_s, qui est dense dans G^0_s puisque G^0_s est irréductible (VI_A 2.4), donc $\mathrm{G}''_s \cdot \mathrm{G}''_s = \mathrm{G}^0_s$ (VI_A 0.5), ce qui montre que $\mathrm{G}^0_s = \mathrm{G}''_s \cdot \mathrm{G}''_s \subseteq \mathrm{G}'_s \cdot \mathrm{G}'_s = \mathrm{G}'_s$, donc que $\underline{\mathrm{G}^0} \subseteq \mathrm{G}'$.

Alors G^0 est un sous-foncteur du foncteur G′, et il résulte de 3.2 (ii) c) que $\mathrm{G}'^0 = \mathrm{G}^0$, donc $\underline{\mathrm{G}'^0} = \underline{\mathrm{G}^0}$.

346 ***Proposition 3.11***. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* S*-groupes* localement de présentation finie. *Si* u *est* plat, *l'application* $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \mathrm{H}^0$ *déduite de* u *est* surjective *; la réciproque est vraie si* G *est* plat *sur* S *et si* H *est à* fibres réduites. [18]

Supposons u plat ; alors pour tout $s \in \mathrm{S}$, u_s est plat et localement de présentation finie, donc ouvert (EGA IV_2, 2.4.6), donc le morphisme $u^0_s : \mathrm{G}^0_s \to \mathrm{H}^0_s$ est dominant. Puisque G^0_s est de type fini sur $\kappa(s)$ (VI_A 2.4) et que H_s est séparé sur $\kappa(s)$ (VI_A 0.2), u^0_s est quasi-compact (EGA I, 6.6.4) donc surjectif (1.2). Donc l'application $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \mathrm{H}^0$ est surjective.

Réciproquement, supposons $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \mathrm{H}^0$ surjective, G plat sur S et H à fibres réduites. Alors, pour tout $s \in \mathrm{S}$, u^0_s est surjectif, et H_s est réduit ; donc H^0_s est localement noethérien et intègre, et u^0_s est de type fini, donc plat au point générique de G_s (EGA IV_2, 6.9.1), donc u_s est plat (1.3), si bien que u est plat, d'après le « critère de platitude par fibres » (EGA IV_3, 11.3.11).

4. Dimension des fibres des groupes localement de présentation finie

Proposition 4.1. — *Soit* G *un* S*-préschéma* localement de type fini*, muni d'une* S-section ε*, et tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, on ait* $\dim \mathrm{G}_s = \dim_{\varepsilon(s)} \mathrm{G}_s$ (*ce qui est le cas si* G *est un* S*-groupe* (1.5)).

(i) *La fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *est* semi-continue supérieurement *dans* S.

(ii) *Si de plus,* G *est* localement de présentation finie *sur* S*, cette fonction est* localement constructible.

[18] N.D.E. : comparer avec VI_A, 5.6.

Soit $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural. Le théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3) affirme que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est semi-continue supérieurement dans G. Or, pour tout $s \in \mathrm{S}$, on a 347

$$\dim \mathrm{G}_s = \dim \pi^{-1}(s) = \dim_{\varepsilon(s)} \pi^{-1}(\pi(\varepsilon(s)));$$

et puisque la fonction $s \mapsto \varepsilon(s)$ est continue dans S, la fonction composée $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est semi-continue supérieurement dans S.

Supposons G localement de présentation finie sur S. Pour montrer que la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est localement constructible, on voit en raisonnant comme précédemment qu'il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est localement constructible dans G, ce qui résulte de EGA IV_3, 9.9.1.

Proposition 4.2. — *Soit* G *un* S-*préschéma* localement de présentation finie, *muni d'une* S-section ε *et vérifiant les deux conditions suivantes* (*qui sont vérifiées si* G *est un* S-*groupe, d'après* 1.5 *et* VI_{A} 2.4.1) *:*

a) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et tout* $x \in \mathrm{G}_s$*, on a* $\dim \mathrm{G}_s = \dim_x \mathrm{G}_s$ (*ou, ce qui revient au même* (1.5)*, pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, toutes les composantes irréductibles de* G_s *ont même dimension*).

b) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, si on note* G_s^0 *la composante connexe de* G_s *contenant* $\varepsilon(s)$*,* G_s^0 *est* géométriquement irréductible.

Soit $s \in \mathrm{S}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* universellement ouvert *sur* S aux points de G_s^0.

(i bis) G *est* universellement ouvert *sur* S en tout point d'un voisinage de $\varepsilon(s)$ dans G_s^0.[19]

(ii) *La fonction* $t \mapsto \dim \mathrm{G}_t$ *est* constante dans un voisinage de s *dans* S.

Évidemment (i) $\Rightarrow$ (i bis). D'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (ii), l'ensemble des points de G_s^0 où π_{G} est universellement ouvert est *fermé* dans G_s^0. Donc, comme G_s^0 est irréductible, on a (i bis) $\Rightarrow$ (i).

Montrons que (i) entraîne (ii). Soit T l'ensemble des $t \in \mathrm{S}$ tels que $\dim \mathrm{G}_t = \dim \mathrm{G}_s$. D'après 4.1, T est localement constructible, donc (EGA IV_1, 1.10.1) pour montrer que T est un voisinage de s, il suffit de montrer que toute générisation s' de s appartient 348
à T.

Soient x le point générique de G_s^0 et U un ouvert de G contenant x. Comme π_{G} est universellement ouvert en x, alors, d'après EGA IV_3, 14.3.13, pour toute générisation s' de s, on a : $\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_{s'}) \geqslant \dim_x(\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_s)$. Compte-tenu de notre hypothèse a), ceci entraîne $\dim \mathrm{G}_{s'} \geqslant \dim \mathrm{G}_s$. Or, la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ étant semi-continue supérieurement, d'après 4.1, on a aussi $\dim \mathrm{G}_{s'} \leqslant \dim \mathrm{G}_s$, d'où $s' \in \mathrm{T}$. C.Q.F.D.

Montrons que (ii) entraîne (i). Puisque π est localement de présentation finie, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ et que le morphisme $\pi' : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ déduit de π soit de présentation finie.

[19] N.D.E. : On trouve dans l'original : « en les points de $\varepsilon(s)$ » ; il n'est pas suffisant de supposer que G soit universellement ouvert sur S en $\varepsilon(s)$, comme le montre l'exemple donné dans la N.D.E. (12). On a corrigé la preuve en conséquence.

Posons alors $T = \varepsilon^{-1}(U)$ et $W = \pi'^{-1}(T) = U \cap \pi^{-1}(T)$. Alors le morphisme $\pi'' : W \to T$ déduit de π' est de présentation finie et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : T \to W$ déduit de ε. De plus, pour tout $t \in T$, G_t^0 étant irréductible, $W \cap G_t^0$ est dense dans G_t^0, donc irréductible, donc connexe : c'est donc la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$.

Comme $W \cap G_t^0$ est un ouvert dense de G_t^0, on a, d'après 1.5 et EGA IV_2, 5.2.1, $\dim(W \cap G_t^0) = \dim G_t^0 = \dim G_t$, donc la fonction $t \mapsto \dim W \cap G_t^0$ est constante dans un voisinage de s dans T. Montrons enfin que, quel que soit $t \in T$, $W \cap G_t^0$ est géométriquement irréductible. Soit K une extension de $\kappa(t)$, alors $(W \cap G_t^0) \otimes_{\kappa(t)} K = (W \otimes_{\kappa(t)} K) \cap (G_t^0 \otimes_{\kappa(t)} K)$ est un ouvert non vide de $G_t^0 \otimes_{\kappa(t)} K$, donc est irréductible puisque $G_t^0 \otimes_{\kappa(t)} K$ l'est.

Nous sommes alors dans les conditions d'application de EGA IV_3, 15.6.6 (ii), qui affirme que π'' (donc π) est universellement ouvert aux points de $W \cap G_s^0$. Mais, d'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (ii), le sous-ensemble de G_s formé des points où π est universellement ouvert est fermé dans G_s ; puisqu'il contient $W \cap G_s^0$, il contient donc son adhérence G_s^0. C.Q.F.D.

349 ***Corollaire 4.3***. — *Soit* G *un* S-*groupe* plat et localement de présentation finie. *Alors la fonction* $s \mapsto \dim G_s$ *est* localement constante *sur* S.

Cela résulte immédiatement de 4.2, car tout morphisme plat et localement de présentation finie est universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6).

Corollaire 4.4. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie *sur* S aux points de la section unité. *Considérons les conditions :*

(i) G *est* lisse *sur* S aux points de la section unité (cf. 3.10).

(ii) *Pour tout* $s \in S$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et la fonction* $s \mapsto \dim G_s$ *est* localement constante *sur* S.

(iii) *Pour tout* $s \in S$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et il existe un* voisinage V de la section unité *tel que* $\pi_V : V \to S$ *soit* universellement ouvert.

(iv) *Pour tout* $s \in S$, G_s^0 *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et* G^0 *est* représentable *par un sous-préschéma en groupes ouvert de* G, universellement ouvert *sur* S.

Alors on a les implications suivantes : (i) ⇒ (ii) ⇔ (iii) ⇔ (iv).

Si on suppose de plus S réduit, *alors les conditions* (i) *à* (iv) *sont équivalentes, et impliquent que* G^0 *est* lisse *sur* S. [20]

Montrons que (i) entraîne (ii). Pour tout $x \in G$, on a $\dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) = \dim \pi^{-1}(\pi(x))$, d'après 1.5. Par conséquent, d'après EGA IV_4, 17.10.2, la fonction

$$x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) = \dim \pi^{-1}(\pi(x))$$

[20] N.D.E. : Bien entendu, on ne peut se dispenser ici de l'hypothèse que S soit réduit : si k est un corps et $S = \operatorname{Spec} k[\delta]$, où $\delta^2 = 0$, le k-groupe trivial $G = \operatorname{Spec} k$ est un S-groupe vérifiant (ii)–(iv), mais n'est pas plat, donc pas lisse, sur A.

est continue au voisinage de la section unité ; donc la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est continue dans S, donc localement constante dans S. D'autre part, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est lisse sur $\kappa(s)$, d'après 1.3.1.

Montrons que (ii) entraîne (iv). Il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est *ouvert* dans G, car alors (3.4) G^0 sera représentable par le sous-préschéma en groupes induit sur $\underline{\mathrm{G}^0}$, et les propriétés de G^0 citées dans l'énoncé résulteront de 2.4 et 4.2. Étant donné $s \in \mathrm{S}$, **350**
construisons comme dans la démonstration de 3.10, W, T, π'', ε'' et W^0. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.7, W^0 est *ouvert* dans W. D'autre part, sous l'hypothèse 4.4 (ii), il résulte de 4.2 que π est universellement ouvert en tout point de W^0, donc (VI_{A} 0.1) μ est universellement ouvert en tout point de $\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}^0$, ce qui montre que $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$ est ouvert, et on termine comme dans la démonstration du théorème 3.10.

Il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (iii), et (iii) $\Rightarrow$ (ii) résulte de 4.2 appliqué à V.

Enfin, supposons (ii)–(iv) vérifiés et montrons que G^0 est lisse sur S, si S est réduit. Pour cela, on peut supposer $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$. Alors G est de présentation finie sur S en vertu de 5.4 ci-dessous. Ainsi, π_{G} est de présentation finie, à fibres géométriquement intègres, de dimension localement constante sur S. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.7, le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{\mathrm{réd}} \to \mathrm{S}_{\mathrm{réd}}$ déduit de π_{G} est plat, donc π_{G} est *plat* si S est réduit. Dans ce cas, $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$ est lisse sur S, d'après le théorème 3.10.

5. Séparation des groupes et espaces homogènes

Proposition 5.1. — *Pour qu'un* S-*groupe* G *soit* séparé*, il faut et il suffit que la section unité de* G *soit une* immersion fermée*.*

La condition est nécessaire (EGA I, 5.4.6) ; elle est suffisante en vertu du diagramme cartésien suivant (VI_{A} 0.3) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times c)"] & \mathrm{G} \\
\mathrm{G} \arrow[u, "\Delta_{\mathrm{G/S}}"] \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{S} \arrow[u, "\varepsilon"']
\end{tikzcd} .$$

Proposition 5.2. — *Si* S *est discret, tout* S-*groupe est séparé.*

En effet, S est alors égal à $\coprod_{s\in\mathrm{S}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et, d'après EGA I, 5.5.5, il suffit de montrer que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est séparé, ce qui résulte de VI_{A} 0.2, **351**
puisque $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est un anneau local artinien.

5.2.0. — [21] Soient G un S-préschéma en groupes, X un S-préschéma à groupe d'opérateurs (à gauche) G, et

$$\Phi : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}$$

[21] N.D.E. : On a ajouté les numéros 5.2.0 à 5.2.x.

le morphisme de S-préschémas défini ensemblistement par $(g, x) \mapsto (gx, x)$. Rappelons (cf. III.0.1 et IV.5.1.0) qu'on dit que X est un espace *formellement principal homogène* sous G si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'ensemble X(T) est vide ou principal homogène sous G(T),

(ii) Φ est un isomorphisme de S-foncteurs,

(iii) Φ est un isomorphisme de S-préschémas.

(L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) est claire, et l'on a (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) puisque $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$.)

La définition d'espace *formellement homogène* (pas nécessairement *principal* homogène) s'obtient en demandant que Φ soit un *épimorphisme* dans la catégorie des *faisceaux pour une topologie* $\mathcal{T}$ appropriée. En effet, la condition que Φ soit un épimorphisme de S-foncteurs équivaut à ce que, pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'ensemble X(T) soit vide ou bien *homogène* (pas nécessairement principal homogène) sous G(T), mais cette condition est trop restrictive, comme le montre l'exemple simple suivant. Soient $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$, $\mathrm{G} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ et $\mathrm{X} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ sur lequel G agit via $t \cdot x = t^2 x$. Alors le morphisme Φ est étale, fini, et surjectif, donc un épimorphisme dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (étf) (*a fortiori*, un épimorphisme de S-préschémas) ; par contre, les points 1 et -1 de $\mathrm{X}(\mathbb{R})$ ne sont pas conjugués par un élément de $\mathrm{G}(\mathbb{R})$, de sorte que le morphisme $\mathrm{G}(\mathbb{R}) \times \mathrm{X}(\mathbb{R}) \to \mathrm{X}(\mathbb{R}) \times \mathrm{X}(\mathbb{R})$ n'est pas surjectif [(22)]. On est donc conduit à poser la définition suivante :

Définition 5.2.1. — Soient G un S-groupe, X un S-préschéma à groupe d'opérateurs G, et $\mathcal{T}$ une topologie sur $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$, moins fine que la topologie canonique. On dit que X est un espace *formellement homogène* sous G si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) le morphisme $\Phi : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est un épimorphisme dans la catégorie des *faisceaux* pour la topologie $\mathcal{T}$,

(ii) pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, et $x, y \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$, il existe un morphisme $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ *couvrant* pour la topologie $\mathcal{T}$, et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T}')$, tels que $y_{\mathrm{T}'} = g \cdot x_{\mathrm{T}'}$.

Remarque 5.2.2. — La condition (i) implique, en particulier, que Φ est un épimorphisme effectif universel dans $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ (cf. IV, 4.4.3). Ceci entraîne, comme on le voit facilement, que Φ est surjectif (cf. IV, N.D.E. (3)).

Proposition 5.2.3. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe* localement de type fini*,* X *un k-préschéma* géométriquement réduit*, muni d'une action de* G *telle que le morphisme :*

$$(*) \qquad \Phi : \mathrm{G} \times_k \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times_k \mathrm{X} \textit{ est surjectif.}$$

[(22)] N.D.E. : Évidemment, cette difficulté provient du fait que si $\mathscr{C}'$ est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ contenant $\mathscr{C}$, par exemple, la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathcal{T}}$ des faisceaux sur $\mathscr{C}$ pour une topologie $\mathcal{T}$ moins fine que la topologie canonique, et si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme dans $\mathscr{C}$, alors les implications :

$$f \text{ épimorphisme de } \widehat{\mathscr{C}} \;\Rightarrow\; f \text{ épimorphisme de } \mathscr{C}' \;\Rightarrow\; f \text{ épimorphisme de } \mathscr{C}$$

sont en général strictes.

a) *Si* G *est* de type fini *sur* k*, il en est de même de* X.

b) *Si* X *est* localement de type fini *sur* k*, alors :*

(i) Φ *est* fidèlement plat et localement de présentation finie.

(ii) *Les composantes connexes de* X *sont irréductibles, et de type fini sur* k.

Remarques 5.2.4. — Soient k un corps, G un k-groupe *localement de type fini*, X un k-préschéma à groupe d'opérateurs G vérifiant la condition $(*)$ suivante :

$(*)$ le morphisme $\Phi : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est *surjectif.*

On verra plus bas (Cor. 5.4) que si X est *localement de type fini* sur k, et connexe, alors X est *séparé*. Notons toutefois que la condition $(*)$ n'entraîne pas que X soit localement de type fini sur k.

Théorème 5.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes* localement de présentation finie *sur* S *et* universellement ouvert *sur* S au voisinage de la section unité*,* X *un* S*-préschéma sur lequel* G *opère de façon que le morphisme :*

$$\Phi : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}, \qquad (g,x) \mapsto (gx,x)$$

soit surjectif*. On suppose que, pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *:*

a) *la fibre* X_s *est* localement de type fini *sur* $\kappa(s)$ *;* [(23)]

b) *il existe un sous-préschéma ouvert* U *de* X*,* séparé *sur* S*, tel que* U_s *soit* dense *dans* X_s*.*

Alors X *est* séparé *sur* S.

Corollaire 5.4. — *Soient* S*,* G*,* X *comme ci-dessus et supposons de plus* X *à* fibres connexes*, alors* X *est* séparé sur S *et* quasi-compact sur S.

En effet, comme X_s est connexe, X_s est aussi irréductible [(24)] (s'il n'est pas vide) de sorte que si U est un ouvert affine de X tel que U_s soit non vide, U_s est dense dans X_s, et le théorème s'applique.

Corollaire 5.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes,* localement de présentation finie*, à* fibres connexes*, et* universellement ouvert *sur* S*. Alors* G *est* séparé *et de* présentation finie *sur* S.

[(23)]N.D.E. : On a ajouté cette hypothèse ; voir XX plus loin pour des exemples dûs à O. Gabber, qui montrent que la conclusion de 5.3 (et aussi de 5.4) est en défaut sans hypothèses additionnelles. D'autre part, signalons que le th. 5.3 est une version remaniée du th. 5.3A ci-dessous, qui figure dans l'édition 1965 de SGAD, et est dû à M. Raynaud, cf. les Notes $(*)$ dans IX, 8.5 et 8.8.

Théorème 5.3A (Raynaud). — *Soient* G *un* S*-groupe localement de présentation finie, universellement ouvert sur* S*, et à fibres connexes. Alors* G *est* séparé *sur* S.
Plus généralement, tout S*-préschéma* X *localement de présentation finie sur* S*, muni d'une action de* G *telle que le morphisme* $\Phi : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$*,* $(g,x) \mapsto (gx,x)$ *soit surjectif, est* séparé *sur* S.

[(24)]N.D.E. : Préciser ce point : sur un corps, un espace homogène connexe non vide est irréductible. Ajouter ceci dans VI_{A}, après 2.4.1, ou dans VI_{B}, 1.3 ?

En effet, on vient de voir que G est séparé sur S, donc quasi-séparé. D'autre part G est quasi-compact sur S d'après 3.6.

5.6. *Démonstration du théorème* 5.3. Avant d'établir 5.3, prouvons quelques lemmes.

Lemme 5.6.0. — [25] (i) *Soient* $A \subseteq B$ *des anneaux intègres, avec* B entier *sur* A, *et soit* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ *tel que* A *soit* unibranche *au point* $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. *Alors le morphisme* $\pi : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *est* ouvert *au point* $\mathfrak{q}$.

(ii) *Soient* X, Y *deux préschémas* irréductibles, $f : X \to Y$ *un morphisme* dominant, x *un point de* X *tel que* f *soit* quasi-fini *en* x *et que* $y = f(x)$ *soit un point* unibranche *de* Y. *Alors* f *est* ouvert *au point* x. *En particulier, si* $Y = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$ *est un préschéma* local *de point fermé* y, *alors* $f(U) = Y$ *pour tout voisinage* U *de* x.

(i) Soient K et L les corps de fractions de A et B, respectivement, A' le normalisé de A, et B' le sous-anneau de L engendré par A' et B. Alors B' est entier sur A'. Posons $Y = \operatorname{Spec}(A)$, $X = \operatorname{Spec}(B)$, $Y' = \operatorname{Spec}(A')$, $X' = \operatorname{Spec}(B')$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\pi'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

dans lequel tous les morphismes sont entiers et surjectifs.

Comme A est unibranche en $\mathfrak{p}$, Y' possède un *unique* point $\mathfrak{p}'$ au-dessus de $\mathfrak{p}$; par conséquent, si U est un voisinage ouvert de $\mathfrak{p}'$ dans Y', alors $\phi(Y' \setminus U)$ est un fermé ne contenant pas $\mathfrak{p}$, de sorte que l'ouvert complémentaire est contenu dans $\phi(U)$. Ceci montre que $\phi : Y' \to Y$ est ouvert en $\mathfrak{p}'$, et il suffit donc de montrer que π' est ouvert. On est ainsi ramené au cas où $A = A'$ est normal.

Soit N une extension quasi-galoisienne de K contenant L, soit $\widetilde{X} = \operatorname{Spec}(\widetilde{B})$, où $\widetilde{B}$ est la clôture intégrale de B dans N, et soit $G = \operatorname{Aut}(N/K)$. Il suffit de montrer que $\widetilde{\pi} : \widetilde{X} \to Y$ est ouvert. Soient U un ouvert de $\widetilde{X}$ et $U' = \bigcup_{g \in G} gU'$. Comme G agit transitivement sur les fibres de $\widetilde{X} \to Y$ (cf. [**BAC**], Chap. V, § 2, Prop. 6), alors $\widetilde{\pi}(U) = \widetilde{\pi}(U')$, et ce dernier est égal à l'ouvert compléntaire du fermé $\widetilde{\pi}(\widetilde{X} \setminus U')$. Ceci prouve (i).

(ii) On peut supposer Y et X réduits. D'après le « théorème principal de Zariski » (cf. EGA IV_3, 8.12.9), il existe des voisinages ouverts affines U de x, et $V = \operatorname{Spec}(A)$

[25] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, signalé par O. Gabber, qui précise EGA IV_3, Lemmes 14.4.1.2 et 14.4.1.3, ainsi que l'erratum (Err_{IV}, 38) dans EGA IV_4.

de y, tels que $f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$, et une factorisation :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{V}' \arrow[d, "u"] \\ & \mathrm{V} \end{tikzcd},$$

où j est une immersion ouverte et u est fini. Remplaçant V' par l'adhérence de $j(\mathrm{U})$, on peut supposer V' irréductible, donc $\mathrm{V}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, où B est une A-algèbre intègre, finie sur A. De plus, comme f est dominant, u l'est aussi, de sorte que le morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est injectif. Comme, par hypothèse, A est unibranche au point y, il résulte de (i) que u est ouvert au point $j(x)$, et donc $f = u \circ j$ est ouvert au point x. Ceci prouve la première assertion de (ii). La seconde en découle, car si Y est un préschéma local de point fermé y, tout ouvert contenant y égale Y. (Dans le cas où $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y})$, on peut aussi utiliser, au lieu de EGA IV_3, 8.12.9, la forme locale du théorème principal de Zariski, qu'on trouve par exemple dans [**Pes66**], ou [**Ray70b**, Ch. IV, Th. 1].) C.Q.F.D.

Lemme 5.6.0.1. — [26] *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme* localement de présentation finie*,* $s \in \mathrm{S}$*, et* x *un point fermé de* X_s*. Soit* $n = \dim_x(\mathrm{X}_s)$ *et soit* q *le morphisme structural* $\mathbb{A}^n_{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$.

Supposons donné un morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$ quasi-fini *tel que* $f = q \circ u$*, et supposons* f universellement ouvert *au point générique* z *d'une composante irréductible* $\mathfrak{z}$ *de* X_s*, contenant* x *et de dimension* n*. Alors* u *est* universellement ouvert *au point* $x \in \mathrm{X}$.

D'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (i), il suffit de prouver que, pour tout entier $r \geqslant 0$ et tout point x' de $\mathrm{X}' = \mathrm{X}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_r]$ au-dessus de x, le morphisme $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}' = \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_r]$ est ouvert au point x'. Notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_r]$ et π' la projection $\mathrm{Y}' \cong \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{S}'$. Alors $\pi' \circ u'$ est le morphisme $f' : \mathrm{X}' \to \mathrm{S}'$ déduit de f par le changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et, posant $s' = f'(x')$, l'on a $\mathrm{X}'_{s'} \cong \mathrm{X}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$. Donc, d'après EGA IV_2, 2.3.4 (i) et 4.2.7 (iv), x' est contenu dans une composante irréductible $\mathfrak{z}'$ de $\mathrm{X}'_{s'}$, de dimension n, dont le point générique z' est au-dessus de z. Comme f est universellement ouvert en z, alors f' est universellement ouvert en z'. On est donc ramené à montrer que u est ouvert au point x. Posons $\mathrm{Y} = \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$ et $y = u(x)$.

Il est clair que u est localement de présentation finie, donc, d'après EGA IV_1, 1.10.3, il suffit de montrer que $u(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}) = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y})$. Pour cela, on peut supposer S affine et intègre. Soient alors $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ sa normalisation, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' = \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}'}$, et $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$. Comme le morphisme $\pi_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ est entier et surjectif, on a

$$\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}) = \bigcup_{y'} \pi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}',y'})),$$

[26] N.D.E. : On a explicité ce lemme, utilisé dans la démonstration du lemme 5.6.1

la réunion étant prise sur tous les points de Y' au-dessus de y ; il suffit donc de montrer que, pour chaque y' au-dessus de y, il existe $x' \in \mathrm{X}'$ *au-dessus de* x, tel que $u'(x') = y'$ et $u'(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{X}',x'}) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}',y'}$. Fixons un tel y' et soit s' son image dans S'.

Comme $\pi_{\mathrm{Y}}(y') = y = u(x)$, il existe au moins un point x' de $\mathrm{X}' \cong \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ au-dessus de x et de y'. Alors $x' \in \mathrm{X}'_{s'} \cong \mathrm{X}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$, donc, par relèvement des générisations et invariance de la dimension par extension de corps (EGA IV_2, 2.3.4 (i) et 4.2.7 (iv)), il existe une composante irréductible $\mathfrak{z}'$ de $\mathrm{X}'_{s'}$ contenant x', dominant $\mathfrak{z}$, et de dimension $n = \dim_{x'} \mathrm{X}'_{s'}$.

Comme f est universellement ouvert au point z, alors $f' : \mathrm{X}' \to \mathrm{S}'$ est universellement ouvert au point z'. Donc, d'après EGA IV_3, 14.3.13, il existe une composante irréductible Z de X' contenant z' (et donc x'), dominant S' et telle que

$$\dim_{z'}(\mathrm{Z}_{s'}) = n = \dim(\mathrm{Z}_\eta),$$

où η est le point générique de S'. Soit ξ le point générique de Z. Comme $u'_\eta : \mathrm{Z}_\eta \to \mathbb{A}^n_\eta$ est quasi-fini, alors $u'_\eta(\xi) = u'(\xi)$ est le point générique de $\mathbb{A}^n_\eta$, qui est aussi le point générique de $\mathrm{Y}' = \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}'}$. Par conséquent, notant g la restriction de u' à Z, le morphisme $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}'$ est quasi-fini et dominant. Comme Y' est normale, il résulte du lemme 5.6.0 que g est ouvert, de sorte que u' est ouvert en tout point de Z, en particulier au point x'. Par conséquent, on a $u'(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{X}',x'}) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}',y'}$, et ceci achève la démonstration du lemme 5.6.0.1. C.Q.F.D.

Le lemme suivant remplace avantageusement EGA IV_3, 14.5.10 [(27)], en ce qu'il est indépendant d'hypothèses noethériennes.

352 ***Lemme 5.6.1***. — *Soient* S *un préschéma,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un* S*-préschéma* localement de présentation finie*,* s *un point de* S*,* x *un point* fermé *de* X_s*. On suppose que* f *est* universellement ouvert *au point générique* z *d'une composante irréductible* $\mathfrak{z}$ *de* X_s*, contenant* x *et telle que* $\dim_x(\mathrm{X}_s) = \dim \mathfrak{z}$.

Alors, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{S} \\ \mathrm{S}'' \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{S}' \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

où π *est un morphisme* fini surjectif*,* de présentation finie*,* w *un morphisme* étale affine*, et* $g^{-1}(s)$ *est réduit à un point* s''*, tel que* $h(s'') = x$*.* [(28)]

Démonstration. D'abord, on peut supposer $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ et $\mathrm{X} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$, où B est une A-algèbre de présentation finie. Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les idéaux premiers de A et B correspondant à s et x, respectivement, de sorte que $\mathfrak{p} = \mathrm{A} \cap \mathfrak{q}$. Posons $n = \dim_x \mathrm{X}_s$, et soient $t_1, \ldots, t_n$ des éléments de B dont les images dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_s,x} = \mathrm{B}_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}\mathrm{B}_\mathfrak{q}$ forment un système de paramètres. Alors, $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_s,x}/(t_1, \ldots, t_n)$ est de dimension finie sur $\kappa(x)$ et

(27) N.D.E. : On a corrigé l'original, qui indiquait 19.5.10.

(28) N.D.E. : Par conséquent, h induit une section σ de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}''$ telle que $\sigma(s'')$ soit au-dessus de x ; comparer avec EGA IV_3, 14.5.10.

donc aussi sur $\kappa(s)$, puisque x est un point fermé du $\kappa(s)$-préschéma algébrique X_s. Par conséquent, le S-morphisme

$$u : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n]),$$

défini par $\mathrm{T}_i \mapsto t_i$, est de présentation finie, x est isolé dans sa fibre $u^{-1}(u(x))$, et l'on a $u(x) = \tau_0(s)$, où $\tau_0 : \mathrm{S} \to \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$ désigne la « section nulle » de $\mathbb{A}^n_{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$, correspondant au morphisme de A-algèbres $\mathrm{A}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n] \to \mathrm{A}$ qui envoie chaque T_i sur 0. Comme l'ensemble des points de X qui sont isolés dans leur fibre au-dessus de $\mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$ est ouvert (EGA IV_3, 13.1.4), on peut supposer, quitte à rétrécir X, que u est *quasi-fini* et que $u^{-1}(u(x)) = \{x\}$. D'après le lemme 5.6.0.1, u est universellement ouvert au point x.

Soit $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}/(t_1, \dots, t_n)$ et soient $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}} \tau_0(\mathrm{S}) = \mathrm{Spec}\,\mathrm{B}_0$ et $u_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$ le morphisme déduit de u par le changement de base $\tau_0 : \mathrm{S} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$. Alors u_0 est quasi-fini et de présentation finie, universellement ouvert au point x, et x est l'unique point de X_0 au-dessus de s.

Soit A' le hensélisé de l'anneau local $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et soient $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$, $\mathrm{B}'_0 = \mathrm{B}_0 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$, et $\mathrm{X}'_0 = \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}'_0)$. Alors le point fermé s' de S' est l'unique point de S' au-dessus de s, et X'_0 possède un unique point x' au-dessus de s', qui est aussi l'unique point de X'_0 au-dessus de s et de x. Comme A' est hensélien alors, d'après EGA IV_4, 18.5.11, X'_0 est somme disjointe de deux parties ouvertes et fermées :

$$(*) \qquad \mathrm{X}'_0 = \mathrm{V} \sqcup \mathrm{W}, \qquad \text{où} \quad \mathrm{V} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'_0,x'});$$

et l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'_0,x'}$ est *fini* et *de présentation finie* sur A'. La restriction v de u'_0 à V est donc finie et de présentation finie. De plus, puisque $u'_0 : \mathrm{X}'_0 \to \mathrm{S}'$ est ouvert en x', on a $u'_0(\mathrm{V}) = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}',s}) = \mathrm{S}'$, de sorte que v est *surjectif.*

Ceci prouve le résultat voulu lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$. Dans le cas général, A' est limite inductive filtrante de sous-algèbres A_i étales sur A, et telles que $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$ possède un unique point au-dessus de s. Alors, $\mathrm{B}'_0 = \varinjlim \mathrm{B}_i$, où $\mathrm{B}_i = \mathrm{B}_0 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_i$. Posons $\mathrm{X}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}_i) = \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ et $\mathrm{C} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}'_0,x'}$. D'après $(*)$ plus haut, on a $\mathrm{C} \cong \mathrm{B}'_0/f\mathrm{B}'_0$, pour un certain idempotent $f \in \mathrm{B}'_0$, et il existe un indice i et $f_i \in \mathrm{B}_i$ tel que f soit l'image de f_i dans B'_0. Posons $\mathrm{C}_i = \mathrm{B}_i/f_i\mathrm{B}_i$ et $\mathrm{V}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{C}_i)$. Alors $\mathrm{C} = \mathrm{C}_i \otimes_{\mathrm{A}_i} \mathrm{A}'$, d'où $\mathrm{V} = \mathrm{V}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}'$, et C_i est une A_i-algèbre de présentation finie (puisqu'il en est ainsi de B_i). Par conséquent, les morphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}'_0 \arrow[r, "u'_0"] & \mathrm{S}' \\
\mathrm{V} \arrow[u, "h'"] \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

proviennent par le changement de base $S' \to S_i$ de morphismes de présentation finie :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "u_i"] & S_i \\ V_i \arrow[u, "h_i"] \arrow[ur, "v_i"'] & \end{tikzcd} .$$

Pour tout $j \geqslant i$, soit $V_j = V_i \times_{S_i} S_j$ et soit $v_j : V_j \to S_j$ le morphisme (de présentation finie) déduit de v_i par changement de base. Comme $v : V \to S'$ est fini et surjectif, alors, d'après EGA IV$_2$, 8.10.5, il existe un indice j tel que $v_j : V_j \to S_j$ soit fini et surjectif. Alors, $w : S_j \to S$ est étale affine, S_j a un unique point s_j au-dessus de s, et V_j a un unique point x_j au-dessus de s_j (car x' est l'unique point de V' au-dessus de s'). Donc, x_j est l'unique point de V_j au-dessus de s, et son image par le morphisme
353 $V_j \to X_j \to X$ est x. C.Q.F.D.

Lemme 5.6.2.0. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes* localement de présentation finie *sur* S *et* universellement ouvert *sur* S en tout point de $\underline{G}^0$*,* X *un* S*-préschéma sur lequel* G *opère de façon que le morphisme*

$$\Phi : G \underset{S}{\times} X \longrightarrow X \underset{S}{\times} X, \qquad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

soit surjectif*. Soient* $s \in S$*,* U *un ouvert de* X *tel que* U_s *soit* dense *dans* X_s*, et* $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ *une partie finie de* X_s*. Alors, sous l'une des hypothèses suivantes :*

a) X *est* localement de type fini *sur* S*,*

b) G *est* quasi-compact *sur* S*, donc* de type fini *sur* S*,*

il existe un point fermé $g \in G_s$ *tel que* $gA \subseteq U_s$*.*

Corollaire 5.6.2. — *Soient* S*,* G*,* X*,* s*,* U*,* A *comme dans le lemme* 5.6.2.0*. Alors il existe des morphismes :*

$$S'' \xrightarrow{\pi} S' \xrightarrow{w} S,$$

où w *est* étale affine (*donc* ouvert) *et* π fini et surjectif*, et un élément* $b \in G(S'')$ *tels que l'ouvert* $b \cdot U$ *de* $X \times_S S''$ *contienne l'image inverse de* A *par le morphisme* $X \times_S S'' \to X$.

Lemme 5.6.3. — *Soit* X *un* S*-préschéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est* séparé sur S.

(ii) *Pour tout* S*-préschéma* T*, toute section* $h : T \to X_T$ *est une* immersion fermée.

(iii) *Pour tout* S*-préschéma* réduit T*, deux* S*-morphismes* f_1 *et* f_2 *:* $T \to X$ *qui coïncident sur un ouvert dense* U *de* T *coïncident.*

(iv) *Pour tout* S*-préschéma* T*, tout point* $t \in T$ *et tout couple de points* rationnels x_1*,* x_2 *de* $X_t = X \times_S \operatorname{Spec} \kappa(t)$*, il existe un morphisme* $g : T'' \to T' \to T$ *et un sous-préschéma ouvert* V *de* $X_{T''}$*,* séparé *sur* T''*, tels que :*

a) $T' \to T$ *est* ouvert*, et* $T'' \to T'$ fermé surjectif,

b) *$g^{-1}(t) \neq \varnothing$ et, si l'on note g_{X} le morphisme* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} g^{-1}(t) \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \operatorname{Spec} \kappa(t)$ *obtenu par changement de base,* V *contient $g_{\mathrm{X}}^{-1}(x_1)$ et $g_{\mathrm{X}}^{-1}(x_2)$.*

(ii) ⇒ (i). On prend T = X et pour h la section diagonale. [29]

(iii) ⇒ (ii). Soient T un S-préschéma et h une section de $p_{\mathrm{T}} : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$. Comme $p_{\mathrm{T}} \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{T}}$, alors (EGA I, 5.3.13) h est une immersion, c.-à-d., un isomorphisme de T sur un sous-préschéma localement fermé E de X_{T}. Pour montrer que E est fermé, on peut supposer T et E réduits. Soit $\overline{\mathrm{E}}$ le sous-préschéma fermé réduit de X_{T} ayant l'adhérence de E pour espace sous-jacent, de sorte que E est un sous-préschéma ouvert dense de $\overline{\mathrm{E}}$. Notons p_{X} la projection $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \to \mathrm{X}$. Alors l'inclusion $i : \overline{\mathrm{E}} \hookrightarrow \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ a pour composantes $p_{\mathrm{X}} \circ i$ et $p_{\mathrm{T}} \circ i$. D'autre part, les morphismes $p_{\mathrm{X}} \circ i$ et $p_{\mathrm{X}} \circ h \circ p_{\mathrm{T}} \circ i$ coïncident sur E, donc sur $\overline{\mathrm{E}}$, d'après l'hypothèse (iii). Il en résulte que i se factorise à travers h, d'où $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{E}}$. Ceci prouve (iii) ⇒ (ii).

(iv) ⇒ (iii). Soient T un S-préschéma *réduit* et f_1, f_2 deux S-morphismes T → X qui coïncident sur un ouvert dense U. Comme T est réduit, pour voir que $f_1 = f_2$, il suffit de voir que $f_1 = f_2$ ensemblistement. En effet, supposons ceci établi, et soient $t \in \mathrm{T}$, V un ouvert affine de X contenant $f_1(t) = f_2(t)$, et W le voisinage ouvert de t égal à l'image inverse de V par l'application continue sous-jacente à f_1 et f_2 ; alors les morphismes $f_i|_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{U} \cap \mathrm{W}$ de W. Comme V est séparé et W réduit, ceci entraîne que $f_1|_{\mathrm{W}} = f_2|_{\mathrm{W}}$, d'où $f_1 = f_2$.

Soit donc $t \in \mathrm{T}$ et montrons que $f_1(t) = f_2(t)$. Soient $g : \mathrm{T}'' \to \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ et V un ouvert de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}''$ comme dans (iv). Comme U est dense dans T et que $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ est ouvert, l'image réciproque U′ de U dans T′ est dense dans T′ (car l'ouvert $\mathrm{T}' \setminus \overline{\mathrm{U}'}$ est vide). Soit U″ l'image réciproque de U′ dans T″ et soit F le sous-préschéma réduit de T″ ayant $\overline{\mathrm{U}''}$ pour espace sous-jacent. Comme $\mathrm{T}'' \to \mathrm{T}'$ est surjectif et fermé, l'image de F contient U′ et est fermée, donc égale T′. Par conséquent, $\mathrm{F} \cap g^{-1}(t)$ contient un point u.

Soit g' la restriction de g à F et, pour $i = 1, 2$, soit h_i le morphisme $\mathrm{F} \to \mathrm{X}_{\mathrm{F}} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{F}$ de composantes id_{F} et $f_i \circ g'$. Alors, $h_i(u)$ est un point de X_{F} au-dessus de $f_i(t) = x_i$ donc appartient à $\mathrm{V}_{\mathrm{F}} = \mathrm{V} \times_{\mathrm{T}''} \mathrm{F}$, puisque V contient l'image inverse de $\{x_1, x_2\}$ par la projection $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}'' \to \mathrm{X}$.

Alors, $\mathrm{W} = h_1^{-1}(\mathrm{V}_{\mathrm{F}}) \cap h_2^{-1}(\mathrm{V}_{\mathrm{F}})$ est un ouvert de F, contenant u, et les F-morphismes $h_i|_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{V}_{\mathrm{F}}$ coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{U}'' \cap \mathrm{W}$ de W. Comme V_{F} est séparé sur F, on a $h_1|_{\mathrm{W}} = h_2|_{\mathrm{W}}$, d'où $h_1(u) = h_2(u)$, et donc $f_1(t) = f_2(t)$. Ceci prouve (iv) ⇒ (iii).

(i) ⇒ (iv) : on prend T″ = T et $\mathrm{V} = \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$. C.Q.F.D.

On peut maintenant démontrer le théorème 5.3. Soient T un S-préschéma, $t \in \mathrm{T}$, et x_1, x_2 deux points rationnels de $\mathrm{X}_t = \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \times_{\mathrm{T}} \operatorname{Spec} \kappa(t)$. Soit s l'image de t dans S. D'après l'hypothèse du théorème 5.3, il existe un ouvert U de X, séparé sur S, tel que U_s soit dense dans X_s. Alors U_{T} est un ouvert de X_{T}, séparé sur T, et $\mathrm{U}_t = \mathrm{U}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(t)$ est dense dans $\mathrm{X}_t = \mathrm{X}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(t)$. Ainsi, le quintuplet $(\mathrm{T}, \mathrm{G}_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}_{\mathrm{T}}, t, \mathrm{U}_{\mathrm{T}})$

[29] N.D.E. : On a changé l'ordre (i) ⇒ (iv) ⇒ (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i) en : (i) ⇐ (ii) ⇐ (iii) ⇐ (iv) ⇐ (i), et l'on a détaillé la démonstration des implications (iii) ⇒ (ii) et (iv) ⇒ (iii).

vérifie les hypothèses du théorème 5.3. Donc, d'après le corollaire 5.6.2 appliqué à ce quintuplet, il existe un morphisme $\phi : \mathrm{T}'' \to \mathrm{T}$ comme dans le lemme 5.6.3 (iv) et un élément $b \in \mathrm{G}(\mathrm{T}'')$ tel que $\phi_{\mathrm{X}}^{-1}(x_1)$ et $\phi_{\mathrm{X}}^{-1}(x_2)$ appartiennent à l'ouvert $b \cdot \mathrm{U}_{\mathrm{T}''}$, qui est séparé sur T″. Ceci montre que X vérifie 5.6.3 (iv), donc est séparé. Ceci prouve le théorème 5.3. C.Q.F.D.

ORIGINAL = preuve Corollaire 5.6.2

Quitte à restreindre S, on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert V de la section unité de G qui est de présentation finie et universellement ouvert sur S. On va construire b dans V(S″). On voit alors que l'on peut encore remplacer S par le spectre d'un hensélisé strict de $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$.

Comme X_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$ [30], on peut supposer que A est formé de points $a_0, \ldots, a_n$ *fermés* dans X_s [31]. Alors, les corps résiduels $\kappa(a_i)$ sont de degré fini sur $\kappa(s)$, et, si certains d'entre eux sont des extensions non triviales de $\kappa(s)$, ce sont des extensions radicielles finies, puisqu'on a supposé $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ strictement hensélien. Donc, quitte à faire une suite finie d'extensions plates, finies, de présentation finie, du type $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^p - x)$ $(x \in \mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$, on voit que l'on peut supposer les a_i *rationnels.*

L'hypothèse faite sur X entraîne qu'il existe, pour $i = 0, 1, \ldots, n$, des points fermés b'_i de $\mathrm{G}_s \times \mathrm{X}_s$ qui s'en vont, par le morphisme canonique, sur les points (a_i, a_0) de $\mathrm{X}_s \times \mathrm{X}_s$. Procédant comme plus haut, on peut supposer les b'_i rationnels, donc de la forme (b_i, a_0), où $b_i \in \mathrm{G}_s(\kappa(s))$ est tel que $a_i = b_i \cdot a_0$.

Soit alors W_s l'ouvert de G_s image réciproque de U_s par le morphisme : $b \mapsto b \cdot a_0$. L'hypothèse faite sur U_s entraîne que W_s est dense dans G_s. Si b_s est un point rationnel arbitraire de G_s, on a alors les équivalences suivantes :

$$a_i \in b_s \cdot \mathrm{U}_s \iff b_s^{-1} b_i \cdot a_0 \in \mathrm{U}_s \iff b_s^{-1} b_i \in \mathrm{W}_s \iff b_s \in b_i \mathrm{W}_s^{-1}.$$

354 Comme W_s est dense dans G_s, il en est de même des $b_i \mathrm{W}_s^{-1}$ et de leur intersection. On peut donc trouver un point fermé x de $\mathrm{V}_s \cap (\bigcap_i b_i \mathrm{W}_s^{-1})$. Quitte à faire une extension finie surjective, de présentation finie, on peut supposer, d'après le lemme 5.6.1, qu'il existe une section b de G passant par x. Il est clair que la section b répond à la question.

355

Contre-exemple 5.6.4. — Tout S-groupe G n'est pas séparé. Soit S un préschéma ayant un point fermé non isolé s ; soit G le préschéma obtenu en recollant deux exemplaires de S le long de l'ouvert $\mathrm{S} \setminus \{s\}$, on voit aisément que G n'est pas séparé sur S, et qu'il est muni d'une structure naturelle de groupe dont toutes les fibres sont neutres, sauf la fibre G_s qui est isomorphe au groupe à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Corollaire 5.6.5. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie, *à* fibres connexes, *et* universellement ouvert *sur* S *; alors* G *est* de présentation finie *sur* S.

356 Cela résulte de 5.3 et 3.6.

[30] N.D.E. : faut-il ajouter cette hypothèse, ou bien découle-t-elle de celles de 5.3 ?
[31] N.D.E. : détailler cette réduction, cf. Exp. V.

Remarque 5.7. — Une démonstration analogue à celle du théorème 5.3, mais utilisant 4.7 [(32)] permet d'établir le résultat suivant :

Soit G un S-groupe *localement de présentation finie* et *universellement ouvert* sur S *aux points de* $\underline{\mathrm{G}^0}$. Soient σ et τ deux S-sections de G^0 (i.e. $\sigma, \tau \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$). Alors le sous-préschéma de S des coïncidences de σ et τ (cf. EGA IV_4, 17.4.5) est *fermé*.

6. Sous-foncteurs et sous-préschémas en groupes [(*)]

Définition 6.1. — (i) Soient X un S-foncteur (c'est-à-dire un foncteur de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})^\circ$ dans $(\mathbf{Ens})$), G un S-foncteur en groupes, u et v deux S-*morphismes* de X dans G. On appelle *transporteur de u dans v* et on note $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$ le sous S-foncteur de G défini comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\mathrm{int}\, g)\circ u_{\mathrm{S}'} = v_{\mathrm{S}'}\}\\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''} u_{\mathrm{S}''}(x) g_{\mathrm{S}''}^{-1} = v_{\mathrm{S}''}(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}''),\ \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'\}.\end{aligned}$$

En particulier, $\underline{\mathrm{Transp}}(u,u)$ est un sous-S-foncteur *en groupes* de G ; on l'appelle *centralisateur de u* et on le note $\underline{\mathrm{Centr}}(u)$.

(ii) Soient G un S-foncteur en groupes, X et Y deux *sous*-S-*foncteurs* de G ; on appelle *transporteur de* X *dans* Y (resp. *transporteur strict de* X *dans* Y) et on note $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ (resp. $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$) les sous-S-foncteurs de G définis comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\mathrm{int}\, g)(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}) \subseteq \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}\}\\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''}\mathrm{X}(\mathrm{S}'')g_{\mathrm{S}''}^{-1} \subseteq \mathrm{Y}(\mathrm{S}''), \quad \forall\, \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{resp.}\quad \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\mathrm{int}\, g)(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}\}\\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''}\mathrm{X}(\mathrm{S}'')g_{\mathrm{S}''}^{-1} = \mathrm{Y}(\mathrm{S}''), \quad \forall\, \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'\}.\end{aligned}$$

Notons qu'on a

$$\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \cap c(\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y},\mathrm{X})),$$

où c désigne la symétrie de G. [(33)]

[(*)] Sur ce même thème, voir également les résultats de XI 6, dont la place naturelle serait dans le présent exposé VI_{B}. On y trouvera en particulier des critères de représentabilité pour certains sous-foncteurs en groupes d'un schéma en groupes donné.

[(32)] N.D.E. : Ce No. n'existe pas, référence à corriger.

[(33)] N.D.E. : Si $u : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ et $v : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ sont deux morphismes *arbitraires* de S-foncteurs, soit $u(\mathrm{X})$ le foncteur-image de u, défini par $u(\mathrm{X})(\mathrm{S}') = u(\mathrm{S}')(\mathrm{X}(\mathrm{S}')) \subseteq \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, c'est un sous-foncteur de G, de même que le foncteur-image $v(\mathrm{Y})$; on peut alors considérer le *transporteur de l'image de u dans l'image de v*, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u(\mathrm{X}), v(\mathrm{Y}))$. On voit ainsi que, dans la définition (ii), il n'est pas nécessaire de se restreindre à des *sous-foncteurs*, i.e. au cas où u et v sont des monomorphismes. Cette restriction imposait parfois dans l'original des répétitions dans les hypothèses, telles que : « Soient $u, v : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ des morphismes de S-foncteurs, $w : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ et $w' : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ des monomorphismes, alors $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(w) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\, \mathrm{H}$ et $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{K})$ vérifient ... », qui peuvent être évitées en considérant $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u(\mathrm{X}), v(\mathrm{Y}))$. On a fait de telles modifications dans 6.2 et, plus loin, dans 10.11.

(iii) Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur de G, i le S-morphisme canonique $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$; on appelle *centralisateur* et *normalisateur* de H dans G les
357 sous-S-foncteurs en groupes de G suivants :

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}(i) = \underline{\mathrm{Transp}}(i,i) \qquad , \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}).$$

Enfin, on appelle *centre de* G le S-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{G}$; on le notera $\underline{\mathrm{Centr}}\,\mathrm{G}$.

Remarque 6.1.1. — [34] Il résulte des définitions que les foncteurs $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$ et $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ (et donc aussi $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$) *commutent au changement de base* : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, si $\mathrm{G}', \mathrm{X}', \mathrm{Y}', u', v'$ sont déduits de $\mathrm{G}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, u, v$ par changement de base, on a :

$$\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)_{\mathrm{S}'} = \underline{\mathrm{Transp}}(u',v') \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{Transp}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})_{\mathrm{S}'} = \underline{\mathrm{Transp}}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}').$$

Proposition 6.2. — [35] *Soit* G *un* S-*groupe et soient* $u, w : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *et* $v : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ *des morphismes de* S-*préschémas. Considérons pour un sous-foncteur* T *du foncteur* G, *la propriété suivante :*

$(+_{\mathrm{f}})$ pour tout $s \in \mathrm{S}$, T_s est représentable par un sous-préschéma *fermé* de G_s.

(i) $\underline{\mathrm{Transp}}(u,w)$ *et* $\underline{\mathrm{Centr}}(u) = \underline{\mathrm{Transp}}(u,u)$ *vérifient la condition* $(+_{\mathrm{f}})$.

(ii) $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u(\mathrm{X}), v(\mathrm{Y}))$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\, v(\mathrm{Y})$ *vérifient la condition* $(+_{\mathrm{f}})$ *si, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, v_s *est une* immersion fermée),

(iii) $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$ *si, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, u_s *et* v_s *sont des* immersions fermées.

Ceci découle de la remarque 6.1.1 et du corollaire 6.2.5 (= corollaire VIII.6.7) ci-dessous. [36]

Définition 6.2.1. — Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un morphisme de préschémas. On dit que f est *essentiellement libre*, ou encore que X *est essentiellement libre sur* S, si on peut trouver un recouvrement de S par des ouverts affines S_i, pour tout i un S_i-préschéma S'_i affine et fidèlement plat sur S_i, et un recouvrement $(\mathrm{X}'_{ij})_j$ de $\mathrm{X}'_i = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'_i$ par des ouverts affines X'_{ij}, tels que pour tout (i,j), l'anneau de X'_{ij} soit un module *libre* sur l'anneau de S'_i. [37]

Proposition 6.2.2. — a) *Si* X *est essentiellement libre sur* S, *il est* plat *sur* S, *la réciproque étant vraie si* S *est artinien.*

b) *Si* S *est le spectre d'un corps, tout* S-*préschéma est essentiellement libre sur* S.

c) *Si* X *est essentiellement libre sur* S, *alors* $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *est essentiellement libre sur* S', *pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *La réciproque est vraie si* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *est fidèlement plat et quasi-compact.*

(34) N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée implicitement dans la proposition 6.2.

(35) N.D.E. : On a modifié l'énoncé, comme indiqué dans la N.D.E. (33).

(36) N.D.E. : L'original faisait référence aux résultats de l'Exp. VIII, § 6. Pour la commodité du lecteur, on a reproduit ces résultats (à l'exception de VIII, 6.3 et 6.8) dans les n$^{\mathrm{os}}$ 6.2.1 à 6.2.5 ci-dessous. D'ailleurs, ceci était suggéré par A. Grothendieck dans une Note au début de VIII.6 : « *Le présent numéro est indépendant de la théorie des groupes diagonalisables ; sa place naturelle serait dans* VI_{B}. ».

(37) N.D.E. : Cette notion a été reprise et développée dans l'article [**RG71**]. Voir la N.D.E. au § VIII.6.

La démonstration est immédiate, en utilisant pour la réciproque dans a) le fait qu'un module plat sur un anneau local artinien est libre. [38]

L'introduction de la définition 6.2.1 est justifiée par le

Théorème 6.2.3. — *Soient* S *un préschéma,* Z *un* S-*préschéma* essentiellement libre*,* Y *un sous-préschéma* fermé *de* Z. *Considérons le foncteur* $F = \prod_{Z/S} Y/Z : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ [39] *défini par la condition :* $F(S') = \varnothing$ *lorsque* $Y_{S'} \neq Z_{S'}$*,* $F(S')$ *est réduit à un élément dans le cas contraire. Ce foncteur est* représentable *par un* sous-préschéma fermé de S.

Notons d'abord que le foncteur envisagé est un faisceau pour la topologie fidèlement plate et quasi-compacte, ce qui nous permet de nous borner avec les notations de 6.2.1 au cas où $S = S'_i$. (Noter qu'en vertu de SGA 1, VIII, les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts sont de *descente effective* pour la catégorie fibrée des flèches d'immersion fermée).

Soit (Z_j) un recouvrement de Z par des ouverts affines tels que $\mathscr{O}(Z_j)$ soit un module libre sur $A = \mathscr{O}(S)$, et soient $Y_j = Y \cap Z_j$ et $F_j : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur défini en termes de (Z_j, Y_j) comme F en termes de (Z, Y). C'est un sous-foncteur du foncteur final, et on a évidemment $F = \bigcap_j F_j$, ce qui nous ramène à prouver que chaque F_j est représentable par un sous-schéma fermé T_j de S (car alors F sera représentable par le sous-schéma fermé T intersection des T_j). On peut donc supposer Z également affine, $Z = \operatorname{Spec}(B)$, où B est un A-module libre. Soit J une partie de B définissant le sous-schéma Y de Z, et soit I l'idéal dans A engendré par les $u_i(J) \subseteq A$, où les $u_i : B \to A$ sont les formes coordonnées par rapport à la base de B choisie. On constate aussitôt que $T = \mathscr{V}(I) = \operatorname{Spec}(A/I)$ satisfait à la condition voulue, ce qui achève la démonstration.

Exemples 6.2.4. — Donnons des exemples importants de foncteurs qui se ramènent à des foncteurs $\prod_{Z/S} Y/S$ du type envisagé dans 6.2.1 et pour lesquels il est utile par la suite d'avoir des critères de représentabilité. On désigne par S un préschéma, par X, Y, Z etc. des préschémas sur S.

a) Donnons-nous un S-morphisme

$$q : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z), \tag{x}$$

(« X opère sur Y, à valeurs dans Z »), i.e. un morphisme :

$$r : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow Z. \tag{xx}$$

Considérons un sous-préschéma Z′ de Z, d'où un monomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z)$$

qui fait du premier foncteur un sous-foncteur du second, soit X′ l'image inverse de ce sous-foncteur par (x), c'est le sous-foncteur de X tel que $X'(T)$ soit l'ensemble des $x \in X(T)$ tels que $q(x) : Y_T \to Z_T$ se factorise par Z'_T. Ce foncteur X′ peut se décrire de la façon suivante :

[38] N.D.E. : En effet, soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local artinien, k son corps résiduel, M un A-module arbitraire, $(x_i)_{i \in I}$ des éléments de M dont les images forment une base de $M/\mathfrak{m}M$ sur k. Soient F le A-module libre de base $(e_i)_{i \in I}$, et $\phi : F \to M$ le A-morphisme défini par $\phi(e_i) = x_i$. Alors $Q = \operatorname{Coker} \phi$ vérifie $Q = \mathfrak{m}Q$, d'où, puisque $\mathfrak{m}$ est nilpotent, $Q = 0$. Supposons de plus M *plat* sur A ; alors $K = \operatorname{Ker} \phi$ vérifie $K \otimes_A k = 0$, i.e. $K = \mathfrak{m}K$, d'où $K = 0$.

[39] N.D.E. : cf. II.1, où ce foncteur est noté $\prod_{Z/S} Y$; pour tout $S' \to S$, $F(S') = \Gamma(Y_{S'}/Z_{S'})$, qui ici égale $\{\mathrm{id}_{Z_{S'}}\}$ si $Y'_S = Z_{S'}$, et est vide sinon.

on pose $\mathrm{P} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, soit P' l'image inverse de Z' par $r : \mathrm{P} \to \mathrm{Z}$, alors on a un isomorphisme évident

$$\mathrm{X}' \simeq \prod_{\mathrm{P}/\mathrm{X}} \mathrm{P}'/\mathrm{P}. \tag{xxx}$$

On obtient donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z' *fermé dans* Z*, le sous-foncteur* X' *de* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X*.*

b) Donnons-nous deux façons de faire opérer X sur Y à valeurs dans Z, i.e. deux morphismes

$$q_1, q_2 : \mathrm{X} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$

et posons $\mathrm{X}' = \mathrm{Ker}(q_1, q_2)$: c'est le sous-foncteur de X tel que $\mathrm{X}'(\mathrm{T})$ soit l'ensemble des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que les deux morphismes $q_1(x)$, $q_2(x) : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \rightrightarrows \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$ soient égaux. Or la donnée de q_1, q_2 équivaut à la donnée d'un morphisme

$$q : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Z}),$$

ou encore, d'un morphisme $r : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z}$; posons alors $\mathrm{U} = \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z}$, soit U' le sous-préschéma diagonal de $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z}$, alors X' n'est autre que l'image inverse du sous-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{U}')$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{U})$ par q, donc peut se mettre sous la forme (xxx), avec $\mathrm{P} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, et $\mathrm{P}' =$ image inverse de la diagonale par r, i.e. noyau de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{Z}$. On est donc sous les conditions de (a).

On voit par suite que : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z *séparé sur* S*, alors le sous-foncteur* X' *de* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X*.*

c) Donnons-nous un morphisme

$$q : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}),$$

i.e. « X opère sur Y ». Soit X' le « noyau » de ce morphisme, i.e. le sous-foncteur X' de X tel que $\mathrm{X}'(\mathrm{T})$ soit l'ensemble des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que $q(x) : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit l'identité. Ce foncteur est justiciable de b), comme on voit en introduisant un deuxième homomorphisme

$$q' : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y})$$

« en faisant opérer X trivialement sur Y ». Donc : *si* Y *est essentiellement libre et séparé sur* S*, le sous-foncteur noyau de* q *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X*.*

d) Sous les conditions de c), considérons le sous-foncteur Y' de Y « des invariants sous X », donc $\mathrm{Y}'(\mathrm{T})$ est l'ensemble des $y \in \mathrm{Y}(\mathrm{T})$ tels que le morphisme correspondant $\overline{q}(y) : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit « le T-morphisme constant de valeur y ». Introduisant q' comme dans c), et les homomorphismes correspondants à q et q' :

$$\overline{q}, \overline{q'} : \mathrm{Y} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

on voit que Y' est précisément $\mathrm{Ker}(\overline{q}, \overline{q'})$, et est donc justiciable encore de b) (avec les rôles de X, Y renversés et $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}$).

Par suite, *si* X *est essentiellement libre sur* S*,* Y *séparé sur* S*, alors le sous-foncteur* Y' *de* Y *des invariants sous* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* Y*.*

e) Des constructions du type explicité dans les exemples précédents sont surtout fréquentes en théorie des groupes. Ainsi, lorsque G est un préschéma en groupes opérant sur le S-préschéma X :

$$q : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}),$$

le noyau de q (« le sous-groupe de G opérant trivialement ») est un sous-schéma fermé de G pourvu que X soit essentiellement libre et séparé sur S (exemple c)), et le sous-objet X^{G} des invariants est un sous-préschéma fermé de X, pourvu que G soit essentiellement libre sur S, et X séparé sur S (exemple d)).

Soient Y et Z des sous-préschémas de X, et considérons le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ de G (« *transporteur de* Y *en* Z »), dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que l'automorphisme correspondant de X_{T} satisfasse $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$, i.e. induise un morphisme $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ se factorisant en $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$. Donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S*, et* Z *fermé dans* X*, alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *est un sous-préschéma fermé de* G (exemple a)).

On peut aussi considérer le *transporteur strict de* Y *en* Z*,* [40] dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) = \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$, qui n'est autre que $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \cap \sigma(\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}))$, où σ est la symétrie de G. Par suite, *si* Y *et* Z *sont essentiellement libres sur* S *et fermés dans* X*, le transporteur strict de* Y *en* Z *est un sous-préschéma fermé de* G.

Un cas important est celui où $\mathrm{X} = \mathrm{G}$, G opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs. Si H est un sous-préschéma de G, le transporteur strict de H en H est aussi appelé le *normalisateur* de H dans G, et noté $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$. Donc : *si* H *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G*, essentiellement libre sur* S*, alors* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de* G.

Soit enfin Z un sous-préschéma de G, alors son *centralisateur* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z})$ dans G est le sous-foncteur en groupes de G défini par le procédé de d), quand on considère que « Z opère sur G » par les opérations induites par celles de G ; donc *si* Z *est essentiellement libre sur* S *et* G *est séparé sur* S*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z})$ *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G. En particulier, *si* G *est essentiellement libre et séparé sur* S*, alors le* centre C *de* G*, qui n'est autre que* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})$*, est un sous-préschéma en groupes fermé de* G.

Lorsque S est le spectre d'un corps, 6.2.2 b) montre que dans les exemples a) à e) ci-dessus, les conditions « essentiellement libre » sont automatiquement satisfaites, il ne reste que des conditions de séparation. Se rappelant qu'un préschéma en groupes sur un corps est nécessairement séparé (VI_{A}, 0.2), on trouve par exemple :

Corollaire 6.2.5. — *Soit* G *un préschéma en groupes sur un corps* k*. Alors :*

– *Pour* tout *sous-préschéma* Z *de* G*, le centralisateur de* Z *dans* G *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G *; c'est en particulier le cas pour le* centre $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})$ *de* G.

– *Plus généralement, si* u*,* $v : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *sont des morphismes de préschémas,* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u, v)$ *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G.

– *Pour deux sous-préschémas* Y*,* Z *de* G*, avec* Z fermé*, le transporteur* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *est un sous-préschéma fermé de* G*. Si* Y *est également* fermé*, on a la même conclusion pour* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$.

– *Pour* tout *sous-préschéma* en groupes [41] H *de* G*, le* normalisateur $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G.

Remarque 6.3. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe et H un sous-préschéma en groupes de G ; supposons G et H de type fini sur k et réduits ; alors 358

[40] N.D.E. : noté $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$.

[41] N.D.E. : En effet, sur un corps k, tout sous-préschéma en groupes de G est *fermé*, cf. VI_{A}, 0.6.1.

$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ (resp. $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$) est représentable par un sous-préschéma en groupes de G, *dont le sous-préschéma réduit associé* n'est autre que le normalisateur (resp. le centralisateur) de H dans G au sens de *Bible*.

Proposition 6.4. — *Soient* G *un* S*-groupe, et* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* S*-préschémas. Posons* $\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est un sous-foncteur* en groupes *de* G.

(ii) $\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{X}$.

Ces conditions sont vérifiées dans chacun des deux cas suivants :

a) X *est* de présentation finie *sur* S.

b) T *est* représentable *par un préschéma* de présentation finie *sur* S.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de ce que, quel que soit le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, quels que soient $t, t' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, on a $tt' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, et de ce que $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \mathrm{T} \cap c(\mathrm{T})$ (cf. 6.1 (ii)).

Plaçons-nous dans le cas a). Soit $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$, alors $\mathrm{int}(t)$ est un monomorphisme de X dans X, donc un S-automorphisme de X (EGA IV_4, 17.9.6), si bien que t appartient à $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$, d'où a).

Dans le cas b), il est clair que $\mu(\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}) \subset \mathrm{T}$, et l'assertion résulte du lemme suivant :

Lemme 6.4.2. — *Soit* G *un* S*-préschéma* de présentation finie*, muni d'une loi associative* (au sens de EGA 0_{III} 8.2.5)*. Supposons que pour tout* S*-préschéma* S' *et tout* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$*, les translations à droite et à gauche par* g *dans l'ensemble* $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ *soient* injectives *et que* $\mathrm{G}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$*. Alors* G *est un* S-groupe.

Il suffit de montrer que, quel que soit le S-préschéma S', l'ensemble $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ est un groupe ; or, de l'hypothèse résulte aussitôt que les translations à droite et à gauche
359 par tout élément $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ sont des S-monomorphismes de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$. Ce sont donc des S-*automorphismes*, puisque G est de présentation finie sur S (EGA IV_4, 17.9.5), si bien que les translations à droite et à gauche par g dans l'ensemble $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ sont bijectives, et on est ramené au lemme suivant :

Lemme 6.4.3. — *Soit* G *un ensemble non vide muni d'une loi associative telle que les translations à droite et à gauche soient bijectives. Alors* G *est un groupe.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Définition 6.5. — Soient G un S-groupe, H un S-foncteur, et $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un *monomorphisme.*

(i) On appelle *centralisateur connexe de* H *dans* G et on note $\underline{\mathrm{Centr}}^0_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ la composante neutre du foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ (cf. 3.1 et 6.2 (iii)).

(i′) Pour tout morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$, on définit de même le foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}^0(u)$ (cf. 6.2 (iv)).

(ii) Lorsque pour tout $s \in \mathrm{S}$, u_s est une immersion fermée, on appelle *normalisateur connexe de* H *dans* G, et on note $\underline{\mathrm{Norm}}^0_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ la composante neutre du foncteur $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$.

N. B. D'après 1.4.2, l'hypothèse de (ii) est vérifiée lorsque H un S-*préschéma en groupes*, que G et H sont *localement de type fini* sur S et que u est un morphisme de S-groupes *quasi-compact*.

Proposition 6.5.1. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie *et* quasi-séparé *sur* S, H *un* S-*groupe* lisse à fibres connexes *et* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un* monomorphisme. *Soit* N *le normalisateur de* H *dans* G (cf. 6.1). *On verra* (XI 6.11) (*) *que* N *est* représentable *par un sous-préschéma en groupes* fermé *de* G *et* de présentation finie *sur* G. *Ceci étant, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme canonique* $\mathrm{H} \to \mathrm{N}$ *est une* immersion ouverte.

(ii) $\mathrm{N}^0 = \mathrm{H}$ (cf. 3.10).

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *on a* $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}_s)^0$. 360

La condition (i) entraîne (ii) d'après le lemme 3.10.1, puisque $\mathrm{H}^0 = \mathrm{H}$. D'autre part, il est clair que (ii) entraîne (iii), car $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}^0)_s = (\mathrm{N}_s)^0$.

Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Puisque $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}^0)_s$, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, alors $\mathrm{H}_s \to \mathrm{N}_s$ est une immersion ouverte. De plus, H et N sont localement de présentation finie sur S, et H est plat sur S, donc (EGA IV_4, 17.9.5), $\mathrm{H} \to \mathrm{N}$ est une immersion ouverte.

Définition 6.6. — Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur en groupes ; on dit que H est *invariant* (resp. *central*, resp. *caractéristique*) dans G si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \mathrm{G}$ (resp. si $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \mathrm{G}$, resp. si, quels que soient le S-préschéma T et l'automorphisme $a \in \mathrm{Aut}_{\text{T-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{T}})$ on a : $a(\mathrm{H}_{\mathrm{T}}) \subseteq \mathrm{H}_{\mathrm{T}}$), autrement dit, si, quel que soit le S-préschéma T, le sous-groupe H(T) de G(T) est invariant dans G(T) (resp. central dans G(T), resp. invariant par tout automorphisme de G_{T}).

N. B. Si H est central (resp. caractéristique), il est invariant.

Remarque 6.7. — Soient G et H deux S-groupes et $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un *monomorphisme*. Pour que H soit invariant (resp. central, resp. caractéristique) dans G, il faut et il suffit que le morphisme

$$\mu \circ ((c \circ \mathrm{pr}_2), (\mu \circ (u \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})) : \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$$

(défini par $(h, g) \mapsto g^{-1}hg$ quels que soient $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S}')$), se factorise à travers u (resp. soit égal à $u \circ \mathrm{pr}_1$, resp. que pour tout S-préschéma T et tout T-automorphisme de groupe a de G_{T}, $a \circ u(\mathrm{T})$ se factorise à travers $u(\mathrm{T})$).

Exemple 6.8. — Soit G un S-foncteur en groupes. Alors $\underline{\mathrm{Centr}}\,\mathrm{G}$ est caractéristique et central. Si, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est *représentable*, alors G^0 est caractéristique. Cela 361
résulte des définitions et de 3.3.

(*) Voir la note (∗) de la page précédente.

7. Sous-groupes engendrés ; groupe des commutateurs

Dans ce numéro, k désigne un corps fixé.

Proposition 7.1. — *Soient* G *un k-groupe,* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de k-préschémas* géométriquement réduits [42] *; pour tout $i \in \mathrm{I}$, soit $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{G}$ un k-morphisme.*

(i) *Il existe un* plus petit *sous-k-préschéma en groupes* fermé *de* G *majorant chacun des f_i, noté $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})$. C'est un k-préschéma géométriquement réduit, donc* lisse *dans le cas où* G *est supposé* localement de type fini *sur k* (1.3.1)*.*

(ii) *Posons $\mathrm{X} = \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$, et soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ le morphisme dont la restriction à X_i est f_i, pour tout $i \in \mathrm{I}$. Posons $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X} \coprod \mathrm{X}$, soit $f^1 : \mathrm{X}^1 \to \mathrm{G}$ le morphisme dont les restrictions à* X *sont respectivement f et $c \circ f$. Pour tout $n > 1$, posons*

$$\mathrm{X}^n = \mathrm{X}^1 \underset{k}{\times} \mathrm{X}^{n-1} \qquad \textit{et} \qquad f^n = \mu \circ (f^1 \underset{k}{\times} f^{n-1}) : \mathrm{X}^n \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Alors $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})$ est le sous-préschéma réduit *de* G *ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de la réunion des $f^n(\mathrm{X}^n)$, pour $n \geqslant 1$.*

(iii) *Pour tout k-préschéma* S*, $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})_{\mathrm{S}}$ est le* plus petit *sous-préschéma en groupes* fermé *de G_{S} majorant chacun des $f_{i,\mathrm{S}} : \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$.*

(iii′) *Si de plus* G *est* localement de type fini *sur k, alors $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})_{\mathrm{S}}$ est le* plus petit sous-préschéma en groupes *de G_{S} majorant chacun des $f_{i,\mathrm{S}}$.*

Remarquons tout d'abord que, pour démontrer (i) et (iii), en définissant X et f comme dans (ii), on est ramené au cas où I est réduit à un élément.

Soit H le sous-préschéma réduit de G d'ensemble sous-jacent $\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)}$. Comme les X^n sont (géométriquement) réduits, alors, d'après EGA IV_3, 11.10.4 et 11.10.7, la famille $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{G}$ est *schématiquement dominante* et H est (géométriquement) réduit. Il est clair que tout sous-préschéma fermé de G qui domine les f^n domine aussi H. Donc pour montrer (i) et (ii), il suffit de montrer que H est un sous-préschéma
362 *en groupes* de G, donc que la restriction de c à H et la restriction de μ à $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ se factorisent à travers l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$.

Puisque H est géométriquement réduit, $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ est réduit, et il suffit de vérifier que $c(\mathrm{H}) \subseteq \mathrm{H}$ et que $\mu(\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}) \subseteq \mathrm{H}$ (ensemblistement). Mais d'après EGA IV_3, 11.10.6, la réunion des $f^n_{(\mathrm{H})}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{H})$ est schématiquement dense dans $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$. De même, quel que soit $n \geqslant 1$, la réunion des $f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m)$, pour $m \geqslant 1$, est schématiquement dense dans $\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{H}$. Donc il suffit de montrer que $\mu(f^n_{(\mathrm{H})}(f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m))) \subseteq \mathrm{H}$ et que $c(f^n(\mathrm{X}^n)) \subseteq \mathrm{H}$. Or

$$\mu(f^n_{(\mathrm{H})}(f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \underset{k}{\times} \mathrm{X}^m))) = \mu((f^n \underset{k}{\times} f^m)(\mathrm{X}^n \underset{k}{\times} \mathrm{X}^m)) = f^{n+m}(\mathrm{X}^{n+m}) \subseteq \mathrm{H};$$

et, puisque $c(f^1(\mathrm{X}^1)) \subseteq f^1(\mathrm{X}^1)$, on a, quel que soit n, $c(f^n(\mathrm{X}^n)) \subseteq f^n(\mathrm{X}^n) \subset \mathrm{H}$. Ceci démontre (i) et (ii).

[42] N.D.E. : On a remplacé, ici et dans la suite, la terminologie peu usitée « *séparable* » par la terminologie usuelle « *géométriquement réduit* », cf. EGA IV_2, 4.6.2.

Montrons maintenant (iii). Soit G' un sous-préschéma en groupes *fermé* de G_S majorant f_S ; il s'agit de montrer que G' majore H_S, ou, ce qui revient au même, que $H_S = H_S \times_{G_S} G'$. Posons $H'_S = H_S \times_{G_S} G' = G' \cap H_S$. Puisque G' et H_S majorent tous deux les f^n_S, il en est de même de H'_S. Or (EGA IV_3, 11.10.6), puisque la famille des $f^n : X^n \to H$ est schématiquement dominante, il en est de même de la famille des $f^n_S : X^n_S \to H_S$, si bien que H'_S, qui majore chacun des f^n_S, est égal à H_S (EGA IV_3, 11.10.1 c)).

Supposons maintenant G localement de type fini sur k et montrons que, dans ce cas, H_S est le plus petit sous-préschéma en groupes (non nécessairement fermé) de G_S majorant f_S.

Soit G' un sous-préschéma en groupes de G_S majorant f_S. Il s'agit de même de montrer que, si on pose $H'_S = H_S \times_{G_S} G'$, on a $H'_S = H_S$. Il suffit pour cela de montrer que H'_S est fermé dans H_S et d'appliquer le raisonnement précédent. Il suffit donc de montrer que H_S et H'_S ont même ensemble sous-jacent, a fortiori il suffit de montrer que, pour tout $s \in S$, H_s égale

$$H'_s := H'_S \underset{S}{\times} \kappa(s) = H_s \underset{G_s}{\times} G'_s.$$

Or, comme G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$, le sous-$\kappa(s)$-préschéma en groupes G'_s est *fermé* dans G_s, d'après 1.4. Donc H'_s est fermé dans H_s, et alors le raisonnement précédent, appliqué à H'_s, à H_s et aux f^n_s, montre que $H'_s = H_s$. C.Q.F.D.

Définitions et remarques 7.2. — [43] (i) Étant donné un k-groupe G, une famille $(X_i)_{i\in I}$ 363
de k-préschémas géométriquement réduits, et pour chaque $i \in I$, un k-morphisme $f_i : X_i \to G$, on appelle *sous-préschéma en groupes fermé de* G *engendré par la famille* $(f_i)_{i\in I}$, et nous noterons dans ce numéro $\Gamma_G((f_i)_{i\in I})$, le plus petit sous-préschéma en groupes fermé de G majorant chacun des f_i. Si X est un sous-préschéma de G, géométriquement réduit sur k, et si f est l'immersion $X \hookrightarrow G$, on écrira $\Gamma_G(X)$ au lieu de $\Gamma_G(f)$.

(i′) Avec les notations de 7.1 (ii), il nous arrivera de poser $\Gamma'_G(f) = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(X^n)$. Notons que $\Gamma'_G(f)$ est une partie de G stable pour la loi de groupe (au sens de 3.0).

(ii) Il est clair que si X_1 et X_2 sont deux k-préschémas géométriquement réduits et $f_1 : X_1 \to G$ et $f_2 : X_2 \to G$ deux k-morphismes tels que les ensembles $\overline{f_1(X_1)}$ et $\overline{f_2(X_2)}$ soient égaux, alors $\Gamma_G(f_1) = \Gamma_G(f_2)$.

(iii) Soit E une partie de G telle que le sous-préschéma réduit $\overline{E}$ de G soit géométriquement réduit. On appelle *sous-préschéma en groupes fermé de* G *engendré par* E, et on note $\Gamma_G(E)$ le sous-préschéma en groupes $\Gamma_G(i)$, où i est l'injection du sous-préschéma réduit $\overline{E}$ de G dans G.

(iv) Dans le cas où G est localement de type fini sur k, tout sous-préschéma en groupes de G étant alors fermé (1.4.2) [44], on parlera de « *sous-préschéma en groupes engendré* » au lieu de « *sous-préschéma en groupes fermé engendré* ».

[43] N.D.E. : On a mis en (i′) le point (viii) de l'original, et l'on a mis en évidence les points (vi) et (vii) sous la forme du corollaire 7.2.1 et de la définition 7.2.2 ci-dessous.
[44] N.D.E. : L'hypothèse que G soit localement de type fini sur k peut être omise, d'après VI_A, 0.6.1.

(v) Soit X un k-préschéma géométriquement réduit et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme. Supposons que $f(\mathrm{X})$ *contienne l'élément unité* e de G. Posons $\mathrm{X}'^{1} = \mathrm{X} \times_k \mathrm{X}$ et $f'^{1} = \mu \circ (f \times_k (c \circ f))$, et pour $n > 1$,

$$\mathrm{X}'^{n} = \mathrm{X}'^{1} \underset{k}{\times} \mathrm{X}'^{n-1} \qquad \text{et} \qquad f'^{n} = \mu \circ (f'^{1} \underset{k}{\times} f'^{n-1}).$$

Alors $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est le sous-préschéma réduit de G dont l'espace sous-jacent est l'adhérence de la réunion des $f'^{n}(\mathrm{X}'^{n})$, pour $n \geqslant 1$.

En effet, rappelant la notation de 7.1 (ii) : $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X} \sqcup \mathrm{X}$ et $\mathrm{X}^n = \mathrm{X}^1 \times_k \mathrm{X}^{n-1}$, pour $n \geqslant 2$, on a les inclusions suivantes, où la première résulte de l'hypothèse $e \in f(\mathrm{X})$:

$$f^n(\mathrm{X}^n) \subseteq f'^{n}(\mathrm{X}'^{n}) \subseteq f^{2n}(\mathrm{X}^{2n}), \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Ceci montre de plus que, pour qu'il existe un entier n tel que $f^n(\mathrm{X}^n) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $f'^{m}(\mathrm{X}'^{m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

364 On déduit de la remarque 7.2 (v) le

Corollaire 7.2.1. — *Soient* X *un k-préschéma* géométriquement réduit *et* géométriquement connexe*, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un k-morphisme tel que* $f(\mathrm{X})$ contienne l'élément neutre *de* G.

a) *Alors, le k-groupe* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *est* connexe.

b) *Si de plus* G *est* localement de type fini *sur k, alors* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *l'est aussi, donc est* irréductible. [45]

En effet, chacun des X'^{n} est alors connexe, donc la réunion des $f'^{n}(\mathrm{X}'^{n})$ (qui contiennent tous l'élément neutre), est connexe, et il en est de même de son adhérence $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. Ceci prouve a).

Si de plus G est localement de type fini sur k, alors $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ l'est aussi, donc est irréductible, d'après $\mathrm{VI_A}$, 2.4.1. [45]

Définition 7.2.2. — Soit G un k-groupe.

a) Soient A et B deux sous-k-préschémas en groupes *géométriquement réduits* de G. On appelle *sous-préschéma en groupes des commutateurs de* A *et* B dans G et on note $(\mathrm{A}, \mathrm{B})_{\mathrm{G}}$ ou simplement (A, B), le sous-préschéma en groupes fermé de G engendré par le morphisme $\nu : \mathrm{A} \times_k \mathrm{B} \to \mathrm{G}$ défini par : $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$, pour tout k-préschéma S et $a \in \mathrm{A}(\mathrm{S})$, $b \in \mathrm{B}(\mathrm{S})$.

b) Supposons G *géométriquement réduit* sur k. On appelle *groupe dérivé* de G, et on note $\mathfrak{D}(\mathrm{G})$ [46], le groupe (G, G).

N. B. Pour que G soit commutatif, il faut et il suffit que $\mathfrak{D}(\mathrm{G})$ soit le k-groupe unité.

---

[45] N.D.E. : L'hypothèse que G soit localement de type fini sur k est superflue, d'après un argument d'O. Gabber (à insérer dans $\mathrm{VI_A}$...).

[46] N.D.E. : On a changé la notation Der(G) de l'original, afin d'éviter tout risque de confusion avec un espace de dérivations.

[47] On rappelle que si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de S-préschémas, le *préfaisceau image* $f(\mathrm{X})$ est le S-foncteur qui à tout S′ au-dessus de S associe l'ensemble $f(\mathrm{X}(\mathrm{S}'))$.

On rappelle aussi que, si H est un sous-k-préschéma en groupes fermé de G, alors, d'après 6.3 (iii), $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ sont représentables par des sous-k-préschémas en groupes fermés de G.

Corollaire 7.3. — *Soient* G *un k-groupe,* X *un k-préschéma* géométriquement réduit*,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un k-morphisme. Soit* S *un k-préschéma.*

(i) *Soit* $u \in \mathrm{End}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}})$ *tel que l'on ait l'inclusion de* préfaisceaux *:*

$$u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subseteq f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}}),$$

c.-à-d., tel qu'on ait $u(f(\mathrm{X}(\mathrm{S}'))) \subseteq f(\mathrm{X}(\mathrm{S}'))$*, pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*. Alors, le morphisme* $u : \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *se factorise à travers* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$*, c.-à-d., on a :*

$$u(\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}) \subseteq \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}.$$

(i bis) *Soit* $u \in \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}})$ *tel qu'on ait* $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) = f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})$ *(en tant que* préfaisceaux*) ; alors on a :*

$$u(\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}, \qquad \textit{c.-à-d.} \qquad u \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}).$$

(ii) *Soit* $u \in \mathrm{End}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}})$ *tel que la restriction de* u *au préfaisceau* $f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})$ *soit l'*identité*, c.-à-d., tel que, pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et* $x \in \mathrm{X}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}') = \mathrm{X}(\mathrm{S}')$*, on ait* $u(f(x)) = f(x)$ *; alors la restriction de* u *au préschéma* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ *est l'*identité*.*

(iii) *Soient* Y *un k-préschéma* géométriquement réduit *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ *un k-morphisme. Supposons que, quel que soit le k-préschéma* S′*, pour tout* $a \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ *et* $b \in \mathrm{Y}(\mathrm{S}')$*, on ait* 365

$$f \circ a = g \circ b, \qquad \text{resp.} \qquad (\mathrm{int}(f \circ a))(g_{\mathrm{S}'}(\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'})) = g_{\mathrm{S}'}(\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}).$$

Alors, $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *est contenu dans* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(g)$*,* resp. $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(g)$*.*

(iv) *Soit* x *un point de* G rationnel sur k*. Alors le k-groupe* $\Gamma_{\mathrm{G}}(\{x\})$ *est* commutatif.

(v) *Soient* A *et* B *deux sous-préschémas en groupes de* G géométriquement réduits *sur k. Si* A *et* B *sont* invariants *(resp.* caractéristiques*), il en est de même de* (A, B).

Montrons (i). Posons $\mathrm{H} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{H}' = u^{-1}(\mathrm{H})$. Alors H′ est un sous-S-préschéma en groupes fermé de G_{S} donc, d'après 7.1 (iii), il suffit de montrer que f_{S} se factorise à travers H′. Or, $u \circ f_{\mathrm{S}} = u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{id}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}}}))$ appartient à $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}}))(\mathrm{X})$, donc, d'après l'hypothèse, à $(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}}))(\mathrm{X})$, donc a fortiori à $\mathrm{H}(\mathrm{X})$, ce qui signifie que $u \circ f_{\mathrm{S}}$ se factorise à travers l'injection canonique de H dans G_{S}, donc que f_{S} se factorise à travers H′.

Il est clair que (i bis) est une conséquence de (i), appliqué à u et u^{-1}.

Montrons (ii). Puisque G est séparé sur k (VI_{A} 0.2), G_{S} est séparé sur S, donc la section unité de G_{S} est une immersion fermée (5.1), si bien que $\mathrm{Ker}(\mu \circ (u, c))$ est un sous-préschéma en groupes fermé de G_{S} (on rappelle que μ (resp. c) désigne la

[47] N.D.E. : On a ajouté ces rappels, et modifié légèrement l'énoncé de 7.3.

multiplication (resp. la symétrie) de G_S). Par hypothèse, $\mathrm{Ker}(\mu \circ (u, c))$ majore f_S, donc il contient $\Gamma_G(f)_S$, d'après 7.1 (iii).

Montrons (iii). Par hypothèse, compte-tenu de (ii) (resp. (i bis)), $\underline{\mathrm{Centr}}_G\, \Gamma_G(g)$ (resp. $\underline{\mathrm{Norm}}_G\, \Gamma_G(g)$) majore f, donc il contient donc $\Gamma_G(f)$, d'après 7.1 (i).

366 L'assertion (iv) est un cas particulier de (iii), où l'on prend pour f et g l'injection du préschéma réduit de G ayant pour espace sous-jacent le point fermé $\{x\}$ dans G. Ce sous-préschéma est géométriquement réduit sur k puisque $\kappa(x) = k$.

Montrons enfin (v). Soient S un k-préschéma, et u un automorphisme intérieur (resp. un automorphisme de S-groupes) de G_S. Par hypothèse, $u(A_S) = A_S$, et $u(B_S) = B_S$; on en déduit aisément, avec les notations de 7.2.2, l'égalité de préfaisceaux : $u(\nu_S(A_S \times_S B_S)) = \nu_S(A_S \times_S B_S)$; donc, d'après (i bis), on a $u((A, B)) = (A, B)$. C.Q.F.D.

Proposition 7.4. — *Soient* G *un k-groupe* localement de type fini*,* X *un k-préschéma* de type fini, géométriquement réduit *et* géométriquement connexe*, et $f : X \to G$ un k-morphisme tel que* $f(X)$ contienne l'élément neutre e *de* G*. Alors* (notations de 7.1 (ii))*, il existe un entier* N *tel qu'on ait :*

$$f^N(X^N) = \Gamma_G(f) \qquad \text{(ensemblistement)}.$$

D'après 7.1 (iii) et EGA IV_2, 2.6.1, nous pouvons supposer k algébriquement clos. D'après le corollaire 7.2.1, nous pouvons supposer que $G = G^0$; enfin, il suffit de montrer qu'il existe un entier N tel que l'on ait : $f'^N(X'^N) = \Gamma_G(f)$, avec les notations de 7.2 (v).

Premier cas. Supposons X *irréductible.* Alors les $\overline{f'^n(X'^n)}$ forment une suite croissante de fermés irréductibles dans l'espace G, qui est noethérien, puisque $G = G^0$ est de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$ 2.4). Donc cette suite est stationnaire, et il existe un entier m tel que $\overline{f'^m(X'^m)} = \Gamma_G(f)$.

De plus, puisque X et G sont de type fini sur k, les f'^n sont de type fini sur k. Par conséquent, $f'^m(X'^m)$ est constructible dans G (EGA IV_1, 1.8.5), donc contient un ouvert U de son adhérence $\Gamma_G(f)$ (EGA 0_{IV}, 9.2.3). Alors, d'après $\mathrm{VI_A}$ 0.5, on a :

$$\Gamma_G(f) \subseteq U \cdot U \subseteq f'^{2m}(X'^{2m}) \subseteq \Gamma_G(f),$$

d'où $f'^{2m}(X'^{2m}) = \Gamma_G(f)$.

367 ***Deuxième cas.*** Supposons que X ait *exactement deux* composantes irréductibles A_1 et A_2. Alors, puisque X est connexe, et k algébriquement clos, il existe $a \in (A_1 \cap A_2)(k)$. Donc les quatre parties irréductibles $A_i \times_k A_j$ $(i, j = 1, 2)$ recouvrent $X \times_k X$, et l'image de chacune d'entre elles par le morphisme $f'^1 = \mu \circ (f \times_k (c \circ f))$ contient e. Si f'^1_{ij} désigne la restriction de f'^1 au sous-préschéma réduit $A_i \times_k A_j$, posons

$$Y = (A_1 \underset{k}{\times} A_1) \underset{k}{\times} (A_1 \underset{k}{\times} A_2) \underset{k}{\times} (A_2 \underset{k}{\times} A_2) \underset{k}{\times} (A_2 \underset{k}{\times} A_1) \qquad \text{et}$$

$$g = \mu \circ \Big(\big(\mu \circ (f'^1_{11} \underset{k}{\times} f'^1_{12})\big) \underset{k}{\times} \big(\mu \circ (f'^1_{22} \underset{k}{\times} f'^1_{21})\big) \Big).$$

Alors Y est irréductible, réduit et de type fini, donc on vient de voir qu'il existe un entier m tel que $g'^{m}(\mathrm{Y}'^{m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(g)$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a $f'^{n}(\mathrm{X}'^{n}) \subseteq g'^{n}(\mathrm{Y}^{n}) \subseteq f'^{4n}(\mathrm{X}'^{4n})$, d'où $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \Gamma_{\mathrm{G}}(g)$ et $f'^{4m}(\mathrm{X}'^{4m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Cas général. Raisonnons par récurrence sur le nombre des composantes irréductibles de X (ce nombre est fini puisque X, étant de type fini sur k, est noethérien). Supposons la proposition démontrée dans le cas où X a au plus $r-1$ composantes irréductibles, et supposons qu'il en ait r, à savoir $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_r$. Alors e appartient à l'image de l'un des A_i ; supposons par exemple que $e \in f(\mathrm{A}_1)$. Posons alors $\mathrm{Y} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f_r)$, où f_r désigne la restriction de f au sous-préschéma réduit $\mathrm{X}_r = \mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ (nous supposons la numérotation des A_i choisie de façon que ce préschéma soit connexe, ce qui est toujours possible). Alors Y est un sous-groupe de G, fermé, réduit, et irréductible, d'après le corollaire 7.2.1.

Posons $\mathrm{Z} = \overline{f(\mathrm{A}_r)}$, et soient $\mathrm{T} = \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$, muni de la structure de sous-préschéma fermé réduit, et i l'injection de T dans G. Il est clair (7.2 (ii)) que $\Gamma_{\mathrm{G}}(i) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ et que T est connexe (car puisque X est connexe, $\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ et A_r ont en commun un point a, et Y et Z ont en commun le point $f(a)$). De plus, $e \in \mathrm{T}$, et T a au plus deux composantes irréductibles, puisque Y et Z sont irréductibles. D'après l'hypothèse **368**
de récurrence, il existe un entier m tel qu'on ait : $f_r'^{m}(\mathrm{X}_r'^{m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f_r) = \mathrm{Y}$. Donc, puisque $\mathrm{X}_r \subseteq \mathrm{X}$ et $\mathrm{Z} \subseteq \overline{f(\mathrm{X})}$, on a

$$f(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z} \subseteq \overline{f'^{m}(\mathrm{X}'^{m})}.$$

D'autre part, puisque T a au plus deux composantes irréductibles, on a déjà vu qu'il existe un entier p tel que $i'^{p}(\mathrm{T}'^{p}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(i) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. Or, $\mathrm{T} \subseteq \overline{f'^{m}(\mathrm{X}'^{m})}$, donc $\overline{f'^{mp}(\mathrm{X}'^{mp})} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, et on montre, comme dans le premier cas, que cette dernière égalité entraîne $f'^{2mp}(\mathrm{X}'^{2mp}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. C.Q.F.D.

Lemme 7.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes,* X *un* S*-préschéma,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un* S*-morphisme. On suppose que* X *et* G *sont* localement de présentation finie *sur* S, *et que pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et tout* point maximal g *de* G_s, *il existe un point* x *de* X *tel que* $f(x) = g$ *et que* f *soit* plat en x. *Alors le morphisme* $\mu \circ (f \times_{\mathrm{S}} f) : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est* couvrant *pour la topologie* (fppf).

[48] D'après EGA IV_3, 11.3.1, l'ensemble V des points de X en lesquels f est plat est *ouvert* et $f|_{\mathrm{V}}$ est un morphisme *ouvert*, donc $\mathrm{U} = f(\mathrm{V})$ est un ouvert de G ; de plus, d'après l'hypothèse, $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_s$ est dense dans G_s, pour tout $s \in \mathrm{S}$. Notons ϕ la restriction à $\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ de $\mu \circ (f \times_{\mathrm{S}} f)$.

Il suffit de montrer que ϕ est couvrant pour la topologie (fppf), et pour cela il suffit de montrer que ϕ est fidèlement plat et de présentation finie (cf. IV, 6.3.1 (iv)). Comme ϕ est égal au composé $\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V} \xrightarrow{f|_{\mathrm{V}} \times f|_{\mathrm{V}}} \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \xrightarrow{\mu} \mathrm{G}$, où le premier morphisme est fidèlement plat et localement de présentation finie, puisque $f|_{\mathrm{V}}$ l'est ; il suffira donc de prouver qu'il en est de même de la restriction de μ à $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}$.

Or, $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ étant localement de présentation finie et plat, il en est de même de $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ (qui est isomorphe au morphisme déduit de $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ par le changement

[48] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a ajouté quelques détails.

de base $G \to S$, cf. VI_A 0.1), donc aussi du morphisme induit $U \times_S U \to G$. Pour prouver que ce dernier est surjectif, il suffit de regarder fibre par fibre, où cela résulte de VI_A 0.5, puisque $U \cap G_s$ est un ouvert dense de G_s, pour tout $s \in S$.

Définition 7.6.0. — [49] Soient G un k-groupe, X un k-préschéma, et $f : X \to G$ un k-morphisme. On rappelle que le *préfaisceau image* de f est le sous-k-foncteur de G qui à tout k-préschéma S associe le sous-ensemble $f(X(S))$ de $G(S)$. On définit alors le *sous-préfaisceau en groupes* de G *engendré par l'image de* f, et l'on note $\langle \operatorname{Im} f\rangle$, le sous-$k$-foncteur en groupes de G qui à tout k-préschéma S associe le sous-groupe de $G(S)$ engendré par $f(X(S))$.

Supposons X *géométriquement réduit* et soient $f^n : X^n \to G$ les morphismes introduits en 7.1 (i). Posons $X^\infty = \coprod_{n\geqslant 1} X^n$, et soit $f^\infty : X^\infty \to \Gamma_G(f)$ le morphisme dont la restriction à chacun des X^n est le morphisme $X^n \to \Gamma_G(f)$ déduit de f^n. Alors, le *sous-préfaisceau en groupes* de G *engendré par l'image de* f est le *préfaisceau image* de f^∞.

Proposition 7.6. — *Soient* G *un k-groupe* localement de type fini*,* X *un k-préschéma* géométriquement réduit *et* localement de type fini*, et* $f : X \to G$ *un k-morphisme.*
369 *Pour que le k-groupe* $\Gamma_G(f)$ *représente le* faisceau *pour la topologie* (fppf) (*ou* (fpqc)) *associé au* sous-préfaisceau en groupes de G engendré par l'image de f*, il faut et il suffit que l'on ait :*

$$\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(X^n) = \Gamma_G(f).$$

Lorsque G *est* de type fini *sur k, cette condition implique déjà qu'il existe un entier n tel que* $f^n : X^n \to \Gamma_G(f)$ *soit* couvrant *pour la topologie* (fppf) [50] (*et a fortiori* surjectif).

Le *faisceau* considéré dans l'énoncé est le *faisceau image* de X^∞ par f^∞ ; donc d'après IV 4.4.3, dire que le foncteur $\Gamma_G(f)$ est le faisceau considéré revient à dire que f^∞ est couvrant. Montrons que, pour que f^∞ soit couvrant, il faut et il suffit que f^∞ soit surjectif. La condition est évidemment nécessaire ; réciproquement, supposons f^∞ surjectif.

[51] Comme $\Gamma_G(f)$ est réduit et localement de type fini sur k, chacune de ses composantes connexes est intègre et de type fini sur k (VI_A, 2.4.1), donc il résulte du théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.1), que $f^\infty : X^\infty \to \Gamma_G(f)$ est *plat* au-dessus du point générique de chaque composante connexe de $\Gamma_G(f)$. Donc, d'après le lemme 7.5, le morphisme

$$\mu \circ (f^\infty \underset{k}{\times} f^\infty) : X^\infty \underset{k}{\times} X^\infty \longrightarrow \Gamma_G(f)$$

est couvrant pour la topologie (fppf). Or, puisque $X^n \times_k X^m$ est canoniquement isomorphe à X^{n+m}, et que, dans cet isomorphisme, $\mu \circ (f^n \times_k f^m)$ correspond à f^{n+m},

[49] N.D.E. : On a ajouté cette définition, qui dans l'original était contenue dans l'énoncé de la proposition 7.6, et l'on a modifié en conséquence l'énoncé de 7.6.

[50] N.D.E. : On a remplacé (fpqc) par (fppf), et ajouté des détails à la fin de la démonstration.

[51] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit, ainsi que l'argument analogue à la fin de la démonstration.

il est clair que $\mu \circ (f^{\infty} \times_k f^{\infty})$ se factorise à travers f^{∞}, si bien que f^{∞} est couvrant pour la topologie (fppf). Enfin, dire que f^{∞} est surjectif revient à dire que $\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. Ceci prouve la première assertion

Notons de plus que, puisque X et G sont localement de type fini sur k, alors $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ est localement de présentation finie (EGA IV_1, 1.4.3 (v)), de même que chaque morphisme $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{G}$. Donc, d'après EGA IV_1, 1.9.5 (viii), les $f^n(\mathrm{X}^n)$ sont des parties ind-constructibles de $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Supposons de plus G de type fini sur k, donc *quasi-compact.* Alors $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ l'est aussi, et d'après EGA IV_1, 1.9.9, on conclut qu'il existe n tel que $f^n(\mathrm{X}^n) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. Alors, comme précédemment, il résulte du théorème de platitude générique et du lemme 7.5, que le morphisme $\mu \circ (f^n \times_k f^n) : \mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^n \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est *couvrant* pour la topologie (fppf) ; comme ce morphisme égale $f^{2n} : \mathrm{X}^{2n} \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, cela achève de prouver 7.6.

Remarque 7.6.1. — Évidemment les conditions équivalentes de 7.6 impliquent que le faisceau F envisagé est *représentable.* La réciproque est fausse en général (prendre X réduit à un point !). Noter cependant qu'il résulte de EGA_2, IV 8.14.2 que si F est représentable, il est *localement de présentation finie* sur k, donc la question est **370**
alors si le monomorphisme dominant $\mathrm{F} \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est un isomorphisme, ou encore, une immersion fermée. Ce sera le cas, en vertu de 1.4.2, si F est *quasi-compact*, et, d'après 3.6, ceci sera vérifié si F est *connexe*, donc, en particulier (7.2.1), si X est connexe et si $f(\mathrm{X})$ contient l'élément unité de G.

Lemme 7.7. — *Soient k un corps* algébriquement clos*,* G *un k-groupe* localement de type fini*,* X *un k-préschéma géométriquement réduit et* localement de type fini*, f : $\mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme et* H *un sous-préschéma en groupes de* G *tel que* $\mathrm{H} \subseteq f(\mathrm{X})$*. Posons*

$$\Gamma' = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n), \qquad \Gamma'_0 = \Gamma' \bigcap \mathrm{G}(k), \qquad \mathrm{H}_0 = \mathrm{H}(k).$$

Supposons H_0 d'indice fini *dans Γ'_0. Alors il existe un entier m tel que $f^m(\mathrm{X}^m) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$* (cf. 7.6)*, et $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est réunion d'un nombre* fini *de translatés de* H.

Quel que soit $n \geqslant 1$, $f^n(\mathrm{X}^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV_1, 1.9.5 (viii)), il en est donc de même de Γ', si bien que, puisque G est un préschéma de Jacobson, Γ'_0 est dense dans Γ'. Par hypothèse, il existe une suite finie $a_1, \ldots, a_r$ de points de Γ'_0 telle que $\Gamma'_0 = a_1\mathrm{H}_0 \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}_0$, d'où

$$\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \overline{\Gamma'} = \overline{\Gamma'_0} = \overline{a_1\mathrm{H}_0 \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}_0} = \overline{a_1\mathrm{H}_0} \cup \cdots \cup \overline{a_r\mathrm{H}_0} = a_1\overline{\mathrm{H}_0} \cup \cdots \cup a_r\overline{\mathrm{H}_0},$$

la dernière égalité résultant du fait que la translation par a_i est un homéomorphisme de G sur G. On a donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = a_1\mathrm{H} \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}$. Il est d'autre part clair qu'il existe un entier p tel que chacun des a_i ($1 \leqslant i \leqslant r$) appartienne à $f^p(\mathrm{X}^p)$. Enfin, puisque $\mathrm{H} \subseteq f(\mathrm{X})$, on a, pour tout i : $a_i\mathrm{H} \subseteq f^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1})$, si bien que $f^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Proposition 7.8. — *Soient* G *un k-groupe* localement de type fini*,* A *et* B *deux sous-k-préschémas en groupes* géométriquement réduits (*donc lisses aux points génériques de leurs composantes irréductibles, donc* lisses *d'après* 1.3) *de* G*. Supposons remplie l'une des conditions* a) *ou* b) *suivantes :*

a) A *et* B *sont* invariants *et* de type fini *sur* k.

371 b) A *est* connexe *et* B *est* de type fini *sur* k.

Alors (A, B) *est* de type fini *sur* k*, et représente le* faisceau *associé pour la topologie* (fppf) (*ou* (fpqc)) *au préfaisceau en groupes des commutateurs de* A *et* B *dans* G. *De plus,* (52) *les* k*-groupes* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}^0)$ *et* $(\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$ *sont* connexes*, et l'on a*

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B})^0 = (\mathrm{A}, \mathrm{B}^0) \cdot (\mathrm{A}^0, \mathrm{B}).$$

D'après 7.6, pour montrer que (A, B) est le faisceau associé désiré, il suffit de montrer qu'il existe un entier n tel que $\nu^n((\mathrm{A} \times_k \mathrm{B})^n) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ (notations de 7.2.2). Pour montrer cela, ainsi que pour montrer les deux autres assertions, on peut supposer k algébriquement clos. En effet, soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. D'après 7.1 (iii) et VI_{A} 2.1.1, on a, avec des notations évidentes :

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B})_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}}, \mathrm{B}_{\overline{k}}), \qquad ((\mathrm{A}, \mathrm{B})^0)_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}}, \mathrm{B}_{\overline{k}})^0, \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}^0)_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}}, \mathrm{B}^0_{\overline{k}}), \quad \text{etc.}$$

Par conséquent, si on montre que $(\mathrm{A}_{\overline{k}}, \mathrm{B}_{\overline{k}})$ est de type fini sur $\overline{k}$ (resp. que $(\mathrm{A}_{\overline{k}}, \mathrm{B}^0_{\overline{k}})$ et $(\mathrm{A}^0_{\overline{k}}, \mathrm{B}_{\overline{k}})$ sont connexes, et que le morphisme $(\mathrm{A}_{\overline{k}}, \mathrm{B}^0_{\overline{k}}) \times_{\overline{k}} (\mathrm{A}_{\overline{k}}, \mathrm{B}^0_{\overline{k}}) \to (\mathrm{A}_{\overline{k}}, \mathrm{B}_{\overline{k}})^0$ est surjectif), alors les assertions analogues seront vraies sur k, d'après EGA IV_2, 2.7.1 et 2.6.1.

Soient alors $\mathrm{B}^0, \ldots, \mathrm{B}^p$ les composantes connexes de B et $\mathrm{A}^0, \ldots, \mathrm{A}^q$ celles de A (53) (ces composantes sont en nombre fini puisque A et B sont supposés de type fini sur k, donc noethériens). Soit ν_{ij} la restriction de ν à $\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^j$. Alors chacun des A^i et des B^j est irréductible (VI_{A} 2.4.1), il en est donc de même de $\mathrm{A}^0 \times_k \mathrm{B}^j$ et de $\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^0$. Puisque l'élément neutre de G appartient à A^0 et à B^0, il appartient à $\nu_{0j}(\mathrm{A}^0 \times_k \mathrm{B}^j)$ et à $\nu_{i0}(\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^0)$. Alors chacun des $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{0j})$ et des $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{i0})$ est connexe (7.2.1). De même, si u_{0j} (resp. u_{i0}) désigne l'injection de $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{0j})$ (resp. $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{i0})$) dans G, alors

$$(\mathrm{A}^0, \mathrm{B}) = \Gamma_{\mathrm{G}}((u_{0j})_{j=0}^p) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}^0) = \Gamma_{\mathrm{G}}((u_{i0})_{i=0}^q)$$

sont connexes. De plus, on déduit aisément de 7.4 et des constructions précédentes, qu'il existe un indice n tel que $(\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}^0)$ soient inclus dans $\nu^n((\mathrm{A} \times_k \mathrm{B})^n)$. Dans le cas b), on a $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$, et on a terminé.

Plaçons-nous maintenant dans le cas a). Soit H le sous-préschéma en groupes de G
372 engendré par la réunion de $(\mathrm{A}, \mathrm{B}^0)$ et de $(\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$; toujours d'après 7.4, H est connexe, et il existe un entier m tel que $\nu^m((\mathrm{A} \times_k \mathrm{B})^m) \supseteq \mathrm{H}$. Donc l'ensemble sous-jacent à H n'est autre que $(\mathrm{A}, \mathrm{B}^0) \cdot (\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$.

Étant donnée une partie X de G stable pour la loi de groupe (cf. 3.0), nous noterons X_0 le groupe des points fermés de G appartenant à X. Posons $\Gamma' = \bigcup_{q \geqslant 1} \nu^q((\mathrm{A} \times_k \mathrm{B})^q)$. Alors, d'après la proposition 7.9 ci-dessous, on a :

$$(\mathrm{A}^0, \mathrm{B})_0 = (\mathrm{A}^0_0, \mathrm{B}_0), \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}^0)_0 = (\mathrm{A}_0, \mathrm{B}^0_0) \qquad \text{et} \qquad \Gamma'_0 = (\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0),$$

(52) N.D.E. : On a précisé ce qui suit et, dans la démonstration, on a détaillé la réduction au cas où k est algébriquement clos.

(53) N.D.E. : où B^0, resp. A^0, désigne la composante neutre de B (resp. A).

si bien que $\mathrm{H}_0 = (\mathrm{A}_0^0, \mathrm{B}_0)\cdot(\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0^0)$ est d'indice fini dans Γ'_0 (*Bible*, Exp. 3, Appendice) puisque A_0 et B_0 sont invariants, et que A_0^0 (resp. B_0^0) est d'indice fini dans A (resp. B). Nous sommes alors dans les conditions du lemme 7.7 : puisque $\nu^m((\mathrm{A}\times_k \mathrm{B})^m) \supseteq \mathrm{H}$, il existe un entier p tel que $\nu^{mp}((\mathrm{A}\times_k \mathrm{B})^{mp}) = (\mathrm{A},\mathrm{B})$, et il existe une suite finie $a_1,\dots,a_n$ de points fermés de G telle que : $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = a_1\mathrm{H}\cup\cdots\cup a_n\mathrm{H}$. Alors, puisque H est de type fini sur k, chacun des $a_i\mathrm{H}$ est quasi-compact, donc leur réunion (A,B) est quasi-compacte, donc de type fini sur k. Puisque H est irréductible, il en est de même de chacun des $a_i\mathrm{H}$ et puisque $e\in\mathrm{H}$, il est clair que $\mathrm{H} = (\mathrm{A},\mathrm{B})^0$. C.Q.F.D.

Proposition 7.9. — *Soient k un corps* algébriquement clos*,* G *un k-groupe* localement de type fini*.*

(i) *Soient* A *et* B *deux parties* ind-constructibles *de* G*. Notons* $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}(k)\subseteq \mathrm{G}(k)$ *l'ensemble des points fermés de* G *appartenant à* A*. Alors* $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})_0 = \mathrm{A}_0\cdot\mathrm{B}_0$*, le second produit étant pris dans le groupe* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}(k)$*.*

(ii) *Soient* X *un k-préschéma* géométriquement réduit *et* localement de type fini*, et* $f : \mathrm{X}\to\mathrm{G}$ *un k-morphisme. Posons* $\Gamma'_{\mathrm{G}}(f) = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)$*. Alors* $\Gamma'_{\mathrm{G}}(f)_0$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}(k)$ *engendré par* $f(\mathrm{X})_0$*.*

(iii) *En particulier, soient* A *et* B *deux sous-préschémas en groupes* lisses *de* G *;* **373**
posons $\Gamma' = \bigcup_{n\geqslant 1}\nu^n(\mathrm{A}\times_k\mathrm{B})^n$ (notations de 7.2.2)*. Alors* Γ'_0 *est le groupe des commutateurs de* A_0 *et* B_0 *dans* G_0*.*

Montrons d'abord la première assertion. Il est clair que $\mathrm{A}_0\cdot\mathrm{B}_0\subseteq(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})_0$. Réciproquement, soit $z\in(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})_0$. Alors $\mu^{-1}(z)$ est un fermé de $\mathrm{G}\times_k\mathrm{G}$, et $\mathrm{A}\times_k\mathrm{B}$ (cf. 3.0) est une partie ind-constructible de $\mathrm{G}\times_k\mathrm{G}$, si bien que $\mu^{-1}(z)\cap(\mathrm{A}\times_k\mathrm{B})$ est une partie ind-constructible non vide de $\mathrm{G}\times_k\mathrm{G}$; elle contient donc un point fermé de $\mathrm{G}\times_k\mathrm{G}$ (EGA IV 10.1.2) dont les projections x et y sont des points fermés de G (EGA IV 10.4.7) tels que $x\in\mathrm{A}$, $y\in\mathrm{B}$ et $x\cdot y = z$, si bien que $(\mathrm{A},\mathrm{B})_0 = \mathrm{A}_0\cdot\mathrm{B}_0$.

Pour montrer la seconde assertion, remarquons que, f^n étant localement de type fini, $f^n(\mathrm{X}^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV_4, 1.9.5). La première assertion permet alors de montrer par récurrence que, si on pose $\mathrm{A} = f(\mathrm{X})_0$, on a : $f^n(\mathrm{X}^n)_0 = (\mathrm{A}\cup\mathrm{A}^{-1})^n$, et par conséquent,

$$\Gamma'_{\mathrm{G}}(f)_0 = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)_0 = \bigcup_{n\geqslant 1}(\mathrm{A}\cup\mathrm{A}^{-1})^n,$$

qui est le sous-groupe de G_0 engendré par $\mathrm{A} = f(\mathrm{X})_0$.

La troisième assertion résulte de la seconde et des définitions.

Corollaire 7.10. — *Sous les conditions de* 7.8*, si k est algébriquement clos, alors* $(\mathrm{A},\mathrm{B})(k)$ *est le sous-groupe des commutateurs de* $\mathrm{A}(k)$ *et* $\mathrm{B}(k)$ *dans* $\mathrm{G}(k)$*.*

En effet, il suffit d'appliquer 7.9 (iii), 7.8 et 7.6.

8. Préschémas en groupes résolubles et nilpotents

8.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie d'une topologie $\mathcal{T}$ (cf. IV § 4). Pour tout préfaisceau P sur $\mathscr{C}$, on notera $\mathrm{P}^\flat$ le faisceau associé.

Soient G un préfaisceau en groupes sur $\mathscr{C}$, A et B deux sous-préfaisceaux en groupes de G, et soit $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ le préfaisceau en groupes des commutateurs de A et B dans G ; c.-à-d., pour tout $\mathrm{S}\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})(\mathrm{S})$ est le sous-groupe de G(S) engendré
374 par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$, avec $a\in\mathrm{A}(\mathrm{S})$ et $b\in\mathrm{B}(\mathrm{S})$. On note

$$\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A},\mathrm{B})=\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})^{\flat}.$$

On aura besoin, dans la démonstration de 8.2, des résultats suivants. [54]

Lemme 8.1.1. — *Soient* $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{G}$ *des* faisceaux *en groupes, avec* A invariant *dans* G.

(i) $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ *est le plus petit sous-faisceau en groupes invariant* C *de* G *tel que le faisceau* $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^{\flat}$*, associé au préfaisceau quotient* A/C*, soit* central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^{\flat}$.

(ii) *En particulier,* $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{G})$ *est le plus petit sous-faisceau en groupes invariant* C *de* G *tel que le faisceau quotient* $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^{\flat}$*, soit* commutatif.

Évidemment, (ii) est le cas particulier A = G de (i), donc il suffit de montrer (i). Soit C un sous-faisceau en groupes de A, invariant dans G, et tel que le faisceau quotient $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^{\flat}$ soit *central dans* $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^{\flat}$. D'après le lemme IV.4.4.8.1, les préfaisceaux A/C et G/C sont *séparés*, et donc, d'après IV.4.3.11, tous les morphismes dans le diagramme ci-dessous sont des monomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}/\mathrm{C} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{G}/\mathrm{C} \arrow[d, hook] \\
(\mathrm{A}/\mathrm{C})^{\flat} \arrow[r, hook] & (\mathrm{G}/\mathrm{C})^{\flat}
\end{tikzcd}$$

Comme $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^{\flat}$ est central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^{\flat}$, alors A/C est central dans G/C, d'où $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G},\mathrm{A})\subseteq\mathrm{C}$, et donc C contient $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$, d'après IV.4.3.12.

Réciproquement, $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ est un sous-préfaisceau en groupes de A, invariant dans G, et séparé (cf. IV.4.3.1, N.D.E. (23)), donc, d'après IV.4.4.8.2 (i) et IV.4.3.11, $\mathrm{C}=\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ est un sous-faisceau en groupes de A, invariant dans G et contenant $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$. Par conséquent, le préfaisceau A/C est central dans G/C et donc, d'après IV.4.4.8.2 (ii), $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^{\flat}$ est central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^{\flat}$. Ceci prouve le lemme 8.1.1.

Lemme 8.1.2. — *Soient* G *un faisceau en groupes,* A, B *deux sous-préfaisceaux en groupes de* G.

(i) *Le morphisme* $\tau:\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})\to\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^{\flat},\mathrm{B}^{\flat})$ *est un* monomorphisme couvrant.

(ii) *Par conséquent, on a un isomorphisme*

$$\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A},\mathrm{B})\xrightarrow{\sim}\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A}^{\flat},\mathrm{B}^{\flat}).$$

[54] N.D.E. : Ces résultats sont signalés sans démonstration dans l'original ; on les a mis en évidence sous la forme des lemmes 8.1.1 et 8.1.2, et l'on a détaillé les démonstrations.

Démonstration. (i) Comme A (resp. B) est un sous-préfaisceau de G, alors $A^\flat$ (resp. $B^\flat$) est un sous-préfaisceau de G contenant A (resp. B), et il en résulte que τ est un monomorphisme.

Montrons que τ est couvrant. Soient $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $g \in \underline{\mathrm{Comm}}(A^\flat, B^\flat)(S)$. Alors, il existe un entier $n \geqslant 1$ et, pour $i = 1, \ldots, n$, des éléments $a'_i \in A^\flat(S)$, $b'_i \in B^\flat(S)$, et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, tels que

$$g = (a'_1, b'_1)^{\varepsilon_1} \cdots (a'_n, b'_n)^{\varepsilon_n},$$

où (a, b) désigne le commutateur $aba^{-1}b^{-1}$, et il existe un raffinement R de S tel que $a'_i \in A(R)$ et $b'_i \in B(R)$ pour tout i. Alors, g est le morphisme composé

$$R \xrightarrow{(a'_1, \ldots, b'_n)} (A \times B)^n \xrightarrow{\Phi^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}} \underline{\mathrm{Comm}}(A, B),$$

où $\Phi = \Phi^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}$ est le morphisme défini ensemblistement par :

$$\Phi(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = (a_1, b_1)^{\varepsilon_1} \cdots (a_n, b_n)^{\varepsilon_n},$$

pour tout $T \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $a_i \in A(T)$, $b_i \in B(T)$. Ceci montre que $g \in \underline{\mathrm{Comm}}(A, B)(R)$ et il en résulte, comme dans la démonstration de IV.4.3.11 (i), que $\underline{\mathrm{Comm}}(A, B) \to \underline{\mathrm{Comm}}(A^\flat, B^\flat)$ est couvrant.

Comme $\underline{\mathrm{Comm}}(A^\flat, B^\flat) \to \underline{\mathrm{Comm}}(A^\flat, B^\flat)^\flat$ est aussi un monomorphisme couvrant (IV.4.3.11 (iv)), il en est de même de $\underline{\mathrm{Comm}}(A, B) \to \underline{\mathrm{Comm}}(A^\flat, B^\flat)^\flat$ et donc, d'après IV.4.3.12, on obtient un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Comm}}(A, B)^\flat \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Comm}}(A^\flat, B^\flat)^\flat.$$

Ceci prouve le lemme 8.1.2.

Proposition 8.2. — *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathcal{T}$ une topologie sur $\mathscr{C}$,* G *un faisceau en groupes sur $\mathscr{C}$, n un entier positif ou nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Si on pose :* $K_0 = G$, *et pour* $p \geqslant 1$, $K_p = \underline{\mathrm{Comm}}(K_{p-1}, K_{p-1})$ (*resp.* $K_p = \underline{\mathrm{Comm}}(G, K_{p-1})$), *alors* K_n *est le préfaisceau en groupes unité.*

(ii) *Si on pose* $K'_0 = G$, *et pour* $p \geqslant 1$, $K'_p = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(K'_{p-1}, K'_{p-1})$ (*resp.* $K'_p = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(G, K'_{p-1})$), *alors* K'_n *est le faisceau en groupes unité.*

(iii) *Il existe une suite* $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \cdots \supseteq H_n$ *de sous-faisceaux* invariants *de* G, *telle que, quel que soit i, le faisceau quotient* H_i/H_{i+1} *soit commutatif* (*resp. central dans* G/H_{i+1}), *et que* H_n *soit le faisceau unité.*

Il est clair que $K_n \subseteq K'_n$; par conséquent (ii) entraîne (i). Montrons que (i) entraîne (ii). On a $K'_1 = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(G, G) = K_1^\flat$, et on déduit par récurrence du lemme 8.1.2 que $K'_p = K_p^\flat$ pour tout p. Par conséquent, si K_n est le préfaisceau unité, alors $K'_n = K_n^\flat$ est le faisceau unité.

Enfin les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes d'après le lemme 8.1.1.

Définition 8.2.1. — Lorsque ces conditions sont satisfaites, le faisceau G est dit *résoluble de classe n* (resp. *nilpotent de classe n*). Lorsqu'il existe un entier n tel que ces conditions soient satisfaites, on dit que G est *résoluble* (resp. *nilpotent*). 375

On notera que, d'après la condition (i), ceci ne dépend pas de la topologie $\mathcal{T}$.

Proposition 8.3. — *Soient k un corps,* S *un k-préschéma non vide,* Ω *une extension* algébriquement close *de k,* G *un k-groupe* lisse de type fini. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(ii) $\mathrm{G}\times_k \mathrm{S}$ *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(iii) *Le groupe* $\mathrm{G}(\Omega)$ *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(iv) *Si on pose* $\mathrm{K}_0 = \mathrm{G}$ *et si on considère, pour $p \geqslant 1$, les k*-groupes $\mathrm{K}_p = (\mathrm{K}_{p-1}, \mathrm{K}_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}_p = (\mathrm{G}, \mathrm{K}_{p-1})$) (*cf.* 7.2.2), *alors* K_n *est le k-groupe unité.*

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de la définition 8.2, étant donné que la formation du préfaisceau en groupes des commutateurs commute aux changements de base (IV 4.1.3).

L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) résulte de ce que, d'après 7.8, le k-groupe $\mathrm{K}_p = (\mathrm{K}_{p-1}, \mathrm{K}_{p-1})$ (resp. $\mathrm{K}_p = (\mathrm{G}, \mathrm{K}_{p-1})$) représente le *faisceau* $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{K}_{p-1}, \mathrm{K}_{p-1})$ (resp. $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{K}_{p-1})$), où $\mathcal{T}$ est la topologie (fppf) (ou (fpqc)).

Pour montrer que les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes, on peut supposer que $k = \Omega$, et alors l'équivalence des conditions (iii) et (iv) résulte de 7.10.

Proposition 8.4. — *Soit* G *un* S*-groupe* de présentation finie*, tel que pour tout $s \in$* S*,* G_s *soit* lisse *sur* $\kappa(s)$*. Soit* T *l'ensemble des $s \in$* S *tels que* G_s *soit* résoluble (*resp.* nilpotent)*.*

(i) *Alors* T *est* localement constructible *dans* S.

(ii) *Si on suppose de plus* G plat et séparé *sur* S (*i.e. lorsque* G *est* lisse*,* quasi-compact *et* séparé *sur* S)*, alors* T *est* fermé *dans* S*.*

376 Il est clair qu'on peut supposer S affine d'anneau A. Il existe alors (10.1 et 10.10 b)) [(*)] un sous-anneau noethérien A′ de A et un A′-groupe de type fini G′ tel que $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}'} \mathrm{A}$ soit isomorphe à G. D'après EGA IV_3, 11.2.6 et 8.10.5 [(55)], si G est plat et séparé sur S, on peut supposer G′ plat et séparé sur $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec} \mathrm{A}'$. [(56)] Comme G est de présentation finie sur S, alors (EGA IV_3, 9.7.7) l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que G_s soit géométriquement réduit (ou, ce qui revient au même, *lisse* sur $\kappa(s)$) est localement constructible. Donc, d'après EGA IV_3, 9.3.3, on peut supposer que, pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, $\mathrm{G}'_{s'}$ est lisse sur $\kappa(s')$. D'autre part, si s' désigne l'image de s dans S′, on a : $\mathrm{G}'_{s'} \otimes_{\kappa(s')} \kappa(s) \simeq \mathrm{G}_s$. Donc, d'après 8.3, pour que G_s soit résoluble (resp. nilpotent), il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\mathrm{G}'_{s'}$. Nous somme donc ramenés au cas où S est un schéma affine noethérien.

Montrons alors que T est constructible. En appliquant le critère (EGA 0_{III}, 9.2.3), on voit, en raisonnant comme précédemment, qu'on est ramené à montrer que, dans le cas où S est noethérien et *intègre*, T ou $\mathrm{S} \setminus \mathrm{T}$ contient un ouvert non vide de S.

(*) Nous nous servirons au cours de cette démonstration de résultats établis au numéro 10 qui ne dépendent, pas plus que le numéro 9, du présent n°8.

(55) N.D.E. : on a corrigé 10.8.5 en 8.10.5

(56) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

Supposons donc S intègre et noethérien, de point générique η. Posons, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{K}_s^0 = \mathrm{G}_s$, et $\mathrm{K}_s^p = (\mathrm{K}_s^{p-1}, \mathrm{K}_s^{p-1})$ (resp. $\mathrm{K}_s^p = (\mathrm{G}, \mathrm{K}_s^{p-1})$). Montrons d'abord que la suite des sous-préschémas fermés K_η^p est stationnaire. Il résulte de 7.3 (v) que chacun des K_η^p est *invariant*, donc la suite des K_η^p est décroissante ; cette suite est alors stationnaire puisque G_η est noethérien ; il existe donc un entier n tel que, pour tout $p \geqslant n$, on ait : $\mathrm{K}_\eta^p = \mathrm{K}_\eta^n$.

D'autre part, nous verrons en 10.12 et 10.13 qu'il existe un ouvert non vide S′ de S et un S′-groupe *de présentation finie* D tel que pour tout $s \in \mathrm{S}'$, on ait $\mathrm{D}_s = \mathrm{K}_s^n$ et $(\mathrm{D}_s, \mathrm{D}_s) = \mathrm{D}_s$ (resp. $(\mathrm{G}_s, \mathrm{D}_s) = \mathrm{D}_s$). Nous pouvons supposer que $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Alors, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, et quel que soit $p \geqslant n$, on a $\mathrm{D}_s = \mathrm{K}_s^p$, si bien que G_s est résoluble (resp. nilpotent) si et seulement si D_s est isomorphe au $\kappa(s)$-groupe unité. **377**

Mais d'après EGA IV_3, 9.6.1 (xi), l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que le morphisme structural $\mathrm{D}_s \to \operatorname{Spec} \kappa(s)$ soit un isomorphisme est constructible, donc ou bien est rare, ou bien contient un ouvert non vide de S. On a donc obtenu que T est localement constructible.

Montrons que si, de plus, G est plat et séparé sur S, alors T est fermé. Puisque T est localement constructible, pour que T soit fermé, il faut et il suffit que T soit stable par spécialisation (EGA IV_1, 1.10.1).

Soient donc $s \in \mathrm{S}$ et s' une spécialisation de s dans S. Puisqu'on s'est ramené au cas où S est noethérien, alors, d'après EGA II, 7.1.9, il existe un anneau de valuation discrète A et un morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{S}$ tel que s (resp. s') soit l'image du point générique α (resp. du point fermé a) de A. Il suffit alors de montrer que si on pose $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{G} \otimes_\mathrm{S} \mathrm{A}$, et si $\mathrm{G}_\alpha^\sharp$ est résoluble (resp. nilpotent), il en est de même de $\mathrm{G}_a^\sharp$. Remarquons que, puisque G est plat et séparé sur S, $\mathrm{G}_\alpha^\sharp$ est plat et séparé sur A, de sorte qu'on est ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A.

Alors, puisque G_α est supposé résoluble (resp. nilpotent), il existe un entier q tel que K_α^q (avec les notations introduites précédemment) soit isomorphe au $\kappa(\alpha)$-groupe unité. Pour tout n, notons $\overline{\mathrm{K}_\alpha^n}$ l'adhérence schématique (au sens de EGA IV_2, 2.8.5) de K_α^n dans G. Montrons, par récurrence sur p, que $(\overline{\mathrm{K}_\alpha^p})_a \supseteq \mathrm{K}_a^p$. Notons d'abord que, puisque G est *plat* sur A, alors $\overline{\mathrm{G}_\alpha}$ est égal à G (EGA IV_2, 2.8.5), donc $(\overline{\mathrm{K}_\alpha^0})_a = \mathrm{K}_a^0$. **378**

Soit $p \geqslant 0$. Supposons avoir établi que $\mathrm{K}_a^p \subseteq (\overline{\mathrm{K}_\alpha^p})_a$, et notons ν_a, ν_α, $\overline{\nu}$, $\overline{\nu}_a$ les morphismes suivants, définis comme dans 7.2.2 :

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \text{cas } \textit{résoluble} & & \text{cas } \textit{nilpotent} \\
\nu_a : & \mathrm{K}_a^p \times_{\kappa(a)} \mathrm{K}_a^p \to \mathrm{G}_a, & \text{resp.} & \mathrm{G}_a \times_{\kappa(a)} \mathrm{K}_a^p \to \mathrm{G}_a, \\
\nu_\alpha : & \mathrm{K}_\alpha^p \times_{\kappa(\alpha)} \mathrm{K}_\alpha^p \to \mathrm{G}_\alpha & \text{resp.} & \mathrm{G}_\alpha \times_{\kappa(\alpha)} \mathrm{K}_\alpha^p \to \mathrm{G}_\alpha, \\
\overline{\nu} : & \overline{\mathrm{K}_\alpha^p} \times_\mathrm{A} \overline{\mathrm{K}_\alpha^p} \to \mathrm{G}, & \text{resp.} & \mathrm{G} \times_\mathrm{A} \overline{\mathrm{K}_\alpha^p} \to \mathrm{G}, \\
\overline{\nu}_a : & (\overline{\mathrm{K}_\alpha^p})_a \times_{\kappa(a)} (\overline{\mathrm{K}_\alpha^p})_a \to \mathrm{G}_a, & \text{resp.} & \mathrm{G}_a \times_{\kappa(a)} (\overline{\mathrm{K}_\alpha^p})_a \to \mathrm{G}_a.
\end{array}
$$

Puisque ν_α se factorise à travers K_α^{p+1}, alors $\overline{\nu}$ se factorise à travers $\overline{\mathrm{K}_\alpha^{p+1}}$, qui est évidemment un sous-préschéma en groupes de G, donc $\overline{\mathrm{K}_\alpha^{p+1}}$ contient $\Gamma_\mathrm{G}(\overline{\nu})$. D'après

7.1 (iii), on a $\Gamma_{\mathrm{G}}(\overline{\nu})_a = \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\overline{\nu}_a)$; et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathrm{K}_a^p \underset{\kappa(a)}{\times} \mathrm{K}_a^p \subseteq (\overline{\mathrm{K}_\alpha^p})_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{\mathrm{K}_\alpha^p})_a \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{G}_a \underset{\kappa(a)}{\times} \mathrm{K}_a^p \subseteq \mathrm{G}_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{\mathrm{K}_\alpha^p})_a,$$

si bien que $\mathrm{K}_a^{p+1} = \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\nu_a) \subseteq \Gamma_{\mathrm{G}_a}(\overline{\nu}_a) = \Gamma_{\mathrm{G}}(\overline{\nu})_a \subseteq (\overline{\mathrm{K}_\alpha^{p+1}})_a$.

Mais puisque K_α^q est isomorphe au $\kappa(\alpha)$-groupe unité, et que le A-groupe unité est plat sur A et est isomorphe à un sous-préschéma fermé de G (puisque G est *séparé* sur A, cf. 5.1), il résulte de EGA IV_2, 2.8.5 que l'adhérence schématique $\overline{\mathrm{K}_\alpha^q}$ est isomorphe au A-groupe unité. Comme on vient de voir que $\mathrm{K}_a^q \subseteq (\overline{\mathrm{K}_\alpha^q})_a$, ceci entraîne que K_a^q est isomorphe au $\kappa(a)$-groupe unité, si bien que G_a est résoluble (resp. nilpotent). C.Q.F.D.

9. Faisceaux quotients

Le présent numéro se borne pour l'essentiel à un rappel dans le cas particulier d'espaces homogènes de groupes, de faits généraux bien connus sur le passage au quotient par des relations d'équivalences plates (cf. IV).

Définition 9.1. — Étant donné un *monomorphisme* $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ de S-groupes, on note G/G' (resp. $\mathrm{G}'\backslash\mathrm{G}$) et on appelle *faisceau quotient à droite* (resp. *à gauche*) *de* G *par*
379 G' le faisceau (pour la topologie (fpqc)) quotient de G par la relation d'équivalence définie par le monomorphisme :

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}' \xrightarrow{\delta\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u)} \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \qquad (\text{resp. } \mathrm{G}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \xrightarrow{\gamma\circ(u \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})} \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}),$$

où δ (resp. γ) désigne l'automorphisme de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ défini par $(g, h) \mapsto (g, gh)$ (resp. $(h, g) \mapsto (hg, g)$) pour $g, h \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$.

Proposition 9.2. — *Soit* $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ *un* monomorphisme *de* S*-groupes. Supposons que* G/G' *soit* représentable *par un* S*-préschéma* G''*. Alors :*

(i) *Le morphisme canonique* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *est* couvrant *pour la topologie* (fpqc).

(ii) *Si on pose* $\varepsilon'' = p \circ \varepsilon$ *(ce morphisme s'appelle* section unité de G''*), les diagrammes suivants sont cartésiens :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u)"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "p"] & \mathrm{G}'' \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{G}' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "\varepsilon''"] & \mathrm{G}'' \end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, u *est une* immersion.

(iii) *Il existe sur* G'' *une structure unique de* S*-préschéma à* groupe d'opérateurs *à gauche* G*, telle que* p *soit un morphisme de* S*-préschémas à groupe d'opérateurs* G.

(iv) *Si on suppose de plus que* G' *est* invariant *dans* G*, il existe sur* G'' *une structure unique de* S-groupe *telle que* p *soit un morphisme de* S*-groupes.*

(v) *Soit* S_0 *un* S-*préschéma ; posons* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$, *et* $\mathrm{G}'_0 = \mathrm{G}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ *; alors* $\mathrm{G}_0/\mathrm{G}'_0$ *est représentable par* $\mathrm{G}''_0 = \mathrm{G}'' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$. [57]

(vi) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S-*morphisme. Supposons* $\mathscr{P}$ stable par changement de base *; alors si* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *vérifie* $\mathscr{P}$, *il en est de même du morphisme* **380**
structural $\pi' : \mathrm{G}' \to \mathrm{S}$.

(vii) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S-*morphisme. Supposons* $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fpqc) (*cf.* 2.0). *Alors, pour que le morphisme* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *vérifie* $\mathscr{P}$, il faut et il suffit *qu'il en soit de même de* $\pi' : \mathrm{G}' \to \mathrm{S}'$.

(viii) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S-*morphisme ; supposons* $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fpqc), *et* stable par composition *; alors, si les morphismes structuraux* $\mathrm{G}'' \to \mathrm{S}$ *et* $\mathrm{G}' \to \mathrm{S}$ *vérifient* $\mathscr{P}$, *il en est de même du morphisme structural* $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$.

(ix) *Supposons* G réduit *; alors* G'' *est* réduit.

(x) *Pour que* G'' *soit* séparé *sur* S, *il faut et il suffit que* u (*ou, ce qui revient au même,* ε'') *soit une* immersion fermée.

(xi) *Pour que* G' *soit* plat *sur* S, *il faut et il suffit que* p *soit un morphisme* plat (*ou, ce qui revient au même,* fidèlement plat).

Dans ce cas, pour que G'' *soit* plat *sur* S, *il faut et il suffit que* G *soit* plat *sur* S.

(xii) *Pour que* G' *soit* plat et localement de présentation finie *sur* S, *il faut et il suffit que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *soit* fidèlement plat et localement de présentation finie.

Dans ce cas, pour que G'' *soit* localement de présentation finie (*resp.* localement de type fini, de type fini, lisse, étale, non ramifié, localement quasi-fini, quasi-fini) *sur* S, *il suffit qu'il en soit de même de* G *sur* S, (*et la condition est également* nécessaire dans les deux premiers cas, *cf.* (viii)).

(xiii) *Supposons* G' plat et de présentation finie *sur* S.

a) *Alors* p *est* de présentation finie et fidèlement plat *;*

b) *de plus, pour que* G *soit* de présentation finie *sur* S, *il faut et il suffit qu'il en soit de même de* G''.

Rappelons que la relation d'équivalence considérée est effective universelle (IV **381**
4.4.9). Alors les assertions (i), (iii), (iv), (v) et la première assertion de (ii) résultent de IV 4.4.3, 5.2.2, 5.2.4, 3.4.5 et 3.3.2 (iii). La seconde assertion de (ii) résulte de la première, comme le montre le diagramme cartésien suivant, puisque $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}') \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est isomorphe à G' :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}' \arrow[r, "((\varepsilon\circ\pi'),\, \mathrm{id}_{\mathrm{G}'})"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u)"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{S} \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{G} \arrow[r, "p"] & \mathrm{G}''
\end{tikzcd} .$$

[57] N.D.E. : c.-à-d., le quotient est *universel*, cf. Exp. IV § 3.

Enfin, il est clair que ε'' est une S-section de G'', donc une immersion (EGA I, 5.3.13) ; d'après le diagramme cartésien précédent, il en est de même de u, ce qui achève de montrer (ii). De plus, (vi) est une conséquence immédiate du second diagramme cartésien de (ii).

Montrons (vii). D'après (i), p est couvrant pour la topologie (fpqc) ; donc, d'après (ii), pour montrer que p vérifie $\mathscr{P}$, il suffit de montrer que la première projection $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ vérifie $\mathscr{P}$, ce qui résulte de ce que $\mathscr{P}$ est stable par changement de base, puisque pr_1 provient de π' par changement de base.

Il est clair que (viii) résulte de (vii), car $\pi = \pi'' \circ p$, où $\pi'' : \mathrm{G}'' \to \mathrm{S}$ désigne le morphisme structural.

Montrons (ix). D'après (i), p est un épimorphisme ; puisque G est réduit, p se factorise à travers l'immersion $\mathrm{G}''_{\text{réd}} \to \mathrm{G}$, qui est donc aussi un épimorphisme, donc un isomorphisme (IV 4.4.4).

Montrons (x). Si G'' est séparé sur S, alors ε'' est une immersion fermée, d'après EGA I, 5.4.6. D'autre part, on a vu en (ii) que ε'' est une immersion fermée si et seulement si u en est une. Enfin, si u est une immersion fermée, il en est de même
382 de $\delta \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u) : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$; donc, d'après le lemme 9.2.1 ci-dessous, G'' est séparé sur S.

L'assertion (xi) résulte de (vii) et de EGA IV_2, 2.2.13.

L'assertion (xii) résulte de (vii), et de EGA IV_4, 17.7.5 et 17.7.7, et de ce que, p étant universellement ouvert, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, si l'espace sous-jacent à G_s est discret, il en est de même de l'espace sous-jacent à G''_s.

Enfin, l'assertion (xiii) résulte de (vii), (viii), et de EGA IV_4, 17.7.5.

Lemme 9.2.1. — *Soient* X *un* S-*préschéma et* R *une relation d'équivalence définie sur* X *par le monomorphisme* $v : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$. *Supposons* R effective. *Alors :*

(i) v *est une* immersion.

(ii) *Pour que* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ *soit* séparé *sur* S, *il faut et il suffit que* v *soit une* immersion fermée.

Rappelons (IV 3.3.2) que par définition le morphisme naturel $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ est un *isomorphisme*. On en déduit (EGA I, 5.3.5) le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{Y/S}}"] & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \end{tikzcd} .$$

Alors, puisque $\Delta_{\mathrm{Y/S}}$ est une immersion (EGA I, 5.3.9), il en est de même de v. De même, si Y est séparé sur S, $\Delta_{\mathrm{Y/S}}$ est une immersion fermée, donc il en est de même de v. Réciproquement, puisque p est couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 4.4.3), que la propriété pour un morphisme d'être une immersion fermée est de nature locale
383 pour la topologie (fpqc) (EGA IV_2, 2.7.1) et que $p \times_{\mathrm{S}} p$ est aussi couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 4.2.3), si v est une immersion fermée, il en est de même de $\Delta_{\mathrm{Y/S}}$, donc Y est séparé sur S.

Remarque 9.2.2. — Sous les hypothèses générales de 9.2, si on suppose G′ *plat* et *localement de présentation finie* sur S, alors p est couvrant pour la topologie (fppf) [58], d'après 9.2 (vii), donc les assertions (vii) et (viii) de 9.2 peuvent être étendues aux propriétés $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fppf).

Remarque 9.3. — a) La question de savoir si un quotient G/G′ est ou non représentable est souvent délicate ; dans ce séminaire nous démontrons la représentabilité de certains quotients particuliers.

En général, pour pouvoir affirmer que le quotient G/G′ est représentable, il ne suffit pas de supposer G et G′ de présentation finie sur S et G′ plat sur S. En effet, supposons de plus G lisse à fibres connexes. Dans ce cas, si G/G′ est un préschéma, il est *séparé*, d'après le corollaire 5.4, et donc $\mathrm{G}' \hookrightarrow \mathrm{G}$ est une immersion fermée, d'après 9.2 (x) ; par conséquent, si G′ n'est *pas fermé* dans G, alors G/G′ n'est *pas représentable*. Pour obtenir un tel contre-exemple, on peut prendre pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète, et poser $\mathrm{G} = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$. Considérons d'autre part un entier $n > 1$, *inversible* sur S ; alors $\boldsymbol{\mu}_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{G} \xrightarrow{n} \mathrm{G})$ est un sous-groupe fermé de G étale sur S (cf. $\mathrm{VII_A}$ [59]). Soit G′ le sous-groupe ouvert de $\boldsymbol{\mu}_n$ obtenu en ôtant de $\boldsymbol{\mu}_n$ la partie fermée de la fibre fermée de $\boldsymbol{\mu}_n$ complémentaire de l'origine. Alors G′ n'est pas fermé dans G, donc G/G′ n'est pas représentable. (On peut aussi fabriquer de tels exemples où G′ est lisse à fibres connexes.)

b) Il n'est pas exclu que G/G′ soit représentable en revanche, lorsque G et G′ sont *de présentation finie* sur S, et que G′ est *plat* sur S et *fermé* dans G [(∗)] [60]. Sous ces **384**
hypothèses, on sait que G/G′ est représentable dans les cas particuliers suivants :

1° – S est le spectre d'un anneau artinien ($\mathrm{VI_A}$, 3.2 et 3.3.2).
2° – G′ est propre sur S et G quasi-projectif sur S (V, 7.1).
3° – S est localement noethérien de dimension 1 (cf. [**An73**], Th. 4C)

10. Passage à la limite projective dans les préschémas en groupes et les préschémas à groupe d'opérateurs

10.0. Rappelons le résultat essentiel de EGA IV_3, § 8.8. Étant donnée la situation suivante : S_0 un préschéma *quasi-compact et quasi-séparé*, I un ensemble préordonné filtrant croissant, $(\mathscr{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un système inductif de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-algèbres commutatives quasi-cohérentes, $\mathscr{A} = \varinjlim \mathscr{A}_i$, $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_i$ pour $i \in \mathrm{I}$, et $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}\,\mathscr{A}$ [61], alors la catégorie des S-préschémas *de présentation finie* est déterminée à équivalence près par la donnée des catégories des S_i-préschémas de présentation finie, des foncteurs

[(∗)] C'est trop optimiste, comme le montre M. Raynaud dans sa thèse (*loc. cit.* X 14).

[58] N.D.E. : On a corrigé (fpqc) en (fppf).
[59] N.D.E. : voir $\mathrm{VII_A}$, 8.4 ou VIII, 2.1.
[60] N.D.E. : La remarque (∗) se réfère au contre-exemple X.14 dans [**Ray70a**]. La base y est régulière locale de dimension 2.
[61] N.D.E. : Noter que S, étant affine sur S_0, est donc quasi-compact et quasi-séparé, cf. la N.D.E. (63) plus loin.

entre ces catégories $\rho_{ji} : \mathrm{X}_i \mapsto \mathrm{X}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}_j$ pour $i \leqslant j$, et isomorphismes de transitivité $\rho_{kj} \circ \rho_{ji} \xrightarrow{\sim} \rho_{ki}$. Précisons. Étant donné $j \in \mathrm{I}$, et un S_j-préschéma de présentation finie X_j, nous poserons, pour tout $i \in \mathrm{I}$ tel que $i \geqslant j$, $\mathrm{X}_i = \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$, et $\mathrm{X} = \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$. Alors (EGA IV_3, 8.8.2) :

(i) Étant donné $j \in \mathrm{I}$, et deux S_j-préschémas de présentation finie X_j et Y_j, l'application canonique de $\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est bijective.

(ii) Pour tout S-préschéma de présentation finie X, il existe un indice $j \in \mathrm{I}$, un S_j-préschéma de présentation finie X_j et un S-isomorphisme $\mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$.

385 On en conclut (EGA IV_3, 8.8.3) que, chaque fois qu'on aura un diagramme D portant sur un nombre fini d'objets et de flèches de la catégorie des S-préschémas de présentation finie, on peut trouver un indice $i \in \mathrm{I}$ et un diagramme D_i dans la catégorie des S_i-préschémas de présentation finie, tels que le diagramme D provienne à isomorphisme près du diagramme D_i par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$. On peut même trouver i et D_i tels que tout carré cartésien de D provienne d'un carré cartésien de D_i.

10.1. De plus, un grand nombre de propriétés courantes pour un morphisme, stables par changement de base, possèdent la propriété suivante :

> soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un S-morphisme entre S-préschémas de présentation finie, d'après 10.0 (ii) et (i), u provient par changement de base d'un S_j-morphisme $u_j : \mathrm{X}_j \to \mathrm{Y}_j$ entre S_j-préschémas de présentation finie ; alors, pour que u ait la propriété $\mathscr{P}$, il faut et il suffit qu'il existe $i \geqslant j$ tel que $u_i = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ ait la propriété $\mathscr{P}$.

Il en est ainsi dans le cas où $\mathscr{P}$ est l'une des propriétés suivantes pour un morphisme : être séparé, surjectif, radiciel, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, propre, projectif, quasi-projectif, un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée (EGA IV_3, 8.10.5), plat (EGA IV_3, 11.2.6), lisse, non ramifié ou étale (EGA IV_4, 17.7.8). [62]

Remarquons qu'il en est encore ainsi dans le cas où $\mathscr{P}$ est la propriété d'être *couvrant pour la topologie* (fppf) ; en effet, étant donnés deux S-préschémas de présentation finie X et Y, et un S-morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, il résulte de IV, 6.3.1 (i) [63] que, pour que u soit couvrant pour la topologie (fppf), il faut et il suffit qu'il existe un S-préschéma Z et un S-morphisme $v : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ fidèlement plat et de présentation finie qui se factorise à travers u.

386 Le but de ce numéro est de donner des variantes de ce genre de résultats pour la catégorie des S-groupes de présentation finie, celle des S-préschémas à groupe d'opérateurs, et pour certaines propriétés pour des monomorphismes de groupes (être invariant, central à faisceau quotient représentable, etc.).

[62] N.D.E. : On a rajouté le mot « plat », et corrigé 17.7.6 en 17.7.8.

[63] N.D.E. : et du fait que Y, étant de présentation finie sur S, est quasi-compact

Les deux résultats préliminaires de ce type sont les suivants. (Dans les n$^{\text{os}}$ 10.2 à 10.9 ci-dessous, on conserve les notations introduites en 10.0.)

Lemme 10.2. — *Soient* G_j *et* H_j *deux* S_j*-groupes de présentation finie ; posons, pour tout* $i \geqslant j$, $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$, $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$, *et définissons de même* H_i *et* H. *Alors l'application canonique ci-dessous est bijective :*

$$\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_i\text{-gr.}}(\mathrm{G}_i, \mathrm{H}_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}).$$

Lemme 10.3. — *Soit* G *un* S*-groupe de présentation finie ; alors il existe* $j \in \mathrm{I}$, *un* S_j*-groupe de présentation finie* G_j, *et un isomorphisme de* S*-groupes* $\mathrm{G} \cong \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$.

Les assertions 10.2 et 10.3 sont des conséquences faciles de 10.0 et 10.1, compte tenu de l'interprétation [64] de la structure de S-groupe donnée en EGA 0_{III}, 8.2.5 et 8.2.6.

Lemme 10.4. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes entre* S*-groupes de présentation finie.* D'après 10.3 et 10.2, u provient par changement de base d'un morphisme $u_j : \mathrm{G}_j \to \mathrm{H}_j$ entre S_j-groupes de présentation finie. *Alors, pour que u soit un* monomorphisme central (*resp. un* monomorphisme invariant)*, il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $u_i = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ *ait la même propriété.*

C'est une conséquence immédiate de 10.0 et 10.1, compte-tenu de la caractérisation donnée en 6.7 des monomorphismes de groupes centraux ou invariants.

Corollaire 10.5. — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie. Pour que* $\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ *soit* 387
commutatif, *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$, *tel que* $\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ *le soit.*

En effet, il revient au même de dire qu'un S-groupe est commutatif, ou que, considéré comme sous-préschéma en groupes de lui-même, il est central.

Proposition 10.6. — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie,* G'_j *un sous-préschéma en groupes de* G_j plat *et de présentation finie sur* S_j. *Pour que* $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})/(\mathrm{G}'_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ *soit* représentable *pour la topologie* (fpqc)*, il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)/(\mathrm{G}'_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)$ *le soit.*

C'est une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 10.7. — *Soient* X_j *un* S_j*-préschéma de présentation finie, et* R_j *une relation d'équivalence sur* X_j plate et de présentation finie [65]. *Pour que le faisceau quotient* $(\mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})/(\mathrm{R}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ *pour la topologie* $\mathcal{T} =$ (fppf) *ou* fpqc) *soit* représentable, *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$, *tel que le faisceau quotient* $(\mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)/(\mathrm{R}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *le soit.*

Compte tenu des énoncés de EGA IV_2, 8.8.2, 8.8.3, 8.10.5 et 11.2.6 rappelés en 10.0, ce lemme est conséquence du résultat suivant :

[64] N.D.E. : (en termes de diagrammes commutatifs de S-morphismes)

[65] N.D.E. : c.-à-d., telle que le composé $\mathrm{R}_j \hookrightarrow \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{X}_j \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{X}_j$ soit plat et de présentation finie.

Lemme 10.8. — *Soit* $\mathcal{T}$ *la topologie* (fppf) *ou* (fpqc) *; soient* X *un* S-*préschéma* de
388 présentation finie (*resp.* localement de présentation finie), R *une relation d'équivalence sur* X *définie par un monomorphisme* $v : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ *tel que* $\mathrm{pr}_1 \circ v$ *soit* plat et de présentation finie (*resp.* plat et localement de présentation finie). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le faisceau quotient* X/R *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *est* représentable.

(ii) *Il existe un* S-*préschéma* de présentation finie (*resp.* localement de présentation finie) Y *et un morphisme* fidèlement plat $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *tel que le diagramme*

(D)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1 \circ v"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2 \circ v"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

soit cartésien.

Notons d'abord que d'après IV, 3.3.2 et 4.4.3, pour que le faisceau X/R pour la topologie $\mathcal{T}$ soit représentable par Y, il faut et il suffit que le diagramme (D) soit cartésien et que p soit couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

Montrons que (i) entraîne (ii). L'hypothèse (i) implique que le diagramme (D) est cartésien, donc que $\mathrm{pr}_1 \circ v$ se déduit de p par changement de base par p, et que p est couvrant pour la topologie (fpqc). Donc, par descente (fpqc) (EGA IV_2, 2.7.1), puisque $\mathrm{pr}_1 \circ v$ est fidèlement plat et (localement) de présentation finie, il en est de même de p. Alors, d'après EGA IV_4, 17.7.5, comme X est (localement) de présentation finie sur S, il en est de même de Y.

Montrons que (ii) entraîne (i). Il suffit de montrer que p est couvrant pour la topo-
389 logie (fppf) ; or p est fidèlement plat par hypothèse, et est localement de présentation finie car X et Y sont localement de présentation finie sur S (EGA IV_1, 1.4.3 (v)).

Lemme 10.9. — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie, et* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$. *Pour que* G^0 *soit* représentable, *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $(\mathrm{G}_i)^0 = (\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)^0$ *le soit.*

La condition est suffisante, puisque le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^0$ commute au changement de base, d'après 3.3.

Réciproquement, supposons G^0 représentable. Alors, d'après 3.9, G^0 est ouvert dans G et quasi-compact sur S, donc de présentation finie sur S, puisque G l'est. Alors, d'après 10.3 et 10.1, il existe $i \geqslant j$ et un sous-préschéma en groupes ouvert H_i de G_i tel que $\mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S} = \mathrm{G}^0$. Le morphisme structural $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{S}$ est connexe, i.e. à fibres géométriquement connexes (VI_{A} 2.1.1), donc, d'après EGA IV_3, 9.3.3 et 9.7.7, quitte à augmenter i, on peut supposer que le morphisme structural $\mathrm{H}_i \to \mathrm{S}$ est connexe. Alors, d'après 3.10.1, l'espace sous-jacent à H_i n'est autre que $\underline{(\mathrm{G}_i)^0}$, et donc H_i représente $(\mathrm{G}_i)^0$.

10.10. Rappelons deux cas particuliers très utiles de la situation énoncée en 10.0 (cf. EGA IV_3, 8.1.2 a) et c)) :

a) Étant donné un point x d'un préschéma X, on pose $\mathrm{S}_0 = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et on considère le système projectif filtrant décroissant $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ des voisinages ouverts affines de x ; alors $\mathrm{S} = \operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. En particulier, si x est le point générique d'un schéma intègre X, on trouve $\mathrm{S} = \operatorname{Spec}\kappa(x)$.

b) On pose $\mathrm{S}_0 = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, et on considère la famille $(\mathscr{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ préordonnée par inclusion des sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini de l'anneau d'un schéma affine S. Étant donné **390**
que les $\mathscr{A}_i$ sont des anneaux noethériens, cela permet dans de nombreux cas de passer du cas noethérien au cas général.

Nous allons donner deux résultats concernant le cas particulier envisagé en a).

Proposition 10.11. — [66] *Soient* S *un préschéma* intègre *de point générique* η, G (resp. X, Y, Z) *un* S-*groupe* (resp. *des* S-*préschémas*) *de présentation finie,* u, v : $\mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *et* $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$, $j : \mathrm{Z} \to \mathrm{G}$ *des morphismes de* S-*préschémas. On suppose que* $i_\eta : \mathrm{Y}_\eta \to \mathrm{G}_\eta$ *et* $j_\eta : \mathrm{Z}_\eta \to \mathrm{G}_\eta$ *sont des* immersions fermées. *Alors, il existe un ouvert non vide* S' *de* S *tel que si on note* $\mathrm{G}', \mathrm{X}', u', v'$, etc. *la restriction des objets précédents au-dessus de* S', *les foncteurs :*

$$\underline{\mathrm{Transp}}(u', v') \quad , \quad \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}'}(u'(\mathrm{X}'), i'(\mathrm{Y}')) \quad , \quad \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}'}(j'(\mathrm{Z}'), i'(\mathrm{Y}'))$$

resp.

$$\underline{\mathrm{Centr}}(u') = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}'}\, u'(\mathrm{X}') \qquad , \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}'}\, i'(\mathrm{Y}')$$

soient représentables *par des sous*-S'-*préschémas* (*resp. sous*-S'-groupes) fermés *de* G', de présentation finie *sur* S'.

On est dans la situation de 10.10 a), et l'on va appliquer dans ce cas les résultats de 10.1. Puisque $\mathrm{G}_\eta, \mathrm{X}_\eta, \mathrm{H}_\eta, \mathrm{K}_\eta$ sont *plats* sur le corps $\kappa(\eta)$, que G_η est *séparé* sur $\kappa(\eta)$ (VI_A 0.2), et que i_η, j_η sont des *immersions fermées*, alors, d'après 10.1, il existe un ouvert affine S' de S tel que G' soit un S'-groupe de présentation finie, *plat et séparé* sur S', que $\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}'$ soit *plats* et de présentation finie sur S', et que i', j' soient des *immersions fermées*. D'après EGA IV_3, 11.3.15, quitte à remplacer S' par un ouvert affine de S', on peut supposer que $\mathrm{G}', \mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}'$ sont essentiellement libres sur S' (au sens de 6.2.1). [67] Il résulte alors de 6.2.4 b) et e) que, sous les hypothèses de l'énoncé, les foncteurs considérés sont représentables par des sous-S'-préschémas fermés, donc de présentation finie sur S', de G' ; et ce sont des sous-S'-groupes de G' dans le cas de $\underline{\mathrm{Centr}}(u')$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\, i'(\mathrm{Y}')$.

---

[66] N.D.E. : On a simplifié l'énoncé, et traité à part, dans le corollaire 10.11.1, le cas des sous-groupes.
[67] N.D.E. : Plus précisément, comme $\mathrm{G}' \to \mathrm{S}'$ est plat et de présentation finie, il existe des ouverts affines $\mathrm{S}'_1, \dots, \mathrm{S}'_n$ recouvrant S' et, pour chaque i, un recouvrement fini de $\mathrm{G}'_i = \mathrm{G}'|_{\mathrm{S}'_i}$ par des ouverts affines G'_{ij}, tels que $\mathscr{O}(\mathrm{G}'_{ij})$ soit une $\mathscr{O}(\mathrm{S}'_i)$-algèbre plate et de présentation finie ; alors, d'après EGA IV_3, 11.3.15, il existe $f_{ij} \in \mathscr{O}(\mathrm{S}')$ tel que $\mathscr{O}(\mathrm{G}'_{ij})_{f_{ij}}$ soit un module libre sur $\mathscr{O}(\mathrm{S}'_i)_{f_{ij}}$. On peut alors remplacer S' par l'ouvert affine $\mathrm{D}(f)$, où f est le produit des f_{ij}.

Corollaire 10.11.1. — *Soient* S *un préschéma* intègre *de point générique* η*,* $\mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{K}$ *des* S*-groupes* de présentation finie*,* $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *et* $j : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ *deux* monomorphismes quasi-compacts *de* S*-groupes. Alors, il existe un ouvert non vide* S′ *de* S *tel que, notant* $\mathrm{G}', i', j', \ldots,$ *la restriction au-dessus de* S′ *de* $\mathrm{G}, i, j, \ldots, i', j'$ *sont des* immersions fermées*, et les foncteurs :*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{H}', \mathrm{K}') \quad , \quad \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{H}', \mathrm{K}') \quad \text{resp.} \quad \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{H}' \quad , \quad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{H}'$$

sont représentables *par des sous-*S′*-préschémas* (*resp. sous-*S′-groupes) fermés *de* G′*,*
391 de présentation finie *sur* S′*.*

Ceci découle de la proposition précédente car, d'après 1.4.2, les hypothèses entraînent que i_η et j_η sont des immersions fermées.

Proposition 10.12. — *Soient* S *un préschéma* intègre*,* G *un* S*-groupe de présentation finie,* A *et* B *deux sous-préschémas en groupes de présentation finie de* G*, à* fibre générique lisse*. Supposons de plus vérifiée l'une des conditions suivantes :*

a) A *est à* fibre générique connexe*,*

b) A *et* B *sont* invariants *dans* G*.*

Alors, il existe un ouvert non vide S′ *de* S *et un sous-préschéma en groupes* fermé D′ *de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}|_{\mathrm{S}'}$*, de présentation finie sur* S′*,* à fibres lisses*, qui représente le faisceau* (fppf) *associé au* préfaisceau en groupes des commutateurs *de* A *et* B *dans* G*, et* D′ *est* à fibres connexes *dans le cas* a)*, et* invariant *dans* G′ *dans le cas* b)*.*

En particulier, pour tout $s \in \mathrm{S}'$*, on a* $\mathrm{D}'_s = (\mathrm{A}_s, \mathrm{B}_s)$ *avec les notations de* 7.2.2*.*

392 Soit η le point générique de S ; posons $\mathrm{H}_\eta = (\mathrm{A}_\eta, \mathrm{B}_\eta)$. Comme A_η et B_η sont lisses, alors, d'après 7.8 dans le cas a), et 7.3 v) dans le cas b), H_η est connexe (resp. invariant dans G_η).

On est dans la situation de 10.0 correspondant à 10.10 a) ; donc, d'après 10.3 et 10.1, il existe un ouvert non vide S′ de S et un sous-S′-préschéma en groupes D′ de présentation finie et fermé dans G′, tel que $\mathrm{D}'_\eta = \mathrm{D}' \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(\eta)$ égale H_η. De plus, d'après EGA IV_3, 9.7.7 et 9.3.3, on peut supposer que D′ est à fibres géométriquement réduites. Dans le cas a), on peut supposer, d'après EGA IV_3, 9.7.7 et 9.3.3, à nouveau, que D′ est à fibres connexes, donc géométriquement connexes (VI_{A}, 2.1.1). Dans le cas b), on peut supposer, d'après 10.4, que D′ est invariant dans G′.

De plus, nous avons vu, au cours de la démonstration de 7.8, qu'il existe un entier n tel que $\nu_\eta^n((\mathrm{A}_\eta \times_{\kappa(\eta)} \mathrm{B}_\eta)^n) = \mathrm{D}'_\eta$, où ν_η et ν_η^n sont définis comme en 7.2.2 a) et 7.1 (ii). Nous pouvons définir par les mêmes formules les morphismes

$$\nu' : \mathrm{A}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{B}' \longrightarrow \mathrm{G}' \qquad \text{et} \qquad \nu'^n : (\mathrm{A}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{B}')^n \longrightarrow \mathrm{G}';$$

on a bien $\nu'^n \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(\eta) = \nu_\eta^n$.

Par conséquent, d'après 10.1, on peut choisir S′ tel que le morphisme ν'^n soit *plat* et se factorise à travers D′, et que le morphisme $f : (\mathrm{A}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{B}')^n \to \mathrm{D}'$ ainsi obtenu soit *surjectif.* Alors, d'après 7.5, le morphisme

$$\mu \circ (f \times_{\mathrm{S}'} f) : (\mathrm{A}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{B}')^{n+1} \longrightarrow \mathrm{D}',$$

qui est déduit de ν'^{n+1}, est couvrant pour la topologie (fppf). Donc D' représente le faisceau (fppf) associé au préfaisceau des commutateurs de A et B dans G.

ZZ Par changement de base, D'_s représente le faisceau (fppf) associé au préfaisceau des commutateurs de A_s et B_s dans G_s.

MAIS comme A_s et B_s sont lisses ($\Leftrightarrow$ géom réduits) on a défini en 7.2.2 un k-groupe $(\mathrm{A}_s, \mathrm{B}_s)$ et il coïncide avec D_s. OUF....

De plus, pour tout $s \in \mathrm{S}'$, le morphisme $(\mathrm{A}_s \times_{\kappa(s)} \mathrm{B}_s)^n \to \mathrm{D}'_s$ déduit de ν_s^n est surjectif ; donc d'après 7.6, le $\kappa(s)$-groupe $(\mathrm{A}_s, \mathrm{B}_s)$ représente le faisceau (fppf) des commutateurs de A_s et B_s dans G_s, d'où $\mathrm{D}'_s = (\mathrm{A}_s, \mathrm{B}_s)$.

Corollaire 10.13. — *Soit* S *un préschéma* intègre *de point générique η, et soient* G *un* S-*groupe* de présentation finie, D *un sous-*S-*préschéma en groupes* de présentation finie *de* G à fibres lisses *et* invariant *dans* G. *Supposons qu'on ait* $(\mathrm{D}_\eta, \mathrm{D}_\eta) = \mathrm{D}_\eta$ (*resp.* $(\mathrm{G}_\eta, \mathrm{D}_\eta) = \mathrm{D}_\eta$). *Il existe alors un ouvert non vide* S' *de* S *tel que pour tout* **393**
$s \in \mathrm{S}'$, *on ait* $(\mathrm{D}_s, \mathrm{D}_s) = \mathrm{D}_s$ (*resp.* $(\mathrm{G}_s, \mathrm{D}_s) = \mathrm{D}_s$).

Cela résulte immédiatement de 10.12 et de EGA IV_3, 8.8.2.5. A DETAILLER : l'égalite $\mathrm{D} = (\mathrm{D}, \mathrm{D})$ ou $= (\mathrm{G}, \mathrm{D})$ a lieu sur un voisinage de η...

10.14. Les énoncés 10.2 et 10.3 concernant la catégorie des S-groupes de présentation finie s'étendent à la catégorie des couples formés d'un S-groupe de présentation finie et d'un S-préschéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G. De façon précise, dans la situation rappelée au début de 10.0 :

(i) soient $j \in \mathrm{I}$ et G_j et G'_j deux S_j-groupes de présentation finie, H_j (resp. H'_j) un S_j-préschéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G_j (resp. G'_j). Posons, pour $i \in \mathrm{I}$, $i \geqslant j$, $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ et $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$, et définissons de même G'_i, G', H_i, H, H'_i et H'. Notons $\mathrm{Dihom}_{\text{S-gr.}}((\mathrm{G}, \mathrm{H}), (\mathrm{G}', \mathrm{H}'))$ l'ensemble des di-morphismes de S-groupes et de S-préschémas à groupe d'opérateurs du couple (G, H) dans le couple $(\mathrm{G}', \mathrm{H}')$. Alors l'application canonique

$$\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Dihom}_{\mathrm{S}_i\text{-gr.}}((\mathrm{G}_i, \mathrm{H}_i), (\mathrm{G}'_i, \mathrm{H}'_i)) \longrightarrow \mathrm{Dihom}_{\text{S-gr.}}((\mathrm{G}, \mathrm{H}), (\mathrm{G}', \mathrm{H}'))$$

est bijective.

(ii) soient G un S-groupe de présentation finie et H un S-préschéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G ; il existe alors un indice $j \in \mathrm{J}$, un S_j-groupe de présentation finie G_j, un S_j-préschéma de présentation finie H_j à groupe d'opérateurs G_j et un di-isomorphisme de S-groupes et de S-préschémas à groupes d'opérateurs de $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}, \mathrm{H}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ sur (G, H).

Définition 10.15. — Étant donné un S-foncteur en groupes G et un S-foncteur H à groupes d'opérateurs G, on dit que H est un S-*foncteur en espaces homogènes sous* G *pour la topologie* $\mathcal{T}$, si le morphisme canonique $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ (*défini par* $(g, h) \mapsto$ $(g \cdot h, h)$ pour $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$, $h \in \mathrm{H}(\mathrm{T})$) est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie **394**
$\mathcal{T}$.

Si G est un S-groupe et si H est un S-préschéma à groupe d'opérateurs G, dire que H est un S-préschéma en espaces homogènes sous G pour la topologie $\mathcal{T}$ revient donc à dire que le morphisme canonique $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ défini comme précédemment est couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$ (IV 4.4.3).

De même, dire qu'un S-préschéma H à groupe d'opérateurs un S-groupe G est un fibré principal homogène sous G pour la topologie $\mathcal{T}$ (IV 5.1.5) revient à dire (IV 5.1.6 (ii)) que le morphisme canonique $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est un isomorphisme et que le morphisme structural $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ est couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

Proposition 10.16. — Dans la situation rappelée au début de 10.0, *soient* $j \in \mathrm{I}$, G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie,* H_j *un* S_j*-préschéma de présentation finie à groupe d'opérateurs* G_j. *Pour que* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ *soit un* S*-préschéma en espaces homogènes sous* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ (*resp. un fibré principal homogène sous* G) *pour la* topologie fidèlement plate localement de présentation finie*, il faut et il suffit qu'il existe un indice* $i \in \mathrm{I}$, $i \geqslant j$, *tel que* $\mathrm{H}_i = \mathrm{H}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ *soit un* S_i*-préschéma en espaces homogènes sous* $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ (*resp. un fibré principal homogène sous* G_i).

Compte tenu de 10.14 et de EGA IV_3, 8.8.2, 8.8.3 et 8.10.5, l'énoncé résulte de la propriété concernant les morphismes couvrants pour la topologie (fppf) rappelée en 10.1. (68)

11. Préschémas en groupes affines

395 **11.0. Notations.** — Soient S un préschéma, X un S-préschéma, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural ; on pose $\mathscr{A}(\mathrm{X}) = f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$.

Lemme 11.1. — *Soient* X *et* Y *deux* S*-préschémas* quasi-compacts et quasi-séparés *sur* S, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *les morphismes structuraux. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\varphi : \mathscr{A}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y})$$

est un isomorphisme *dans chacun des cas suivants :*

a) f *et* g *sont* affines*,*

b) g (*ou* f) *est* plat et affine*,*

c) g *est* plat *et* $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat.

On supposera, dans le cas b), que c'est g qui est plat et affine. Posons alors $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X})$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $g' = g \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et notons v le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, "g"] \\ \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X}) = \mathrm{S}' \arrow[r, "v"] & \mathrm{S} \end{tikzcd} .$$

Dans les cas a) et b), g est affine et donc, d'après EGA II, 1.5.2, on a :

$$(1) \qquad g'_*(\mathscr{O}'_{\mathrm{Y}}) = v^* g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) = \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'} \quad .$$

(68) N.D.E. : Pour les propriétés de passage à la limite pour les torseurs en termes de cohomologie de Čech, voir aussi SGA 4, VII.5.7 et ses corollaires. Ceci a été détaillé dans l'article [**Ma07**].

On a la même égalité dans le cas c), d'après EGA III, 1.4.15 et EGA IV_1, 1.7.21, puisque S' est plat sur S et Y est quasi-compact et quasi-séparé sur S.

D'autre part (EGA II 1.2.7), f se factorise à travers v au moyen d'un morphisme $p : \mathrm{X} \to \mathrm{S}'$, et l'on a $p_*(\mathscr{O}_\mathrm{X}) = \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ et $\mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{Y} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{Y}'$. Puisque f est quasi-séparé, p l'est aussi (EGA IV_1, 1.2.2), et puisque f est quasi-compact et v et quasi-séparé, p est aussi quasi-compact (EGA IV_1, 1.2.4). Considérons alors le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{Y} \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & \mathrm{Y}' \arrow[d, "g'"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"] & \mathrm{S}' \end{tikzcd} .$$

Dans les cas b) et c), Y est plat sur S, donc Y' est plat sur S' ; appliquant de nouveau EGA III, 1.4.15 et EGA IV_1, 1.7.21, on obtient :

$$p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{Y}}) = g'^* p_*(\mathscr{O}_\mathrm{X}) = g'^*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \quad , \tag{2}$$

et l'on a la même égalité dans le cas a), car dans ce cas p et p' sont des isomorphismes. 396

Enfin, v étant affine, on a, d'après EGA II, 1.4.7, $v_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{A}(\mathrm{X})$ pour tout $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$. Combiné avec (2) et (1), ceci donne :

$$\mathscr{A}(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}) = v_* g'_* p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{Y}}) = v_* g'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}) = v_*(\mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{A}(\mathrm{X}).$$

Corollaire 11.2. — *Le foncteur* $\mathrm{X} \mapsto \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X})$*, de la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}$ *formée des* S*-préschémas* X plats quasi-compacts et quasi-séparés *sur* S*, et tels que* $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ *soit un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module* plat*, dans celle des* S*-préschémas* plats et affines *sur* S*,* commute aux produits finis*, donc transforme* S-groupes *en* S-groupes*.*

Définition 11.3. — Étant donné un S-groupe G plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S, tel que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit plat sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}$, nous noterons G_{af}, et nous appellerons *enveloppe affine* de G, le S-groupe $\mathrm{G}_{\mathrm{af}} = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{G})$.

Proposition 11.3.1. — [69] *Le morphisme canonique* $\tau_\mathrm{G} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ *est un morphisme de* S*-groupes. De plus,* G_{af} *vérifie la propriété universelle suivante : tout morphisme de* S*-groupes* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$*, où* H *est* affine *sur* S*, se factorise de façon unique à travers* G_{af}*.*

11.4. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules quasi-cohérents, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_\mathrm{S}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ (cf. I.7) le S-foncteur des morphismes de S-foncteurs de $\mathbb{V}(\mathscr{F})$ dans $\mathbb{V}(\mathscr{E})$, et l'on note $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ [70] le sous-S-foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}_\mathrm{S}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ formé des $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-homomorphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-foncteurs en modules (cf. I, §§ 3.1 et 4.6).

[69] N.D.E. : On a ajouté cette proposition ; voir aussi le paragraphe additionnel 11.18 plus loin pour une étude / les propriétés du morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ et de son noyau.

[70] N.D.E. : ici, le S-préschéma $\mathbb{V}(\mathscr{F})$ est identifié au foncteur en $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ qu'il représente, cf. I, § 4.6

Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un S-préschéma. D'une part, d'après I, 3.1 et 4.6.2, et la formule d'adjonction, on a :

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}),\mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{X}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F})_{\mathrm{X}},\mathbb{V}(\mathscr{E})_{\mathrm{X}})\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{X}},\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \quad {}^{(71)}\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, f_*f^*(\mathscr{F})).
\end{aligned}
$$

D'autre part, soit $\mathcal{S}(\mathscr{F})$ l'algèbre symétrique du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}$. D'après EGA II, 1.5.1, $\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathbb{V}(\mathscr{F})$ est affine sur X et correspond à la $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbre $f^*\mathcal{S}(\mathscr{F}) = \mathcal{S}(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Donc, d'après la définition du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}$ (cf. I.7) et EGA II, 1.7.13, on a :

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}),\mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{X}) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathbb{V}(\mathscr{F}),\mathbb{V}(\mathscr{E}))\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, f_*(f^*\mathcal{S}(\mathscr{F}))),
\end{aligned}
$$

et l'inclusion $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}),\mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{X}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}),\mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{X})$ correspond à l'inclusion $f_*f^*(\mathscr{F}) \hookrightarrow f_*f^*(\mathcal{S}(\mathscr{F}))$.

Comme, pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{M}$, on a un morphisme canonique de $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$-
397 modules $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{M} \to f_*f^*(\mathscr{M})$, on obtient donc un diagramme commutatif

$$
(3)\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{F}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathcal{S}(\mathscr{F})) \arrow[d, hook] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}),\mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{X}) \arrow[r, hook] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}),\mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{X})
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Proposition 11.5. — *Soient* X *un* S-*préschéma* quasi-compact et quasi-séparé *sur* S, $f : \mathrm{X}\to\mathrm{S}$ *le morphisme structural,* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents. On suppose vérifiée l'une des deux conditions suivantes :*

a) f *est* affine

b) $\mathscr{F}$ *est* plat *sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$.

(i) *Alors, les morphismes canoniques, donnés par les flèches verticales dans le diagramme commutatif ci-dessous, sont des isomorphismes :*

$$
\begin{tikzcd}
f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{F} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathcal{S}(\mathscr{F}) \arrow[d, "\cong"] \\
f_*f^*(\mathscr{F}) \arrow[r, hook] & f_*f^*(\mathcal{S}(\mathscr{F}))
\end{tikzcd}
\quad .
$$

(71) N.D.E. : Rappelons ici l'égalité $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}),\mathbb{V}(\mathscr{E})) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}),\mathbf{W}(\mathscr{F}))$ (cf. I, 4.6.3) , qui sera utilisée dans 11.6.

(ii) *Par conséquent, posant $\mathscr{A}(\mathrm{X}) = f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$, on a des isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, \mathscr{A}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{F}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, \mathscr{A}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{S}(\mathscr{F})) \arrow[d, "\cong"] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{X}) \arrow[r, hook] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{X})
\end{tikzcd} .$$

[72] D'abord, (ii) découle de (i), d'après 11.4 (1) et (2). Dans le cas a), (i) résulte de 11.1 a). Enfin, pour montrer (i) dans le cas b), il suffit de montrer, d'après 11.1 b), que si $\mathscr{F}$ est plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, alors $\mathbb{V}(\mathscr{F})$ est plat sur S. D'après EGA III, 1.4.15.5, il suffit de voir que si $\mathscr{F}$ est plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, il en est de même de $\mathcal{S}(\mathscr{F})$, ce qui est un corollaire d'un résultat dû à Daniel Lazard, suivant lequel tout module plat sur un anneau est une limite inductive filtrante de modules libres de type fini [73]. **398**

11.6. [74] Soient G un S-groupe, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent, et

$$\rho : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$$

un morphisme de S-foncteurs. D'après I.4.6.3 et 11.4 (2), on a

$$\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}))(\mathrm{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathbb{V}(\mathscr{E}), \mathbb{V}(\mathscr{E})).$$

Donc ρ correspond, de façon biunivoque, à un morphisme de S-préschémas

$$\theta : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathbb{V}(\mathscr{E}).$$

Alors (cf. I, 4.7.1), ρ définit une *opération* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-linéaire* de G sur $\mathscr{E}$ (i.e. ρ est un morphisme de S-foncteurs en groupes $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E})))$, si et seulement si θ vérifie les deux conditions suivantes :

1) Si $m : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ désigne la multiplication, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \theta"] \arrow[d, "m \times \mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathscr{E})}"'] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[d, "\theta"] \\
\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{V}(\mathscr{E})
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

2) Si $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ est la section unité de G, le diagramme **399**

[72] N.D.E. : On a simplifié la démonstration, en tirant profit des ajouts faits dans 11.4.

[73] N.D.E. : Voir [**La69**], ou bien : N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. 10, § 1.6, Th. 1.

[74] N.D.E. : On a détaillé 11.6, et mis en évidence les résultats obtenus sous la forme de la Proposition 11.6.1.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[rr, "\varepsilon\times\mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathscr{E})}"] & & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[dl, "\theta"] \\
& \mathbb{V}(\mathscr{E}) \arrow[ul, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Si θ provient, via 11.4 (3), d'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mu_{\mathscr{E}} : \mathscr{E} \to \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{E}$, ces conditions seront vérifiées si $\mu = \mu_{\mathscr{E}}$ vérifie les deux axiomes suivants :

(CM 1) Si $\Delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})$ est l'homomorphisme $\mathscr{A}(\theta)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{E} & \mathscr{A} \otimes \mathscr{E} \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathscr{A}} \otimes \mu"'] \\
\mathscr{A} \otimes \mathscr{E} \arrow[u, "\Delta\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{E}}"] & \mathscr{E} \arrow[l, "\mu"'] \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(CM 2) Si $\eta : \mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est l'homomorphisme $\mathscr{A}(\varepsilon)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes \mathscr{E} & & \mathscr{A} \otimes \mathscr{E} \arrow[ll, "\eta\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{E}}"'] \\
& \mathscr{E} \arrow[ul, "\cong"] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ceci revient à dire que μ munit $\mathscr{E}$ d'une structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-*comodule.*

Supposons maintenant que G soit *plat, quasi-compact* et *quasi-séparé* sur S, et que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *plat.* Notons qu'alors, d'après 11.1 c), le morphisme canonique $\mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})$ est un isomorphisme.

D'après 11.5 a) (voir aussi I, 4.7.2), toute opération $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-linéaire de G_{af} sur $\mathscr{E}$ provient d'une unique structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule sur $\mathscr{E}$.

Si de plus $\mathscr{E}$ est *plat*, alors, d'après 11.5 b), toute opération $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-linéaire de G sur $\mathscr{E}$ provient d'une unique structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule sur $\mathscr{E}$.

400 En résumé, on a obtenu :

Proposition 11.6.1. — *Soit* G *un* S-*groupe* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S, *tel que* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*module* plat, *et soit* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*module quasi-cohérent.*

(i) *Il revient au même de se donner une structure de* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-*comodule* $\mu : \mathscr{E} \to \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{E}$ *ou une opération* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*linéaire* $\rho : \mathrm{G}_{\mathrm{af}} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E})$ *de* G_{af} *sur* $\mathscr{E}$. *Par composition avec le morphisme de* S-*groupes* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$, *ceci définit une opération* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*linéaire de* G *sur* $\mathscr{E}$.

(ii) *Si de plus* $\mathscr{E}$ *est* plat, *toute opération* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-linéaire de* G *sur* $\mathscr{E}$ *se factorise à travers* G_{af} *et correspond à une unique structure de* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*-comodule sur* $\mathscr{E}$.

Lemme 11.7. — *Soient* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent,* G *un* S*-groupe* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S, *tel que* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat. *Soient* $\mu : \mathscr{E} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}$ *une structure de* $\mathscr{A}$*-comodule, et* $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$ *l'opération de* G *sur* $\mathscr{E}$ *associée.*

Soit $\mathscr{E}_0$ *un sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent de* $\mathscr{E}$ *tel que la restriction* μ_0 *de* μ *à* $\mathscr{E}_0$ *se factorise à travers* $\mathscr{E}_0 \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}_0$, i.e. *tel qu'on ait un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mu_0"'] & \mathscr{E} \arrow[d, "\mu"] \\ \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}_0 \arrow[r, hook] & \mathscr{A} \otimes \mathscr{E} \end{tikzcd} \quad . \text{ [77]}$$

Alors μ_0 *fait de* $\mathscr{E}_0$ *un* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*-comodule, donc définit une opération* ρ_0 *de* G *sur* $\mathscr{E}_0$ (qu'on appellera *opération induite* sur $\mathscr{E}_0$ par ρ, et on dira que $\mathscr{E}_0$ est *stable* sous ρ).

Cela résulte immédiatement des définitions et de 11.6. On remarquera cependant qu'en général l'application canonique $\mathbf{W}(\mathscr{E}_0) \to \mathbf{W}(\mathscr{E})$ n'est pas un monomorphisme.

Définition 11.8.0. — [78] Soit S un préschéma. Une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-cogèbre* est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{C}$ muni de deux morphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C} \otimes \mathscr{C}$ et $\eta : \mathscr{C} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, vérifiant les deux axiomes suivants (cf. I.4.2) :

(CO 1) Δ *est co-associatif* : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \\ & \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \arrow[ur, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

(CO 2) : η est une *coünité* : les deux composés suivants sont l'identité

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\ \Delta\ } \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \eta} \mathscr{C} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{C} \quad ,$$

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\ \Delta\ } \mathscr{C} \otimes \mathscr{C} \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes \mathscr{C} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{C} \quad .$$

Un $\mathscr{C}$*-comodule* est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{E}$ muni d'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mu : \mathscr{E} \to \mathscr{C} \otimes \mathscr{E}$ vérifiant les axiomes (CM 1) et (CM 2) de 11.6.

On dira que $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{E}$) est une cogèbre quasi-cohérente (resp. un comodule quasi-cohérent) si c'est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent.

---

[77] N.D.E. : L'homomorphisme $\mathscr{A} \otimes \mathscr{E}_0 \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{E}$ est injectif, grâce au fait que $\mathscr{A}$ est plat.

[78] N.D.E. : Les énoncés 11.8 et 11.9 portant uniquement sur la notion de comodule sur une cogèbre, on a introduit la définition 11.8.0 et reformulé 11.8 et 11.9 en conséquence.

Soient A un anneau commutatif et C une A-cogèbre, alors $\mathrm{C}^\vee = \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{C}, \mathrm{A})$ est une A-algèbre. On notera ev l'application naturelle d'évaluation $\mathrm{C}^\vee \otimes_\mathrm{A} \mathrm{C} \to \mathrm{A}$.

Lemme 11.8. — [79] *Soient* C *une* A*-cogèbre,* V *un* C*-comodule,* M *un sous-*A*-module de* V*. On suppose que* C *est un* A*-module* projectif. *Soit* $c(\mathrm{M})$ *l'image du morphisme de* A*-modules* θ *:*

$$\mathrm{C}^\vee \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mu} \mathrm{C}^\vee \otimes_\mathrm{A} \mathrm{C} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{V} \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} \mathrm{V}.$$

Alors, $c(\mathrm{M})$ *est le* plus petit sous-comodule de V contenant M*, et est un* A*-module* de type fini *si* M *l'est. De plus, pour tout morphisme d'anneaux* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$*, si on note* M' *l'image de* $\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A}'$ *dans* $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A}'$*, alors* $c(\mathrm{M}')$ *est l'image de* $c(\mathrm{M}) \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A}'$ *dans* V' *; donc : «* la formation de $c(\mathrm{M})$ commute au changement de base *».*

D'abord, $\mathrm{M} \subseteq c(\mathrm{M})$ d'après (CO 2), et si N est un sous-comodule de V contenant M, on a $\mu(\mathrm{M}) \subseteq \mathrm{C} \otimes \mathrm{N}$ et donc $c(\mathrm{M}) \subseteq \mathrm{N}$.

Par hypothèse, C est facteur direct d'un A-module libre L, de base $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Notons f_i la restriction à C de la forme linéaire e_i^*, définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Soit $x \in \mathrm{M}$. On peut écrire de façon unique :

$$\mu(x) = \sum_{i\in\mathrm{J}} e_i \otimes x_i,$$

où $x_i \in \mathrm{V}$ et J est un sous-ensemble fini de I. Alors $x_i = \theta(f_i \otimes x)$ appartient à $c(\mathrm{A}x)$, et l'on a donc $c(\mathrm{A}x) = \sum_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{A}x_i$. Comme C est facteur direct de L, disons $\mathrm{L} = \mathrm{C}\oplus\mathrm{R}$, d'où $\mathrm{L}\otimes\mathrm{V} = (\mathrm{C}\otimes\mathrm{V}) \oplus (\mathrm{R}\otimes\mathrm{V})$, on obtient que

$$(\mathrm{L} \otimes c(\mathrm{A}x)) \bigcap (\mathrm{C}\otimes\mathrm{V}) = \mathrm{C} \otimes c(\mathrm{A}x).$$

Par conséquent, $\mu(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\mu(x) = \sum_{j\in\mathrm{J}} b_j \otimes x_j,$$

avec $b_j \in \mathrm{C}$. On peut écrire $\Delta(b_j) = \sum_{i\in\mathrm{I}} e_i \otimes b_{ij}$, avec $b_{ij} \in \mathrm{C}$. Alors, d'après l'axiome (CM 1), on a, pour tout $i \in \mathrm{J}$:

$$\mu(x_i) = \sum_{j\in\mathrm{J}} b_{ij} \otimes x_j \in \mathrm{C} \otimes c(\mathrm{A}x).$$

Ceci montre que $c(\mathrm{M})$ est un sous-comodule de V, et c'est donc le plus petit sous-comodule de V contenant M.

Il est clair que $c(\mathrm{M})$ est un A-module de type fini si M l'est : si $\mathrm{M} = \mathrm{A}x_1 + \cdots + \mathrm{A}x_n$, et $\mu(x_k) = \sum_i e_i \otimes x_{ik}$, alors $c(\mathrm{M})$ est engendré par les x_{ik}, pour $k = 1, \ldots, n$ et i parcourant un sous-ensemble fini de I.

[79] N.D.E. : Dans l'original, 11.8 est énoncé sous l'hypothèse que C soit un A-module *libre*, et la généralisation au cas où C est un A-module projectif, signalée par J.-P. Serre, est mentionnée dans la remarque 11.10.1. On a inclus cette généralisation dans les énoncés 11.8 et 11.9.

Enfin, soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux et soit M' l'image de $M \otimes A'$ dans $V' = V \otimes A'$. Alors $c(M')$ (resp. l'image de $c(M) \otimes A'$ dans V') est l'image du morphisme θ' ci-dessous (resp. du composé $\theta' \circ \tau$) :

$$C^\vee \otimes M \otimes A' \xrightarrow{\tau} \mathrm{Hom}_A(C, A') \otimes M \xrightarrow{\theta'} V'.$$

Or, ces deux morphismes ont même image. En effet, soient $\psi \in \mathrm{Hom}_A(C, A')$ et $x \in M$. Posons $\mu(x) = \sum_{i \in J} e_i \otimes x_i$. Alors

$$\theta'(\psi \otimes x) = \sum_{i \in J} \psi(e_i) x_i$$

est l'image par $\theta' \circ \tau$ de l'élément $\sum_{i \in J} f_i \otimes x \otimes \psi(e_i)$ de $C^\vee \otimes M \otimes A'$. Ceci prouve le lemme 11.8 C.Q.F.D.

Proposition 11.8.1. — [80] *Soient* C *une* A*-cogèbre,* V *un* C*-comodule,* M *un sous-*A*-module* M *de* V*, et* $f : A \to A'$ *un morphisme d'anneaux* fidèlement plat. *On suppose que* $C' = C \otimes A'$ *est un* A'*-module* projectif.

(i) *Il existe un* plus petit sous-comodule $t(M)$ *de* V contenant M*, et* $t(M)$ *est un* A*-module* de type fini *si* M *l'est. De plus,* « la formation de $t(M)$ commute au changement de base ».

(ii) *Plus précisément,* C *est un* A*-module projectif, et l'on a* $t(M) = c(M)$.

Démonstration. (ii) D'après un théorème de M. Raynaud et L. Gruson, ([**RG71**], Th. 3.1.3 et Exemple 3.1.4.1), f « descend la projectivité » : C est un A-module projectif. On peut donc appliquer le lemme 11.8 : $c(M)$ est le plus petit sous-comodule de V contenant M, c'est un A-module de type fini si M l'est, et sa formation commute au changement de base.

Pour éviter un anachronisme ([**RG71**] étant postérieur à SGA3), esquissons une démonstration directe du point (i). Comme $A \to A'$ est plat, $M' = M \otimes A'$ est un sous-A'-module de $V' = V \otimes A'$, et, puisque C' est un A'-module projectif, $c(M')$ est le plus petit sous-comodule de V' contenant M'. Notons $V' \otimes A'$ et $A' \otimes V'$ les deux structures de $A' \otimes A'$-comodule sur $V'' = V' \otimes_{A'} (A' \otimes A')$ obtenues par les deux changements de base $A' \rightrightarrows A' \otimes A'$, $a' \mapsto a' \otimes 1$ et $a' \mapsto 1 \otimes a'$. Le A'-comodule V' est muni d'un isomorphisme de $A' \otimes A'$-comodules $\phi : V' \otimes A' \xrightarrow{\sim} A' \otimes V'$, $(x \otimes a') \otimes b' \mapsto b' \otimes (x \otimes a')$, qui est une donnée de descente, i.e. , qui vérifie $\phi_{31} = \phi_{32} \circ \phi_{21}$.

Comme $M' = M \otimes A'$, alors ϕ envoie $M' \otimes A'$ sur $A' \otimes M'$, et donc $c(M' \otimes A')$ sur $c(A' \otimes M')$. Comme la formation de $c(M')$ commute au changement de base, on a $c(M' \otimes A') = c(M') \otimes A'$ et $c(A' \otimes M') = A' \otimes c(M')$. On a donc

$$\phi(c(M') \otimes A') = A' \otimes c(M')$$

et il en résulte que ϕ munit $c(M')$ d'une donnée de descente. Par descente (fpqc), il existe un unique sous-comodule $t(M)$ de V tel que $c(M') = t(M) \otimes A'$, et $t(M)$ contient M puisque $t(M) \otimes A'$ contient M'. De plus, si N est un sous-comodule de V contenant

[80] N.D.E. : On a ajouté cette proposition, dont le point (i) est utilisé dans la proposition 11.9.

M, alors N contient $t(\mathrm{M})$, puisque $\mathrm{N}\otimes\mathrm{A}'$ contient $c(\mathrm{M}')=t(\mathrm{M})\otimes\mathrm{A}'$. Donc $t(\mathrm{M})$ est le plus petit sous-comodule de V contenant M.

Enfin, soit $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ un morphisme d'anneaux. Soit $\mathrm{B}'=\mathrm{B}\otimes\mathrm{A}'$ et soit M_{B} (resp. $\mathrm{M}'_{\mathrm{B}'}$) l'image de $\mathrm{M}\otimes\mathrm{B}$ dans $\mathrm{V}_{\mathrm{B}}=\mathrm{V}\otimes\mathrm{B}$ (resp. de $\mathrm{M}'\otimes_{\mathrm{A}'}\mathrm{B}'$ dans $\mathrm{V}\otimes\mathrm{B}'$) ; alors $\mathrm{M}_{\mathrm{B}}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{B}'=\mathrm{M}'_{\mathrm{B}'}$. D'une part, la construction précédente, appliquée à C_{B} et au morphisme $\mathrm{B}\to\mathrm{B}'$, donne :

$$c(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{B}')=t(\mathrm{M}_{\mathrm{B}})\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{B}'=t(\mathrm{M}_{\mathrm{B}})\otimes\mathrm{A}'.$$

D'autre part, comme la formation de $c(\mathrm{M}')$ commute au changement de base, $c(\mathrm{M}'_{\mathrm{B}'})$ est l'image dans $\mathrm{V}'\otimes_{\mathrm{A}'}\mathrm{B}'=\mathrm{V}\otimes\mathrm{B}\otimes\mathrm{A}'$ de

$$c(\mathrm{M}')\otimes_{\mathrm{A}'}\mathrm{B}'=t(\mathrm{M})\otimes\mathrm{B}\otimes\mathrm{A}'.$$

Il en résulte que $t(\mathrm{M}_{\mathrm{B}})$ est l'image dans V_{B} de $t(\mathrm{M})\otimes\mathrm{B}$. C.Q.F.D.

401 ***Proposition 11.9***. — *Soient $\mathscr{C}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-cogèbre, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{C}$-comodule, $\mathscr{F}$ un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $\mathscr{E}$, tous quasi-cohérents. On suppose donné un recouvrement* (U_α) *de* S *par des ouverts affines, et pour chaque α, un morphisme d'anneaux* $\mathrm{A}_\alpha=\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}_\alpha)\to\mathrm{A}'_\alpha$ fidèlement plat *tel que* $\Gamma(\mathrm{U}_\alpha,\mathscr{C})\otimes_{\mathrm{A}_\alpha}\mathrm{A}'_\alpha$ *soit un* A'_α*-module* projectif. (*)

Il existe alors un plus petit sous-comodule quasi-cohérent $t(\mathscr{F})$ *de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{F}$, et $t(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de type fini si $\mathscr{F}$ l'est. De plus, pour tout changement de base* $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$, *si on note $\mathscr{F}'$ l'image de $\mathscr{F}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ dans $\mathscr{E}'=\mathscr{E}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$, alors $t(\mathscr{F}')$ est l'image de $t(\mathscr{F})\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ dans $\mathscr{E}'$:* « la formation de $t(\mathscr{F})$ commute au changement de base ».

Pour chaque α, le $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_\alpha}$-module $\mathcal{T}_\alpha$ associé au A_α-module $t(\Gamma(\mathrm{U}_\alpha,\mathscr{F}))$ est, d'après 11.8.1 (i), le plus petit sous-comodule quasi-cohérent de $\mathscr{E}|_{\mathrm{U}_\alpha}$ contenant $\mathscr{F}|_{\mathrm{U}_\alpha}$, et est un $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_\alpha}$-module de type fini si $\mathscr{F}|_{\mathrm{U}_\alpha}$ l'est.

Pour $\alpha\neq\beta$, posons $\mathrm{U}_{\alpha\beta}=\mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}_\beta$. Comme la construction de $t(\mathrm{M})$ commute au changement de base, on a pour $\alpha\neq\beta$ un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$-modules

$$t(\Gamma(\mathrm{U}_\alpha,\mathscr{F}))\otimes_{\mathrm{A}_\alpha}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}\cong t(\Gamma(\mathrm{U}_\beta,\mathscr{F}))\otimes_{\mathrm{A}_\beta}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}.$$

Par conséquent, les $\mathcal{T}_\alpha$ se recollent en un sous-comodule quasi-cohérent $t(\mathscr{F})$ de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{F}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $t(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-comodule quasi-cohérent de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{F}$, et que sa formation commute au changemet de base.

Définition 11.9.1. — Soient S un préschéma et $\mathscr{P}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. D'après le théorème de Raynaud et Gruson cité en 11.8.1, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout ouvert affine U de S, $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{P})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U})$-module projectif.

(ii) Il existe un un recouvrement (U_α) de S par des ouverts affines, tel que chaque $\Gamma(\mathrm{U}_\alpha,\mathscr{P})$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}_\alpha)$-module projectif.

(*) C'est le cas par exemple lorsque $\mathscr{C}=\mathscr{A}(\mathrm{G})$, où G est un S-groupe réductif, comme nous le verrons dans l'Exp. XXV.

(iii) Il existe un recouvrement (U_α) de S par des ouverts affines, et des morphisme d'anneaux $\mathrm{A}_\alpha = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}_\alpha) \to \mathrm{A}'_\alpha$ *fidèlement plats*, tels que, pour chaque α, $\Gamma(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{P}) \otimes_{\mathrm{A}_\alpha} \mathrm{A}'_\alpha$ soit un A'_α-module projectif.

En effet, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Réciproquement, si (iii) est vérifié, le théorème précité entraîne que chaque $\Gamma(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{P})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}_\alpha)$-module projectif, d'où (ii). Soit V un ouvert affine arbitraire ; il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n$, où chaque V_i est contenu dans au moins un $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha$. Soient $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})$ et $\mathrm{A}' = \prod_i \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{V}_i)$, alors $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ est fidèlement plat et $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{P}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ est un A'-module projectif. Donc, d'après le théorème précité, $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{P})$ est un A-module projectif.

Lorsque ces conditions équivalentes sont vérifiées, on dit que $\mathscr{P}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *localement projectif.* [81]

Corollaire 11.10. — *Soient* S *un préschéma* quasi-compact et quasi-séparé*,* G *un* S-*groupe, et* ρ *une opération de* G *sur un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent* $\mathscr{E}$*. On suppose :*

(i) G *vérifie l'une des conditions suivantes :*

a) G *est* affine et plat *sur* S*,*

b) G *est* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S*, et* $\mathscr{E}$ *est* plat *;*

(ii) $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* localement projectif*.*

Alors $\mathscr{E}$ *est limite inductive d'une famille filtrante croissante de sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules* quasi-cohérents de type fini *de* $\mathscr{E}$*,* stables *sous* G.

D'après l'hypothèse (i) et 11.6.1, $\mathscr{E}$ est muni d'une structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule. D'autre part, comme S est quasi-compact et quasi-séparé, $\mathscr{E}$ est limite inductive de ses sous-modules quasi-cohérents de type fini (EGA I, 9.4.9 et EGA IV_1, 1.7.7). Par conséquent, le corollaire découle de la proposition 11.9, appliquée à la cogèbre $\mathscr{A}(\mathrm{G})$.

Remarque 11.10.1. — [82] Dans 11.8, il n'est pas suffisant de supposer que C soit un A-module *plat*, même si A est un anneau principal. En effet, on a le contre-exemple suivant, dû à J.-P. Serre. Soient A un anneau intègre, distinct de son corps des fractions K, et soit G le A-groupe affine et plat correspondant à l'algèbre de Hopf 402

$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) = \{\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}] \mid \mathrm{P}(0) \in \mathrm{A}\},$$

la comultiplication, resp. la coünité et l'antipode, étant définies par $\Delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{T}$, resp. $\varepsilon(\mathrm{T}) = 0$ et $\tau(\mathrm{T}) = -\mathrm{T}$. Alors $\mathrm{C} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{KT}$ est une sous-cogèbre de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, plate sur A.

Soit V le A-module libre $\mathrm{A}e_1 \oplus \mathrm{A}e_2$, et soit u l'endomorphisme de V défini par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = 0$, de sorte que $u^2 = 0$. Alors V est muni d'un structure de C-comodule (donc *a fortiori* de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule), définie par

$$\mu(m) = 1 \otimes m + \mathrm{T} \otimes u(m).$$

[81] N.D.E. : Ainsi, dans la proposition 11.9, l'hypothèse est que la cogèbre $\mathscr{C}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement projectif. On a utilisé cette terminologie dans le corollaire 11.10.

[82] N.D.E. : On a incorporé dans 11.8 et 11.9 la première partie de la remarque 11.10.1 originelle ; le contre-exemple qui suit corrige la seconde partie.

Les sous-comodules de V contenant e_1 sont exactement les sous-A-modules de la forme $\mathrm{A}e_1 \oplus \mathrm{A}\alpha e_2$, pour $\alpha \in \mathrm{A}\backslash\{0\}$; leur intersection est $\mathrm{A}e_1$, qui n'est pas un sous-comodule. Par conséquent, il n'existe *pas* de plus petit sous-C-comodule de V contenant e_1. De même, G opère sur V, mais il n'existe *pas* de plus petit sous-A-module stable sous G, contenant e_1.

Ceci s'applique, par exemple, à $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$, $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$. D'autre part, si A est un anneau de valuation discrète, d'uniformisante π, alors G est la limite projective du système projectif ci-dessous, considéré dans l'exemple 12.4 plus loin :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{A}} \xrightarrow{\times\pi} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{A}} \xrightarrow{\times\pi} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{A}} \quad .$$

Proposition 11.11. — *Soient* A *un anneau local artinien et* G *un* A-*groupe* plat de type fini, *tel que* $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ *soit un* A-*module* plat [83]. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* affine.

(ii) G *est* quasi-affine.

(iii) G *opère* fidèlement *sur un* A-*préschéma* X plat et quasi-affine. [84]

(iv) G *opère* fidèlement *sur un* A-module libre (*pas nécessairement de rang fini*).

(v) G *est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe* $\mathrm{GL}(n)_{\mathrm{A}}$.

Démonstration. On a (v) ⇒ (i) ⇒ (ii) trivialement, et (ii) ⇒ (iii), car G opère fidèlement sur lui-même par translations à gauche.

Montrons (iii) ⇒ (iv). Soit $\mathrm{X}_{\mathrm{af}} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}(\mathrm{X})$ l'enveloppe affine de X. Alors, G opère sur $\mathbf{W}(\mathscr{O}(\mathrm{X}))$ et sur X_{af}, et le morphisme canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_{\mathrm{af}}$ est G-équivariant.

Soit θ le morphisme $\theta : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. Notons que G opère sur

ZZZZ A COMPLETER!!!! ZZZZZ

Le morphisme $\theta : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ induit un morphisme de A-algèbres :

$$\mu : \mathscr{O}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathscr{O}(\mathrm{G} \times \mathrm{X}).$$

Puisque X et X × X sont plats et quasi-affines sur A, et que $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ est un A-module plat, on a, d'après 11.1 c) :

$$\mathscr{O}(\mathrm{G} \times \mathrm{X}) = \mathscr{O}(\mathrm{G}) \otimes \mathscr{O}(\mathrm{X}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{O}(\mathrm{G} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}) = \mathscr{O}(\mathrm{G}) \otimes \mathscr{O}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{O}(\mathrm{X}).$$

Par conséquent, la commutativité des diagrammes ci-dessous (où m et ε sont la multiplication et la section unité de G)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{id} \times \theta"] \arrow[d, "m \times \mathrm{id}"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{X} \arrow[d, "\theta"] \\ \mathrm{G} \times \mathrm{X} \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{X} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{X} \\ (\operatorname{Spec} \mathrm{A}) \times \mathrm{X} \arrow[r, "\varepsilon \times \mathrm{id}"] & \mathrm{G} \times \mathrm{X} \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

[83] N.D.E. : et donc *libre*, d'après le « Lemme de Nakayama nilpotent », cf. N.D.E. (38).

[84] N.D.E. : Rappelons qu'un A-préschéma X est dit *quasi-affine* s'il est isomorphe à un ouvert *quasi-compact* d'un A-préschéma affine (EGA II, 5.1.1).

entraîne la commutativité des diagrammes ci-dessous (où l'on a posé $\mathscr{A} = \mathscr{O}(\mathrm{G})$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{O}(\mathrm{X}) & \mathscr{A} \otimes \mathscr{O}(\mathrm{X}) \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] \\
\mathscr{A} \otimes \mathscr{O}(\mathrm{X}) \arrow[u, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & \mathscr{O}(\mathrm{X}) \arrow[l, "\mu"'] \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(\mathrm{X}) \arrow[r, equal] & \mathscr{O}(\mathrm{X}) \arrow[d, "\mu"] \\
\mathrm{A} \otimes \mathscr{O}(\mathrm{X}) \arrow[u, "\wr"] & \mathscr{A} \otimes \mathscr{O}(\mathrm{X}) \arrow[l, "\eta\times\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

donc le morphisme de A-algèbres $\mu : \mathscr{O}(\mathrm{X}) \to \mathscr{O}(\mathrm{G}\times\mathrm{X})$ munit $\mathscr{O}(\mathrm{X})$ d'une structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodules. Par conséquent, G opère aussi sur l'enveloppe affine $\mathrm{X}' = \operatorname{Spec} \mathscr{O}(\mathrm{X})$ de X, et le morphisme canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ est évidemment compatible avec l'action de **403**
G.

Comme X est quasi-affine, $\mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ est une immersion ouverte (EGA II, 5.1.2), donc *a fortiori* un monomorphisme. Par conséquent, comme G opère fidèlement sur X, il opère fidèlement sur X′. Il en résulte que G opère fidèlement sur la A-algèbre $\mathscr{O}(\mathrm{X}')$ [85], qui est un A-module libre. Ceci prouve l'implication (iii) ⇒ (iv).

Supposons maintenant (iv), i.e. que G opère fidèlement sur un k-espace vectoriel V. Alors, en vertu de 11.10, V est limite inductive de sous-espaces vectoriels V_i de dimension finie, stables sous l'action de G. Si K_i est le noyau de l'action induite de G sur V_i, i.e. de $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{V}_i)$, alors K_i est un sous-préschéma fermé de G, et l'hypothèse que G opère fidèlement s'exprime par le fait que l'intersection des K_i est le sous-groupe unité de G. Comme G est noethérien, il s'ensuit que l'un des K_i est déjà réduit au groupe unité, donc que $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{V}_i)$ est un monomorphisme. C'est donc une immersion fermée en vertu de 1.4.2, ce qui prouve que (iv) ⇒ (v).

Remarque 11.11.1. — On peut généraliser 11.11 comme suit. Soit S un préschéma localement noethérien régulier [86] de dimension $\leqslant 1$, et soit G un préschéma en groupes plat, quasi-compact et quasi-séparé G sur S. (Dans ce cas, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module sans torsion, donc plat). On a alors l'équivalence des conditions suivantes : [87]

(i) G est affine sur S.

---

[85] N.D.E. : En effet, soient S un A-préschéma, $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, et $g^{\natural} : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{O}(\mathrm{S})$ le morphisme de A-algèbres associé à g. Pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ et tout

$$\phi \in \mathrm{X}'(\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}_{\text{A-alg.}}(\mathscr{O}(\mathrm{X}'), \mathscr{O}(\mathrm{T}))$$

on a

$$g_{\mathrm{T}} \cdot f\phi = m_{\mathrm{T}} \circ (g_{\mathrm{T}}^{\natural} \otimes \phi) \circ \mu, \tag{1}$$

où $g_{\mathrm{T}}^{\natural}$ est le composé de $g^{\natural}$ et de $\mathscr{O}(\mathrm{S}) \to \mathscr{O}(\mathrm{T})$, et m_{T} désigne la multiplication de $\mathscr{O}(\mathrm{T})$. Supposons que $g \in \mathrm{K}(\mathrm{S})$, où K désigne le noyau du morphisme $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{W}(\mathscr{O}(\mathrm{X}'))$. Alors, pour tout $f \in \mathscr{O}(\mathrm{X}')$, on a dans

$$\mathscr{O}(\mathrm{X}') \otimes_{\mathrm{A}} \mathscr{O}(\mathrm{T}) \subseteq \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}(\mathrm{X}') \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{T}}) = \mathbf{W}(\mathscr{O}(\mathrm{X}'))(\mathrm{T})$$

EST-CE = ? l'égalité

$$g_{\mathrm{T}} \cdot (\lambda \otimes f) = m_{\mathrm{T}}(\lambda \otimes 1,$$

[86] N.D.E. : Peut-on supprimer l'hypothèse que S soit régulier ?

[87] N.D.E. : Ce résultat est démontré dans la section additionnelle 12.

(ii) G est quasi-affine sur S.

(iii) On peut faire opérer G fidèlement sur un S-schéma quasi-affine et plat.

(iv) On peut faire opérer G fidèlement sur un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent plat.

404 (v) (Si G est de type fini sur S et S noethérien), G est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de type fini.

Lemme 11.12. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe* quasi-compact. *Posons* $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. *Étant donné $x \in \mathrm{A}$, il existe une sous-k-*algèbre de type fini V *de* A *telle que $x \in \mathrm{V}$, que $\Delta(\mathrm{V}) \subseteq \mathrm{V} \otimes_k \mathrm{V}$ et $u(\mathrm{V}) \subseteq \mathrm{V}$, où u désigne l'involution de* A *correspondant à la symétrie de* G.

D'après 11.3, on peut remplacer G par G_{af}, donc on peut supposer G affine.

Soit (φ_i) une base de A sur k. Posons

$$\Delta(x) = \sum_i \varphi_i \otimes a_i \qquad \text{et} \qquad \Delta(\varphi_j) = \sum_i \varphi_i \otimes b_{ij};$$

l'axiome (HA 1) de I, 4.2 montre que

$$\sum_i \varphi_i \otimes \Delta(a_i) = \sum_j \Delta(\varphi_j) \otimes a_j = \sum_i \varphi_i \otimes (\sum_j b_{ij} \otimes a_j),$$

d'où $\Delta(a_i) = \sum_j b_{ij} \otimes a_j$. Soit alors V la sous-$k$-algèbre de A engendrée par les b_{ij} et les $u(b_{ij})$, pour les indices i tels que $a_i \neq 0$.

Il est clair que V est une k-algèbre de type fini. L'axiome (HA 1) montre aussi que $\sum \Delta(\varphi_j) \otimes b_{ji} = \sum \varphi_j \otimes \Delta(b_{ji})$, et on en déduit que

$$\Delta(b_{ij}) = \sum b_{ik} \otimes b_{kj} \qquad \text{et} \qquad \Delta(u(b_{ij})) = \sum u(b_{kj}) \otimes u(b_{ik}).$$

[88] Puisque Δ est un homomorphisme d'algèbres, on en déduit que $\Delta(\mathrm{V}) \subseteq \mathrm{V} \otimes_k \mathrm{V}$ et $u(\mathrm{V}) \subseteq \mathrm{V}$. Enfin l'axiome (HA 2) de (I, 4.2) montre que $a_i = \sum \eta(a_j) b_{ij}$ et que $x = \sum \eta(\varphi_i) a_i$, si bien que $x \in \mathrm{V}$.

Proposition 11.13. — [89] *Soient k un corps et* G *un k-groupe affine d'algèbre* A. *Alors* G *est limite projective d'un système filtrant croissant de k-groupes affines de type fini, dont les morphismes de transition sont fidèlement plats.*

Comme l'ensemble des sous-k-algèbres de type fini de A stables par Δ et u est stable par engendrement, A est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(\mathrm{B}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de
405 sous-k-algèbres de type fini stables par Δ et u. Alors, chaque algèbre B_i, munie de l'homomorphisme $\mathrm{B}_i \to \mathrm{B}_i \otimes_k \mathrm{B}_i$ déduit de Δ et de la restriction de u à B_i, est munie d'une structure d'hyperalgèbre associative augmentée involutive, donc (I, 4.2) est la k-algèbre d'un k-groupe affine G_i, de type fini sur k. Enfin, puisque $\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{V}_i$,

---

[88] N.D.E. : Clarifier ce point.

[89] N.D.E. : D'une part, ce résultat est le point de départ du formalisme tannakien, qui s'appuie sur le fait qu'un k-groupe affine G est déterminé par la catégorie tensorielle des $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodules de dimension finie, cf. les références [**SR72, DM82, De90**].

D'autre part, ce résultat a été étendu par D. Perrin [**Per76**] à tout k-groupe quasi-compact (non nécessairement affine).

$G = \varprojlim G_i$ (EGA IV 8.2.3). Les morphismes de transition sont fidèlement plats d'après le lemme suivant :

Lemme 11.14. — *Soient k un corps,* G *et* H *deux k-groupes affines de type fini, u :* $G \to H$ *un morphisme de k-groupes, et $u^\natural : B \to A$* [90] *l'homomorphisme de k-algèbres correspondant. Pour que u soit fidèlement plat, il faut et il suffit que $u^\natural$ soit injectif.*

La condition est évidemment nécessaire (EGA IV 2.2.3 et 0_{IV} 6.6.1). Montrons qu'elle est suffisante. Posons $K = \operatorname{Ker} u$. Alors G/K est un k-groupe de type fini ($\mathrm{VI_A}$ 5.2), et u se factorise en $G \xrightarrow{p} G/K \xrightarrow{v} H$, où p est fidèlement plat ($\mathrm{VI_A}$ 3.2) et où v est un monomorphisme de k-groupes de type fini, donc une immersion fermée (1.4.2). Puisque H est un schéma affine, et que v est une immersion fermée, G/K est un schéma affine (EGA I 4.2.3), et, si on note C l'algèbre de G/K, l'homomorphisme $v^\natural : B \to C$ est surjectif (*loc. cit.*). Or, puisque $u^\natural$ est injectif, et que $u^\natural = p^\natural \circ v^\natural$, alors $v^\natural$ est aussi injectif : c'est un isomorphisme, donc v est un isomorphisme, et, puisque p est fidèlement plat, il en est de même de u.

Définition 11.15. — [91] Soient k un corps, G un k-groupe *quasi-compact*, $A = \mathscr{A}(G)$, et V un k-espace vectoriel muni d'une action k-linéaire de G ; comme G est supposé quasi-compact, cette action est donnée, d'après 11.6.1, par une structure de $\mathscr{A}(G)$-comodule $\mu : V \to V \otimes \mathscr{A}(G)$.

Soit $v \in V$ non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\lambda \in \mathscr{A}(G)$ (nécessairement unique) tel que $\mu(v) = \lambda \otimes v$.

(ii) Pour tout k-préschéma S et tout $g \in G(S)$, on a $g \cdot v \in \mathscr{O}(S)v$ (c.-à-d., il existe $f \in \mathscr{O}(S)$, nécessairement unique, tel qu'on ait dans $\mathscr{O}(S) \otimes V$ l'égalité $g \cdot v = f \otimes v$).

En effet, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, si (ii) vérifié et si on l'applique à $S = G$ et $g = \mathrm{id}_G$, on obtient qu'il existe un unique $\lambda \in \mathscr{A}(G)$ tel que $\mu(v) = \lambda \otimes v$.

Si v vérifie ces conditions, on dit que v est vecteur *semi-invariant* sous G, et que λ est le *poids* de v ; on dira aussi que « v *est un semi-invariant de poids* λ.

Notons Δ la comultiplication de $\mathscr{A}(G)$; alors l'égalité 406

$$\lambda \otimes \lambda \otimes v = (\mathrm{id} \otimes \mu)(\mu(v)) = (\Delta \otimes \mathrm{id})(\mu(v)) = \Delta(\lambda) \otimes v$$

que $\Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda$. Par conséquent, λ définit un morphisme d'algèbres de Hopf

$$\mathscr{A}(\mathbb{G}_{m,k}) = k[T, T^{-1}] \longrightarrow \mathscr{A}(G), \qquad T \mapsto \lambda,$$

et donc un morphisme de k-groupes $\lambda : G \to \mathbb{G}_{m,k}$, i.e. λ est un *caractère* de G, appelé *caractère associé* à l'élément semi-invariant v.

Théorème 11.16 (Chevalley). — *Soient k un corps,* G *un k-groupe* algébrique affine*,* H *un sous-préschéma en groupes* fermé [92] *de* G*. Alors il existe un nombre fini*

[90] N.D.E. : On a noté $u^\natural$ (au lieu de u°) le morphisme $B \to A$ correspondant à $u : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$.

[91] N.D.E. : On a récrit la définition 11.15, en rajoutant l'hypothèse que G soit quasi-compact.

[92] N.D.E. : Rappelons que tout *sous-préschéma en groupes* de G est fermé, d'après 1.4.2.

d'éléments a_i linéairement indépendants $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, tels que H *soit le plus grand sous-préschéma en groupes fermé de* G *sous lequel les a_i soient semi-invariants ; on peut de plus supposer que tous les a_i ont même poids sous* H.

Posons $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Puisque G est affine, et H un sous-préschéma fermé de G, il existe un unique idéal I de A tel que $\mathrm{H} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$ (cf. EGA I, 4.2.3).

Soit Δ l'application diagonale $\mathrm{A} \to \mathrm{A} \otimes_k \mathrm{A}$ (cf. Exp. I, 4.2 et 4.7.2). Puisque G est de type fini sur k, A est de type fini sur k, donc I admet un système fini de générateurs $(x_1, \ldots, x_r)$. D'après 11.9, les x_i sont contenus dans un sous-espace vectoriel V de A, de dimension finie, stable sous G. Posons alors $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cap \mathrm{I}$, c'est un espace vectoriel
407 sur k de dimension finie, dont nous noterons d la dimension. Puisque V contient tous les x_i, W engendre l'idéal I. Notons $p : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{I} = \mathrm{B}$ l'application canonique, et $q = p \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \otimes_k \mathrm{A} \to (\mathrm{A}/\mathrm{I}) \otimes_k \mathrm{A}$. Alors l'action de H sur A est déterminée par $q \circ \Delta : \mathrm{A} \to \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{A}$. Puisque H est un sous-préschéma en groupes de G, l'application diagonale $\mathrm{A}/\mathrm{I} \to (\mathrm{A}/\mathrm{I}) \otimes_k (\mathrm{A}/\mathrm{I}) = ((\mathrm{A}/\mathrm{I}) \otimes_k \mathrm{A})/((\mathrm{A}/\mathrm{I}) \otimes_k \mathrm{I})$ se déduit de $q \circ \Delta$ par passage au quotient, ce qui montre que $(q \circ \Delta)(\mathrm{I}) \subset (\mathrm{A}/\mathrm{I}) \otimes_k \mathrm{I}$, autrement dit, I est stable sous H. Puisque V est stable sous G, donc sous H, on voit que W est stable sous H.

Posons $\mathrm{E} = \bigwedge^d \mathrm{V}$, soit $(w_1, \ldots, w_d)$ une base de W sur k, et soit $(e_0, \ldots, e_n)$ une base de E sur k contenant $e_0 = w_1 \wedge \ldots \wedge w_d$. L'opération de G sur V détermine canoniquement une opération de G sur $\bigwedge^d \mathrm{V}$, qui définit une application linéaire $\rho : \mathrm{E} \to \mathrm{A} \otimes_k \mathrm{E}$. Posons $\rho(e_i) = \sum a_j^i \otimes e_j$, et $a_i = a_i^0$. Puisque W est stable sous H, si on pose $\sigma = (p \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \circ \rho : \mathrm{E} \to (\mathrm{A}/\mathrm{I}) \otimes_k \mathrm{E}$, il est clair que $\sigma(e_0)$ est proportionnel à e_0, autrement dit, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $a_i \in \mathrm{I}$. L'axiome (CM 1) de (I, 4.7.2) appliqué à $\rho(e_0) = \sum a_i \otimes e_i$ montre que $\sum \Delta(a_i) \otimes e_i = \sum a_i \otimes \rho(e_i) = \sum a_i \otimes a_j^i \otimes e_j$, d'où on déduit que $\Delta(a_i) = a_0 \otimes a_i + \sum_{j \geqslant 1} a_j \otimes a_i^j$; donc, puisque pour $j \geqslant 1$, $a_j \in \mathrm{I}$, on voit que $q \circ \Delta(a_i) = p(a_0) \otimes a_i$, si bien que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, a_i est semi-invariant sous H de poids $p(a_0)$, indépendant de i. Extrayons du système $(a_1, \ldots, a_n)$ un système maximal de vecteurs linéairement indépendants, dont on peut supposer qu'il se note $(a_1, \ldots, a_m)$. Alors les a_i, $i = 1, \ldots, m$, sont linéairement indépendants, semi-invariants sous H, et de même poids.

Réciproquement, soit H′ un sous-préschéma en groupes fermé de G sous lequel chacun des a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ est semi-invariant. Montrons que $\mathrm{H}' = \mathrm{H}$. Il existe de même
408 un idéal I′ de A tel que l'algèbre B′ de H′ soit isomorphe à A/I' ; notons $p' : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{I}'$ l'application canonique, et $q' = p' \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}$. Par hypothèse, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, il existe $\lambda_i \in \mathrm{B}'$ tel que $q' \circ \Delta(a_i) = \sum p'(a_j) \otimes a_i^j = \lambda_i \otimes a_i$. Or l'axiome (CM 2) de (I, 4.7.2) montre que $e_i = \sum \eta(a_j^i) e_j$, donc que $\eta(a_j^i) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) ; l'égalité $\sum p'(a_j) \otimes \eta(a_j^i) = \lambda_j \otimes \eta(a_i)$ s'écrit donc $p'(a_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, car $\eta(a_i) = \eta(a_i^0) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$; par conséquent, on a $a_i \in \mathrm{I}'$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, si bien que $a_i \in \mathrm{I}'$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc, si on pose $\sigma' = (p' \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \circ \Delta$, alors $\sigma'(e_0) = \sum p'(a_i) \otimes e_i$ est proportionnel à e_0, de sorte que $q' \circ \Delta(\mathrm{W}) \subset (\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k \mathrm{W}$, autrement dit que W est stable sous H′. Puisque W engendre l'idéal I, I est stable sous H′, donc $q' \circ \Delta(\mathrm{I}) \subset (\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k \mathrm{I}$, et $q' \circ \Delta$ définit par passage au quotient une application linéaire $\mathrm{A}/\mathrm{I} \to (\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k (\mathrm{A}/\mathrm{I}) = ((\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k \mathrm{A})/((\mathrm{A}/\mathrm{I}') \otimes_k \mathrm{I})$ donc la

restriction à $\mathrm{H}' \times_k \mathrm{H}$ du morphisme de multiplication de G se factorise à travers H, ce qui implique que H′ est un sous-préschéma en groupes de H. C.Q.F.D.

***Théorème 11.17* (Chevalley)**. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe affine* (*non nécessairement algébrique*)*, et* H *un sous-préschéma en groupes fermé de* G invariant *dans* G *; alors le faisceau quotient* (*pour la topologie* (fpqc)) G/H *est représentable par un k-groupe* affine.

Premier cas : Supposons d'abord G algébrique. D'après ($\mathrm{VI_A}$ 3.2), le conoyau K de l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est représentable, le morphisme canonique $p : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ est couvrant pour la topologie (fpqc), et K représente le faisceau quotient G/H pour la topologie (fpqc) ; il s'agit donc de montrer que K est affine. [93]

Supposons d'abord k algébriquement clos, G réduit et connexe et H réduit. D'après (*Bible*, Exp. 4, cor. du th. 1), il existe une représentation linéaire de dimension finie $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$ telle que $(\mathrm{Ker}\,\rho)_{\mathrm{réd}} = \mathrm{H}$. Par 11.11, $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}\,\rho$ est affine donc **409**
$(\mathrm{G/H})/(\mathrm{Ker}\,\rho/\mathrm{H})$ est affine, donc aussi G/H, le groupe $\mathrm{Ker}\,\rho/\mathrm{H}$ étant fini.

Si k est algébriquement clos, et G et H réduits, alors $(\mathrm{G/H})/(\mathrm{G^0/H \cap G^0})$ est fini, comme quotient de $\mathrm{G/G^0}$, et $\mathrm{G^0/H \cap G^0}$ est affine, donc G/H est affine.

Dans le cas où k est algébriquement clos, et G et H quelconques, $(\mathrm{G} \times_k \mathrm{H})_{\mathrm{réd}}$ est isomorphe à $(\mathrm{G_{réd}}) \times_k (\mathrm{H_{réd}})$, donc $(\mathrm{G_{réd}})/(\mathrm{H_{réd}})$ est isomorphe à $(\mathrm{G/H})_{\mathrm{réd}}$. Puisque $(\mathrm{G_{réd}})/(\mathrm{H_{réd}})$ est affine, il en est de même de G/H (EGA I 5.1.10), car, puisque G/H est de type fini su k, son nilradical est nilpotent.

Dans le cas où k est quelconque, $(\mathrm{G} \otimes_k \overline{k})/(\mathrm{H} \otimes_k \overline{k})$ est isomorphe à $(\mathrm{G/H}) \otimes_k \overline{k}$ (9.2 v)), donc puisque le premier est affine, il en est de même du second, donc G/H est affine.

Deuxième cas : Cas général. D'après (11.13), l'algèbre A de G est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de sous-algèbres de type fini de A stables par l'application diagonale et l'involution. D'après (EGA I 4.2.3), H est affine, et si on note B l'algèbre de H, l'homomorphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ déduit de l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est surjectif. Posons $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$, $\mathrm{I}_i = \mathrm{I} \cap \mathrm{A}_i$ et $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_i/\mathrm{I}_i$; puisque la structure d'hyperalgèbre associative augmentée involutive de A passe au quotient à travers I, on vérifie aisément que celle de A_i passe au quotient à travers I_i, si bien que B_i est l'algèbre d'un k-groupe affine de type fini H_i ; il est clair que $\mathrm{B} = \varinjlim \mathrm{B}_i$. D'après (EGA I 4.2.3), H_i est isomorphe à un sous-préschéma en groupes fermé de G_i. D'après (6.7) le fait que H soit invariant dans G s'exprime en disant qu'un certain **410**
morphisme $\mathrm{H} \times_k \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ se factorise à travers l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$, autrement dit que l'homomorphisme correspondant $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{A}$ se factorise à travers l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$; on vérifie aisément que l'homomorphisme $\mathrm{A}_i \to \mathrm{B}_i \otimes_k \mathrm{A}_i$ défini de manière analogue se factorise à travers $\mathrm{A}_i \to \mathrm{B}_i$, donc que H_i est invariant dans G_i. D'après ce qui a été vu précédemment, G_i étant de type fini sur k, $\mathrm{G}_i/\mathrm{H}_i$ est représentable par un k-groupe affine K_i, dont nous noterons C_i l'algèbre. Posons alors $\mathrm{C} = \varinjlim \mathrm{C}_i$, et soit $\mathrm{K} = \varprojlim \mathrm{K}_i$ le k-préschéma affine d'algèbre K (EGA IV 8.2.3).

[93] N.D.E. : Remplacer la démonstration qui suit par un corollaire de 11.11...

Montrons que K représente G/H ; pour cela, il suffit de vérifier que $\mathrm{H} \times_k \mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{G}$, et que le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{K}$ est couvrant pour la topologie (fpqc) (IV, 4.4.3). Or pour chaque i, on a $\mathrm{H}_i \times_k \mathrm{G}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{K}_i} \mathrm{G}_i$, donc il en est de même du morphisme obtenu en passant à la limite projective ; enfin chacun des morphismes $\mathrm{G}_i \to \mathrm{K}_i$ est fidèlement plat (9.2 (xi)), autrement dit C_i est fidèlement plat sur A_i ; puisque $\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{A}_i$ et $\mathrm{C} = \varinjlim \mathrm{C}_i$, on en déduit que C est fidèlement plat sur A, si bien que $\mathrm{G} \to \mathrm{K}$ est un morphisme fidèlement plat. Puisque ce morphisme est affine, il est quasi-compact, donc couvrant pour la topologie (fpqc). C.Q.F.D.

11.18. Compléments. — Cette sous-section, ainsi que la section 12 qui suit, a été ajoutée en 2006.

Le théorème précédent 11.17 a été généralisé par D. Perrin, dans l'article : « Approximation des schémas en groupes, quasi-compacts sur un corps », Bulletin de la Société Mathématique de France 104 (1976), 323-335. Soient k un corps et G un k-schéma en groupes quasi-compact. Soit H un sous-schéma en groupes fermé de G. Alors le faisceau (fpqc) G/H est un schéma dans les deux cas suivants : (i) H est défini par un idéal de type fini ; (ii) H est invariant dans G. Les corollaires suivants figurent à la fin de cet article :

(1) Soient G et H deux k-schémas en groupes, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un homomorphisme quasi-compact. Soit $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(u)$. Alors le faisceau (fpqc) G/N est un schéma, et le monomorphisme canonique $\mathrm{G/N} \to \mathrm{H}$ est une immersion fermée.

(2) Un monomorphisme quasi-compact de k-schémas en groupes est une immersion fermée.

(3) Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un homomorphisme de k-schémas en groupes quasi-compacts. Alors u est fidèlement plat si et seulement si u est schématiquement dominant.

L'assertion (1) a pour sous-corollaire :

(4) Soient G un k-groupe algébrique et H un k-groupe affine. Soient $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un homomorphisme et $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(u)$. On suppose que $\mathrm{H}^0(\mathrm{H}, \mathscr{O}_{\mathrm{H}})$ s'injecte dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})$. Alors on a un isomorphisme $\mathrm{G/N} \cong \mathrm{H}$.

Le résultat (4) ci-dessus permet de préciser l'enveloppe affine d'un groupe algébrique. On a le résultat suivant, qui se trouve également dans le livre *Groupes algébriques* de P. Gabriel et M. Demazure : Chap. III, no. 3.8, Théorème de l'affinisé 8.2 et Corollaire 8.3.

Proposition 11.18.1. — *Soit* G *un k-groupe algébrique. On note* N *le noyau de l'homomorphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$.

a) $\mathrm{G/N} \cong \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$.

b) $\mathrm{H}^0(\mathrm{N}, \mathscr{O}_{\mathrm{N}}) = k$.

c) N *est lisse et connexe.*

d) N *est commutatif.*

Pour la démonstration, il est loisible de supposer k algébriquement clos. L'isomorphisme $\mathrm{G/N} \cong \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ est donné par (4), d'où (a). L'assertion (b) revient à voir que

$N_{af} = 1$. On pose $N' = \ker(N \to N_{af})$, c'est un sous-groupe caractéristique de G donc normal. D'après le théorème VI_A 3.2, et VI_A 5.2 et 5.3.2, le quotient G/N' est représentable, et le noyau de l'homomorphisme $G/N' \to G/N$ est isomorphe à N/N'. Comme N, étant un sous-groupe fermé de G, est algébrique, on a $N/N' \cong N_{af}$ d'après le point (a). Ainsi, le groupe G/N' est extension de G_{af} par N_{af} ; par descente fidèlement plate, G/N' est donc un k-groupe affine. Par conséquent, le morphisme $G/N' \to G_{af}$ est un isomorphisme, d'où $N_{af} = 1$.

Le morphisme de k-schémas $G/N_{réd} \to G/N \cong G_{af}$ est une fibration de fibre $N/N_{réd}$. Par descente fidèlement plate, le k-schéma $G/N_{réd}$ est affine. Le morphisme $G/N_{réd} \to G/N \cong G_{af}$ admet donc une section G-équivariante. On en déduit que $N_{réd} = N$; le k-groupe N est donc lisse (1.3.1). Le même argument avec la composante neutre $N^0 \subset N$ montre que N est connexe.

Suivant Rosenlicht (Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. Math. 78 (1956), 401-443, théorème 13 et son corollaire 1), il existe un sous-groupe central connexe N_0 de N tel que $N_1 := N/N_0$ est un k-groupe algébrique linéaire. Le morphisme $G/N_0 \to G/N = G_{af}$ est un torseur sous N_1. Par descente fidèlement plate, G/N_0 est affine [(1)]. La maximalité de G_{af} montre que $N_1 = 1$; le groupe N est donc commutatif.

Le dévissage suivant est plus connu.

***Théorème 11.18.2* (Chevalley).** — *Soit* G *un k-groupe algébrique défini sur un corps parfait k. Il existe un unique k-sous-groupe invariant affine* H *de* G *tel que le quotient* G/H *soit une variété abélienne.*

Il s'agit de l'article « Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques », J. Math. Pures Appl. 39 (1960), 307-317. Cette démonstration est écrite dans le langage de Weil ; pour une démonstration dans le langage des schémas, voir B. Conrad, « A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups », J. Ramanujan Math. Soc. 17 (2002), 1-18.

12. Schémas en groupes affines plats sur une base de dimension 1

Soit A un anneau noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$. Dans le cas d'un schéma en groupes *affine* plat sur A, on dispose du procédé suivant pour plonger un groupe donné dans le groupe d'automorphismes d'un module de type fini. Ceci figure dans le § 1.4.5 de l'article : F. Bruhat et J. Tits, Groupes algébriques sur un corps local II, Schémas en groupes, Existence d'une donnée radicielle valuée, Publ. Math. IHES 60 (1984), 197-376.

Lemme 12.1. — *Soit* G *un* A*-schéma en groupes affine de type fini. Soit* M *un sous-module de type fini de* A[G] *vérifiant* $\Delta(M) \subset M \otimes_A A[G]$, $u(M) \subset M$ *et engendrant la* A*-algèbre* A[G]. *On note* $\rho : G \to \underline{\mathrm{Aut}}_M$ *le morphisme défini par le lemme* 11.7. *Alors* ρ *est une immersion fermée.*

[(1)] PP, 19/6/08 : dans cette preuve, il semble que N_0 soit supposé normal dans G...

Noter que M est localement libre, et ainsi $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{M}}$ est représentable.

Proposition 12.2. — *Soit* G/A *un schéma en groupes affine plat de type fini. Alors il existe un* A*-module projectif* M *de type fini et une immersion fermée* $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{M}}$.

En effet, la remarque (11.10.1) montre qu'il existe un sous-module M de type fini engendrant A et vérifiant $\Delta(\mathrm{M}) \subset \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}[\mathrm{G}]$ et $u(\mathrm{M}) \subset \mathrm{M}$. Alors M est projectif et le lemme s'applique.

La proposition suivante généralise (11.13) ; c'est un premier pas vers le formalisme tannakien dans ce cadre (cf. T. Wedhorn, On Tannakian duality over valuation rings, J. Algebra 282 (2004), 575-609).

Proposition 12.3. — *Soit* G/A *un schéma en groupes affine et plat. Alors* G *est limite projective d'un système filtrant de* A*-schémas en groupes affine de type fini.*

On a vu que l'ensemble des sous-A-algèbres de type fini (donc plates sur A) de A[G] stables par Δ et u est stable par engendrement, donc A[G] est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de sous-A-algèbres de type fini stables par Δ et u. Alors, chaque algèbre B_i, munie de l'homomorphisme $\mathrm{B}_i \to \mathrm{B}_i \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}_i$ déduit de Δ et de la restriction de u à B_i, est munie d'une structure d'hyperalgèbre associative augmentée involutive, donc (I, 4.2) est la A-algèbre d'un A-groupe affine G_i, de type fini sur A. Enfin, puisque $\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{V}_i$, on a $\mathrm{G} = \varprojlim \mathrm{G}_i$ (EGA IV 8.2.3).

Exemple 12.4. — De telles limites donnent lieu à des objets « exotiques ». Supposons A de valuation discrète, d'uniformisante π et de corps des fractions K. On considère le système

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{A}} \xrightarrow{\times\pi} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{A}} \xrightarrow{\times\pi} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{A}} \quad .$$

Alors la limite projective G est un A-schéma en groupes plat affine, non de type fini, dont la fibre spéciale est triviale et dont la fibre générique est isomorphe au groupe additif. De plus, $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})$ est le sous-anneau de K[T] formé des polynômes dont le coefficient constant appartient à A.

***Théorème 12.5* (Raynaud)**. — *Soit* G *un* A*-préschéma en groupes de type fini et et plat,* $\widetilde{\mathrm{G}} = \operatorname{Spec}\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})$, $u : \mathrm{G} \to \widetilde{\mathrm{G}}$ *le morphisme canonique. Alors :*

(i) $\widetilde{\mathrm{G}}$ *est de façon naturelle un* A*-schéma en groupes et* u *est un homomorphisme.*

(ii) $\mathrm{Ker}(u)$ *est plat sur* S *et* $(\widetilde{\mathrm{G}}, u)$ *est un quotient* fpqc *de* G *par* $\mathrm{Ker}(u)$*, de sorte que* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *est le plus grand quotient affine de* G.

(iii) *Si* G *est affine aux points génériques de* Spec(A)*,* $\mathrm{Ker}(u)$ *est un groupe étale sur* A*, égal au groupe unité si et seulement si* G *est séparé sur* A.

On peut supposer que A est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K. Le (1) résulte immédiatement du corollaire 11.2. Soit π une uniformisante de A ; pour tout $n \geqslant 0$, posons $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}/\pi^{n+1}\mathrm{A}$ et soit $i_n : \operatorname{Spec}(\mathrm{A}_n) \to \operatorname{Spec}(\mathrm{A})$ le morphisme associé. Le schéma en groupes $\widetilde{\mathrm{G}}/\mathrm{A} = \operatorname{Spec}(\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}))$ est affine et plat (puisque sans torsion), mais *a priori* non nécessairement de type fini. Nous allons montrer que $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(u)$ est plat. Vu que $\widetilde{\mathrm{G}}$ est séparé, N est un sous-schéma en groupes fermé de G.

Le changement de base i_n donne lieu à un morphisme de A_n-schémas en groupes $u_n : \mathrm{G}_n \to \widetilde{\mathrm{G}}_n$, de noyau N_n. La suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \xrightarrow{\times\pi} \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \longrightarrow i_{0,*}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}_0}) \longrightarrow 0$$

produit une injection $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})/\pi\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{G}_0})$; en d'autres termes,

$$u_0^* : \mathrm{H}^0(\widetilde{\mathrm{G}}_0, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{G}}_0}) \cong \mathrm{H}^0(\widetilde{\mathrm{G}}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{G}}})/\pi\mathrm{H}^0(\widetilde{\mathrm{G}}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{G}}}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{G}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{G}_0})$$

est injective. L'extension (4) du théorème 11.17 montre que u induit un isomorphisme $u_0 : \mathrm{G}_0/\mathrm{N}_0 \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{G}}_0$. Donc u est surjectif.

En particulier, $\widetilde{\mathrm{G}}_0$ est un A_0-groupe affine algébrique. On fixe un entier $n \geqslant 1$, nous allons montrer que u_n est plat. Tout d'abord, le lemme de Nakayama nilpotent implique que $\widetilde{\mathrm{G}}_n$ est de type fini sur A_n, donc de présentation finie. Le morphisme u_n est donc un morphisme de présentation finie. Vu que u_0 est plat, le critère de platitude par fibres (EGA IV, Corollaire 11.3.11, (a) $\Longrightarrow$ (b)) montre que u_n est plat. Par suite $\mathrm{N}_n = \mathrm{Ker}(u_n)$ est plat sur A_n pour tout $n \geqslant 0$. Ceci entraîne que N est plat sur A. On a déjà signalé en 9.3 que le quotient G/N est représentable par un A–schéma en groupes plat de type fini sur A. Il vient un monomorphisme de A-schémas en groupes $j : \mathrm{G}/\mathrm{N} \to \widetilde{\mathrm{G}}$. Le lemme 11.1.b appliqué à $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{X} = \mathrm{G}$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{K})$ indique que $\widetilde{\mathrm{G}}_{\mathrm{K}} = \mathrm{Spec}\,\Gamma(\mathrm{G}_{\mathrm{K}}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\mathrm{K}}})$. La proposition 11.18.1 montre que j_{K} est un isomorphisme. Ainsi, j_{K} et j_0 sont plats et le critère de platitude par fibres (EGA4 11.3.11) implique que j est plat. C'est donc une immersion ouverte (EGA4 17.9.1) et, j est surjectif, on conclut que $\mathrm{G}/\mathrm{N} \cong \widetilde{\mathrm{G}}$.

On suppose maintenant que G_{K} est affine. Alors $\mathrm{N}_{\mathrm{K}} = 1$. Par ailleurs, vu que $\mathrm{G}_0/\mathrm{N}_0 \cong \widetilde{\mathrm{G}}_0$, la proposition 11.18.1 indique que N_0 est lisse sur A_0. Le critère de lissité par fibres (EGA4, 17.8.2) montre que N est lisse sur A. Ainsi $\Omega^1_{\mathrm{N}/\mathrm{A}}$ est un A–module libre de rang n (SGA1 II.4.4). Mais $\Omega^1_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}}/\mathrm{K}} = \Omega^1_{\mathrm{N}/\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K} = 0$, donc $\Omega^1_{\mathrm{N}/\mathrm{A}} = 0$ et N est étale sur A. Si $\mathrm{N} = 1$, alors $\mathrm{G} \cong \widetilde{\mathrm{G}}$ est affine donc en particulier séparé. Réciproquement, si G est séparé, alors N est séparé. Vu que N est plat sur A, on conclut que $\mathrm{N} = 1$ (suivant EGA III, 1.4.15).

Corollaire 12.5.1. — [(94)] *Soit* G *un* A*-schéma en groupes de type fini plat sur* A*. Si* G *est affine aux points génériques de* Spec(A)*, alors* G *est affine sur* Spec(A) *si et seulement si* G *est séparé sur* Spec(A)*.*

PARAG OBSOLETE A SUPPRIMER

On peut supposer que A est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K. Soit π une uniformisante de A ; pour tout $n \geqslant 0$, posons $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}/\pi^{n+1}\mathrm{A}$ et soit $i_n : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_n) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ le morphisme associé. On note $\mathrm{H}/\mathrm{A} = \mathrm{Spec}(\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}))$; c'est un A-schéma en groupes affine et plat (puisque sans torsion), mais *a priori*

---

(94) N.D.E. : Pour une autre démonstration de ce corollaire, le lecteur pourra consulter [**An73**, Prop. 2.3.1] et [**PY06**, Prop. 3.1].

non nécessairement de type fini. On note $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ le morphisme canonique et $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(u)$ son noyau. Nous allons montrer que N est plat. Vu que H est séparé, N est un sous-schéma en groupes fermé de G.

Le changement de base i_n donne lieu à un morphisme de A_n-schémas en groupes $u_n : \mathrm{G}_n \to \mathrm{H}_n$, de noyau N_n. La suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \xrightarrow{\times\pi} \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \longrightarrow i_{0,*}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}_0}) \longrightarrow 0$$

produit une injection $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})/\pi\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{G}_0})$; en d'autres termes,

$$u_0^* : \mathrm{H}^0(\mathrm{H}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{H}_0}) \cong \mathrm{H}^0(\mathrm{H}, \mathscr{O}_{\mathrm{H}})/\pi\mathrm{H}^0(\mathrm{H}, \mathscr{O}_{\mathrm{H}}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{G}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{G}_0})$$

est injective. L'extension (4) du théorème 11.17 montre que l'on a un isomorphisme $\mathrm{G}_0/\mathrm{N}_0 \cong \mathrm{H}_0$. En particulier, H_0 est un A_0-groupe affine algébrique. On fixe un entier $n \geqslant 1$, nous allons montrer que u_n est plat. Tout d'abord, le lemme de Nakayama nilpotent implique que H_n est de type fini sur A_n, donc de présentation finie. Le morphisme u_n est donc un morphisme de présentation finie. Vu que u_0 est plat, le critère de platitude par fibres (EGA IV, Corollaire 11.3.11, (a) $\Longrightarrow$ (b)) montre que u_n est plat. Par suite $\mathrm{N}_n = \mathrm{Ker}(u_n)$ est plat sur A_n pour tout $n \geqslant 0$. Ceci entraîne que N est plat sur A. Vu que G est séparé de type fini sur A, on sait alors que la formation de l'enveloppe affine commute aux changements de base plats (EGA III 1.4.15). Par suite $\mathrm{G}_\mathrm{K} \cong \mathrm{H}_\mathrm{K}$ et $\mathrm{N}_\mathrm{K} = 1$. Vu que N est fermé dans G séparé sur A, on conclut que $\mathrm{N} = 1$ et $\mathrm{G} \cong \mathrm{H}$.

On montre alors la proposition suivante (Remarque 11.11.1).

Proposition 12.6. — *Soient* S *un schéma localement noethérien régulier de dimension* $\leqslant 1$, G *un* S*-préschéma en groupes plat, quasi-séparé et quasi-compact sur* S. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine sur* S.

(ii) G *est quasi-affine sur* S.

(iii) *On peut faire opérer* G *fidèlement sur un* S*-schéma quasi-affine.*

(iv) *On peut faire opérer* G *fidèlement sur un module quasi-cohérent plat sur* S.

Si de plus G/S *est de type fini sur* S *noethérien, ces conditions sont aussi équivalentes à :*

(v) G *est isomorphe à un sous-schéma en groupes fermé d'un* $\underline{\mathrm{Aut}}_\mathrm{V}$, *où* V *est un module localement libre de type fini sur* S.

Comme dans le cas d'un corps, on a (i) $\Rightarrow$ (ii) trivialement, et (ii) $\Rightarrow$ (iii), car G opère fidèlement sur lui-même par translations à gauche. Montrons (iii) $\Rightarrow$ (i), en supposant donc que G opère fidèlement sur X quasi-affine sur S. L'adhérence de la section unité de G est alors fermée dans G, donc G est séparé. Le cas des corps (11.11) montre que G est génériquement affine et le théorème 12.5 montre que G/S est affine, c'est-à-dire l'assertion (i). Il reste à voir que (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Si G/S est affine et plat, le groupe G opère fidèlement sur $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ qui est un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module quasi-cohérent plat, c'est-à-dire (iv). Réciproquement, supposons que G agisse fidèlement sur un module quasi-cohérent M plat sur S. Montrons tout d'abord que G est séparé. Notons $\mathrm{G}_0 \subset \mathrm{G}$

l'adhérence schématique de la section unité de G. Suivant (VII.7.1), [95] G_0 est un sous-schéma fermé invariant de G, donc plat sur S. Le corollaire 11.10 montre que M est limite inductive d'une famille filtrante croissante de sous-$\mathscr{O}_S$-modules M_i de M de type finis munis d'une action de G. La restriction de $G \to \underline{\mathrm{Aut}}_{M_i}$ à G_0 est triviale, donc G_0 agit trivialement sur M. Par suite, $G_0 = 1_S$, G est donc séparé sur S. Le théorème 12.5 permet de conclure que G est affine sur S.

Supposons maintenant que G/S soit de type fini sur S noethérien et satisfasse les conditions précédentes. En particulier, G est affine et opère fidèlement sur lui-même. Alors, en vertu de la remarque 11.10.1, la $\mathscr{O}_S$-algèbre $\mathscr{A}(G)$ est engendrée par un sous-$\mathscr{O}_S$ module quasi-cohérent de type fini V de $\mathscr{A}(G)$ qui est stable par G. Vu les hypothèses sur G/S, V est localement libre. La proposition (12.2) entraîne alors que le morphisme $G \to \underline{\mathrm{Aut}}_V$ est une immersion fermée, ce qui prouve que (iv) $\Rightarrow$ (v). Enfin, on a (v) $\Rightarrow$ (i) de façon triviale.

13. Espaces homogènes

13.1.

Lemme 13.1.1. — *blabla*

Théorème 13.1.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes* plat et localement de présentation finie *sur* S (*resp.* lisse *sur* S), X *un* G*-espace homogène pour la topologie* (fppf). *On suppose de plus vérifiée l'une des conditions suivantes :*

a) X *est un* G*-torseur.*

b) S *est localement noethérien.*

c) X *est localement de type fini sur* S*.*

d) X *est, localement pour la topologie* (fppf)*, quotient de* G *par un sous-schéma en groupes* H*,* localement de présentation finie *sur* S*.*

Alors X *est* plat et localement de présentation finie *sur* S (*resp.* lisse *sur* S) *et, localement pour la topologie* (fppf)*, est isomorphe au quotient de* G *par un sous-schéma en groupes* H*,* localement de présentation finie *sur* S*.*

De plus, X *est* de présentation finie *sur* S *dans chacun des cas suivants :*

A $X = G/H$ *et* G *et* H *sont* de présentation finie *sur* S*.*

B G *est à fibres connexes.*

Bibliographie

[96]

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. 5, Hermann, 1964, Masson, 1985, Springer-Verlag, 2006.

[95] N.D.E. : corriger cette référence, et expliquer pourquoi G_0 est plat : sous-groupe ouvert ?

[96] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

[An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.

[Ba55] I. Barsotti, *Un teorema di struttura per le varietà gruppali*, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **18** (1955), 43-50.

[Br07] M. Brion, *Anti-affine algebraic groups*, preprint, arXiv : 0710.5211.

[BT84] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local* II, Publ. Math. I.H.E.S. **60** (1984), 197-376.

[Che60] C. Chevalley, *Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques*, J. Maths. Pure Appl. **39** (1960), 307-317.

[Co02] B. Conrad, *A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups*, J. Ramanujan Math. Soc. **17** (2002), 1-18.

[DM82] P. Deligne, J. S. Milne, *Tannakian categories*, pp. 111-128 *in* Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, Lect. Notes Maths. **900**, Springer-Verlag, 1982.

[De90] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, pp. 111-195 *in* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Birkhäuser, 1990.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[La69] D. Lazard, *Autour de la platitude*, Bull. Soc. Math. France **97** (1969), 81-128.

[Ma07] B. Margaux, *Passage to the Limit in Non-Abelian Čech Cohomology*, J. Lie Theory **17** (2007), 591-596.

[Per76] D. Perrin, *Approximation des schémas en groupes, quasi-compacts sur un corps*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 323-335.

[Pes66] C. Peskine, *Une généralisation du « Main Theorem » de Zariski*, Bull. Sci. Math. **90** (1966), 119-127.

[PY06] G. Prasad, J.-K. Yu, *On quasi-reductive group schemes*, J. Alg. Geom. **15** (2006), 507-549.

[Ray70a] M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lect. Notes Maths. **119**, Springer-Verlag, 1970.

[Ray70b] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lect. Notes Maths. **169**, Springer-Verlag, 1970.

[RG71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. math. **13** (1971), 1-89.

[Ro56] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math. **78** (1956), 401-443.

[SR72] N. Saavedra Rivano, *Catégories tannakiennes*, Lect. Notes Math. **265**, Springer-Verlag, 1972.

[SS01] C. Sancho de Salas, *Grupos algebraicos y teoría de invariantes*, Aport. Mat. Textos **16**, Soc. Mat. Mexicana, 2001.

[SS08] C. Sancho de Salas, F. Sancho de Salas, *Principal bundles, quasi-abelian varieties and structure of algebraic groups*, preprint, arXiv : 0806.3712.

[Se99] C. S. Seshadri, *Chevalley : some reminiscences*, Transform. Groups **4** (1999), n^{os} 2-3, 119-125.