

## EXPOSÉ III

### EXTENSIONS INFINITÉSIMALES

par M. DEMAZURE

Dans cet exposé, on se place dans la situation générale suivante. On a un préschéma  $S$  et un idéal cohérent nilpotent  $\mathcal{I}$  sur  $S$ . On désigne par  $S_n$  le sous-préschéma fermé de  $S$  défini par l'idéal  $\mathcal{I}^{n+1}$  ( $n \geq 0$ ). En particulier  $S_0$  est défini par  $\mathcal{I}$ . Comme  $\mathcal{I}$  est nilpotent,  $S_n$  est égal à  $S$  pour  $n$  assez grand et les  $S_i$  ont même espace topologique sous-jacent. Un exemple typique de cette situation est le suivant :  $S$  est le spectre d'un anneau artinien local  $A$ ,  $\mathcal{I}$  est l'idéal défini par le radical de  $A$ , donc  $S_0$  est le spectre du corps résiduel de  $A$ . 83

Dans la situation précédente, on se donne un certain nombre de données au-dessus de  $S_0$  et on cherche au-dessus de  $S$  des données qui les relèvent, c'est-à-dire qui les redonnent par changement de base de  $S$  à  $S_0$ . Ceci se fait de proche en proche, par l'intermédiaire des  $S_n$ . À chaque pas, on se propose de définir les obstructions rencontrées et de classifier, lorsqu'elles existent, les solutions obtenues.

Le passage de  $S_n$  à  $S_{n+1}$  peut se généraliser ainsi : on a un préschéma  $S$ , deux idéaux  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  avec  $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{J}$ , et  $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$  (dans le cas précédent  $S$ ,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  sont respectivement  $S_{n+1}$ ,  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+2}$ ,  $\mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}$ ). On note  $S_0$  (resp.  $S_{\mathcal{J}}$ ) le sous-préschéma fermé de  $S$  défini par  $\mathcal{I}$  (resp.  $\mathcal{J}$ ) et on se pose un problème d'extension de  $S_{\mathcal{J}}$  à  $S$ .

Dans SGA 1 III ont été traités les problèmes d'extension de morphismes de préschémas et d'extension de préschémas. Nous nous poserons ici les problèmes d'extension de morphismes de groupes, d'extension de structures de groupes et d'extension de sous-groupes. 84

Nous avons rassemblé dans un n°0 les résultats de SGA 1 III qui nous seront utiles, pour les mettre sous la forme la plus pratique pour notre propos, et pour éviter au lecteur d'avoir à se reporter constamment à SGA 1 III. <sup>(1)</sup> Le n°1 rassemble des calculs de cohomologie des groupes utiles par la suite et qui n'ont rien à voir avec la théorie des

---

<sup>(0)</sup>version 1.0 du 20/1/2010 : modif. dans 0.1–0.14, 2.1–2.3 et 4.1–4.17 ; 0.8, 4.22 et 4.37 à revoir ...

<sup>(1)</sup>N.D.E. : Le lecteur pourra préférer commencer par la lecture de la section 1, plus facile, qui peut servir de motivation et de guide pour les résultats obtenus dans la section 0.

schémas. Les numéros 2 et 3 traitent respectivement de l'*extension des morphismes de groupes* et de l'*extension des structures de groupes*. Dans le n°4, nous avons rappelé rapidement la démonstration d'un résultat énoncé dans TDTE IV concernant l'extension des sous-préschémas et appliqué ce résultat au problème d'*extension des sous-groupes*. Pour la suite du Séminaire, seul le résultat du n°2, concernant l'*extension des morphismes de groupes*, sera indispensable. <sup>(2)</sup>

L'idée de ramener les problèmes d'extensions infinitésimales aux calculs habituels de cohomologie dans les extensions de groupes a été suggérée par J. Giraud lors de l'exposé oral (dont les calculs étaient nettement plus compliqués et moins transparents). Malheureusement, il semble que cette méthode ne s'applique bien qu'aux deux premiers problèmes étudiés, et nous n'avons pu échapper à des calculs assez pénibles dans le cas des extensions de sous-groupes.

Pour simplifier le langage, nous appellerons Y-foncteur, resp. Y-préschéma, etc., un foncteur, resp. préschéma, etc., muni d'un morphisme dans le foncteur Y, étendant ainsi les définitions de l'exposé I (qui ne concernaient que le cas d'un Y représentable).

## 0. Rappels de SGA 1 III et remarques diverses

85

Énonçons d'abord une définition générale.

**Définition 0.1.** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie, X un objet de  $\widehat{\mathcal{C}}$ , G un  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe opérant sur X. On dit que X est *formellement principal homogène* <sup>(3)</sup> sous G si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

- (i) pour chaque objet S de  $\mathcal{C}$ , l'ensemble X(S) est vide ou principal homogène sous G(S) ;
- (ii) le morphisme de foncteurs  $G \times X \rightarrow X \times X$  défini ensemblistement par  $(g, x) \mapsto (gx, x)$  est un isomorphisme.

Ceci fait, nous allons mettre les résultats de SGA 1 III §5 <sup>(4)</sup> sous la forme qui nous sera la plus utile. Nous emploierons les notations générales suivantes dans tout ce numéro. On a un préschéma S et sur S deux idéaux quasi-cohérents  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  tels que

$$\mathcal{I} \supseteq \mathcal{J} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0.$$

On aura donc en particulier  $\mathcal{J}^2 = 0$ . On notera  $S_0$  (resp.  $S_{\mathcal{J}}$ ) le sous-préschéma fermé de S défini par l'idéal  $\mathcal{I}$  (resp.  $\mathcal{J}$ ). Pour tout S-foncteur X, on désignera systématiquement par  $X_0$  et  $X_{\mathcal{J}}$  les foncteurs obtenus par changement de base de S à  $S_0$  et  $S_{\mathcal{J}}$ . Mêmes notations pour un morphisme.

<sup>(2)</sup>N.D.E. : 4.37 est utilisé dans la preuve de IX, 3.2 bis et 3.6 bis, mais ceux-ci se déduisent aussi de résultats de l'Exp. X, n'utilisant pas 4.37.

<sup>(3)</sup>N.D.E. : On dit aussi « pseudo-torseur », cf. EGA IV<sub>4</sub>, 16.5.15. D'autre part, la notion plus générale d'objet *formellement homogène* (pas nécessairement *principal homogène*), est donnée dans l'Exp. VI<sub>B</sub>, 5.2.1.

<sup>(4)</sup>N.D.E. : voir aussi EGA IV<sub>4</sub>, 16.5.14–18.

**Définition 0.1.1.** — <sup>(5)</sup> Soit  $X$  un  $S$ -foncteur. Définissons un foncteur  $X^+$  au-dessus de  $S$  par la formule :

$$\mathrm{Hom}_S(Y, X^+) = \mathrm{Hom}_{S_{\mathcal{J}}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}}) = \mathrm{Hom}_S(Y_{\mathcal{J}}, X)$$

pour un  $S$ -préschéma variable  $Y$ . Dans les notations de Exp. II, 1, on a

$$X^+ \simeq \prod_{S_{\mathcal{J}}/S} X_{\mathcal{J}}.$$

Le morphisme identique de  $X_{\mathcal{J}}$  définit par construction un  $S$ -morphisme :

$$p_X : X \longrightarrow X^+.$$

86

<sup>(6)</sup> Explicitement, pour tout  $S$ -préschéma  $Y$ , l'application

$$p_X(Y) : \mathrm{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Y, X^+) = \mathrm{Hom}_S(Y_{\mathcal{J}}, X)$$

est l'application induite par le morphisme  $Y_{\mathcal{J}} \rightarrow Y$ .

**Remarque 0.1.2.** — Remarquons maintenant que si  $X$  est un  $S$ -foncteur en groupes,  $X_{\mathcal{J}}$  est un  $S_{\mathcal{J}}$ -foncteur en groupes; alors la formule de définition de  $X^+$  le munit d'une structure de  $S$ -foncteur en groupes, et la description de  $p_X$  ci-dessus montre que  $p_X : X \rightarrow X^+$  est un morphisme de  $S$ -foncteurs en groupes.

**Remarque 0.1.3.** — D'autre part, pour tout  $S$ -foncteur en groupes  $Y$ , on a :

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(Y, X^+) = \mathrm{Hom}_{S_{\mathcal{J}}\text{-gr.}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}}).$$

En effet, soit  $f \in \mathrm{Hom}_S(Y, X^+)$ , correspondant à  $f_{\mathcal{J}} \in \mathrm{Hom}_{S_{\mathcal{J}}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}})$ ; la condition pour que  $f \in \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(Y, X^+)$  est que, pour tout  $T \rightarrow S$  et  $y, y' \in Y(T)$ , on ait  $f(y \cdot y') = f(y) \cdot f(y')$ , et ceci équivaut à

$$f_{\mathcal{J}}(y_{\mathcal{J}}) \cdot f_{\mathcal{J}}(y'_{\mathcal{J}}) = f_{\mathcal{J}}((y \cdot y')_{\mathcal{J}});$$

comme  $(y \cdot y')_{\mathcal{J}} = y_{\mathcal{J}} \cdot y'_{\mathcal{J}}$  (puisque  $Y(T) \rightarrow Y(T_{\mathcal{J}}) = Y_{\mathcal{J}}(T_{\mathcal{J}})$  est un morphisme de groupes), ceci est la condition pour que  $f_{\mathcal{J}}$  soit un morphisme de groupes. Appliquant ceci à  $Y = X$ , on retrouve que  $p_X$ , qui correspond à  $\mathrm{id}_{X_{\mathcal{J}}}$ , est un morphisme de  $S$ -foncteurs en groupes.

Revenons maintenant au cas général, mais supposons que  $X$  soit un  $S$ -préschéma. Un  $S$ -morphisme d'un  $S$ -préschéma variable  $Y$  dans  $X^+$  étant par définition un  $S_{\mathcal{J}}$ -morphisme  $g_{\mathcal{J}}$  de  $Y_{\mathcal{J}}$  dans  $X_{\mathcal{J}}$ , on va définir un  $X^+$ -foncteur en groupes abéliens  $L_X$  comme suit.

**Scholie 0.1.4.** — <sup>(7)</sup> Si  $\pi : Y \rightarrow S$  est un morphisme de préschémas et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module, on note  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y$  l'image inverse  $\pi^*(\mathcal{M})$ . Si  $\mathcal{J}$  est un idéal de  $\mathcal{O}_S$ , on note  $\mathcal{J}\mathcal{O}_Y$  l'idéal de  $\mathcal{O}_Y$ , image du morphisme

$$\pi^*(\mathcal{J}) = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y.$$

<sup>(5)</sup>N.D.E. : On a ajouté la numérotation 0.1.1, ..., 0.1.13 pour mettre en évidence les définitions et résultats qui s'y trouvent.

<sup>(6)</sup>N.D.E. : On a ajouté la phrase suivante, et détaillé les deux remarques qui suivent.

<sup>(7)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce scholie.

Notons que, pour tout morphisme de S-préschémas  $f : Z \rightarrow Y$ , on a un épimorphisme de  $\mathcal{O}_Z$ -modules :

$$(0.4.1) \quad f^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{J}\mathcal{O}_Z,$$

comme il résulte du diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z & \xlongequal{\quad} & \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_Y) = (\mathcal{J}\mathcal{O}_Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z & \longrightarrow & \mathcal{J}\mathcal{O}_Z. \end{array}$$

**Définition 0.1.5.** — <sup>(8)</sup> Soit  $X$  un S-préschéma. Pour tout  $X^+$ -préschéma  $Y$ , donné par un morphisme  $g_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \rightarrow X_{\mathcal{J}}$ , on pose :

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Y, L_X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Y),$$

où  $\Omega_{X_0/S_0}^1$  désigne le module des différentielles relatives de  $X_0$  par rapport à  $S_0$  (cf. SGA 1, I.1 ou EGA IV<sub>4</sub>, 16.3), et où on regarde  $\mathcal{J}\mathcal{O}_Y$  comme un  $\mathcal{O}_{Y_0}$ -module grâce au fait qu'il est annulé par  $\mathcal{I}$ .

Alors,  $L_X$  est un  $X^+$ -foncteur en groupes abéliens. <sup>(9)</sup> En effet, pour tout  $X^+$ -morphisme  $f : Z \rightarrow Y$ , le foncteur  $f_0^*$  et le morphisme  $f_0^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{J}\mathcal{O}_Z$  de (0.4.1) induisent un morphisme naturel de groupes abéliens  $L_X(f)$  :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Z_0}}(f_0^*g_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), f_0^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_Y)) \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Z_0}}(f_0^*g_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Z). \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que  $L_X(f)$  se décrit de manière locale simplement comme suit. Notons d'abord que  $Y$  et  $Y_{\mathcal{J}}$  ont même espace topologique sous-jacent, et il en est de même de  $V$  et  $V_{\mathcal{J}}$ , si  $V$  est un ouvert de  $Y$ . Soient alors  $U = \mathrm{Spec}(A)$  un ouvert affine de  $X$  au-dessus d'un ouvert affine  $\mathrm{Spec}(\Lambda)$  de  $S$ ,  $V = \mathrm{Spec}(B)$  un ouvert affine de  $Y$  tel que  $g_{\mathcal{J}}(V_{\mathcal{J}}) \subseteq U$ , et  $W = \mathrm{Spec}(C)$  un ouvert affine de  $f^{-1}(V)$ . Soient  $J$  et  $I$  les idéaux de  $\Lambda$  correspondant à  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{I}$ . Alors  $f$  (resp.  $g_{\mathcal{J}}$ ) induit un morphisme de  $\Lambda$ -algèbres  $\theta : B \rightarrow C$  (resp.  $\phi : A \rightarrow B/JB$ ), et l'on a évidemment  $\theta(JB) \subseteq JC$ . D'autre part,  $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{X/S}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Y)$  induit un élément  $D$  de

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V_0}}(g_0^*(\Omega_{U/S}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_V) = \mathrm{Hom}_{B/IB}(\Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A B/IB, JB) = \mathrm{Dér}_{\Lambda}(A, JB),$$

et l'image de  $L_X(f)(m)$  dans

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{W_0}}(f_0^*g_0^*(\Omega_{U/S}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Z) = \mathrm{Hom}_{C/IC}(\Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C/IC, JC) = \mathrm{Dér}_{\Lambda}(A, JC)$$

n'est autre que  $\theta \circ D$ .

<sup>(8)</sup>N.D.E. : L'introduction du foncteur  $L_X$  conduit à une extension « fonctorielle en  $Y$  » (et en  $X$ ) de SGA 1, III, Prop. 5.1; voir plus bas 0.1.8 et 0.1.9, ainsi que 0.1.10 et 0.2. De plus, lorsque  $X$  est un S-foncteur en groupes,  $L_X$  donne naissance, sous certaines hypothèses, à un S-foncteur en groupes  $L'_X$  et à une suite exacte  $1 \rightarrow L'_X \rightarrow X \rightarrow X^+$  (cf. 0.4, 0.9 et 0.11), qui jouent un rôle essentiel dans cet exposé (cf. Théorèmes 2.1, 3.5 et 4.21).

<sup>(9)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

**Remarque 0.1.6.** — <sup>(10)</sup> Soit  $f : X \rightarrow W$  un  $S$ -morphisme. Il induit un  $S$ -morphisme  $f^+ : X^+ \rightarrow W^+$  défini comme suit : si  $g$  est un élément de  $\text{Hom}_S(Y, X^+)$ , correspondant à un  $S$ -morphisme  $g_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \rightarrow X$ , alors  $f^+(g)$  est l'élément  $f \circ g_{\mathcal{J}}$  de  $\text{Hom}_S(Y, W^+)$ . Il est clair que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & W \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_W \\ X^+ & \xrightarrow{f^+} & W^+ \end{array} .$$

**Rappels 0.1.7.** — <sup>(11)</sup> Dans ce paragraphe, étant donné un  $S$ -préschéma  $X$ , on « rappelle » certaines propriétés fonctorielles du module des différentielles  $\Omega_{X/S}^1$  et du premier voisinage infinitésimal de la diagonale,  $\Delta_{X/S}^{(1)}$ , propriétés qui découlent facilement de EGA IV<sub>4</sub>, §§ 16.1–16.4, mais qui n'y figurent pas explicitement.

a) Commençons par rappeler les faits suivants (cf. EGA II, §§ 1.2–1.5). Soient  $g : Y \rightarrow X$  un morphisme de préschémas,  $\pi : X' \rightarrow X$  un  $X$ -préschéma *affine*,  $\mathcal{B}$  la  $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente  $\pi_*(\mathcal{O}_{X'})$ ; alors le  $Y$ -préschéma  $Y \times_X X'$  est affine et correspond à la  $\mathcal{O}_Y$ -algèbre quasi-cohérente  $g^*(\mathcal{B})$ , et l'on a un diagramme commutatif de bijections :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_X(Y, X') & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_Y(Y, Y \times_X X') \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg.}}(\mathcal{B}, g_*(\mathcal{O}_Y)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-alg.}}(g^*(\mathcal{B}), \mathcal{O}_Y) \end{array}$$

De plus, ces bijections sont fonctorielles en le couple  $(X, X')$ , c.-à-d., si  $W'$  est un  $W$ -préschéma affine, correspondant à la  $\mathcal{O}_W$ -algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{A}$ , si l'on a un diagramme commutatif de morphismes de préschémas :

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & \xrightarrow{f'} & W' \\ & g' \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

et si l'on note  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow f_*(\mathcal{B})$  et  $\phi^\sharp : f^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$  (resp.  $\theta : \mathcal{B} \rightarrow g_*(\mathcal{O}_Y)$  et  $\theta^\sharp : g^*(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{O}_Y$ ) les morphismes d'algèbres associés à  $f'$  (resp. à un  $X$ -morphisme variable  $g' : Y \rightarrow X'$ ), alors on a le diagramme commutatif suivant (où  $Y$  est vu

<sup>(10)</sup>N.D.E. : On a détaillé cette remarque.

<sup>(11)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

comme  $W$ -préchéma via  $f \circ g$  :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_X(Y, X') & \xrightarrow{g' \mapsto f' \circ g'} & \mathrm{Hom}_W(Y, W') \\
\downarrow \wr & & \searrow \simeq \\
& & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_W\text{-alg.}}(\mathcal{A}, f_* g_*(\mathcal{O}_Y)) \\
& \nearrow \theta \mapsto f_*(\theta) \circ \phi & \downarrow \wr \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg.}}(\mathcal{B}, g_*(\mathcal{O}_Y)) & \xrightarrow{\theta \mapsto \theta \circ \phi^\#} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg.}}(f^*(\mathcal{A}), g_*(\mathcal{O}_Y)) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-alg.}}(g^*(\mathcal{B}), \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\theta^\# \mapsto \theta^\# \circ g^*(\phi^\#)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-alg.}}(g^* f^*(\mathcal{A}), \mathcal{O}_Y).
\end{array}$$

b) Soit maintenant  $X$  un  $S$ -préchéma. Soient  $\Omega_{X/S}^1$  le module des différentielles de  $X$  sur  $S$ , et  $\Delta_{X/S}^{(1)}$  le premier voisinage infinitésimal de l'immersion diagonale  $\delta_X : X \rightarrow X \times_S X$ ; c'est un sous-préchéma de  $X \times_S X$ , dont la diagonale  $\Delta_{X/S}$  est un sous-préchéma fermé. On note  $\mathrm{pr}_X^i$  ( $i = 1, 2$ ) les deux projections  $X \times_S X$ , et  $\pi_X$  la restriction de  $\mathrm{pr}_X^1$  à  $\Delta_{X/S}^{(1)}$ .

D'une part, tout morphisme  $f : X \rightarrow W$  de  $S$ -préchémas induit un  $S$ -morphisme  $\Delta^{(1)} f : \Delta_{X/S}^{(1)} \rightarrow \Delta_{W/S}^{(1)}$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\delta_X} & \Delta_{X/S}^{(1)} & \longrightarrow & X \times_S X & \xrightarrow{\mathrm{pr}_X^i} & X \\
\downarrow f & & \downarrow \Delta^{(1)} f & & \downarrow f \times f & & \downarrow f \\
W & \xrightarrow{\delta_W} & \Delta_{W/S}^{(1)} & \longrightarrow & W \times_S W & \xrightarrow{\mathrm{pr}_W^i} & W
\end{array}$$

D'autre part,  $\Delta_{X/S}^{(1)}$  est, via la projection  $\pi_X$ , un  $X$ -schéma affine, spectre de la  $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente augmentée

$$\mathcal{P}_{X/S}^1 = \mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/S}^1,$$

où  $\Omega_{X/S}^1$  est un idéal de carré nul; l'augmentation est le morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres  $\varepsilon_X : \mathcal{P}_{X/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_X$  qui s'annule sur  $\Omega_{X/S}^1$  et qui correspond à l'immersion fermée  $\delta_X : X \hookrightarrow \Delta_{X/S}^{(1)}$ . Alors, tout morphisme de  $S$ -préchémas  $f : X \rightarrow W$  induit un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres augmentées

$$f^*(\mathcal{P}_{W/S}^1) = \mathcal{O}_X \oplus f^*(\Omega_{W/S}^1) \longrightarrow \mathcal{P}_{X/S}^1 = \mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/S}^1$$

c.-à-d., de façon équivalente, un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules

$$f_{X/W/S} : f^*(\Omega_{W/S}^1) \longrightarrow \Omega_{X/S}^1,$$

cf. EGA IV<sub>4</sub> (16.4.3.6) (et (16.4.18.2) pour la notation  $f_{X/W/S}$ ).

Comme  $\pi_X : \Delta_{X/S}^{(1)} \rightarrow X$  est affine alors, d'après a),  $\Delta^{(1)}f$  est entièrement déterminé par  $f_{X/W/S}$  et, pour tout  $X$ -préschéma  $g : Y \rightarrow X$ , l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_X(Y, \Delta_{X/S}^{(1)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-alg.}}(\mathcal{O}_Y \oplus g^*(\Omega_{X/S}^1), \mathcal{O}_Y)$$

s'identifie à un sous-ensemble de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(g^*(\Omega_{X/S}^1), \mathcal{O}_Y)$ , à savoir le sous-ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}^{\square}(g^*(\Omega_{X/S}^1), \mathcal{O}_Y)$$

formé des  $\mathcal{O}_Y$ -morphisms  $\psi : g^*(\Omega_{X/S}^1) \rightarrow \mathcal{O}_Y$  tels que  $\mathrm{Im}(\psi)$  soit un idéal de  $\mathcal{O}_Y$  de carré nul. <sup>(12)</sup>

Par conséquent, appliquant a) au diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Delta_{X/S}^{(1)} & \xrightarrow{\Delta^{(1)}f} & \Delta_{W/S}^{(1)} \\ & \nearrow g' & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

et tenant compte du fait que  $\Delta^{(1)}f$  est la restriction à  $\Delta_{X/S}^{(1)}$  de  $f \times f$ , on obtient le diagramme commutatif suivant, fonctoriel en le  $X$ -préschéma  $Y \xrightarrow{g} X$  :

$$(0.1.7 (*)) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_X(Y, X \times_S X) & \xrightarrow{(g, g') \mapsto (f \circ g, f \circ g')} & \mathrm{Hom}_W(Y, \Delta_{W/S}^{(1)}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Hom}_X(Y, \Delta_{X/S}^{(1)}) & \xrightarrow{g' \mapsto (\Delta^{(1)}f) \circ g'} & \mathrm{Hom}_W(Y, \Delta_{W/S}^{(1)}) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}^{\square}(g^*(\Omega_{X/S}^1), \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\psi \mapsto \psi \circ g^*(f_{X/W/S})} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}^{\square}(g^*f^*(\Omega_{W/S}^1), \mathcal{O}_Y). \end{array}$$

Terminons ce paragraphe avec la remarque suivante, qui sera utile plus loin (cf. 0.1.10). Si on note  $L_X^{\square}$  le  $X$ -foncteur qui à tout  $X$ -préschéma  $g : Y \rightarrow X$  associe  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}^{\square}(g^*(\Omega_{X/S}^1), \mathcal{O}_Y)$ , et  $L_f^{\square} : L_X^{\square} \rightarrow L_W^{\square}$  le morphisme de foncteurs défini plus haut (qui à tout  $\psi \in L_X^{\square}(Y)$  associe  $\psi \circ g^*(f_{X/W/S})$ ), ce qui précède montre que l'on a un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccccc} X \times_X L_X^{\square} & \xleftarrow{\sim} & \Delta_{X/S}^{(1)} \subset & \longrightarrow & X \times_S X \\ f \times L_f^{\square} \downarrow & & \downarrow \Delta^{(1)}f & & \downarrow f \times f \\ W \times_W L_W^{\square} & \xleftarrow{\sim} & \Delta_{W/S}^{(1)} \subset & \longrightarrow & W \times_S W. \end{array}$$

<sup>(12)</sup>N.D.E. : Dans la démonstration de SGA 1, III.5.1, il faut corriger en conséquence la phrase « Or les homomorphismes d'algèbres  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_Y$  correspondent ... » (la suite de *loc. cit.* étant inchangée).

**Théorème 0.1.8.** — (SGA 1, III.5.1) <sup>(13)</sup> Soient  $Y, X$  deux  $S$ -préschémas,  $\mathfrak{J}$  un idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_Y$  de carré nul,  $Y_{\mathfrak{J}}$  le sous-préschéma fermé de  $Y$  défini par  $\mathfrak{J}$ , et  $g_{\mathfrak{J}} : Y_{\mathfrak{J}} \rightarrow X$  un  $S$ -morphisme.

a) L'ensemble  $P(g_{\mathfrak{J}})$  des  $S$ -morphisms  $g : Y \rightarrow X$  qui prolongent  $g_{\mathfrak{J}}$  est soit vide, soit principal homogène sous le groupe abélien

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}}}(g_{\mathfrak{J}}^*(\Omega_{X/S}^1), \mathfrak{J}).$$

b) Si  $i : Y_0 \hookrightarrow Y_{\mathfrak{J}}$  est l'immersion fermée définie par un idéal quasi-cohérent  $\mathfrak{I} \supseteq \mathfrak{J}$  tel que  $\mathfrak{I}\mathfrak{J} = 0$ , et si  $g_0 = g_{\mathfrak{J}} \circ i$ , le groupe abélien précédent est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{X/S}^1), \mathfrak{I}).$$

*Démonstration.* (b) se déduit aussitôt de (a). En effet,  $\mathfrak{I}$ , étant annulé par  $\mathfrak{J}$ , peut être considéré comme un  $\mathcal{O}_{Y_0}$ -module, d'où, par adjonction :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}}}(g_{\mathfrak{J}}^*(\Omega_{X/S}^1), \mathfrak{I}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(i^*g_{\mathfrak{J}}^*(\Omega_{X/S}^1), \mathfrak{I}).$$

Pour démontrer (a), on peut supposer  $P(g_{\mathfrak{J}}) \neq \emptyset$ , i.e. qu'il existe un  $S$ -morphisme  $g : Y \rightarrow X$  prolongeant  $g_{\mathfrak{J}}$ . Notons  $j$  l'immersion  $Y_{\mathfrak{J}} \hookrightarrow Y$ . Alors,  $P(g_{\mathfrak{J}})$  est l'ensemble des  $S$ -morphisms  $g' : Y \rightarrow X$  tels que  $g' \circ j = g_{\mathfrak{J}}$ . La donnée d'un tel  $g'$  équivaut à la donnée d'un  $S$ -morphisme

$$h : Y \longrightarrow X \times_S X$$

tel que  $\mathrm{pr}_1 \circ h = g$  et  $h_{\mathfrak{J}} = \delta \circ g_{\mathfrak{J}}$ , où  $h_{\mathfrak{J}} = h \circ j$  et  $\delta$  est l'immersion diagonale  $X \hookrightarrow X \times_S X$  :

$$\begin{array}{ccc} X \times_S X & \xleftarrow{h_{\mathfrak{J}} = \delta \circ g_{\mathfrak{J}}} & Y_{\mathfrak{J}} \\ \mathrm{pr}_1 \downarrow & \swarrow h & \downarrow j \\ X & \xleftarrow{g} & Y. \end{array}$$

Comme  $h_{\mathfrak{J}}$  se factorise par  $\delta$  et que  $Y$  est dans le premier voisinage infinitésimal de l'immersion  $j : Y_{\mathfrak{J}} \rightarrow Y$  (puisque  $\mathfrak{J}^2 = 0$ ), alors, par functorialité (cf. EGA IV<sub>4</sub>, 16.2.2 (i)), les  $h$  cherchés se factorisent, de façon unique, par  $\Delta_{X/S}^{(1)}$  (cf. 0.1.7). Posons

$$Y' = \Delta_{X/S}^{(1)} \times_X Y \quad \text{et} \quad Y'_{\mathfrak{J}} = Y' \times_Y Y_{\mathfrak{J}} = \Delta_{X/S}^{(1)} \times_X Y_{\mathfrak{J}}.$$

Alors les  $h$  cherchés sont en bijection avec les sections  $u$  de  $Y' \rightarrow Y$  qui prolongent la section  $u_{\mathfrak{J}} = (\delta \circ g_{\mathfrak{J}}, \mathrm{id})$  de  $Y'_{\mathfrak{J}} \rightarrow Y_{\mathfrak{J}}$ . D'autre part,  $Y'$  (resp.  $Y'_{\mathfrak{J}}$ ) est un préschéma affine sur  $Y$  (resp.  $Y_{\mathfrak{J}}$ ), correspondant à l'algèbre quasi-cohérente

$$\mathcal{A} = \mathcal{O}_Y \oplus g^*(\Omega_{X/S}^1), \quad \text{resp.} \quad \mathcal{A}_{\mathfrak{J}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}} = \mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}} \oplus g_{\mathfrak{J}}^*(\Omega_{X/S}^1).$$

Notons  $\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_Y$  l'augmentation canonique de  $\mathcal{A}$  (i.e. le morphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -algèbres  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_Y$  qui s'annule sur  $g^*(\Omega_{X/S}^1)$ ), et définissons de même  $\varepsilon_{\mathfrak{J}} : \mathcal{A}_{\mathfrak{J}} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}}$ . Alors,

$$\Gamma(Y'/Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-alg.}}(\mathcal{A}, \mathcal{O}_Y) \quad , \quad \Gamma(Y'_{\mathfrak{J}}/Y_{\mathfrak{J}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}}\text{-alg.}}(\mathcal{A}_{\mathfrak{J}}, \mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}})$$

<sup>(13)</sup>N.D.E. : On a repris ici l'énoncé et la démonstration de SGA 1, III.5.1, dont on a besoin pour démontrer la proposition 0.2 plus loin (voir déjà le corollaire 0.1.9 qui suit). D'autre part,  $\mathfrak{J}$  (resp.  $\mathcal{J}$ ) est une autre calligraphie de la lettre J (resp. I) ; revenant aux notations antérieures ( $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  idéaux de  $\mathcal{O}_S$  tels que  $\mathcal{I}\mathcal{J} = 0$ ), on appliquera ceci à  $\mathfrak{J} = \mathcal{J}\mathcal{O}_Y$  (resp.  $\mathfrak{I} = \mathcal{I}\mathcal{O}_Y$ ).

et, via ces isomorphismes, la section  $u = (\delta \circ g, \text{id})$  (resp.  $u_{\mathfrak{J}}$ ) correspond à  $\varepsilon$  (resp.  $\varepsilon_{\mathfrak{J}}$ ). Par conséquent,  $P(g_{\mathfrak{J}})$  est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'algèbres  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_Y$  qui se réduisent selon  $\varepsilon_{\mathfrak{J}}$ , et via cette bijection,  $g$  correspond à  $\varepsilon$ .

Posons  $\mathcal{M} = g^*(\Omega_{X/S}^1)$ . Alors  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-alg.}}(\mathcal{A}, \mathcal{O}_Y)$  s'identifie à l'ensemble des  $\mathcal{O}_Y$ -morphisms  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_Y$  tels que  $\text{Im}(\psi)$  soit un idéal de carré nul, et l'on s'intéresse à ceux qui induisent le morphisme nul  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}} = \mathcal{O}_Y/\mathfrak{J}$ , i.e. qui appliquent  $\mathcal{M}$  dans  $\mathfrak{J}$ . Réciproquement, comme  $\mathfrak{J}^2 = 0$ , tout  $\mathcal{O}_Y$ -morphisme  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{J}$  provient d'un (unique) morphisme d'algèbres  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ , se réduisant selon  $\varepsilon_{\mathfrak{J}}$ . Enfin, on a  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(g^*(\Omega_{X/S}^1), \mathfrak{J}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}}}(g_{\mathfrak{J}}^*(\Omega_{X/S}^1), \mathfrak{J})$  puisque  $\mathfrak{J}^2 = 0$  (cf. la démonstration de (b) déjà vue). On obtient donc une bijection

$$P(g_{\mathfrak{J}}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}}}(g_{\mathfrak{J}}^*(\Omega_{X/S}^1), \mathfrak{J})$$

par laquelle  $g$  correspond au morphisme nul.

Pour tout  $m \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{J}}}}(g_{\mathfrak{J}}^*(\Omega_{X/S}^1), \mathfrak{J})$ , notons  $m \cdot g$  l'élément de  $P(g_{\mathfrak{J}})$  associé à  $g$  et  $m$  par la bijection précédente. On a déjà vu que  $0 \cdot g = g$ ; il reste à voir que

$$(0.1.8 (*)) \quad m' \cdot (m \cdot g) = (m + m') \cdot g.$$

Ceci se vérifie localement. <sup>(14)</sup> En effet, les deux morphismes  $Y \rightarrow X$  précédents induisent la même application continue que  $g$  entre les espaces topologiques sous-jacents; il suffit donc de vérifier que pour tout ouvert affine  $U = \text{Spec}(A)$  de  $X$  au-dessus d'un ouvert affine  $\text{Spec}(\Lambda)$  de  $S$ , et tout ouvert affine  $V = \text{Spec}(B)$  de  $g^{-1}(U)$ , ils induisent le même morphisme de  $\Lambda$ -algèbres  $A \rightarrow B$ .

Soit  $J = \Gamma(V, \mathfrak{J})$  et soient  $\phi, \psi$  et  $\eta$  les morphismes  $A \rightarrow B$  induits par  $g, m \cdot g$  et  $m' \cdot (m \cdot g)$  respectivement; ils coïncident modulo  $J$ . On peut écrire de façon unique  $\psi = \phi + D$  (resp.  $\eta = \psi + D'$ ), où  $D$  (resp.  $D'$ ) est un élément de

$$\text{Dér}_{\phi}(A, J) = \{\delta \in \text{Hom}_{\Lambda}(A, J) \mid \delta(ab) = \phi(a)\delta(b) + \phi(b)\delta(a)\}$$

(resp.  $\text{Dér}_{\psi}(A, J)$ ). Mais  $\text{Dér}_{\phi}(A, J) = \text{Dér}_{\psi}(A, J)$  puisque  $J^2 = 0$ , et tous deux s'identifient à

$$\text{Hom}_{B/J}(\Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A B/J, J),$$

et via cette identification  $D$  correspond à  $m$  et  $D'$  à  $m'$ . Alors,  $\eta = \phi + D + D'$  et  $D + D'$  correspond à  $m + m'$ , d'où l'égalité (\*).

**Corollaire 0.1.9.** — <sup>(15)</sup> Soit  $X$  un  $S$ -préschéma; reprenons les notations de 0.1.5. Alors  $X$  est muni d'une opération (à gauche) du  $X^+$ -groupe abélien  $L_X$ , qui fait de  $X$  un objet formellement principal homogène sous  $L_X$  au-dessus de  $X^+$ , i.e. on a un isomorphisme de  $X^+$ -foncteurs :

$$L_X \times_{X^+} X \xrightarrow{\sim} X \times_{X^+} X$$

(défini ensemblistement par  $(m, x) \mapsto (x, m \cdot x)$ ).

<sup>(14)</sup>N.D.E. : Ce qui précède est repris presque mot-à-mot de SGA 1, III.5.1; on a détaillé ce qui suit.

<sup>(15)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce corollaire de SGA 1, III.5.1, qui démontre le point (i) de la proposition 0.2 plus loin.

*Démonstration.* Soit  $Y$  un  $X^+$ -préscéma, donné par un  $S$ -morphisme  $g_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \rightarrow X$ , et soit  $f : Z \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -préscémas. Il s'agit de montrer que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_X(Y) \times \text{Hom}_{X^+}(Y, X) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{X^+}(Y, X \times_{X^+} X) \\ L_X(f) \times f \downarrow & & \downarrow f \times f \\ L_X(Z) \times \text{Hom}_{X^+}(Z, X) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{X^+}(Z, X \times_{X^+} X) \end{array}$$

(où les flèches horizontales sont celles définies en 0.1.8).

Si  $\text{Hom}_{X^+}(Y, X) = \emptyset$ , il n'y a rien à montrer. Il suffit donc de voir que, pour tout  $S$ -morphisme  $g : Y \rightarrow X$  prolongeant  $g_{\mathcal{J}}$  et tout  $m \in L_X(Y)$ , on a :

$$(0.1.9 (*)) \quad (m \cdot g) \circ f = L_X(f)(m) \cdot (g \circ f).$$

Ces deux  $S$ -morphisms  $Z \rightarrow X$  coïncident sur  $Z_{\mathcal{J}}$  avec  $g_{\mathcal{J}} \circ f_{\mathcal{J}}$ ; en particulier, ils induisent la même application continue que  $g \circ f$  entre les espaces topologiques sous-jacents. Par conséquent, il suffit de voir que, si  $z \in Z$ ,  $y = f(z)$ ,  $x = g(y)$ , et si  $A, B, C$  désignent respectivement les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,x}$ ,  $\mathcal{O}_{Y,y}$ ,  $\mathcal{O}_{Z,z}$ , alors les morphismes  $A \rightarrow C$  induits par  $(m \cdot g) \circ f$  et  $L_X(f)(m) \cdot (g \circ f)$  coïncident. Notons  $s$  l'image de  $x$  dans  $S$ ,  $\Lambda = \mathcal{O}_{S,s}$ ,  $J$  et  $I$  les idéaux de  $\Lambda$  correspondants à  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{I}$ , et soient  $\phi, \psi : A \rightarrow B$  et  $\theta : B \rightarrow C$  les morphismes de  $\Lambda$ -algèbres induits par  $g$ ,  $m \cdot g$  et  $f$ . Alors,  $m$  induit un élément  $D$  de

$$\text{Hom}_{B/IB}(\Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A B/IB, JB) = \text{Dér}_{\Lambda}(A, JB)$$

et l'on a  $\psi = \phi + D$ ; donc  $(m \cdot g) \circ f$  correspond à  $\theta \circ \psi = \theta \circ \phi + \theta \circ D$ . Or, on a vu en 0.1.5 que  $\theta \circ D$  est l'image de  $L_X(f)(m)$  dans

$$\text{Hom}_{C/IC}(\Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C/IC, JC) = \text{Dér}_{\Lambda}(A, JC);$$

par conséquent,  $\theta \circ \phi + \theta \circ D$  est l'image de  $L_X(f)(m) \cdot (g \circ f)$ . Ceci prouve l'égalité (0.1.9 (\*)).

**Corollaire 0.1.10.** — <sup>(16)</sup> a)  $L_X$  dépend fonctoriellement de  $X$  : pour tout  $S$ -morphisme  $f : X \rightarrow W$ , il existe un  $S$ -morphisme  $L_f : L_X \rightarrow L_W$  qui est un morphisme de groupes abéliens « au-dessus de  $f^+$  », c.-à-d., le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L_X & \xrightarrow{L_f} & L_W \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^+ & \xrightarrow{f^+} & W^+ \end{array}$$

est commutatif et, pour tout  $Y \rightarrow X^+$ ,

$$L_f(Y) : \text{Hom}_{X^+}(Y, L_X) \longrightarrow \text{Hom}_{W^+}(Y, L_W)$$

(où  $Y$  est au-dessus de  $W^+$  via  $f^+$ ) est un morphisme de groupes abéliens.

<sup>(16)</sup>N.D.E. : On a détaillé la « functorialité en  $X$  » de  $L_X$ , en particulier le point b) ci-dessous.

b) De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_X \times_{X^+} X & \xrightarrow{\sim} & X \times_{X^+} X \\ L_f \times f \downarrow & & \downarrow f \times f \\ L_W \times_{W^+} W & \xrightarrow{\sim} & W \times_{W^+} W \quad . \end{array}$$

*Démonstration.* a)  $L_f$  est induit par le morphisme de  $\mathcal{O}_{X_0}$ -modules  $f_{X_0/W_0/S_0} : f_0^*(\Omega_{W_0/S_0}^1) \rightarrow \Omega_{X_0/S_0}^1$  (cf. 0.1.7 b) : pour tout  $X^+$ -préschéma  $Y$ , donné par un  $S$ -morphisme  $g_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \rightarrow X$ , on a un diagramme commutatif, fonctoriel en  $Y$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{L_f(Y)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*f_0^*(\Omega_{W_0/S_0}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{g_{\mathcal{J}}\} & \longrightarrow & \{f_{\mathcal{J}} \circ g_{\mathcal{J}}\} \end{array}$$

où  $L_f(Y)$  est l'application  $\psi \mapsto \psi \circ g_0^*(f_{X_0/W_0/S_0})$ , qui est bien un morphisme de groupes abéliens. <sup>(17)</sup>

Démontrons (b). Soit  $Y$  un  $X^+$ -préschéma ; si  $\mathrm{Hom}_{X^+}(Y, X) = \emptyset$  il n'y a rien à montrer. Soit donc  $g \in \mathrm{Hom}_{X^+}(Y, X)$  ; il faut voir que pour tout  $m \in L_X(Y)$ , on a :

$$(0.1.10 (*)) \quad f \circ (m \cdot g) = L_f(Y)(m) \cdot (f \circ g).$$

Or,  $g$  étant fixé,  $\mathrm{Hom}_X(Y, X \times_{X^+} X)$  est un sous-ensemble de  $\mathrm{Hom}_X(Y, \Delta_{X/S}^{(1)})$ ,

$$L_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(g^*(\Omega_{X/S}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_Y)$$

un sous-ensemble de  $L_X^{\square}(Y)$  (cf. 0.1.7), et  $L_f(Y)$  est la restriction à  $L_X(Y)$  de l'application  $L_f^{\square}(Y)$ . De plus, la bijection

$$L_X(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_X(Y, X \times_{X^+} X), \quad m \mapsto (g, m \cdot g)$$

est (l'inverse de) la restriction à  $L_X(Y) \subseteq L_X^{\square}(Y)$  de la bijection  $\mathrm{Hom}_X(Y, \Delta_{X/S}^{(1)}) \xrightarrow{\sim} \{g\} \times L_X^{\square}(Y)$  considérée dans 0.1.7. Par conséquent, l'égalité (0.1.10 (\*)) résulte de (0.1.7 (\*)) ; en effet, si l'on note  $g'$  le  $X$ -morphisme  $Y \rightarrow \Delta_{X/S}^{(1)}$  défini par  $(g, m \cdot g)$ , alors l'élément de  $L_W(Y)$  correspondant à  $(f \circ g, f \circ g')$  est  $L_f^{\square}(Y)(m) = L_f(Y)(m)$ , c.-à-d., on a bien

$$L_f(m) \cdot (f \circ g) = f \circ (m \cdot g).$$

<sup>(17)</sup>N.D.E. : On notera que  $L_f$  ne dépend que de  $f_0 : X_0 \rightarrow W_0$ .

**Lemme 0.1.11.** — Soient  $X, X'$  deux  $S$ -pré-schémas. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_X \times_S L_{X'} & \xrightarrow{\sim} & L_{X \times_S X'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^+ \times_S X'^+ & \xrightarrow{\sim} & (X \times_S X')^+ \end{array} .$$

<sup>(18)</sup> *Démonstration.* D'abord, pour tout  $S$ -pré-schéma  $Y$ ,  $\text{Hom}_S(Y, X^+ \times_S X'^+)$  égale  $\text{Hom}_S(Y, X^+) \times \text{Hom}_S(Y, X'^+)$  et celui-ci est isomorphe à

$$\text{Hom}_S(Y_{\mathcal{J}}, X) \times \text{Hom}_S(Y_{\mathcal{J}}, X') = \text{Hom}_S(Y, (X \times_S X')^+);$$

ceci prouve que  $X^+ \times_S X'^+ \simeq (X \times_S X')^+$ .

Ensuite, soit  $Y$  un pré-schéma au-dessus de  $X^+ \times_S X'^+$  via un morphisme  $h : Y_{\mathcal{J}} \rightarrow X \times_S X'$ ; posons  $f = p \circ h$  et  $g = q \circ h$ , où l'on a noté  $p, q$  les projections de  $X \times_S X'$  vers  $X$  et  $X'$ . Puisque  $\Omega_{(X_0 \times_{S_0} X'_0)/S_0}^1 \cong p_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1) \oplus q_0^*(\Omega_{X'_0/S_0}^1)$  (cf. EGA IV<sub>4</sub>, 16.4.23), on obtient un isomorphisme naturel :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(f_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), \mathcal{J} \mathcal{O}_Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{X'_0/S_0}^1), \mathcal{J} \mathcal{O}_Y) \\ \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(h_0^*(\Omega_{(X_0 \times_{S_0} X'_0)/S_0}^1), \mathcal{J} \mathcal{O}_Y) \end{aligned}$$

c.-à-d.,  $L_X(Y) \times L_{X'}(Y) \simeq L_{X \times_S X'}(Y)$ .

**Remarque 0.1.12.** — <sup>(19)</sup> Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie stable par produits fibrés,  $S$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $T_1, T_2$  deux objets au-dessus de  $S$  et, pour  $i = 1, 2$ ,  $L_i$  et  $X_i$  deux objets au-dessus de  $T_i$  :

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & & X_1 & & L_2 & & X_2 \\ & \searrow & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\ & & T_1 & & & & T_2 \\ & & & \searrow & & & \swarrow \\ & & & & S & & \end{array} .$$

Alors, on a un isomorphisme naturel :

$$(L_1 \times_{T_1} X_1) \times_S (L_2 \times_{T_2} X_2) \simeq (L_1 \times_S L_2) \times_{T_1 \times_S T_2} (X_1 \times_S X_2).$$

Par conséquent, on déduit du lemme précédent le :

<sup>(18)</sup>N.D.E. : On a détaillé la démonstration.

<sup>(19)</sup>N.D.E. : On a ajouté cette remarque, ainsi que le corollaire qui suit.

**Corollaire 0.1.13.** — Soient  $X_1, X_2$  deux  $S$ -préschémas. On a un diagramme commutatif d'isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} L_{X_1 \times_S X_2} \times_{(X_1 \times_S X_2)^+} (X_1 \times_S X_2) & & \\ \cong \downarrow & \searrow \cong & \\ (L_{X_1} \times_S L_{X_2}) \times_{(X_1 \times_S X_2)^+} (X_1 \times_S X_2) & \xrightarrow{\sim} & (L_{X_1} \times_{X_1^+} X_1) \times_S (L_{X_2} \times_{X_2^+} X_2). \end{array}$$

Nous pouvons maintenant énoncer :

88

**Proposition 0.2.** — Pour tout  $S$ -préschéma  $X$ , on peut définir une opération (à gauche) du  $X^+$ -groupe abélien  $L_X$  sur le  $X^+$ -objet  $X$ , telle que :

(i) cette opération fasse de  $X$  un objet formellement principal homogène sous  $L_X$  au-dessus de  $X^+$ , i.e. le morphisme

$$L_X \times_{X^+} X \longrightarrow X \times_{X^+} X$$

est un isomorphisme de  $X^+$ -foncteurs ;

(ii) cette opération soit fonctorielle en le  $S$ -préschéma  $X$ , c.-à-d., pour tout  $S$ -morphisme  $f : X \rightarrow W$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_X \times_{X^+} X & \longrightarrow & X \\ L_f \times f \downarrow & & f \downarrow \\ L_W \times_{W^+} W & \longrightarrow & W \end{array} ;$$

(iii) cette opération « commute au produit fibré », i.e. pour tous  $S$ -préschémas  $X_1$  et  $X_2$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_{X_1 \times_S X_2} \times_{(X_1 \times_S X_2)^+} (X_1 \times_S X_2) & \longrightarrow & X_1 \times_S X_2 \\ \cong \downarrow & \searrow \cong & \uparrow \\ (L_{X_1} \times_S L_{X_2}) \times_{(X_1 \times_S X_2)^+} (X_1 \times_S X_2) & \xrightarrow{\sim} & (L_{X_1} \times_{X_1^+} X_1) \times_S (L_{X_2} \times_{X_2^+} X_2). \end{array}$$

*Démonstration.* <sup>(20)</sup> (i) et (ii) découlent respectivement des corollaires 0.1.9 et 0.1.10. Pour prouver (iii), notons  $P(X) = L_X \times_{X^+} X$ , pour tout  $S$ -préschéma  $X$ . Alors, d'après (ii) appliqué aux projections  $p_i : X_1 \times_S X_2 \rightarrow X_i$ , on obtient des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} P(X_1 \times_S X_2) & \longrightarrow & X_1 \times_S X_2 \\ L_{p_i} \times p_i \downarrow & & \downarrow p_i \\ P(X_i) & \longrightarrow & X_i \end{array}$$

<sup>(20)</sup>N.D.E. : On a modifié et détaillé l'original, en tenant compte des ajouts faits précédemment ; ceux-ci incorporent le contenu de la page 89 de l'original.

pour  $i = 1, 2$ , et donc un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P(X_1 \times_S X_2) & \longrightarrow & X_1 \times_S X_2 \\ \downarrow & & \parallel \\ P(X_1) \times_S P(X_2) & \longrightarrow & X_1 \times_S X_2. \end{array}$$

Combinant ceci avec le corollaire 0.1.13, on obtient que la flèche verticale est un isomorphisme, et que l'on a le diagramme commutatif annoncé dans (iii). C.Q.F.D.

90

**Remarque 0.3.** — Supposons le  $X^+$ -préschéma  $Y$  *plat* sur  $S$  (cf. SGA 1, IV). On peut écrire alors

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Y, L_X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}).$$

**Remarque 0.4.** — Notons  $\pi_0 : X_0 \rightarrow S_0$  le morphisme structural et supposons qu'il existe un  $\mathcal{O}_{S_0}$ -module  $\omega_{X_0/S_0}^1$  tel que  $\Omega_{X_0/S_0}^1 \simeq \pi_0^*(\omega_{X_0/S_0}^1)$  (le cas se présentera en particulier lorsque  $X_0$  sera un  $S_0$ -groupe, cf. II, 4.11). Si on définit un foncteur  $L'_X$  au-dessus de  $S$  par la formule

$$(0.4.1) \quad \mathrm{Hom}_S(Y, L'_X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J} \mathcal{O}_Y),$$

on a alors  $\mathrm{Hom}_{X^+}(Y, L_X) = \mathrm{Hom}_S(Y, L'_X)$  pour tout  $X^+$ -préschéma  $Y$ , c'est-à-dire

$$L_X = L'_X \times_S X^+.$$

(<sup>21</sup>) Alors, puisque  $L_X \times_{X^+} X = L'_X \times_S X$ , l'opération de  $L_X$  sur  $X$  induit une opération de  $L'_X$  sur  $X$ , et cette opération respecte le morphisme  $p_X : X \rightarrow X^+$ ; en effet, si  $Y$  est un  $S$ -préschéma,  $h : Y \rightarrow X$  un  $S$ -morphisme et  $m$  un élément de  $L'_X(Y)$ , alors  $h$  et  $m \cdot h$  ont même restriction à  $Y_{\mathcal{J}}$ , i.e.  $p_X(m \cdot h) = p_X(h)$ .

91

**Remarque 0.5.** — Conservons les hypothèses et notations de 0.4 et supposons de plus que  $Y$  soit un  $S$ -préschéma *plat* sur  $S$ . On a alors

$$\mathrm{Hom}_{X^+}(Y, L_X) = \mathrm{Hom}_S(Y, L'_X) = \mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0, L_{0X}),$$

où le  $S_0$ -foncteur en groupes abéliens  $L_{0X}$  est défini par l'identité (par rapport au  $S_0$ -préschéma variable  $T$ ) suivante :

$$(0.5.1) \quad \mathrm{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T).$$

Dans les notations de II, 1, on a donc montré que les foncteurs  $L'_X$  et  $\prod_{S_0/S} L_{0X}$  ont même restriction à la sous-catégorie pleine de  $(\mathbf{Sch})/S$  dont les objets sont les  $S$ -préschémas  $Y$  *plats* sur  $S$ .

**Remarque 0.6.** — Conservons les hypothèses et notations de 0.5 (<sup>22</sup>) et supposons de plus qu'il existe une section  $\varepsilon_0$  de  $\pi_0 : X_0 \rightarrow S_0$ , on a alors  $\omega_{X_0/S_0}^1 \simeq \varepsilon_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1)$ . D'abord, on a (indépendamment de l'hypothèse précédente) :

$$\mathrm{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) = \Gamma(T, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(\omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T)).$$

(<sup>21</sup>)N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(<sup>22</sup>)N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse qui suit, implicite dans l'original.

Supposons maintenant que  $\omega_{X_0/S_0}^1$  admette une présentation finie (cf. EGA 0<sub>I</sub>, 5.2.5), ce qui sera en particulier le cas si  $X_0$  est *localement de présentation finie* sur  $S_0$  (cf. EGA IV<sub>4</sub>, 16.4.22). Alors, si  $T$  est *plat* sur  $S_0$ , il résulte de EGA 0<sub>I</sub>, 6.7.6 que

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(\omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T,$$

d'où

$$\text{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) = \Gamma(T, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}) \otimes \mathcal{O}_T).$$

Introduisant la notation  $W(\ )$  de I, 4.6.1, on a donc prouvé que pour tout  $S_0$ -préschéma  $T$  *plat* sur  $S_0$ , on a

$$\text{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) = \text{Hom}_{S_0}(T, W(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}))).$$

En résumé, si  $\omega_{X_0/S_0}^1$  admet une présentation finie, et si on se restreint à la catégorie **92** des  $S$ -préschémas plats sur  $S$ , on a

$$(0.6.1) \quad L'_X = \prod_{S_0/S} W(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J})),$$

et  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J})$  est un  $\mathcal{O}_{S_0}$ -module *quasi-cohérent*, par EGA I, 9.1.1.

Remarquons enfin que si  $\omega_{X_0/S_0}^1$  est en outre localement libre (de rang fini), par exemple si  $X_0$  est *lisse* sur  $S_0$  (auquel cas il est automatiquement localement de présentation finie sur  $S_0$ ), on a

$$(0.6.2) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}) \simeq \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J},$$

où on note par abus de langage ( $X_0$  n'étant pas nécessairement un  $S_0$ -groupe)  $\mathcal{L}ie(X_0/S_0)$  le dual du  $\mathcal{O}_{S_0}$ -module  $\omega_{X_0/S_0}^1$ .<sup>(23)</sup>

La proposition 0.2 a un corollaire important :<sup>(24)</sup>

**Corollaire 0.7.** — *Soit  $X$  un  $S$ -préschéma.*

- a) *Tout  $S$ -endomorphisme de  $X$  induisant l'identité sur  $X_{\mathcal{J}}$  est un automorphisme.*
- b) *On a une suite exacte de groupes :*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_X) \xrightarrow{i} \text{Aut}_S(X) \longrightarrow \text{Aut}_{S_{\mathcal{J}}}(X_{\mathcal{J}}).$$

- c) *De plus, si on fait opérer  $\text{Aut}_S(X)$  sur le premier groupe par transport de structure, on a, pour tous  $u \in \text{Aut}_S(X)$  et  $m \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_X)$  :*

$$i(um) = u i(m) u^{-1}.$$

*Démonstration.* D'après 0.2 (i),  $\text{Hom}_{X+}(X, X)$  est un ensemble principal homogène **93**

<sup>(23)</sup>N.D.E. : Ceci est justifié par II, 3.3 et 4.11. En effet, le foncteur  $L_{X_0/S_0}^{\varepsilon_0}$ , « espace tangent à  $X_0$  sur  $S_0$  au point  $\varepsilon_0$  », est représenté par la fibration vectorielle  $\mathbb{V}(\varepsilon_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1)) = \mathbb{V}(\omega_{X_0/S_0}^1)$  sur  $S_0$ , dont le faisceau des sections est le module dual  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{O}_{S_0})$ ; celui-ci est  $\mathcal{L}ie(X_0/S_0)$  lorsque  $X_0$  est un  $S_0$ -groupe et  $\varepsilon_0$  la section unité.

<sup>(24)</sup>N.D.E. : Voir 0.11, 0.12 et 0.17 pour des conséquences de 0.7.

sous  $\text{Hom}_{X^+}(X, L_X)$ , car il est certainement non vide; il contient en effet un point marqué : l'automorphisme identique de  $X$ . <sup>(25)</sup> Par conséquent, l'application  $m \mapsto m \cdot \text{id}_X$  induit une *bijection*

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_X) = L_X(X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{X^+}(X, X).$$

Soit  $m \in L_X(X)$  et soit  $f = m' \cdot \text{id}_X$  un élément de  $\text{Hom}_{X^+}(X, X)$ . Appliquant 0.2 (ii) à  $f$ , on obtient que :

$$f \circ (m \cdot \text{id}_X) = L_f(X)(m) \cdot f = L_f(X)(m) \cdot (m' \cdot \text{id}_X).$$

D'autre part, comme  $f$  est un  $X^+$ -endomorphisme de  $X$ , on a  $f_{\mathcal{J}} = \text{id}_{X_{\mathcal{J}}}$  et donc  $f_0 = \text{id}_{X_0}$ ; comme  $L_f$  ne dépend que de  $f_0$  (cf. N.D.E. (17) dans 0.1.10), on a donc  $L_f(X)(m) = m$ . Par conséquent, l'égalité ci-dessus se réécrit :

$$(m' \cdot \text{id}_X) \circ (m \cdot \text{id}_X) = m \cdot (m' \cdot \text{id}_X) = (m + m') \cdot \text{id}_X.$$

Ceci montre que la bijection  $m \mapsto m \cdot \text{id}_X$  transforme la loi de groupe de  $\text{Hom}_{X^+}(X, L_X)$  en la loi de composition des  $X^+$ -endomorphismes de  $X$ .

Il en résulte d'abord que tout élément de  $\text{Hom}_{X^+}(X, X)$  est inversible, ce qui est la première assertion de l'énoncé, puis que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{X^+}(X, L_X) \xrightarrow{i} \text{Aut}_S(X) \longrightarrow \text{Aut}_{S_{\mathcal{J}}}(X_{\mathcal{J}}),$$

ce qui est la seconde.

Remarquons maintenant que le morphisme  $i$  défini ci-dessus est fonctoriel en  $X$  pour les isomorphismes, car il est défini en termes structuraux à partir de l'opération de  $L_X$  sur  $X$  au-dessus de  $X^+$ , elle-même fonctorielle en  $X$  d'après l'assertion (ii) de la proposition 0.2. <sup>(26)</sup> Donc tout automorphisme  $u$  de  $X$  au-dessus de  $S$  induit par transport de structure des isomorphismes

$$h : \text{Hom}_{X^+}(X, L_X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{X^+}(X, L_X)$$

et  $f : \text{Aut}_S(X) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_S(X)$  tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{X^+}(X, L_X) & \xrightarrow{i} & \text{Aut}_S(X) \\ h \downarrow & & f \downarrow \\ \text{Hom}_{X^+}(X, L_X) & \xrightarrow{i} & \text{Aut}_S(X) \end{array}$$

i.e. tels que  $f \circ i = i \circ h$ . D'autre part,  $f$  est donné par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & X \\ u \downarrow & & u \downarrow \\ X & \xrightarrow{f(a)} & X \end{array},$$

- 94 c.-à-d.,  $f(a) = u \circ a \circ u^{-1}$ , pour tout  $a \in \text{Aut}_S(X)$ . En écrivant  $i(h(m)) = f(i(m))$ , on trouve la formule cherchée. C.Q.F.D.

<sup>(25)</sup>N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

<sup>(26)</sup>N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

Soit maintenant  $X$  un  $S$ -préschéma tel que  $X_{\mathcal{J}}$  soit un  $S_{\mathcal{J}}$ -groupe. Supposons qu'il existe un  $S$ -morphisme

$$P : X \times_S X \longrightarrow X$$

tel que le morphisme obtenu par changement de base

$$P_{\mathcal{J}} : X_{\mathcal{J}} \times_{S_{\mathcal{J}}} X_{\mathcal{J}} \longrightarrow X_{\mathcal{J}}$$

soit la loi de groupe de  $X_{\mathcal{J}}$ . (Un cas particulier important de la situation précédente sera le cas où  $X$  est un  $S$ -groupe et où on prend pour  $P$  sa loi de groupe). On en déduit un morphisme

$$L_P : L_X \times_S L_X \cong L_{X \times_S X} \longrightarrow L_X$$

qui, en fait, ne dépend pas de  $P$ , car il se calcule à l'aide de la loi de groupe  $P_{\mathcal{J}}$  de  $X_{\mathcal{J}}$  comme nous allons le voir maintenant. Le morphisme

$$P_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1) \longrightarrow \Omega_{X_0 \times_{S_0} X_0/S_0}^1$$

se traduit dans  $T_{X_0/S_0}$  (II 4.1) par la loi de groupe de ce dernier que l'on écrit immédiatement à l'aide de la décomposition de  $T_{X_0/S_0}$  en produit semi-direct de  $\underline{\text{Lie}}(X_0/S_0)$  par  $X_0$ . Utilisant (ii) et (iii) de 0.2, il vient, tous calculs faits : <sup>(27)</sup> 95

**Proposition 0.8.** — Soit  $P : X \times_S X \rightarrow X$  un  $S$ -morphisme tel que  $P_{\mathcal{J}}$  munisse  $X_{\mathcal{J}}$  d'une structure de  $S_{\mathcal{J}}$ -groupe. Notons  $\times$  la loi de groupe de  $L'_X$  et  $(m, x) \mapsto m \cdot x$  le morphisme

$$L'_X \times_S X \longrightarrow X$$

définissant l'action de  $L'_X$  sur  $X$ . Notons

$$\text{Ad} : X^+ \longrightarrow \text{Aut}_{S\text{-gr.}}(L'_X)$$

l'opération de  $X^+$  sur  $L'_X$  déduite de l'opération adjointe de  $X_0$  sur  $\omega_{X_0/S_0}^1$ . Pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $x, x' \in X(S')$ ,  $m, m' \in L'_X(S')$ , on a :

$$(0.8.1) \quad P(m \cdot x, m' \cdot x') = (m \times \text{Ad}_{p_X}(x)(m')) \cdot P(x, x').$$

Si  $X$  est un  $S$ -groupe, on notera  $*$  sa loi,  $e$  sa section unité, et  $i$  le  $S$ -morphisme défini par :

$$i(m) = m \cdot e,$$

pour tout  $S' \rightarrow S$  et  $m \in L'_X(S')$ .

**Corollaire 0.9.** — Soit  $X$  un  $S$ -groupe. Alors  $X^+$  est muni naturellement d'une structure de  $S$ -groupe, et  $p_X$  est un morphisme de  $S$ -groupes. De plus, le  $S$ -morphisme

$$i : L'_X \longrightarrow X, \quad m \mapsto m \cdot e$$

est un isomorphisme de  $S$ -groupes de  $L'_X$  sur  $\text{Ker}(p_X)$ , et l'on a, pour tous  $S' \rightarrow S$ ,  $x' \in X(S')$ ,  $m \in L'_X(S')$  :

$$(0.9.1) \quad m \cdot x' = (m \cdot e) * x' = i(m) * x'.$$

<sup>(27)</sup>N.D.E. : à détailler ...

Les deux premières assertions ont déjà été démontrées en 0.1.2. Comme  $X$  est formellement principal homogène au-dessus de  $X^+$  sous  $L_X = L'_X \times_S X^+$ , le morphisme  $i$  est bien un isomorphisme de  $S$ -foncteurs de  $L'_X$  sur le noyau de  $p_X$ . Le fait que  $i$  soit un morphisme de groupes et la formule (0.9.1) résultent de la formule (0.8.1) appliquée respectivement à  $x = x' = e$ , et à  $x = e, m' = 1$ .

96

**Corollaire 0.10.** — Soit  $X$  un  $S$ -groupe. Avec les notations précédentes, pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $x \in X(S')$  et  $m' \in L'_X(S')$ , on a

$$(0.10.1) \quad x * i(m') * x^{-1} = i(\text{Ad } p_X(x)(m')).$$

Cela résulte de l'égalité  $i(m') * x^{-1} = m' \cdot x^{-1}$  et de (0.8.1) appliquée à  $m = 1$  et  $x' = x^{-1}$ .

Lorsque  $X$  est un  $S$ -groupe, nous avons donc déterminé explicitement le noyau de  $X \rightarrow X^+$  et l'opération des automorphismes intérieurs de  $X$  sur ce noyau. Nous allons maintenant voir que l'on peut faire de même pour certains  $S$ -foncteurs en groupes non nécessairement représentables. Un cas nous sera utile, celui des foncteurs Aut (I 1.7). Énonçons tout de suite :

**Proposition 0.11.** — Soit  $E$  un  $S$ -préschéma. Notons  $X = \underline{\text{Aut}}_S(E)$ . Le noyau du morphisme de  $S$ -foncteurs en groupes

$$p_X : X \longrightarrow X^+$$

s'identifie canoniquement au  $S$ -foncteur en groupes commutatifs  $L'_X$  défini par

$$\text{Hom}_S(Y, L'_X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{E_0 \times_{S_0} Y_0}}(\Omega_{E_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J}\mathcal{O}_{E \times_S Y}),$$

où  $Y$  désigne un  $S$ -préschéma variable.

En effet, si  $Y$  est un  $S$ -préschéma variable, on a  $\text{Hom}_S(Y, X) = \text{Aut}_Y(E \times_S Y)$ , et

$$\text{Hom}_S(Y, X^+) = \text{Hom}_S(Y_{\mathcal{J}}, X) = \text{Aut}_{Y_{\mathcal{J}}}(E \times_S Y_{\mathcal{J}}) = \text{Aut}_{Y_{\mathcal{J}}}\left(\left(\frac{E \times Y}{S}\right) \times_S Y_{\mathcal{J}}\right).$$

97 En appliquant 0.7 b) au  $Y$ -préschéma  $E \times_S Y$ , on obtient un isomorphisme de groupes :

$$\text{Hom}_S(Y, L'_X) \simeq \text{Ker}(\text{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \text{Hom}_S(Y, X^+)),$$

isomorphisme que l'on vérifie aisément être fonctoriel en le  $S$ -préschéma  $Y$ . On obtient donc un isomorphisme de  $S$ -groupes

$$L'_X \simeq \text{Ker}(X \longrightarrow X^+),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 0.11.

**Corollaire 0.12.** — <sup>(28)</sup> On conserve les notations de 0.11 :  $E$  est un  $S$ -préschéma et  $X = \underline{\text{Aut}}_S(E)$ . On a une opération naturelle  $f$  de  $X$  sur  $L'_X$  définie de la manière suivante. Pour tout  $S$ -préschéma  $Y$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(Y, X) &= \text{Aut}_Y(E \times_S Y) \\ \text{et} \quad \text{Hom}_S(Y, L'_X) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{E_0 \times_{S_0} Y_0}}(\Omega_{E_0 \times_{S_0} Y_0/Y_0}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_{E \times_S Y}) \end{aligned}$$

<sup>(28)</sup>N.D.E. : On a changé « Remarque » en « Corollaire ».

(N. B.  $\Omega_{E_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0} \simeq \Omega_{E_0 \times_{S_0} Y_0/Y_0}^1$ ; cf. EGA IV<sub>4</sub>, 16.4.5); le premier groupe opère sur le second par transport de structure et cette opération est bien fonctorielle en  $Y$ . On a alors la formule :

$$(0.12.1) \quad x i(m) x^{-1} = i(f(x)m),$$

pour tout  $Y \rightarrow S$  et tous  $x \in \text{Hom}_S(Y, X)$ ,  $m \in \text{Hom}_S(Y, L'_X)$ .

En effet, ceci résulte de 0.7 c) appliqué au  $Y$ -préschéma  $E \times_S Y$ .

**Rappel 0.13.** — L'image directe d'un module quasi-cohérent par un morphisme de *présentation finie* est quasi-cohérente. Sous les mêmes conditions, la formation de l'image directe commute au changement de base *plat* : dans la situation

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{g'} & T' = T \times_S S' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array},$$

si on suppose  $f$  (et donc  $f'$ ) de présentation finie et  $g$  (et donc  $g'$ ) plat, on a pour tout  $\mathcal{O}_T$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  98

$$f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} = f'_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}),$$

où, de manière plus esthétique

$$g^*(f_*(\mathcal{F})) = f'_*(g'^*(\mathcal{F})).$$

Ces deux faits sont plus généralement valables pour un morphisme  $f$  quasi-compact et quasi-séparé, cf. EGA I, 9.2.1 et EGA III<sub>1</sub>, 1.4.15 dans le cas quasi-compact séparé (compte-tenu de EGA III<sub>2</sub>, ErrIII 25) et EGA IV<sub>1</sub>, 1.7.4 et 1.7.21.

**Remarque 0.14.** — <sup>(29)</sup> Reprenons les notations de 0.11 : soient  $E$  un  $S$ -préschéma,  $X = \underline{\text{Aut}}_S(E)$  et  $L'_X$  le  $S$ -foncteur en groupes commutatifs défini par :

$$\begin{aligned} L'_X(Y) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{E_0 \times_{S_0} Y_0}}(\Omega_{E_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J}\mathcal{O}_{E \times_S Y}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{E \times_S Y}}(\Omega_{E/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y, \mathcal{J}\mathcal{O}_{E \times_S Y}) \\ &= \Gamma(E \times_S Y, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{E \times_S Y}}(\Omega_{E/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y, \mathcal{J}\mathcal{O}_{E \times_S Y})). \end{aligned}$$

Supposons  $Y$  plat sur  $S$ , alors on a des isomorphismes :

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_{E \times_S Y} \xleftarrow{\sim} (\mathcal{J}\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} (\mathcal{J}\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}.$$

Supposons de plus  $E$  de présentation finie sur  $S$ ; alors  $\Omega_{E/S}^1$  est un  $\mathcal{O}_E$ -module de présentation finie (cf. EGA IV<sub>4</sub>, 16.4.22) et donc, d'après EGA 0<sub>I</sub>, 6.7.6, on a :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{E \times_S Y}}(\Omega_{E/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y, (\mathcal{J}\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_E}(\Omega_{E/S}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y.$$

<sup>(29)</sup>N.D.E. : On a détaillé la première partie de cette remarque, et l'on a ajouté une deuxième partie.

Notons  $\pi : E \rightarrow S$  et  $g : Y \rightarrow S$  les morphismes structuraux ; appliquant 0.13 au diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{g'} & E \times_S Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \xleftarrow{g} & Y \end{array},$$

et au  $\mathcal{O}_E$ -module  $\mathcal{F} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_E}(\Omega_{E/S}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_E)$ , on obtient

$$\Gamma(E \times_S Y, g'^* \mathcal{F}) = \Gamma(Y, \pi'_* g'^* \mathcal{F}) = \Gamma(Y, g^* \pi_* \mathcal{F}) = W(\pi_* \mathcal{F})(Y).$$

99 On a donc montré que, si  $E$  est de présentation finie sur  $S$ , on a

$$(0.14.1) \quad L'_X = W(\pi_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_E}(\Omega_{E/S}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_E))$$

sur la catégorie des  $S$ -préscémas *plats* sur  $S$ . Notons de plus que le module dont on prend le  $W$  est *quasi-cohérent*, d'après EGA I, 9.1.1 et 9.2.1.

(30) Notons  $L_0$  le  $S_0$ -foncteur

$$W(\pi_{0*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{E_0}}(\Omega_{E_0/S_0}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_{E_0})).$$

Alors, revenant à la définition de  $L'_X(Y)$  et tenant compte de l'isomorphisme

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_{E \times_S Y} \simeq (\mathcal{J}\mathcal{O}_E) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0},$$

on obtient, en raisonnant comme plus haut, que

$$L'_X(Y) = L_0(Y_0) = L_0(Y \times_S S_0) = \left( \prod_{S_0/S} L_0 \right)(Y).$$

Donc, sur la catégorie des  $S$ -préscémas *plats* sur  $S$ , on a :

$$L'_X = \prod_{S_0/S} W(\pi_{0*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{E_0}}(\Omega_{E_0/S_0}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_{E_0})).$$

Il n'est pas évident (et probablement faux en général) que l'action de  $X$  sur  $L'_X$  définie en 0.12 provienne d'une action de  $X_0 = \underline{\text{Aut}}_{S_0}(E_0)$  sur  $L_0$  ; c'est toutefois le cas lorsque, de plus,  $E$  est *plat* sur  $S$ .

En effet, on a dans ce cas des isomorphismes canoniques :

$$(0.14.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}\mathcal{O}_E &\simeq \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_E \simeq \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{E_0}. \\ L_0 &\simeq W(\pi_{0*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{E_0}}(\Omega_{E_0/S_0}^1, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{E_0})), \\ L'_X &= \prod_{S_0/S} W(\pi_{0*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{E_0}}(\Omega_{E_0/S_0}^1, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{E_0})). \end{aligned}$$

Alors, pour tout  $S_0$ -préscéma  $T$ ,

$$L_0(T) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{E_0 \times_{S_0} T}}(\Omega_{E_0 \times_{S_0} T/T}^1, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{E_0 \times_{S_0} T}),$$

$\text{Hom}_{S_0}(T, X_0) = \text{Aut}_T(E_0 \times_{S_0} T)$  agit par transport de structure sur  $L_0(T)$ , de façon fonctorielle en  $T$ , et pour tout  $S$ -préscéma  $Y$  plat sur  $S$ , l'action par transport de

(30)N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

structure de  $\text{Hom}_S(Y, X) = \text{Aut}_Y(E \times_S Y)$  sur  $L'_X(Y) = L_0(Y_0)$  se factorise par  $\text{Aut}_{Y_0}(E_0 \times_{S_0} Y_0)$ .

Extrayons enfin de SGA 1 III les deux propositions suivantes.

**Proposition 0.15.** — (SGA 1 III, 6.8) <sup>(31)</sup> *Pour tout  $S_{\mathcal{J}}$ -préschéma  $Y$  lisse sur  $S_{\mathcal{J}}$  et affine, il existe un  $S$ -préschéma  $X$  lisse sur  $S$  tel que  $X \times_S S_{\mathcal{J}} \simeq Y$ , et un tel  $X$  est unique à isomorphisme (non unique) près.*

**Proposition 0.16.** — (SGA 1 III, 5.5) <sup>(32)</sup> *Soit  $X$  un  $S$ -préschéma lisse sur  $S$ . Pour tout  $S$ -préschéma  $Y$  affine, l'application canonique*

$$p_X(Y) : \text{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \text{Hom}_S(Y, X^+) = \text{Hom}_{S_{\mathcal{J}}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}})$$

*est surjective.*

**Corollaire 0.17.** — *Soit  $E$  un  $S$ -préschéma lisse sur  $S$  et affine ; notons  $X = \underline{\text{Aut}}_S(E)$ . Pour tout  $S$ -préschéma  $Y$  affine, l'application canonique*

$$\text{Aut}_Y(E \times_S Y) = \text{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \text{Hom}_S(Y, X^+) = \text{Aut}_{Y_{\mathcal{J}}}(E_{\mathcal{J}} \times_{S_{\mathcal{J}}} Y_{\mathcal{J}})$$

*est surjective.*

En effet,  $Y \times_S E$  est affine sur  $Y$ , lui-même affine, donc affine. Appliquant 0.16, on en déduit que tout  $S_{\mathcal{J}}$ -morphisme  $Y_{\mathcal{J}} \times_{S_{\mathcal{J}}} E_{\mathcal{J}} \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  se prolonge en un  $S$ -morphisme  $Y \times_S E \rightarrow E$ .

100

<sup>(33)</sup> En d'autres termes, tout  $Y_{\mathcal{J}}$ -endomorphisme de  $Y_{\mathcal{J}} \times_{S_{\mathcal{J}}} E_{\mathcal{J}}$  se relève en un  $Y$ -endomorphisme de  $Y \times_S E$ . Alors, 0.7 a) montre que tout  $Y_{\mathcal{J}}$ -automorphisme de  $Y_{\mathcal{J}} \times_{S_{\mathcal{J}}} E_{\mathcal{J}}$  se relève en un  $Y$ -automorphisme de  $Y \times_S E$ , ce qui est la propriété annoncée.

## 1. Extensions et cohomologie

**1.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie stable par produits fibrés. <sup>(34)</sup> Soient  $S$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $G$  un  $S$ -groupe (*représentable*) et  $F$  un  $S$ -foncteur en groupes commutatifs sur lequel  $G$  opère. On a défini en I, 5.1 les groupes de cohomologie  $H^n(G, F)$ . On rappelle que ce sont les groupes d'homologie d'un complexe noté  $C^*(G, F)$  où, notant  $(G/S)^n = G \times_S \cdots \times_S G$  ( $n$  facteurs),

$$C^n(G, F) = \text{Hom}_S((G/S)^n, F).$$

<sup>(31)</sup>N.D.E. : Dans *loc. cit.*,  $S$  est supposé *localement noethérien* ; il faudrait voir si cette hypothèse peut être supprimée en utilisant les techniques de EGA IV ...

<sup>(32)</sup>N.D.E. : Ceci est une conséquence immédiate de la définition de (formellement) « lisse » adoptée dans EGA IV<sub>4</sub>, 17.3.1 (et 17.1.1).

<sup>(33)</sup>N.D.E. : On a légèrement modifié l'original, pour être exactement sous les hypothèses de 0.7.

<sup>(34)</sup>N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que  $\mathcal{C}$  soit stable par produits fibrés (ce qui est le cas dans les applications où  $\mathcal{C}$  est la catégorie des préschémas (**Sch**) ou celle des foncteurs (**Sch**)<sup>o</sup> → (**Ens**)). Si on omet cette hypothèse, il faut supposer dans la suite que les produits fibrés  $G \times_S \cdots \times_S G$  sont représentables.

Comme  $G$  et donc <sup>(34)</sup> les  $(G/S)^n$  sont représentables, on a aussi

$$C^n(G, F) = F((G/S)^n);$$

de ceci, et de la définition de l'opérateur bord, on voit que le complexe  $C^*(G, F)$  ne dépend que de la restriction de  $F$  à la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}/S$  dont les objets sont les puissances cartésiennes de  $G$  sur  $S$ . En conséquence, on a le

**Lemme 1.1.1.** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie stable par produits fibrés <sup>(34)</sup>,  $S$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $G$  un  $S$ -groupe représentable. Notons  $\mathcal{C}(G)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}/S$  dont les objets sont les puissances cartésiennes de  $G$  sur  $S$ . Soient  $F$  et  $F'$  deux  $S$ -foncteurs en groupes commutatifs sur lesquels  $G$  opère. Si  $F$  et  $F'$  ont même restriction à  $\mathcal{C}(G)$ , on a un isomorphisme canonique

$$H^*(G, F) \xrightarrow{\sim} H^*(G, F').$$

**1.1.2. Cohomologie et restriction des scalaires.** — <sup>(35)</sup> Énonçons un autre résultat de comparaison. Soit maintenant  $T \rightarrow S$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ . Si  $F$  est un  $T$ -foncteur en groupes commutatifs, alors le foncteur obtenu par « restriction des scalaires » (cf. Exp. II, 1)

$$F_1 = \prod_{T/S} F$$

est un  $S$ -foncteur en groupes commutatifs et on a un morphisme de  $S$ -foncteurs en groupes

$$u : \prod_{T/S} \underline{\text{Aut}}_{T\text{-gr.}}(F) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(F_1). \quad (36)$$

Soit maintenant  $G$  un  $S$ -foncteur en groupes et soit

$$G_T \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{T\text{-gr.}}(F)$$

une opération de  $G_T$  sur  $F$ . Par définition du foncteur  $\prod$ , on en déduit un morphisme de  $S$ -foncteurs en groupes

$$G \longrightarrow \prod_{T/S} \underline{\text{Aut}}_{T\text{-gr.}}(F)$$

d'où, par composition avec  $u$ , une opération de  $G$  sur  $F_1 = \prod_{T/S} F$ . <sup>(37)</sup>

102

<sup>(35)</sup>N.D.E. : On a ajouté le titre de ce paragraphe.

<sup>(36)</sup>N.D.E. : En effet, soient  $S' \rightarrow S$  et  $\alpha \in \text{Aut}_{(T \times_S S')\text{-gr.}}(F_{T \times_S S'})$ , pour tout  $U \rightarrow T \times_S S'$ , notons  $\alpha_U \in \text{Aut}_{\text{gr.}}(F_{T \times_S S'}(U))$  l'élément défini par  $\alpha$ ; alors  $u(S')(\alpha)$  est l'élément  $\beta$  de  $\underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(F_1)(S') = \text{Aut}_{S'\text{-gr.}}(\prod_{T \times_S S'/S'} F_{T \times_S S'})$  tel que  $\beta_{S''} = \alpha_{T \times_S S''}$  pour tout  $S'' \rightarrow S'$ .

<sup>(37)</sup>N.D.E. : Explicitement, pour tout  $S' \rightarrow S$ , l'opération de  $G(S')$  sur  $F_1(S') = F(T \times_S S')$  est donnée par l'opération de  $G_T(T \times_S S') = G(T \times_S S')$  sur  $F(T \times_S S')$  et le morphisme de groupes  $G(S') \rightarrow G(T \times_S S')$  correspondant à la projection  $T \times_S S' \rightarrow S'$ . On peut aussi dire que l'opération de  $G_T$  sur  $F$  est donnée par un morphisme  $G_T \times_T F \rightarrow F$ ; appliquant le foncteur  $\prod_{T/S}$  et notant  $G_1$  le  $S$ -groupe  $\prod_{T/S} G_T$ , on obtient, compte-tenu de II 1.2, un morphisme  $G_1 \times_S F_1 \rightarrow F_1$  qui définit une opération de  $G_1$  sur  $F$ . L'opération de  $G$  est alors obtenue via le morphisme naturel  $G \rightarrow G_1$ , qui correspond par adjonction à  $\text{id}_G$ .

**Lemme 1.1.2.** — *Sous les conditions précédentes, on a un isomorphisme canonique*

$$H^*(G, \prod_{T/S} F) \simeq H^*(G_T, F).$$

En effet, d'après la définition de la cohomologie, les complexes standard sont canoniquement isomorphes.

**1.2. Relèvement de morphismes de groupes.** — <sup>(38)</sup> Suivant les principes généraux, on pose la définition suivante :

**Définition 1.2.1.** — Soit  $1 \rightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$  une suite de morphismes de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes. On dit qu'elle est *exacte* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout  $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , la suite de groupes ordinaires ci-dessous est exacte :

$$1 \longrightarrow M(S) \xrightarrow{u(S)} E(S) \xrightarrow{v(S)} G(S)$$

(ii) pour tout objet  $H$  de  $\widehat{\mathcal{C}}$ , la suite de groupes ordinaires ci-dessous est exacte :

$$1 \longrightarrow \text{Hom}(H, M) \xrightarrow{u(H)} \text{Hom}(H, E) \xrightarrow{v(H)} \text{Hom}(H, G)$$

Faisant en particulier  $H = G$  dans (ii), on voit que l'ensemble des sections de  $v$  (ne respectant pas *a priori* les structures de groupes) est vide ou principal homogène sous  $\text{Hom}(G, M)$ . Supposons-le non vide ; soit donc

$$s : G \longrightarrow E$$

une section de  $v$ . Alors pour tout  $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et tout  $x \in G(S)$ , l'élément  $s(x)$  de  $E(S)$  définit un automorphisme intérieur de  $E_S$  qui normalise  $M_S$  (plus correctement **103** l'image de  $M_S$  par  $u_S$ ), donc un automorphisme de  $M_S$ .

**Scholie 1.2.1.1.** — <sup>(39)</sup> Si  $M$  est commutatif, on voit « ensemblistement » que cet automorphisme ne dépend pas de la section choisie, mais seulement de  $x$ , et qu'il en dépend multiplicativement. En résumé, à toute suite exacte

$$(E) \quad 1 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$$

telle que  $M$  soit *commutatif* et que  $v$  possède une section, est associée un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes

$$G \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-gr.}}(M)$$

que l'on appelle l'*opération de  $G$  sur  $M$  définie par l'extension (E)*.

<sup>(38)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce titre.

<sup>(39)</sup>N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.2.1.1 et 1.2.1.2 pour mettre en évidence les notions qui y sont introduites.

**Définition 1.2.1.2.** — On a vu en I, 2.3.7 que  $v$  possède une section qui est un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes si et seulement si l'extension (E) est isomorphe (« en tant qu'extension ») au produit semi-direct de M par G relativement à l'opération précédente. Une telle section de  $v$  sera appelée *section de l'extension (E)*, ou simplement *section de (E)*.

Si  $s$  est une section de (E) et si  $m \in \Gamma(M) \simeq \text{Ker}(\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(G))$  (pour la définition de  $\Gamma$ , voir I, 1.2), alors le morphisme  $G \rightarrow E$  défini par <sup>(40)</sup>

$$x \mapsto u(m) s(x) u(m)^{-1}$$

est également une section de (E) dite *déduite de  $s$  par l'automorphisme intérieur défini par  $m$*  (ou par  $u(m)$ ).

**Lemme 1.2.2.** — Soit (E) :  $1 \rightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$  une suite exacte de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes telle que M soit commutatif et que  $v$  possède une section. Faisons opérer G sur M de la manière définie par (E).

104 (i) L'extension (E) définit canoniquement une classe  $c(E) \in H^2(G, M)$  dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'une section de (E).

(ii) Si  $c(E) = 0$ , l'ensemble des sections de (E) est principal homogène sous le groupe  $Z^1(G, M)$ , et l'ensemble des sections de (E) modulo l'action des automorphismes intérieurs définis par les éléments de  $\Gamma(M)$  est principal homogène sous le groupe  $H^1(G, M)$ .

La démonstration se fait exactement comme dans le cas des groupes ordinaires, le fait que l'on parte d'une section de  $v$  assurant la functorialité des calculs ensemblistes. Indiquons brièvement les principales étapes de la démonstration.

a) À toute section  $s$  de  $v$  on associe le morphisme

$$Ds : G \times G \longrightarrow M,$$

défini ensemblistement par

$$u(Ds(x, y)) = s(xy)s(y)^{-1}s(x)^{-1}.$$

On montre que  $Ds$  est un 2-cocycle par le calcul suivant. <sup>(41)</sup> D'après la définition de la différentielle du complexe standard (I, 5.1), l'on a :

$$(\partial^2 Ds)(x, y, z) = (s(x)Ds(y, z)s(x)^{-1}) \cdot Ds(x, y)^{-1} \cdot Ds(xy, z)^{-1} \cdot Ds(x, yz);$$

il suffit de reporter la définition de  $Ds$  dans cette formule pour trouver (sans utiliser aucune commutativité)  $Ds \in Z^2(G, M)$ .

b) Si  $s$  et  $s'$  sont deux sections de  $v$ , il existe  $f : G \rightarrow M$  tel que  $s(x) = f(x)s'(x)$ . On a alors

$$\begin{aligned} Ds'(x, y) &= f^{-1}(xy)Ds(x, y)s(x)f(y)s(x)^{-1}f(x), \\ &= Ds(x, y) \cdot f^{-1}(xy) \cdot (s(x)f(y)s(x)^{-1}) \cdot f(x), \end{aligned}$$

105 soit

<sup>(40)</sup>N.D.E. : Dans le terme de droite, on a corrigé  $x$  en  $s(x)$ .

<sup>(41)</sup>N.D.E. : on a corrigé l'original, pour le rendre compatible avec I, 5.1.

$$Ds' = Ds \cdot \partial^1 f.$$

(42) Ceci montre que la classe de  $Ds$  dans  $H^2(G, M)$  ne dépend pas de la section  $s$  de  $v$  choisie ; c'est la classe  $c(E)$  de l'extension (E).

c) Si  $s$  et  $s'$  sont deux sections de  $v$  déduites l'une de l'autre par un automorphisme intérieur de  $E$  défini par un élément  $m \in \Gamma(M)$ , alors  $s(x) = m^{-1}s'(x)m$  entraîne

$$s(x) = m^{-1}s'(x)m s'(x)^{-1}s'(x),$$

soit

$$s = \partial^0 m \cdot s'.$$

d) Le raisonnement est maintenant habituel : (43) Soit  $s_0$  une section arbitraire de  $v$  ; il existe une section  $s'$ , nécessairement de la forme  $s' = f \cdot s_0$ , qui est un morphisme de groupes, i.e. vérifie  $Ds' = 0$ , si et seulement si  $(Ds)^{-1} = \partial^1 f$ , c.-à-d., si et seulement si la classe  $c(E)$  est nulle.

Dans ce cas, l'ensemble des sections de (E) est formé des sections  $s = g \cdot s'$ , où  $\partial^1 g = 0$ , i.e.  $g \in Z^1(G, M)$ . De plus, deux telles sections  $g_1 \cdot s'$  et  $g_2 \cdot s'$  sont conjuguées par un élément  $m \in \Gamma(M)$  si et seulement si  $g_2 = g_1 \cdot \partial^0 m$ , c.-à-d., si et seulement si  $g_1$  et  $g_2$  ont même image dans  $H^1(G, M)$ .

Soit toujours

$$(E) \quad 1 \longrightarrow M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$$

une suite exacte de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes avec  $M$  commutatif. Soit

$$f : H \longrightarrow G$$

un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes. Considérons  $E_f = H \times_G E$  ; c'est un  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe et la projection  $v_f : E_f \rightarrow H$  est un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes. De même pour  $e_f : E_f \rightarrow E$ . D'autre part, si on envoie  $M$  dans  $E$  par  $u$  et dans  $H$  par le morphisme unité, on définit un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes  $u_f : M \rightarrow E_f$ . On a donc construit un diagramme commutatif de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes :

$$(E) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{v} & G \\ & & \uparrow \text{id} & & \uparrow e_f & & \uparrow f \\ (E_f) & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u_f} & E_f & \xrightarrow{v_f} & H \end{array} .$$

On a immédiatement :

**Lemme 1.2.3.** — (i) La suite  $(E_f)$  est exacte.

(ii) L'application  $s \mapsto e_f \circ s = f'$  réalise une correspondance bijective entre les morphismes

$$s : H \longrightarrow E_f$$

(42)N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

(43)N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

tels que  $v_f \circ s = id$  (c'est-à-dire les sections de  $v_f$ ) et les morphismes

$$f' : H \longrightarrow E$$

tels que  $v \circ f' = f$  (c'est-à-dire les morphismes  $f'$  « relevant »  $f$ ).

(iii) Dans la correspondance précédente, sections de  $(E_f)$  et morphismes de groupes  $f'$  relevant  $f$  se correspondent.

Appliquant le lemme 1.2.2 à l'extension  $(E_f)$  et tenant compte de 1.2.3, on obtient la proposition suivante (qui contient formellement 1.2.2) :

**Proposition 1.2.4.** — Soit  $(E) : 1 \rightarrow M \rightarrow E \xrightarrow{v} G$  une suite exacte de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes avec  $M$  commutatif. Soit

$$f : H \longrightarrow G$$

un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes ; supposons qu'il se relève en un morphisme (non nécessairement de groupes)  $f' : H \rightarrow E$ . Faisons opérer  $H$  sur  $M$  par le morphisme composé (multiplicatif et indépendant du choix de  $f'$ ),

$$H \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{\text{int}} \underline{\text{Aut}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-gr.}}(M).$$

(i) Le morphisme  $f$  définit canoniquement une classe  $c(f) \in H^2(H, M)$  dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes

$$f' : H \longrightarrow E$$

relevant  $f$ .

107 (ii) Si  $c(f) = 0$ , l'ensemble des morphismes de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes  $f'$  relevant  $f$ , modulo l'action des automorphismes intérieurs définis par les éléments de  $\Gamma(M)$  (i.e. par les éléments  $m$  de  $\Gamma(E)$  tels que  $v(m) = e$ ) est principal homogène sous  $H^1(H, M)$ .

(iii) Si  $f' : H \rightarrow E$  est un morphisme de groupes relevant  $f$ , l'ensemble des transformés de  $f'$  par les automorphismes intérieurs définis par les éléments de  $\Gamma(M)$  est isomorphe à  $\Gamma(M)/\Gamma(M^H) = \Gamma(M)/H^0(H, M)$ .

**1.3. Extensions de lois de groupes.**— Considérons la situation suivante : on a un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$

$$(\dagger) \quad p : X \longrightarrow Y$$

et un  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupe commutatif  $M$  opérant sur  $X$ , tels que  $X$  soit formellement principal homogène au-dessus de  $Y$  sous  $M_Y$ .

Si  $g : Y \rightarrow Z$  est un morphisme quelconque de  $\widehat{\mathcal{C}}$ , alors  $g \circ p : X \rightarrow Z$  est invariant par  $M$  : pour chaque  $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $(g \circ p)(S)$  est invariant sous l'action de  $M(S)$  opérant sur  $X(S)$ . Réciproquement, nous supposons vérifiée la condition suivante pour  $n = 1, 2, 3, 4$ .

(+)<sub>n</sub> : Tout morphisme de  $X^n$  dans  $M$ , invariant sous l'action de  $M^n$  opérant sur  $X^n$ , se factorise de manière unique par  $p^n : X^n \rightarrow Y^n$  (où les puissances  $n$  désignent des puissances cartésiennes).

**Lemme 1.3.1.** — (i) Si  $h$  est un morphisme de  $Y$  dans  $M$ , l'automorphisme de  $X$  défini ensemblistement par  $x \mapsto h(p(x)) \cdot x$  commute à  $p$  et aux opérations de  $M$  sur  $X$ , i.e. pour tous  $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $x \in X(S)$ ,  $m \in M(S)$ , on a

$$p(h(p(x)) \cdot x) = x, \quad m \cdot h(p(x)) \cdot x = h(p(m \cdot x)) \cdot m \cdot x.$$

(ii) Cette construction réalise une correspondance bijective entre morphismes de  $Y$  dans  $M$  et automorphismes de  $X$  commutant à  $p$  et aux opérations de  $M$ .

La première partie est claire, puisque  $p(m \cdot x) = x$  et que  $M$  est commutatif. Réciproquement, un automorphisme  $u$  de  $X$  commutant à  $p$  s'écrit ensemblistement  $x \mapsto g(x)x$ , où  $g$  est un certain morphisme de  $X$  dans  $M$ . Si  $u$  commute aux opérations de  $M$ , ce morphisme est invariant par  $M$  et on conclut par la condition  $(+)_1$ . 108

Nous supposons maintenant que sont données en plus une loi de groupe sur  $Y$  et une opération de  $Y$  sur  $M$ , c'est-à-dire un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$ -groupes :

$$(\ddagger) \quad f : Y \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\widehat{\mathcal{C}}\text{-gr.}}(M).$$

**Définition 1.3.2.** — Une loi de composition sur  $X$

$$P : X \times X \longrightarrow X$$

est dite *admissible* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i)  $P$  relève la loi de groupe de  $Y$ , i.e. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{P} & X \\ (p,p) \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est commutatif.

(ii) Pour tout  $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et tous  $x, y \in X(S)$ ,  $m, n \in M(S)$ , on a la relation suivante

$$(++)\quad P(m \cdot x, n \cdot y) = m \cdot f(p(x))n \cdot P(x, y).$$

**Proposition 1.3.3.** — Pour qu'une loi de groupe  $*$  sur  $X$  soit admissible, il faut et il suffit que les quatre conditions suivantes soient satisfaites :

(i)  $p : X \rightarrow Y$  est un morphisme de groupes.

(ii) Le morphisme  $i : M \rightarrow X$  défini par  $i(m) = m \cdot e_X$  est un isomorphisme de groupes de  $M$  sur  $\text{Ker}(p)$ , c'est-à-dire : on a ensemblistement  $(m \cdot e_X) * (n \cdot e_X) = (mn) \cdot e_X$ . 109

(iii) On a  $m \cdot x = (m \cdot e_X) * x$  pour chaque  $m \in M(S)$ ,  $x \in X(S)$ .

(iv) Les automorphismes intérieurs de  $X$  opèrent sur  $\text{Ker}(p)$  suivant la formule ensembliste :

$$x * i(m) * x^{-1} = i(f(p(x))m).$$

La démonstration est immédiate.

**Lemme 1.3.4.** — Soient  $h$  un morphisme  $Y \rightarrow M$  et  $u_h$  l'automorphisme  $x \mapsto h(p(x)) \cdot x$  de  $X$  (cf. 1.3.1). Si  $P$  et  $P'$  sont deux lois de compositions sur  $X$  déduites l'une de l'autre par l'intermédiaire de  $u_h$ , c.-à-d.,  $P(u_h(x), u_h(y)) = u_h(P'(x, y))$ , alors  $P$  est une loi de composition admissible (resp. une loi de groupe admissible) si et seulement si  $P'$  en est une.

Trivial.

**Définition 1.3.5.** — Deux lois de composition admissibles déduites l'une de l'autre par le procédé de 1.3.4 sont dites *équivalentes*.

**Proposition 1.3.6.** — Supposons qu'il existe une loi de composition admissible sur  $X$ . Alors :

(i) Il existe une classe  $c \in H^3(Y, M)$  (déterminée canoniquement), dont la nullité est nécessaire et suffisante à l'existence d'une loi de composition admissible associative sur  $X$ .

(ii) Si  $c = 0$ , l'ensemble des lois de composition admissibles et associatives (resp. des classes d'équivalence de lois de composition admissibles et associatives) sur  $X$  est principal homogène sous  $Z^2(G, M)$  (resp.  $H^2(G, M)$ ).

110 La démonstration se fait en plusieurs étapes.

a) Soit  $P$  une loi de composition admissible sur  $X$ . Comme  $P$  relève la loi de composition de  $Y$  qui est associative, il existe un morphisme unique  $a : X^3 \rightarrow M$  tel que

$$P(x, P(y, z)) = a(x, y, z) P(P(x, y), z).$$

En appliquant la condition 1.3.2 (ii), on voit aussitôt que  $a$  est invariant sous l'action de  $M^3$  sur  $X^3$ , d'où en appliquant l'hypothèse  $(+)_3$  le résultat suivant :

(1) Il existe un morphisme unique  $DP : Y^3 \rightarrow M$  tel que

$$P(x, P(y, z)) = DP(p(x), p(y), p(z)) P(P(x, y), z),$$

et  $P$  est associative si et seulement si  $DP = 0$ .

b) Si on calcule de proche en proche  $P(P(P(x, y), z), t)$  à l'aide de la formule précédente, on trouve, en posant  $p(x) = u$ ,  $p(y) = v$ ,  $p(z) = w$ ,  $p(t) = h$ ,

$$DP(u, v, w) \cdot DP(u, vw, h) \cdot f(u)DP(v, w, h) \cdot DP(u, v, wh)^{-1} \cdot DP(uv, w, h)^{-1} = e_M.$$

On a donc  $\partial DP(u, v, w, h) = e_M$ . Comme d'autre part le premier membre de la formule précédente peut s'écrire à l'aide de  $P$  et de  $a$  comme l'expression en  $(x, y, z, t)$  d'un certain morphisme  $X^4 \rightarrow M$ , il résulte de l'hypothèse d'unicité dans  $(+)_4$  que  $\partial DP$  et  $e_M$ , qui factorisent le même morphisme, sont égaux, donc

(2)  $DP$  est un cocycle, i.e. on a  $DP \in Z^3(Y, M)$ .

c) Si  $P$  et  $P'$  sont deux lois de composition admissibles sur  $X$ , il existe un morphisme unique

$$b : X^2 \longrightarrow M$$

111 tel que  $P'(x, y) = b(x, y)P(x, y)$ . On voit comme d'habitude que  $b$  est invariant par  $M^2$ , d'où, d'après  $(+)_2$  :

(3) Pour tout couple de lois de compositions admissibles  $(P, P')$ , il existe un unique  $d(P, P') : Y^2 \rightarrow M$  tel que

$$P'(x, y) = d(P, P')(p(x), p(y)) P(x, y),$$

et l'ensemble des lois de compositions admissibles devient ainsi principal homogène sous  $\text{Hom}(Y^2, M) = C^2(Y, M)$ .

d) Sous les conditions précédentes, on a la formule :

$$(4) \quad DP' - DP = \partial d(P, P').$$

e)  $P$  et  $P'$  sont équivalentes si et seulement si il existe un morphisme  $h \in C^1(Y, M) = \text{Hom}(Y, M)$  tel que  $d(P, P') = \partial h$  ; cela résulte facilement de la définition de l'équivalence.

f) Il n'y a plus qu'à conclure : on cherche un  $P'$  tel que  $DP' = e$ . Or  $DP$  est un cocycle dont la classe dans  $H^3(Y, M)$  ne dépend pas de la loi de composition admissible  $P$  choisie (par (3) et (4)). Cette classe est l'obstruction  $c$  demandée. On pourra choisir un  $P'$  répondant aux conditions si et seulement si  $c = 0$  ; en effet, choisissant un  $P$  quelconque, on aura à résoudre, par (1) :

$$0 = DP' = DP + \partial d(P, P'),$$

ce qui est possible par (3) et (4) si et seulement si  $c = 0$ . L'ensemble des  $P'$  *associatifs* est principal homogène sous  $Z^2(Y, M)$ , toujours par (3) et (4). L'ensemble des  $P'$  associatifs à équivalence près est principal homogène sous  $H^2(Y, M)$  d'après (e).

## 2. Extensions infinitésimales d'un morphisme de préschémas en groupes

112

Reprenons les notations du n°0. Soient  $Y$  et  $X$  deux  $S$ -foncteurs en groupes. Soit  $M$  le noyau du morphisme de groupes  $p_X : X \rightarrow X^+$ . On a donc une suite exacte de  $S$ -foncteurs en groupes

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow X \xrightarrow{p_X} X^+.$$

Par définition de  $X^+$ , on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(Y, X^+) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{S_{\mathcal{J}}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}}) \\ \text{Hom}_{S\text{-gr.}}(Y, X^+) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{S_{\mathcal{J}}\text{-gr.}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}}), \end{aligned}$$

et le morphisme

$$\text{Hom}_S(Y, p_X) : \text{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \text{Hom}_S(Y, X^+)$$

associe à un  $S$ -morphisme  $f : Y \rightarrow X$ , le  $S$ -morphisme  $f^+ : Y \rightarrow X^+$  correspondant par les isomorphismes précédents au  $S_{\mathcal{J}}$ -morphisme  $f_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \rightarrow X_{\mathcal{J}}$  obtenu par changement de base à partir de  $f$ . Si  $M$  est *commutatif*, on peut appliquer à cette situation la proposition 1.2.4.

Dans la suite, nous nous intéresserons au cas suivant :  $Y$  est *plat* sur  $S$ , et  $X$  est un  $S$ -foncteur en groupes de l'une des deux espèces suivantes :

- a)  $X$  est un  $S$ -préschéma en groupes,
- b)  $X = \underline{\text{Aut}}_S(E)$  où  $E$  est un  $S$ -préschéma, de *présentation finie* sur  $S$ .

Notons  $(\mathbf{Plats})/S$  la catégorie des  $S$ -pré-schémas *plats* sur  $S$ . Dans le cas (a) (resp. (b)), le  $S$ -foncteur en groupes  $M = \text{Ker}(X \rightarrow X^+)$ , sa restriction  $L$  à  $(\mathbf{Plats})/S$ , et les opérations des automorphismes intérieurs de  $X$  sur  $M$ , ont été calculés en 0.9, 0.5, et 0.10 (resp. 0.11, 0.14, et 0.12). C'est-à-dire, dans le cas (a), soit  $L_0$  le  $S_0$ -foncteur en groupes commutatifs défini par : pour tout  $S_0$ -pré-schéma  $T$ ,

$$\text{Hom}_{S_0}(T, L_0) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T),$$

sur lequel  $X_0$  opère via sa représentation adjointe dans  $\omega_{X_0/S_0}^1$  <sup>(44)</sup>, et soit  $L = \prod_{S_0/S} L_0$ .

Dans le cas (b), notons  $\pi$  le morphisme structural  $E \rightarrow S$  et soit  $L$  le foncteur en groupes abéliens sur  $(\mathbf{Plats})/S$  défini par

$$\text{Hom}_S(T, L) = \Gamma(T, \pi_*(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_E}(\Omega_{E/S}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_E)) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T),$$

sur lequel  $X$ , considéré comme foncteur sur  $(\mathbf{Plats})/S$ , opère comme on l'a vu en 0.12.

Alors, on a une suites exacte de foncteurs en groupes sur  $(\mathbf{Plats})/S$  :

$$(E) \quad 1 \longrightarrow \prod_{S_0/S} L_0 \longrightarrow X \longrightarrow X^+,$$

D'autre part,  $Y$  étant supposé *plat* sur  $S$ , les groupes  $H^i(Y, M)$  ne dépendent, d'après 1.1.1, que de la restriction  $L$  de  $M$  à  $(\mathbf{Plats})/S$ . Comme, dans le cas (a),  $L = \prod_{S_0/S} L_0$ , on aura donc, par 1.1.2, des isomorphismes  $H^i(Y, L) \simeq H^i(Y_0, L_0)$ .

Alors, compte-tenu de ce qui précède, on déduit de la proposition 1.2.4 le <sup>(45)</sup>

**Théorème 2.1.** — Soient  $S$  un pré-schéma,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  deux idéaux quasi-cohérents tels que  $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{J}$  et  $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$ , définissant les sous-pré-schémas fermés  $S_0$  et  $S_{\mathcal{J}}$ , et soient :

- $X$  un  $S$ -foncteur en groupes de type (a) ou (b), et  $L_0, L$  comme ci-dessus ;
- $Y$  un  $S$ -pré-schéma en groupes plat sur  $S$  et  $f_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \rightarrow X_{\mathcal{J}}$  un morphisme de  $S_{\mathcal{J}}$ -groupes.

Alors :

(i) Pour que  $f_{\mathcal{J}}$  se relève en un morphisme de  $S$ -groupes  $Y \rightarrow X$ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(i<sub>1</sub>)  $f_{\mathcal{J}}$  se relève en un morphisme de  $S$ -foncteurs  $Y \rightarrow X$  (d'après 1.2.1.1, ceci définit une opération de  $Y$  sur  $L$ , qui ne dépend pas du relèvement choisi ; de plus, dans le cas (a), l'opération ainsi obtenue de  $Y_0$  sur  $L_0$  provient du morphisme  $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  et de « l'action adjointe » de  $X_0$  sur  $L_0$ ) ;

(i<sub>2</sub>) Une certaine obstruction  $c(f_{\mathcal{J}})$ , définie canoniquement par  $f_{\mathcal{J}}$ , est nulle, où  $c(f_{\mathcal{J}})$  est une classe dans  $H^2(Y, L)$  ( $\simeq H^2(Y_0, L_0)$  dans le cas (a)).

<sup>(44)</sup>N.D.E. : à préciser ...

<sup>(45)</sup>N.D.E. : On a placé plus haut les définitions qui figuraient dans l'original dans l'énoncé du théorème 2.1 et formaient l'essentiel de la page 113 de l'original.

(ii) Si les conditions de (i) sont satisfaites, l'ensemble des morphismes de S-foncteurs en groupes  $Y \rightarrow X$  prolongeant  $f_{\mathcal{J}}$ , modulo l'action des automorphismes intérieurs de  $X$  définis par les sections de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$  sur  $S_{\mathcal{J}}$ , est principal homogène sous  $H^1(Y, L) (\simeq H^1(Y_0, L_0)$  dans le cas (a)).

(iii) Si  $f : Y \rightarrow X$  est un morphisme de S-foncteurs en groupes prolongeant  $f_{\mathcal{J}}$ , l'ensemble des morphismes  $Y \rightarrow X$  transformés de  $f$  par les automorphismes intérieurs définis par les sections de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$  sur  $S_{\mathcal{J}}$ , est isomorphe à  $\Gamma(L)/H^0(Y, L) (\simeq \Gamma(L_0)/H^0(Y_0, L_0)$  dans le cas (a)).

115

**Remarque 2.2.** — On conserve les notations précédentes ; en particulier,  $Y$  est plat sur  $S$ . Dans le cas (b),  $L$  est, d'après (0.14.1), la restriction à  $(\mathbf{Plats})_S$  du foncteur

$$W(\pi_*(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_E}(\Omega_{E/S}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_E))),$$

où  $\pi : E \rightarrow S$  est le morphisme structural. Dans le cas (a), supposons de plus que  $X$  soit localement de présentation finie sur  $S$  ; alors d'après (0.6.1),  $L$  est la restriction à  $(\mathbf{Plats})_S$  du foncteur

$$\prod_{S_0/S} W(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J})).$$

Dans les deux cas, le module dont on prend le  $W$  est quasi-cohérent, d'après EGA I, 9.1.1. Supposons de plus  $Y$  affine sur  $S$  <sup>(46)</sup>. Alors, d'après I, 5.3, on obtient :

- a)  $H^i(Y, L) = H^i(Y_0, L_0) = H^i(Y_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}))$ ,
- b)  $H^i(Y, L) = H^i(Y, \pi_*(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_E}(\Omega_{E/S}^1, \mathcal{J}\mathcal{O}_E)))$ .

**Remarque 2.3.** — D'après 0.16 et 0.17, la condition (i<sub>1</sub>) est automatiquement vérifiée lorsque  $Y$  est un schéma affine et

- a)  $X$  est lisse sur  $S$  ;
- b)  $E$  est lisse et affine sur  $S$ .

Sous ces conditions, on alors peut écrire dans le cas (a), d'après 2.2 a) et (0.6.2),

$$H^i(Y, L) = H^i(Y_0, L_0) = H^i(Y_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}),$$

<sup>(47)</sup> et dans le cas (b), d'après (0.14.2), 1.1.2 et I, 5.3,

$$H^i(Y, L) = H^i(Y_0, \pi_{0*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{E_0}}(\Omega_{E_0/S_0}^1, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{E_0})).$$

Énonçons maintenant un certain nombre de corollaires concernant le cas où  $Y$  est un S-groupe diagonalisable (I, 4.4) ; on sait alors (*loc. cit.* 5.3.3) que si  $S$  est affine,  $H^n(Y, \mathcal{F}) = 0$  pour  $n > 0$  et tout  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ . D'abord un cas particulier :

**Corollaire 2.4.** — Soient  $S$  un préschéma et  $S_0$  un sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent. Soit  $Y$  un S-groupe diagonalisable et soit :

- a)  $X$  un S-groupe localement de présentation finie sur  $S$ ,
- b)  $X = \underline{\text{Aut}}_S(E)$  où  $E$  est localement de présentation finie sur  $S$ .

<sup>(46)</sup>N.D.E. : On a ajouté cette hypothèse, ainsi que la référence à I, 5.3.

<sup>(47)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce qui suit, cf. la N.D.E. (30) dans 0.14.

Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de  $S$ -groupes tel que le morphisme  $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  obtenu par changement de base soit le morphisme unité. Alors  $f$  est le morphisme unité.

116 En effet, la question est locale sur  $S$  et (dans (b)) sur  $E$ . On peut donc supposer  $S$  affine et (dans (b))  $E$  de présentation finie sur  $S$ . En introduisant maintenant les sous-préschémas fermés  $S_n$  de  $S$  définis par les puissances de l'idéal définissant  $S_0$ , on est ramené au cas où  $S_0$  est défini par un idéal de carré nul, et en ce cas l'assertion énoncée résulte du théorème, via 2.2.

Dans le cas où on ne suppose pas nécessairement que  $f_0$  soit le morphisme unité, on a :

**Corollaire 2.5.** — Soient  $S$  et  $S_0$  comme dans 2.4. Supposons de plus  $S$  affine. Soient  $Y$  un  $S$ -groupe diagonalisable,  $X$  un  $S$ -foncteur en groupes et  $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  un morphisme de  $S_0$ -foncteurs en groupes.

(i) Supposons que l'on ait l'une des deux propriétés suivantes :

(a)  $X$  est un  $S$ -groupe localement de présentation finie sur  $S$  ;

(b)  $X = \underline{\text{Aut}}_S(E)$  où  $E$  est de présentation finie sur  $S$ .

Alors  $f_0$  se prolonge en un morphisme de  $S$ -groupes  $Y \rightarrow X$  si et seulement si il se prolonge en un morphisme de  $S$ -foncteurs  $Y \rightarrow X$ .

(ii) Supposons que l'on ait l'une des deux propriétés suivantes :

(a)  $X$  est un  $S$ -groupe lisse sur  $S$  ;

(b)  $X = \underline{\text{Aut}}_S(E)$  où  $E$  est lisse et affine sur  $S$ .

Alors  $f_0$  se prolonge en un morphisme de  $S$ -groupes  $Y \rightarrow X$ , deux tels prolongements sont conjugués par un automorphisme intérieur de  $X$  défini par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_0$  sur  $S_0$ .

117 Introduisant les  $S_n$  comme ci-dessus, (i) résulte de proche en proche de la partie (ii) du théorème. Pour (ii), on raisonne de même, en remarquant que les conditions de 2.1 (i) sont automatiquement vérifiées par 2.3 (noter qu'un préschéma lisse sur  $S$  est nécessairement localement de présentation finie sur  $S$ , donc qu'un préschéma lisse et affine sur  $S$  est nécessairement de présentation finie) ; en outre toute section de  $X_{S_n}$  sur  $S_n$  se relève en une section de  $X_{S_{n+1}}$  sur  $S_{n+1}$  (d'après la définition de « lisse sur  $S$  » pour (a), et d'après 0.16 pour (b)) ; si  $f$  et  $f'$  sont deux relèvements de  $f_0$ , on peut supposer de proche en proche  $f_n = f'_n$  en relevant l'automorphisme intérieur dont l'existence est affirmée par la partie (ii) du théorème, ce qui achève la démonstration.

En raisonnant de même, on obtient pour tout  $S$ -groupe  $Y$ , plat sur  $S$  et affine :

**Corollaire 2.6.** — Soient  $S$  un préschéma,  $\mathcal{I}$  un idéal nilpotent définissant le sous-préschéma fermé  $S_0$ ,  $Y$  un  $S$ -groupe plat sur  $S$  et affine,  $X$  un  $S$ -groupe lisse sur  $S$ .

(i) Si, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $H^2(Y_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$ , tout morphisme de  $S_0$ -groupes  $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  se relève en un morphisme de  $S$ -groupes  $f : Y \rightarrow X$ .

(ii) Si, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $H^1(Y_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$ , deux tels relèvements sont conjugués par un automorphisme intérieur de  $X$  défini par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_0$  sur  $S_0$ .

Or on a le lemme suivant :

**Lemme 2.7.** — Soient  $S$  un schéma affine,  $G$  un  $S$ -groupe affine,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre. Supposons que l'on ait une opération de  $G$  sur  $\mathcal{F}$  au sens de l'exposé I, ce qui définit une opération de  $G$  sur  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}$  <sup>(48)</sup>. Notons  $A$  l'anneau de  $S$ ,  $L$  le  $A$ -module définissant  $\mathcal{L}$  (qui est donc un module projectif). On a un isomorphisme canonique

**118**

$$H^*(G, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}) \simeq H^*(G, \mathcal{F}) \otimes_A L.$$

En effet, dans la situation de l'énoncé, les groupes de cohomologie de  $G$  à valeurs dans  $\mathcal{F}$  se calculent comme les groupes de sections des faisceaux de cohomologie  $\underline{H}^n(G, \mathcal{F})$  (I, 5.3). Or il résulte immédiatement de la définition de ces faisceaux de cohomologie que leur formation commute au produit tensoriel par un faisceau localement libre. En prenant les sections (on est sur une base affine), on trouve le résultat annoncé.

En utilisant le lemme, on transforme 2.6 en :

**Corollaire 2.8.** — Soient  $S$  un schéma affine,  $\mathcal{I}$  un idéal nilpotent sur  $S$  définissant le sous-préschéma fermé  $S_0$ . Supposons les  $\mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}$  localement libres sur  $S_0$ . Soient  $Y$  un  $S$ -groupe plat sur  $S$  et affine,  $X$  un  $S$ -groupe lisse sur  $S$ , et  $f_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  un morphisme de  $S$ -groupes.

- (i) Si  $H^2(Y_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)) = 0$ ,  $f_0$  se relève en un morphisme de  $S$ -groupes  $Y \rightarrow X$ .
- (ii) Si  $H^1(Y_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)) = 0$ , deux tels relèvements sont conjugués par un automorphisme intérieur de  $X$  défini par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_0$  sur  $S_0$ .

En particulier, faisant  $Y = X$  :

**Corollaire 2.9.** — Soient  $S$  et  $S_0$  comme ci-dessus. Soit  $X$  un  $S$ -groupe lisse sur  $S$  et affine.

(i) Si  $H^1(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)) = 0$ , tout endomorphisme de  $X$  au-dessus de  $S$  induisant l'identité sur  $X_0$  est l'automorphisme intérieur défini par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_0$  sur  $S_0$ .

(ii) Si  $H^2(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)) = 0$ , tout  $S_0$ -automorphisme de  $X_0$  se prolonge en un  $S$ -automorphisme de  $X$ . **119**

**Remarque 2.10.** — Les assertions concernant les  $H^1$  ont des réciproques d'après le théorème. Signalons comme exemple la suivante : si  $S = \mathbb{I}_{S_0}$  est le schéma des nombres duaux sur  $S_0$  (II, 2.1) et si  $X$  est un  $S$ -groupe plat sur  $S$  tel que tout automorphisme de  $X$  sur  $S$  induisant l'identité sur  $S_0$  soit l'automorphisme intérieur défini par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_0$  sur  $S_0$ , alors  $H^1(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)) = 0$ .

<sup>(48)</sup>N.D.E. : où  $\mathcal{L}$  est muni de l'action triviale de  $G$ .

**Corollaire 2.11.** — Soient  $S$ ,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  comme en 2.1. Soient  $Y$  un  $S$ -préschéma en groupes plat sur  $S$ ,  $X$  un  $S$ -préschéma en groupes,  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de  $S$ -groupes. L'ensemble des morphismes de  $Y$  dans  $X$  déduits de  $f$  par conjugaison par des  $x \in X(S)$  induisant l'unité de  $X(S_{\mathcal{J}})$  est isomorphe au quotient

$$E = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}) / \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J})^{\mathrm{ad}(Y_0)},$$

où le second groupe est formé des  $\mathcal{O}_{S_0}$ -morphisms  $\omega_{X_0/S_0}^1 \rightarrow \mathcal{J}$ , qui par tout changement de base  $S' \rightarrow S_0$  donnent des morphismes  $\omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{S'}$  invariants sous l'action de  $Y_0(S')$  sur le premier facteur.

Par 2.1 (iii), on sait que l'ensemble cherché est isomorphe à  $\Gamma(L_0)/H^0(Y_0, L_0)$ . Or  $\Gamma(L_0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J})$  et  $H^0(Y_0, L_0)$  n'est évidemment autre que  $\Gamma(L_0)^{\mathrm{ad}(Y_0)}$  au sens de l'énoncé précédent.

120

**Corollaire 2.12.** — Sous les conditions de 2.11, supposons de plus  $\omega_{X_0/S_0}^1$  localement libre (de type fini). Alors

$$E \simeq \Gamma(S_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}) / H^0(Y_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}).$$

**Corollaire 2.13.** — Supposons de plus  $Y_0$  diagonalisable. Alors

$$E \simeq \Gamma(S_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}) / \Gamma(S_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)^{\mathrm{ad}(Y_0)} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J})$$

où  $\mathcal{L}ie(X_0/S_0)^{\mathrm{ad}(Y_0)}$  peut être construit comme le facteur de la décomposition de I, 4.7.3, correspondant au caractère nul de  $Y_0$ .

En effet, si  $Y_0 \simeq D_{S_0}(M)$ , on a par *loc. cit.* une décomposition en somme directe :

$$\mathcal{L}ie(X_0/S_0) = \mathcal{L}ie(X_0/S_0)_0 \oplus \bigoplus_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} \mathcal{L}ie(X_0/S_0)_m.$$

En tensorisant par  $\mathcal{J}$ , on trouve une décomposition analogue pour  $\mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}$ , d'où la relation

$$H^0(Y_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes \mathcal{J}) \simeq \Gamma(S_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}).$$

**Corollaire 2.14.** — Supposons de plus  $S_0$  affine. Alors

$$E \simeq \Gamma\left(S_0, \left[\mathcal{L}ie(X_0/S_0) / \mathcal{L}ie(X_0/S_0)^{\mathrm{ad}(Y_0)}\right] \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}\right).$$

### 3. Extensions infinitésimales d'un préschéma en groupes

121

Toujours dans les notations du n° 0 ( $S$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{J}$ , etc.), donnons-nous un  $S$ -préschéma  $X$  et supposons  $X_{\mathcal{J}}$  muni d'une structure de groupe. Nous nous proposons de trouver les structures de  $S$ -groupe sur  $X$  induisant sur  $X_{\mathcal{J}}$  la structure donnée.

À partir de maintenant, nous supposons  $X$  plat sur  $S$ . Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $S$ -préschémas plats sur  $S$ . On a donc  $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$ . Nous noterons  $Y$ , resp.  $M$ , le foncteur sur  $\mathcal{C}$  défini par  $X^+$ , resp.  $L'_X$ . Le morphisme canonique  $p_X : X \rightarrow X^+$  définit un morphisme de  $\widehat{\mathcal{C}}$

$$p : X \longrightarrow Y$$

et l'opération de  $L'_X$  sur  $X$  dans  $(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/S}$  définit une opération de  $M$  sur  $X$  dans  $\widehat{\mathcal{C}}$ . On vérifie aussitôt que  $X$  devient bien ainsi formellement principal homogène sous  $M_Y$  au-dessus de  $Y$  (cf. 0.2 (i) et 0.4).

L'opération de  $X^+$  sur  $L'_X$  définie en 0.8 (notée  $Ad$  en *loc. cit.*) définit une opération notée  $f$  de  $Y$  sur  $M$ . On sait, d'autre part (0.5), que

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Z, M) \simeq \mathrm{Hom}_{S_0}(Z_0, L_0), \quad Z \in \mathrm{Ob} \widehat{\mathcal{C}},$$

où  $L_0$  est le foncteur défini en 0.5.

**Lemme 3.1.** — (i) La condition  $(+)_n$  de 1.3 est vérifiée pour tout entier positif  $n$ .

(ii) Si on fait opérer le  $S_0$ -groupe  $X_0$  sur le  $S_0$ -foncteur  $L_0$  par l'intermédiaire de sa représentation adjointe, on a un isomorphisme canonique

$$H^*(X_0, L_0) \simeq H^*(Y, M),$$

(la première cohomologie est calculée dans  $(\mathbf{Sch})_{/S_0}$ , la seconde dans  $\widehat{\mathcal{C}}$ ).

122

Les deux parties du lemme résultent de la relation :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Y, M) &\simeq \mathrm{Hom}_{(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/S_0}}(X^+ \times_S S_0, L_0) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{S_0}(X_0, L_0) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, M), \end{aligned}$$

qui provient aussitôt de la définition de  $M$  comme un  $\prod_{S_0/S}$ . Cette relation étant plus généralement vérifiée en remplaçant  $X, Y$  par  $X^n, Y^n$ , on en déduit que tout morphisme  $X^n \rightarrow M$  se factorise de manière unique par  $Y^n$ , ce qui entraîne  $(+)_n$ . On en déduit aussi la relation  $C^*(Y, M) = C^*(X_0, L_0)$  ce qui entraîne (ii).

Nous pouvons donc appliquer les constructions de 1.3. En particulier :

**Lemme 3.2.** — Soit  $P : X \times_S X \rightarrow X$  un morphisme. Pour que  $P$  induise la loi de groupe de  $X_{\mathcal{J}}$ , il faut et il suffit que  $P$  soit une loi de composition admissible<sup>(49)</sup> sur  $X$ .

En effet, pour que  $P$  induise la loi de groupe de  $X_{\mathcal{J}}$ , il faut et il suffit que  $P$  relève la loi de groupe de  $X^+$ , ou encore celle de  $Y$ . Il n'y a donc qu'à montrer que tout morphisme  $P$  relevant la loi de groupe de  $X_{\mathcal{J}}$  vérifie l'identité  $(++)$  de 1.3.2 (ii), ce qui est exactement ce qu'on a vu en 0.8.

**Proposition 3.3.** — Soient  $S$  un préschéma et  $S_0$  un sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent. Soit  $X$  un  $S$ -préschéma plat, et quasi-compact ou localement de présentation finie sur  $S$ . Soit  $P : X \times_S X \rightarrow X$  une loi de composition sur  $X$ . Pour que  $P$  soit une loi de groupe, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (i)  $P$  est associatif.
- (ii)  $P$  induit sur  $X_0 = X \times_X S_0$  une loi de groupe.

123

<sup>(49)</sup>N.D.E. : cf. 1.3.2.

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Supposons d'abord que  $X \rightarrow S$  possède une section. Comme  $X(S')$  est alors non vide pour chaque  $S' \rightarrow S$ , il suffit <sup>(50)</sup> de montrer que, pour tout  $x \in X(S')$ , les translations à gauche et à droite par  $x$  sont des isomorphismes de  $X_{S'}$ . <sup>(51)</sup>

On peut évidemment supposer  $S' = S$ ; la translation en question induit sur  $X_0$  une translation de  $X_0$ , qui est donc un automorphisme puisque  $X_0$  est un groupe. On conclut par platitude (SGA 1 III 4.2). <sup>(52)</sup>

Ne supposant plus maintenant que  $X$  possède une section sur  $S$ , supposons qu'il existe un  $S' \rightarrow S$  tel que  $X_{S'}$  possède une section sur  $S'$ . Alors  $X_{S'}$  est un  $S'$ -groupe d'après ce qu'on vient de voir; considérons sa section unité  $e'$ . L'image inverse de  $e'$  par  $\text{pr}_i : S' \times_S S' \rightarrow S'$  ( $i = 1, 2$ ) est la section unité de  $X_{S'}$  pour la loi de groupe image inverse de  $P_{S'}$  par  $\text{pr}_i$ . Mais comme  $P$  est « défini sur  $S$  », ces deux lois de groupes coïncident, donc aussi leur section unité. On a donc  $\text{pr}_1^*(e') = \text{pr}_2^*(e')$ .

Si  $S' \rightarrow S$  est un morphisme de descente, il existera une section de  $X$  donnant  $e'$  par extension de la base, et on aura terminé. Comme  $X_X$  possède une section sur  $X$  (la section diagonale), on voit qu'il suffit maintenant de prouver que  $X \rightarrow S$  est un morphisme de descente. Or il est plat et surjectif, et quasi-compact ou localement de présentation finie, donc couvrant pour (fpqc), donc un morphisme de descente (Exp. IV, n°6).

**Remarque.** — En fait l'hypothèse  $X \rightarrow S$  quasi-compact ou localement de présentation finie est superflue, en vertu du résultat suivant que le lecteur démontrera comme exercice sur l'exposé IV :

Sous les conditions du texte sur  $S$  et  $S_0$ , si  $X \rightarrow S$  est un morphisme plat et  $X_0 \rightarrow S_0$  un morphisme couvrant pour (fpqc), alors  $X \rightarrow S$  est un morphisme de descente.

124

**Lemme 3.4.** — *Pour que deux lois de compositions admissibles sur  $X$  soient équivalentes <sup>(53)</sup>, il faut et il suffit qu'elles soient déduites l'une de l'autre par un automorphisme de  $X$  au-dessus de  $S$  induisant l'identité sur  $X_{\mathcal{J}}$ .*

En effet, les morphismes construits en 1.3.1 sont exactement ceux de l'énoncé précédent (par 0.7).

<sup>(50)</sup>N.D.E. : On a corrigé l'original, en supprimant la référence à un exercice de Bourbaki sur les semi-groupes (cf. *Algèbre*, Ch. 1, §2, Ex. 9 à 13) et en indiquant le rôle des translations à gauche et à droite, voir la N.D.E. suivante.

<sup>(51)</sup>N.D.E. : Soit  $E$  un ensemble non-vidé muni d'une loi de composition associative, telle que toute translation à gauche  $\ell_x$  soit bijective; fixons  $x_0 \in E$ . Il existe un unique  $e \in E$  tel que  $x_0 \cdot e = x_0$ ; alors  $x_0 \cdot e \cdot x = x_0 \cdot x$  entraîne  $e \cdot x = x$ , pour tout  $x \in E$ . D'autre part, pour tout  $x$  il existe un unique  $x'$  tel que  $x \cdot x' = e$ . Supposons de plus qu'il existe  $b \in E$  tel que la translation à droite  $r_b$  soit injective. Alors, pour tout  $x$ , l'égalité  $x \cdot e \cdot b = x \cdot b$  donne  $x \cdot e = x$  (i.e.  $e$  est élément neutre), et  $x \cdot x' \cdot x = x \cdot e$  entraîne  $x' \cdot x = e$ , i.e.  $x'$  est l'inverse de  $x$  à gauche et à droite, donc  $E$  est un groupe.

Noter que l'hypothèse «  $r_b$  injective » est nécessaire : sur tout ensemble  $E$  on peut définir une loi de composition par  $x \cdot y = y$ , pour tous  $x, y \in E$ ; alors toute translation à gauche est l'identité (d'où l'associativité de la loi), mais pour tout  $y$  on a  $r_y(E) = \{y\}$ , donc  $E$  n'est pas un groupe si  $|E| > 1$ .

<sup>(52)</sup>N.D.E. : détailler ce point ...

<sup>(53)</sup>N.D.E. : au sens de la Définition 1.3.5.

Compte tenu de tous les résultats précédents, la proposition 1.3.6 donne :

**Théorème 3.5.** — Soient  $S$  un préschéma,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  deux idéaux sur  $S$  tels que  $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{J}$ ,  $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$ ,  $S_0$  et  $S_{\mathcal{J}}$  les sous-préschémas fermés de  $S$  qu'ils définissent. Soit  $X$  un  $S$ -préschéma plat sur  $S$  (et localement de présentation finie ou quasi-compact sur  $S$ ),  $X_0$  et  $X_{\mathcal{J}}$  les préschémas obtenus par changement de base. Supposons  $X_{\mathcal{J}}$  muni d'une structure de  $S_{\mathcal{J}}$ -groupe et notons  $L_0$  le  $S_0$ -foncteur en groupes abéliens défini par la formule

$$\mathrm{Hom}_{S_0}(T, L_0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T)$$

sur lequel  $X_0$  opère par l'intermédiaire de sa représentation adjointe.

(i) Pour qu'il existe une structure de  $S$ -groupe sur  $X$  induisant la structure donnée sur  $X_{\mathcal{J}}$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i<sub>1</sub>) Il existe un morphisme de  $S$ -préschémas  $X \times_S X \rightarrow X$  induisant la loi de groupe de  $X_{\mathcal{J}}$ .

(i<sub>2</sub>) Une certaine classe d'obstruction appartenant à  $H^3(X_0, L_0)$  (définie canoniquement par la donnée de  $X$  et de la loi de groupe de  $X_{\mathcal{J}}$ ) est nulle.

(ii) Si les conditions de (i) sont satisfaites, l'ensemble des lois de groupe sur  $X$  induisant la loi donnée de  $X_{\mathcal{J}}$ , modulo les  $S$ -automorphismes de  $X$  induisant l'identité sur  $X_{\mathcal{J}}$ , est un ensemble principal homogène sous  $H^2(X_0, L_0)$ . 125

**Remarque 3.6.** — Soit  $X_{\mathcal{J}}$  un  $S_{\mathcal{J}}$ -préschéma lisse sur  $S_{\mathcal{J}}$  et affine. Par 0.15 il existe à isomorphisme près un unique  $S$ -préschéma  $X$ , lisse sur  $S$ , et se réduisant suivant  $X_{\mathcal{J}}$ . Si  $X_{\mathcal{J}}$  est muni d'une structure de  $S_{\mathcal{J}}$ -groupe, il résulte de 0.16 que la condition (i<sub>1</sub>) est automatiquement vérifiée. De plus, d'après 0.6 la définition de  $L_0$  se simplifie et on obtient :

**Corollaire 3.7.** — Soient  $S$ ,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  comme dans 3.1. Soit  $X_{\mathcal{J}}$  un  $S_{\mathcal{J}}$ -groupe lisse sur  $S_{\mathcal{J}}$  et affine.

(i) L'ensemble des  $S$ -groupes lisses sur  $S$  et se réduisant suivant  $X_{\mathcal{J}}$  à isomorphisme (induisant l'identité sur  $X_{\mathcal{J}}$ ) près, est vide ou principal homogène sous le groupe

$$H^2(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}).$$

(ii) Il existe un  $S$ -groupe lisse sur  $S$  se réduisant suivant  $X_{\mathcal{J}}$  si et seulement si une certaine obstruction dans

$$H^3(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J})$$

est nulle.

On en déduit comme d'habitude les corollaires suivants :

**Corollaire 3.8.** — Soient  $S$  un préschéma et  $S_0$  un sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent  $\mathcal{I}$ . Soit  $X_0$  un  $S_0$ -groupe lisse sur  $S$  et affine.

(i) Si  $H^2(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ , deux  $S$ -groupes lisses sur  $S$  se réduisant suivant  $X_0$  sont isomorphes (par un isomorphisme induisant l'identité sur  $X_0$ ). 126

(ii) Si  $H^3(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ , il existe un  $S$ -groupe lisse sur  $S$ , se réduisant suivant  $X_0$ .

**Corollaire 3.9.** — Soient  $S$  un préschéma affine et  $S_0$  un sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent  $\mathcal{I}$ . Supposons les  $\mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}$  localement libres sur  $S_0$ . Soit  $X_0$  un  $S_0$ -groupe lisse et affine sur  $S_0$

(i) Si  $H^2(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)) = 0$ , deux  $S$ -groupes lisses sur  $S$  se réduisant suivant  $X_0$  sont isomorphes.

(ii) Si  $H^3(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)) = 0$ , il existe un  $S$ -groupe lisse sur  $S$  se réduisant suivant  $X_0$ .

**Corollaire 3.10.** — Soient  $S_0$  un préschéma et  $S = I_{S_0}$  le schéma des nombres duaux sur  $S_0$ . Soit  $X_0$  un  $S_0$ -groupe lisse sur  $S_0$ . Pour que tout  $S$ -groupe  $Y$ , lisse sur  $S$ , tel que  $Y_0$  soit  $S_0$ -isomorphe à  $X_0$ , soit  $S$ -isomorphe à  $X = X_0 \times_{S_0} S$ , il faut et il suffit que  $H^2(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0)) = 0$ .

En effet, en vertu de 3.5 l'ensemble des classes, à un isomorphisme de  $S$ -groupes près « induisant l'identité sur  $X_0$  », de tels groupes  $Y$ , est en correspondance biunivoque avec  $H^2(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0))$ , donc l'ensemble des classes, à un isomorphisme de  $S$ -groupes quelconque près, est en correspondance biunivoque avec

$$H^2(X_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0))/\Gamma_0,$$

où

$$\Gamma_0 = \text{Aut}_{S_0\text{-gr}}(X_0),$$

(qui opère de façon évidente sur le  $H^2$ ). La conclusion résulte aussitôt de là.

#### 4. Extensions infinitésimales de sous-groupes fermés

127

Énonçons d'abord un résultat valable dans une catégorie abélienne quelconque.

**Lemme 4.1.** — Soient  $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$  une suite exacte,  $\phi : A' \rightarrow Q$  un morphisme et  $\pi : A'' \rightarrow P$  un épimorphisme de noyau  $C$ . Soit  $E$  l'ensemble (à isomorphisme près) des quadruplets  $(B, f, g, h)$  tels que la suite

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

soit exacte et le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow h & & \downarrow \pi & & \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

(i) Pour que  $E$  soit non vide, il faut et il suffit que l'image dans  $\text{Ext}^1(C, Q)$  de l'élément  $A$  de  $\text{Ext}^1(A'', A')$  soit nulle.

(ii) Sous ces conditions,  $E$  est un ensemble principal homogène sous le groupe abélien  $\text{Hom}(C, Q)$ .

Introduisons la somme amalgamée  $B' = A \amalg^{A'} Q$ . On a alors un diagramme commutatif où les lignes sont exactes : <sup>(54)</sup>

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{j} & B' & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

et il est clair que la catégorie des solutions du problème posé est canoniquement isomorphe à la catégorie des solutions du problème correspondant pour la suite 128

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow B' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

et les morphismes  $\text{id}_Q$  et  $\pi : A'' \rightarrow P$ . <sup>(55)</sup> Dans ce cas, l'ensemble  $E$  est en bijection avec l'ensemble des sous-objets  $N$  de  $B'$  tels que  $B' \rightarrow A''$  induise un isomorphisme de  $N$  avec le noyau  $C$  de  $A'' \rightarrow P$ , c'est-à-dire l'ensemble des morphismes  $e : C \rightarrow B'$  relevant le morphisme canonique  $C \rightarrow A''$ . Le groupe abélien  $G = \text{Hom}(C, Q)$  agit sur  $E$  par  $g \cdot e = g + e$  (addition dans  $\text{Hom}(C, B')$ ), et si  $E \neq \emptyset$  ceci fait de  $E$  un ensemble principal homogène sous  $G$ .

On en déduit :

**Proposition 4.2.** — <sup>(56)</sup> Soient  $S$  un préschéma,  $S_{\mathcal{J}}$  le sous-préschéma fermé défini par un idéal quasi-cohérent  $\mathcal{J}$  de carré nul,  $X$  un  $S$ -préschéma,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module,  $X_{\mathcal{J}} = X \times_S S_{\mathcal{J}}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}$ , et  $\mathcal{G}_{\mathcal{J}} = \mathcal{F}_{\mathcal{J}} / \mathcal{H}_{\mathcal{J}}$  un module quotient de  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ . Donnons-nous un morphisme de  $\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}$ -modules

$$f : \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{G}_{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathcal{Q}.$$

Soit  $\mathcal{E}$  le faisceau d'ensembles sur  $X$  défini comme suit : pour chaque ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\mathcal{E}(U)$  est l'ensemble des modules quotients  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}|_U$ , tels que  $\mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_U$  et qu'il existe un isomorphisme

$$h : \mathcal{J}\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}|_U$$

rendant commutatif le diagramme 129

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} (\mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_U) & \xrightarrow{f|_U} & \mathcal{Q}|_U \\
 \text{can.} \downarrow & \nearrow h & \\
 \mathcal{J}\mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & .
 \end{array}$$

<sup>(54)</sup>N.D.E. : On a  $\text{Coker}(j) = B' \amalg^Q 0 = A \amalg^{A'} 0 = A''$ , et l'on voit que  $\text{Ker}(j) \simeq \text{Ker}(i) = 0$  en raisonnant « comme si  $\mathcal{C}$  était une catégorie de modules » ; pour une démonstration uniquement en termes de flèches, voir par exemple P. Freyd, *Abelian categories*, Th. 2.5.4 (\*).

<sup>(55)</sup>N.D.E. : Dans ce qui suit, on a remplacé  $A$  par  $B'$ , et détaillé la fin de l'argument.

<sup>(56)</sup>N.D.E. : On a récrit l'énoncé pour être exactement dans le cadre de l'application qui en est faite dans 4.3 ; d'autre part, on a détaillé la démonstration, selon les indications données par M. Demazure.

( $h$  est alors unique, puisque  $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} (\mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}}) \rightarrow \mathcal{J}\mathcal{G}$  est un épimorphisme). Alors  $\mathcal{E}$  est un faisceau formellement principal homogène sous le faisceau en groupes commutatifs

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{\mathcal{J}}, \mathcal{Q}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{H}_{\mathcal{J}}, \mathcal{Q}).$$

*Démonstration.* Si  $\mathcal{E}(\mathcal{U}) = \emptyset$  il n'y a rien à démontrer ; on peut donc supposer que  $\mathcal{E}(\mathcal{U})$  contient un élément  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Alors, dans le diagramme ci-dessous,  $h$  est un isomorphisme et toutes les flèches sont des épimorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} (\mathcal{F}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} (\mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{f|_{\mathcal{U}}} & \mathcal{Q}|_{\mathcal{U}} \\ \text{can.} \downarrow & & \text{can.} \downarrow & \nearrow \simeq & \\ \mathcal{J}\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{G}} & & \end{array} .$$

Donc, le morphisme  $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} (\mathcal{F}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}}) \rightarrow \mathcal{Q}|_{\mathcal{U}}$  induit un épimorphisme (nécessairement unique)  $\phi : \mathcal{J}\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{Q}|_{\mathcal{U}}$ , et si  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ -module tel que  $\mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}}$  et qu'on ait un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{F}|_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}|_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{p_{\mathcal{J}}} & \mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(où  $p_{\mathcal{J}}$  est la projection  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}}$ , de sorte que  $\mathcal{Q}|_{\mathcal{U}} = \text{Ker}(p_{\mathcal{J}}) = \mathcal{J}\mathcal{G}$ ), alors on peut identifier  $\mathcal{G}$  à un module quotient de  $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ . Par conséquent, d'après 4.1 (ii), l'ensemble  $\mathcal{E}(\mathcal{U})$  est principal homogène sous le groupe abélien

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{\mathcal{J}}, \mathcal{Q})(\mathcal{U}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{H}_{\mathcal{J}}, \mathcal{Q})(\mathcal{U}).$$

**Proposition 4.3.** — (TDTE IV 5.1) Soient  $S$  un préschéma,  $S_{\mathcal{J}}$  le sous-préschéma fermé défini par un idéal quasi-cohérent  $\mathcal{J}$  de carré nul,  $X$  un  $S$ -préschéma,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent,  $X_{\mathcal{J}} = X \times_S S_{\mathcal{J}}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}$ . Soit  $\mathcal{G}_{\mathcal{J}} = \mathcal{F}_{\mathcal{J}}/\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$  un module quotient quasi-cohérent de  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ , plat sur  $S_{\mathcal{J}}$ .

Pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X$ , soit  $\mathcal{E}(\mathcal{U})$  l'ensemble des modules quotients quasi-cohérents  $\mathcal{G}$  <sup>(57)</sup> de  $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ , plats sur  $S$  et tels que  $\mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{U}}$ . Alors les  $\mathcal{E}(\mathcal{U})$  forment un faisceau d'ensembles  $\mathcal{E}$  sur  $X$ , qui est formellement principal homogène sous le faisceau en groupes commutatifs

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{H}_{\mathcal{J}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{G}_{\mathcal{J}}).$$

<sup>(57)</sup>N.D.E. : Pour alléger l'énoncé, on a ajouté ici l'hypothèse que  $\mathcal{G}$  soit quasi-cohérent, et reporté à la démonstration la remarque que cette hypothèse est automatiquement vérifiée ; on a détaillé la démonstration en conséquence.

(57) *Démonstration.* Notons  $\pi : X \rightarrow S$  le morphisme structural. Soient  $U$  un ouvert de  $X$  et  $\mathcal{G}$  un  $\mathcal{O}_U$ -module *plat* sur  $S$  et tel que  $\mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_U$ . Alors, pour tout  $x \in U$ ,  $\mathcal{G}_x$  est un module plat sur l'anneau local  $\mathcal{O}_{S,s}$  (où  $s = \pi(x)$ ), et donc le morphisme

$$\mathcal{J}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} (\mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G})_x = \mathcal{J}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{G}_x \longrightarrow (\mathcal{J}\mathcal{G})_x$$

est bijectif; on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_U) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_U \longrightarrow 0$$

et comme  $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_U)$  et  $\mathcal{G}_{\mathcal{J}}|_U$  sont des  $\mathcal{O}_U$ -modules quasi-cohérents,  $\mathcal{G}$  l'est aussi (cf. EGA III, 1.4.17).

Réciproquement, puisqu'on a supposé  $\mathcal{G}_{\mathcal{J}}$  plat sur  $S_{\mathcal{J}}$ , si  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{O}_U$ -module quasi-cohérent tel que  $\mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_{\mathcal{J}}$  et que le morphisme  $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{G}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{J}\mathcal{G}$  soit bijectif, alors  $\mathcal{G}$  est *plat* sur  $S$ , d'après le « critère fondamental de platitude » (cf. SGA 1 IV, 5.5<sup>(58)</sup>). 130

Par conséquent, l'ensemble  $\mathcal{E}(U)$  considéré ici coïncide avec l'ensemble considéré dans 4.2, en prenant pour  $f$  le morphisme identique de  $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{G}_{\mathcal{J}}$ , et la conclusion découle donc de 4.2.

(59) On conserve les notations précédentes. Soit  $Y_{\mathcal{J}}$  un sous-préschéma fermé de  $X_{\mathcal{J}}$ , défini par un idéal quasi-cohérent  $\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}$ . On suppose  $Y_{\mathcal{J}}$  *plat* sur  $S_{\mathcal{J}}$ . Alors, appliquant 4.3 à  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$  et  $\mathcal{G}_{\mathcal{J}} = \mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}} = \mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}/\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}$ , on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 4.3.1.** — *Soient  $S, S_{\mathcal{J}}, \mathcal{J}, X, X_{\mathcal{J}}, Y_{\mathcal{J}}$  et  $\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}$  comme ci-dessus; on suppose  $Y_{\mathcal{J}}$  plat sur  $S_{\mathcal{J}}$ . Notons  $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$  le faisceau en groupes commutatifs*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}).$$

sur  $X_{\mathcal{J}}$  et  $\mathcal{A} = i_*(\mathcal{A}_{\mathcal{J}})$ , où  $i$  est l'immersion  $X_{\mathcal{J}} \hookrightarrow X$ .

Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , soit  $\mathcal{E}(U)$  l'ensemble des sous-schémas fermés  $Y$  de  $U$ , plats sur  $S$ , tels que  $Y \times_S S_{\mathcal{J}} = Y_{\mathcal{J}} \cap U$ . Alors  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{A}$ -pseudo-torseur.

Si de plus un  $Y$  existe localement (c.-à-d., si tout  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $U$  tel que  $\mathcal{E}(U) \neq \emptyset$ ), alors  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{A}$ -torseur. Or on sait (voir par exemple EGA IV<sub>4</sub>, 16.5.15) que les  $\mathcal{A}$ -torseurs sur  $X$  sont paramétrés par le groupe  $H^1(X, \mathcal{A}) = H^1(X_{\mathcal{J}}, \mathcal{A}_{\mathcal{J}})$ , et que  $\mathcal{E}$  possède une section globale (c.-à-d.,  $\mathcal{E}(X) \neq \emptyset$ ) si et seulement si et la classe de cohomologie correspondant à  $\mathcal{E}$  est nulle. On obtient donc le :

**Corollaire 4.4.** — *Soient  $S, S_{\mathcal{J}}, \mathcal{J}, X, X_{\mathcal{J}}, Y_{\mathcal{J}}$  et  $\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}$  comme ci-dessus; on suppose  $Y_{\mathcal{J}}$  plat sur  $S_{\mathcal{J}}$ . Soit  $E$  l'ensemble des sous-préschémas fermés  $Y$  de  $X$ , plats sur  $S$ , tels que  $Y \times_S S_{\mathcal{J}} = Y_{\mathcal{J}}$ .*

(i) *L'ensemble  $E$  est vide ou principal homogène sous*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}).$$

<sup>(58)</sup>N.D.E. : voir aussi Bourbaki, *Algèbre commutative*, III, §5, th. 1.

<sup>(59)</sup>N.D.E. : On a détaillé ce qui suit et ajouté le corollaire 4.3.1. D'autre part, on rappelle que « pseudo-torseur » est synonyme de « formellement principal homogène ».

(ii) Pour que E soit non vide, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- (a) Il existe localement sur X une solution du problème.
- (b) Une certaine obstruction est nulle, qui se trouve dans

$$H^1(X_{\mathcal{J}}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}})) .$$

**Complément 4.4.1.** — <sup>(60)</sup> Conservons les notations de 4.4 et supposons que E contienne un élément Y. Pour simplifier l'écriture, notons  $\mathcal{I}$  l'idéal de  $\mathcal{O}_X$  définissant Y, et  $\mathcal{I}_{\mathcal{J}}$  son image dans  $\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}$ . Alors, comme on l'a vu dans la démonstration de 4.2, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}} & \longrightarrow & \mathcal{J} \mathcal{O}_X \\ \downarrow & \searrow \text{---} & \downarrow \\ \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{J} \mathcal{O}_Y \end{array}$$

donc un épimorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\phi : \mathcal{J} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}$ ; notons  $\mathcal{K}$  son noyau. Alors, pour tout élément Y' de E, le morphisme  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}$  se factorise par  $\mathcal{O}_X / \mathcal{K}$  (qui est la somme amalgamée B' de la démonstration du lemme 4.1) et, notant  $\mathcal{I}'$  l'idéal de Y' dans  $\mathcal{O}_X$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{I}' / \mathcal{K} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{I}_{\mathcal{J}} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{J} \mathcal{O}_X) / \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X / \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} .$$

Donc, remplaçant X par le sous-préschéma fermé défini par  $\mathcal{K}$ , on se ramène à  $\mathcal{K} = 0$ . Alors, la donnée de Y' équivaut à celle du sous- $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{I}'$  de  $\mathcal{O}_X$ , s'envoyant bijectivement sur  $\mathcal{I}_{\mathcal{J}}$  par la projection  $p : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}$ ; notons  $f' : \mathcal{I}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}'$  (resp.  $f : \mathcal{I}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}$ ) l'isomorphisme réciproque. Alors  $f' - f$  est un élément de

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{I}_{\mathcal{J}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}})$$

<sup>(60)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce complément, utile pour démontrer le point (ii) de la proposition 4.8.

qu'on notera  $d(Y, Y')$  (cf. 4.7).

Pour notre  $Y$  fixé et  $Y'$  variable, considérons le morphisme (cf. 4.8) :

$$\mathcal{I}' \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I};$$

puisque la composée avec  $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}$  est nulle, on sait qu'il est à valeurs dans  $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y = \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}$ . Plus précisément, si  $V$  est un ouvert de  $X$ ,  $x'$  une section de  $\mathcal{I}'$  sur  $V$  et  $x_{\mathcal{J}}$  son image dans  $\Gamma(V, \mathcal{I}_{\mathcal{J}})$ , alors

$$x' = f'(x_{\mathcal{J}}) = f(x_{\mathcal{J}}) + (f' - f)(x_{\mathcal{J}}) = f(x_{\mathcal{J}}) + d(Y, Y')(x_{\mathcal{J}}).$$

Par conséquent : le morphisme  $\mathcal{I}' \rightarrow \mathcal{I}\mathcal{O}_Y$  est donné par  $d(Y, Y')$ .

**4.5.0.** — <sup>(61)</sup> Effectuons un certain nombre de transformations. Le  $\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}/\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}^2$  est noté  $\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}}$ , et appelé le *faisceau conormal* à  $Y_{\mathcal{J}}$  dans  $X_{\mathcal{J}}$ .

<sup>(62)</sup> Comme  $\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{I}$  est annihilé par  $\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}$ , on a

131

$$\mathcal{A}_{\mathcal{J}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}/\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}^2, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}),$$

d'où, pour tout  $i \geq 0$  :

$$H^i(X_{\mathcal{J}}, \mathcal{A}_{\mathcal{J}}) = H^i(Y_{\mathcal{J}}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}).$$

<sup>(63)</sup> On peut alors supprimer l'hypothèse «  $Y$  fermé », comme suit. Notons d'abord que tout ouvert  $U_{\mathcal{J}}$  de  $X_{\mathcal{J}}$  provient par changement de base du sous-préschéma ouvert  $U$  de  $X$  ayant même espace topologique sous-jacent que  $U_{\mathcal{J}}$ . Soit maintenant  $Y_{\mathcal{J}}$  un sous-préschéma fermé de  $U_{\mathcal{J}}$ , plat sur  $S_{\mathcal{J}}$ , et  $\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}}$  l'idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_{U_{\mathcal{J}}}$  définissant  $Y_{\mathcal{J}}$ . Si  $Y_{\mathcal{J}}$  se relève en un sous-préschéma  $Y$  de  $X$ , alors  $Y$ , ayant même espace topologique sous-jacent que  $Y_{\mathcal{J}}$ , est un sous-préschéma fermé de  $U$ ; par conséquent, l'obstruction pour relever  $Y_{\mathcal{J}}$  en un sous-préschéma, plat sur  $S$ , de  $X$  ou de  $U$  est « la même », elle réside dans

$$H^1(Y_{\mathcal{J}}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}).$$

Enfin, revenons aux notations du n°0 : soit  $\mathcal{I}$  un idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_S$  tel que  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  et  $\mathcal{I}\mathcal{J} = 0$ , et soit  $S_0$  le sous-préschéma fermé de  $S_{\mathcal{J}}$  défini par  $\mathcal{I}$ . Pour tout  $S$ -préschéma  $Z$ , on note  $Z_{\mathcal{J}} = Z \times_S S_{\mathcal{J}}$  et  $Z_0 = Z \times_S S_0$ . Alors, comme  $\mathcal{J}$  est annihilé par  $\mathcal{I}$ , on a, avec les notations de 4.4 :

$$\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}} = \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}}, \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\mathcal{J}}}} \mathcal{I}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}),$$

etc. On obtient donc :

**Proposition 4.5.** — Soient  $S$  un préschéma,  $S_0$  et  $S_{\mathcal{J}}$  les sous-préschémas fermés définis par les idéaux quasi-cohérents  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$ , tels que  $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{J}$  et  $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$ . Soient  $X$  un

<sup>(61)</sup>N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.5.0 pour marquer le retour à l'original.

<sup>(62)</sup>N.D.E. : On a corrigé la phrase suivante.

<sup>(63)</sup>N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

$S$ -préschéma et  $Y_{\mathcal{J}}$  un sous-préschéma de  $X_{\mathcal{J}}$ , plat sur  $S_{\mathcal{J}}$ . Soit  $\mathcal{A}_0$  le  $\mathcal{O}_{Y_0}$ -module défini par

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}).$$

(i) Pour qu'il existe un sous-préschéma  $Y$  de  $X$ , se réduisant suivant  $Y_{\mathcal{J}}$ , plat sur  $S$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(a) Un tel  $Y$  existe localement sur  $X$ .

(b) Une certaine obstruction dans  $R^1\Gamma(Y_0, \mathcal{A}_0)$  est nulle. <sup>(64)</sup>

(ii) Sous ces conditions, l'ensemble des  $Y$  répondant aux conditions exigées est principal homogène sous le groupe commutatif  $\Gamma(Y_0, \mathcal{A}_0)$ .

**Remarque 4.6.** — <sup>(65)</sup> Si  $X$  est plat sur  $S$  et si  $Y_{\mathcal{J}}$  est localement *intersection complète* dans  $X_{\mathcal{J}}$ , alors la condition (a) est toujours satisfaite et tout  $Y$  plat sur  $S$ -plat  $Y_{\mathcal{J}}$  est alors localement *intersection complète* dans  $X$ . Si de plus  $Y_0$  est *affine*, la condition (b) est également satisfaite.

**Définition 4.6.1.** — (cf. SGA 6, VII 1.1) Soient  $B$  un anneau commutatif,  $f : E \rightarrow B$  un morphisme  $B$ -linéaire, où  $E$  est un  $B$ -module libre de rang fini  $d$ , et  $I$  l'idéal  $f(E)$  (si on choisit une base de  $E$ ,  $f$  est donné par un  $d$ -uplet  $(f_1, \dots, f_d)$  d'éléments de  $B$ , et  $I$  est l'idéal engendré par les  $f_i$ ). Le *complexe de Koszul*  $K_{\bullet}(f)$  est le  $B$ -module gradué  $\bigwedge_{\mathbb{B}}^{\bullet} E$ , muni de la différentielle (de degré  $-1$ ) :

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_i \mapsto \sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} f(x_j) x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \wedge \dots \wedge x_i.$$

On a donc un complexe de chaînes augmenté ( $B/I$  étant en degré  $-1$ ) :

$$\dots \longrightarrow \bigwedge^2 E \longrightarrow E \xrightarrow{f} B \longrightarrow B/I \longrightarrow 0$$

qui par définition est exact en degré 0, puisque  $I = f(E)$ . On dit que  $f$  est *régulier* si  $K_{\bullet}(f)$  est acyclique en degrés  $> 0$ , c.-à-d. si le complexe augmenté ci-dessus est une *résolution* de  $C = B/I$ .

Dans ce cas, la démonstration de SGA 6, VII 1.2 b) montre que les  $C$ -modules  $I^n/I^{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont libres,  $I/I^2$  étant de rang  $d$ .

**Définition 4.6.2.** — (cf. SGA 6, VII 1.4) Soient  $X$  un préschéma,  $Y$  un sous-préschéma,  $U$  un ouvert de  $X$  tel que  $Y$  soit un sous-préschéma fermé de  $U$ , défini par l'idéal quasi-cohérent  $\mathcal{I}_Y$ . On dit que  $Y$  est *localement intersection complète* dans  $X$  si  $Y \hookrightarrow X$  est une *immersion régulière* au sens de SGA 6, VII 1.4, c.-à-d., si pour tout  $y \in Y$  il existe un voisinage ouvert affine  $V$  de  $y$  dans  $U$ , un  $\mathcal{O}_V$ -module fini libre  $\mathcal{E}$ , et un

<sup>(64)</sup>N.D.E. : Ici, on a noté  $R^1\Gamma(Y_0, \mathcal{A}_0)$  le groupe de cohomologie « cohérente »  $H^1(Y_0, \mathcal{A}_0)$  du  $\mathcal{O}_{Y_0}$ -module  $\mathcal{A}_0$ , afin de le distinguer de groupes de cohomologie « de Hochschild »  $H^i(Y_0, \mathcal{M}_0)$  ( $Y_0$  un  $S_0$ -groupe,  $\mathcal{M}_0$  un  $\mathcal{O}_{S_0}$ -module) qui seront considérés à partir de 4.16.

<sup>(65)</sup>N.D.E. : On a conservé, pour mémoire, la remarque 4.6 de l'original, où ne figure pas la définition de « localement intersection complète ». On a ajouté à la suite la « bonne » définition, tirée de SGA 6, VII 1.4 (qui remplace celle de EGA IV<sub>4</sub>, 16.9.2), et la démonstration des trois résultats énoncés dans la remarque.

morphisme régulier  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_V$  d'image  $\mathcal{I}_Y|_V$ , i.e. tel que  $K_\bullet(f)$  soit une résolution de  $\mathcal{O}_{Y \cap V}$ .

Ceci implique que l'immersion  $Y \hookrightarrow X$  est *localement de présentation finie*, et, d'après 4.6.1, que le faisceau conormal  $\mathcal{N}_{Y/X} = \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -module *fini localement libre*.

**Lemme 4.6.3.** — <sup>(66)</sup> Soient  $A$  un anneau,  $J$  un idéal de  $A$  de carré nul,  $\bar{A} = A/J$ ,  $B$  une  $A$ -algèbre plate,  $E$  un  $B$ -module libre de rang fini,  $f : E \rightarrow B$  un morphisme de  $B$ -modules. On suppose que le morphisme  $g : \bar{E} = E \otimes_A \bar{A} \rightarrow \bar{B} = B \otimes_A \bar{A}$  induit par  $f$  est régulier et que  $\bar{B}/g(\bar{E})$  est plate sur  $\bar{A}$ .

Alors  $f$  est régulier et  $B/f(E)$  est plate sur  $A$ .

*Démonstration.* Posons  $C = B/f(E)$  et  $\bar{C} = C \otimes_A \bar{A} = \bar{B}/g(\bar{E})$ . D'abord, les  $\bigwedge_B^i(E)$  sont des  $B$ -modules libres, donc des  $A$ -modules plats, puisque  $B$  est plat sur  $A$ . Comme  $\bigwedge_B^\bullet E \otimes_A \bar{A} \simeq \bigwedge_{\bar{B}}^\bullet \bar{E}$ , on obtient donc une suite exacte de complexes :  
 $0 \longrightarrow J \otimes_A \bigwedge_B^\bullet E \longrightarrow \bigwedge_B^\bullet E \longrightarrow \bigwedge_{\bar{A}}^\bullet \bar{E} \longrightarrow 0$  De plus, comme  $J^2 = 0$ , on a  $J \otimes_A M = J \otimes_{\bar{A}} \bar{A} \otimes_A M$  pour tout  $A$ -module  $M$ . Notant  $- \twoheadrightarrow$  les flèches d'augmentation, et  $d$  le rang de  $E$ , on obtient donc le bicomplexe qui suit, où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & J \otimes_A \bigwedge_B^d E & \longrightarrow & \bigwedge_B^d E & \longrightarrow & \bigwedge_{\bar{B}}^d \bar{E} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & J \otimes_A \bar{E} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \bar{E} \longrightarrow 0 \\
 & & \text{id} \otimes g \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & J \otimes_A \bar{B} & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \bar{B} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & J \otimes_A \bar{C} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \bar{C} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

<sup>(66)</sup>N.D.E. : On a ajouté ce lemme, ainsi que le suivant, afin de démontrer dans la proposition 4.6.5 les résultats énoncés dans la remarque 4.6.

De plus, les colonnes de droite et de gauche sont exactes, puisque  $K_\bullet(g)$  est une résolution de  $\bar{C}$  et que celui-ci est plat sur  $\bar{A}$ . Donc, considérant la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte de complexes non augmentés on obtient que  $K_\bullet(f)$  est acyclique en degrés  $> 0$ , et qu'on a en degré 0 une suite exacte :

$$0 \longrightarrow J \otimes_A C \longrightarrow C \longrightarrow \bar{C} \longrightarrow 0.$$

Donc  $C$  est plat sur  $A$ , d'après le « critère fondamental de platitude » (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, III, §5, th. 1). C.Q.F.D.

**Lemme 4.6.4.** — Soient  $A$  un anneau commutatif,  $J$  un idéal nilpotent,  $N \subseteq M$  des  $A$ -modules tels que  $M/N$  soit plat sur  $A$ . Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $N$  dont les images engendrent l'image  $\bar{N}$  de  $N$  dans  $M/JM$ , alors ils engendrent  $N$ .

En effet, notons  $N'$  le sous-module de  $N$  engendré par les  $x_i$ , et  $Q = N/N'$ . Alors le morphisme  $N' \otimes (A/J) \rightarrow \bar{N}$  est surjectif. D'autre part, comme  $M/N$  est plat sur  $A$ , le morphisme  $N \otimes (A/J) \rightarrow \bar{N}$  est bijectif. On obtient donc que  $Q \otimes (A/J) = 0$ , d'où  $Q = 0$  d'après le « lemme de Nakayama nilpotent » (on a  $Q = JQ = J^2Q = \dots = 0$ ).

On peut maintenant démontrer la :

**Proposition 4.6.5.** — On suppose  $X$  plat sur  $S$  et  $Y_{\mathcal{J}}$  localement intersection complète dans  $X_{\mathcal{J}}$ .

a) Alors, la condition (a) de 4.5 (i) est satisfaite ; de plus, tout  $Y$  plat sur  $S$  relevant  $Y_{\mathcal{J}}$  est localement intersection complète dans  $X$ .

b) Si de plus  $Y_0$  est affine, la condition (b) de loc. cit. est également satisfaite.

*Démonstration.* La première assertion de (a) découle du lemme 4.6.3 ; la seconde résulte alors du lemme 4.6.4. D'autre part, l'hypothèse entraîne (cf. 4.6.2) que  $\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}}$  est un  $\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}$ -module fini localement libre, donc le  $\mathcal{O}_{Y_0}$ -module

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}).$$

est quasi-cohérent (cf. EGA I, 1.3.12), d'où  $R^1\Gamma(Y_0, \mathcal{A}_0) = 0$  si  $Y_0$  est affine.

**Remarque 4.6.6.** — Terminons ce paragraphe par l'exemple suivant, qui montre que, sous les hypothèses du lemme 4.6.3, si  $(g_1, g_2)$  est une suite régulière engendrant l'idéal  $\bar{I} = g(\bar{E})$ , elle ne se relève pas nécessairement en une suite régulière dans  $B$ .

Soient  $k$  un corps,  $\bar{A} = k[X, Y]$ , notons  $k\varepsilon$  le  $\bar{A}$ -module  $\bar{A}/(X, Y)$  (i.e.  $P \cdot \varepsilon = P(0, 0)\varepsilon$  pour tout  $P \in \bar{A}$ ), et soit  $A = \bar{A} \oplus k\varepsilon$ , où  $J = k\varepsilon$  est un idéal de carré nul. On a  $A/J = \bar{A}$ .

L'algèbre  $B = A \otimes_k k[Z, T]$  est libre sur  $A$ , donc plate ; on a  $\bar{B} = k[X, Y, Z, T]$ . Posons  $g_1 = XZ - YT$  et  $g_2 = XZ - 1$ . Comme le polynôme  $g_1$  est irréductible,  $\bar{B}/(g_1)$  est intègre, et donc  $(g_1, g_2)$  est une suite régulière dans  $\bar{B}$ , engendrant l'idéal  $\bar{I} = (XZ - 1, YT - 1)$ . Donc

$$\bar{C} = \bar{B}/\bar{I} = k[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] = A[X^{-1}, Y^{-1}]$$

est une  $\bar{A}$ -algèbre plate (et aussi une  $A$ -algèbre plate). Mais tout relèvement dans  $B$  de  $g_1$  est de la forme  $XY - ZT + \lambda\varepsilon$ , où  $\lambda \in k[Z, T]$ , donc annule  $\varepsilon$ .

**Remarque 4.7.** — Il résulte de 4.4.1 et 4.5 (ii) la donnée pour tout couple  $(Y, Y')$  de sous-préschémas <sup>(67)</sup> de  $X$ , plats sur  $S$  et se réduisant suivant  $Y_{\mathcal{J}}$ , d'une *dévi*ation

$$d(Y, Y') \in \Gamma(Y_0, \mathcal{A}_0) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0});$$

la convention de signe adoptée dans 4.4.1 étant que  $Y'$  correspond à «  $d(Y, Y') + Y$  ».

**Remarque 4.8.0.** — <sup>(68)</sup> Soient  $S$  un préschéma,  $S'$  un sous-préschéma *fermé*,  $X$  un  $S$ -préschéma,  $Y$  un sous- $S$ -préschéma de  $X$ , et  $X' = X \times_S S'$ ,  $Y' = Y \times_S S'$ . Alors, on a un morphisme *surjectif* de  $\mathcal{O}_{Y'}$ -modules

$$\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \xrightarrow{\text{surj.}} \mathcal{N}_{Y'/X'}.$$

En effet, quitte à remplacer  $X$  par un certain ouvert, on peut supposer que  $Y$  est fermé, défini par un idéal  $\mathcal{I}_Y$  de  $\mathcal{O}_X$ ; alors l'image de  $\mathcal{I}_Y$  dans  $\mathcal{O}_{X'}$  est l'idéal  $\mathcal{I}_{Y'}$  définissant  $Y'$ , et l'on a un morphisme surjectif de  $\mathcal{O}_{Y'}$ -modules

$$\pi : (\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \xrightarrow{\text{surj.}} \mathcal{I}_{Y'}/\mathcal{I}_{Y'}^2.$$

Supposons de plus que  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$  soit *plat* sur  $\mathcal{O}_S$ ; alors le morphisme naturel

$$\mathcal{I}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \simeq \mathcal{I}_Y \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \longrightarrow \mathcal{I}_{Y'}$$

est bijectif. On a alors le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{I}_Y^2 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} & \longrightarrow & \mathcal{I}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} & \longrightarrow & (\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} & \longrightarrow & 0 \\ \text{surj.} \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \pi \text{ surj.} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Y'}^2 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Y'} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Y'}/\mathcal{I}_{Y'}^2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

d'où l'on déduit :  $\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Y'/X'}$  si  $Y$  est plat sur  $S$ .

**Proposition 4.8.** — Soient  $S, \mathcal{I}, \mathcal{J}$  comme précédemment. <sup>(69)</sup> Soient  $X, T$  des  $S$ -préschémas,  $Y, Y'$  des sous-préschémas de  $X$ , et  $f : T \rightarrow X$  un  $S$ -morphisme tel que  $f_{\mathcal{J}} : T_{\mathcal{J}} \rightarrow X_{\mathcal{J}}$  se factorise par  $Y_{\mathcal{J}}$ .

(i) On peut définir une obstruction

$$(*) \quad c(X, Y, f) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J}\mathcal{O}_T)$$

dont la nullité équivaut à l'existence d'une factorisation de  $f$  par  $Y$ .

(ii) Supposons que  $Y'_{\mathcal{J}} = Y_{\mathcal{J}}$  et que  $Y, Y'$  soient plats sur  $S$ . On a alors des isomorphismes (cf. 4.8.0) :

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0} \simeq \mathcal{J}\mathcal{O}'_Y \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}}$$

d'où un isomorphisme :

$$u : \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J}\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J}\mathcal{O}_{Y'}).$$

<sup>(67)</sup>N.D.E. : On a corrigé « sous-préschémas fermés » en « sous-préschémas ».

<sup>(68)</sup>N.D.E. : On a inséré ici cette remarque, utilisée dans la proposition qui suit; elle figurait en 4.10 de l'original.

<sup>(69)</sup>N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que  $\mathcal{I}$  soit *nilpotent*, qui paraît superflue (cf. la démonstration).

133 Notant  $i' : Y' \rightarrow X$  l'immersion canonique et  $d(Y, Y')$  la déviation de 4.7, on a :

$$(**) \quad c(X, Y, i') = u(d(Y', Y)) = -u(d(Y, Y')).$$

(iii) Le morphisme canonique  $\mathcal{N}_{Y/X} \xrightarrow{D} \Omega_{X/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$  (cf. SGA 1 II, formule 4.3) induit un morphisme :

$$v_{f_0} : \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^*(\Omega_{X_0/S_0}^1), \mathcal{J}\mathcal{O}_T) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J}\mathcal{O}_T),$$

où le premier membre est  $\text{Hom}_{X^+}(\mathbb{T}, L_X)$ , cf. 0.1.5. Pour  $a \in \text{Hom}_{X^+}(\mathbb{T}, L_X)$ , on a :

$$(***) \quad c(X, Y, a \cdot f) - c(X, Y, f) = v_{f_0}(a),$$

où l'on a noté  $a \cdot f$  le morphisme composé  $\mathbb{T} \xrightarrow{a \times f} L_X \times_{X^+} X \rightarrow X$ .

Nous allons démontrer la partie (i) de la proposition, laissant au lecteur le soin de (ne pas) vérifier les assertions (ii) et (iii) ; cette vérification se fait par réduction au cas affine, puis par comparaison des définitions explicites. <sup>(70)</sup>

Démontrons donc (i). Le morphisme  $f : \mathbb{T} \rightarrow X$  définit un morphisme de faisceaux d'anneaux  $\phi : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*(\mathcal{O}_T)$ . <sup>(71)</sup> Soit  $U$  un sous-préschéma ouvert de  $X$  dans lequel  $Y$  est fermé ; comme  $\mathbb{T}$  (resp.  $Y_{\mathcal{J}}$ ) a même espace sous-jacent que  $\mathbb{T}_{\mathcal{J}}$  (resp.  $Y$ ), l'application continue sous-jacente à  $f$  envoie  $\mathbb{T}$  dans  $U$ , et comme  $U$  est un ouvert de  $X$ ,  $\phi$  induit un morphisme de faisceaux d'anneaux  $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U \rightarrow f_*(\mathcal{O}_T)$ , i.e.  $f$  se factorise par  $U$ .

134

Donc, on peut se restreindre au cas où  $Y$  est fermé, donc défini par un faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}_Y$ . Pour que  $f$  se factorise par  $Y$ , il faut et il suffit que l'application composée  $\mathcal{I}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow f_*(\mathcal{O}_T)$  soit nulle. Comme  $f_{\mathcal{J}}$  se factorise par  $Y_{\mathcal{J}}$ , l'application composée  $\mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_{T_{\mathcal{J}}})$  est nulle. Considérant le diagramme commutatif où la première ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & f_*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T) & \longrightarrow & f_*(\mathcal{O}_T) & \longrightarrow & f_*(\mathcal{O}_{T_{\mathcal{J}}}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \phi & & \uparrow \phi_{\mathcal{J}} \\ & & & & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_{\mathcal{J}}} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathcal{I}_Y & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}} & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathcal{I}_Y & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Y_{\mathcal{J}}} & & \end{array}$$

135 on en déduit que  $\phi$  applique  $\mathcal{I}_Y$  dans  $f_*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T)$ . <sup>(72)</sup> Puisque  $\mathcal{J}^2 = 0$ , il en résulte que  $f_*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T)$ , vu comme  $\mathcal{O}_X$ -module via  $\phi$ , est annihilé par  $\mathcal{I}_Y$  ; on obtient donc un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules

$$h : \mathcal{N}_{Y/X} = \mathcal{I}_Y / \mathcal{I}_Y^2 \longrightarrow f_*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T).$$

<sup>(70)</sup>N.D.E. : On a fait ces vérifications plus bas.

<sup>(71)</sup>N.D.E. : D'une part, on a supprimé l'hypothèse que  $\mathcal{I}$  soit nilpotent, i.e. que  $X_0$  ait même espace topologique sous-jacent que  $X$  ; d'autre part, on a détaillé la phrase qui suit.

<sup>(72)</sup>N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

D'autre part, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \\ \downarrow i_{T_0} & & \downarrow i_{X_0} \\ T & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

où  $i_{X_0}$  et  $i_{T_0}$  désignent les immersions fermées déduites par changement de base de  $S_0 \hookrightarrow S$ . Comme  $\mathcal{J}\mathcal{O}_T$  est un  $\mathcal{O}_T$ -module quasi-cohérent annulé par  $\mathcal{I}$ , on a un isomorphisme

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_T \simeq (i_{T_0})_* i_{T_0}^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T),$$

d'où  $f_*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T) \simeq (i_{X_0})_*(f_0)_* i_{T_0}^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T)$ . Donc  $h$  correspond, par adjonction, à un morphisme de  $\mathcal{O}_{T_0}$ -modules

$$h_0 : f_0^* i_{X_0}^*(\mathcal{N}_{Y/X}) \longrightarrow i_{T_0}^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T).$$

Or,  $\mathcal{N}_{Y/X}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent, et

$$i_{X_0}^*(\mathcal{N}_{Y/X}) = \mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_0} = \mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}.$$

Donc, revenant à l'abus de notation  $i_{T_0}^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_T) = \mathcal{J}\mathcal{O}_T$  constamment utilisé,  $h_0$  s'identifie à un morphisme de  $\mathcal{O}_{T_0}$ -modules

$$h'_0 : f_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}) \longrightarrow \mathcal{J}\mathcal{O}_T$$

qui est l'obstruction  $c(X, Y, f)$  cherchée. Ceci prouve (i), et (ii) découle alors de 4.4.1.

Il reste à démontrer (iii) ... À COMPLÉTER ...

**Remarque 4.9.** — L'obstruction  $c(X, Y, f)$  se calcule localement sur  $T$ . Si  $\text{Spec } C$  est un ouvert affine de  $T$  au-dessus d'un ouvert affine  $\text{Spec } A$  de  $X$ , lui-même au-dessus d'un ouvert affine  $\text{Spec } \Lambda$  de  $S$ , si  $J \subseteq I \subseteq \Lambda$  (resp.  $I_Y \subseteq A$ ) sont les idéaux correspondant à  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$  (resp. à  $\mathcal{I}_Y$ ), et si on note  $\phi : A \rightarrow C$  le morphisme de  $\Lambda$ -algèbres correspondant à  $f : T \rightarrow X$ , l'obstruction se calcule par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} I_Y & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\phi} & C \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ I_Y/I_Y^2 & \longrightarrow & I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_0 & \xrightarrow{c} & JC \end{array} .$$

L'obstruction  $c$  est donc définie comme l'unique morphisme de  $C_0$ -modules

$$I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_0 \longrightarrow JC$$

tel que, avec les notations évidentes, on ait  $c(\bar{x} \otimes 1) = f(x)$ , pour tout  $x \in I_Y$ .

**Remarque 4.10.** — Si  $Y_0$  est localement intersection complète dans  $X_0$  (ce qui implique que  $Y$  l'est dans  $X$ ), on a  $\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0} = \mathcal{N}_{Y_0/X_0}$ . Plus précisément, on a de toutes façons un morphisme *surjectif* de  $\mathcal{O}_{Y_0}$ -modules

$$\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0} \xrightarrow{\text{surj.}} \mathcal{N}_{Y_0/X_0}$$

qui est également injectif si  $Y$  est localement intersection complète dans  $X$  (comme il résulte aussitôt du fait que  $Y$  et  $\mathcal{N}_{Y/X}$  sont plats sur  $S$ ). Dans le cas « affine » de la remarque précédente, ceci se traduit par un morphisme

$$I_Y/I_Y^2 \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{B}_0 \xrightarrow{\text{surj.}} I_{Y_0}/I_{Y_0}^2,$$

donc un morphisme

$$I_Y/I_Y^2 \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}_0 \xrightarrow{\text{surj.}} I_{Y_0}/I_{Y_0}^2 \otimes_{\mathbb{B}_0} \mathbb{C}_0$$

qui est bijectif si  $Y$  est localement intersection complète dans  $X$ .

**4.11.** Nous nous proposons maintenant d'étudier la situation suivante. Soient  $S, S_{\mathcal{J}}$  et  $S_0$  comme en 4.8; on a trois  $S$ -pré-schémas  $X, X', T$ , un sous-pré-schéma  $Y$  de  $X$  (resp.  $Y'$  de  $X'$ ), et des morphismes  $f : T \rightarrow X'$  et  $g : X' \rightarrow X$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & Y' & & Y \\ & & \downarrow i' & & \downarrow i \\ T & \xrightarrow{f} & X' & \xrightarrow{g} & X \end{array} .$$

On suppose que par réduction modulo  $\mathcal{J}$ , ce diagramme se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & Y'_{\mathcal{J}} & \text{---} & Y_{\mathcal{J}} \\ & \nearrow & \downarrow i'_{\mathcal{J}} & & \downarrow i_{\mathcal{J}} \\ T_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{f_{\mathcal{J}}} & X'_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{g_{\mathcal{J}}} & X_{\mathcal{J}} \end{array} .$$

**137** On a donc par 4.8 des obstructions :

$$\begin{aligned} c(X, Y, g \circ i') &\in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(i_0'^* g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_{Y'}), \\ c(X', Y', f) &\in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^*(\mathcal{N}_{Y'/X'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_T), \\ c(X, Y, g \circ f) &\in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^* g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_T), \end{aligned}$$

dont on cherche à calculer les relations. <sup>(73)</sup>

**Lemme 4.12.** — (i) *Supposons  $Y'$  plat sur  $S$ . On a alors un morphisme naturel* <sup>(74)</sup>

$$b_{f_0} : \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(i_0'^* g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_{Y'}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^* g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_T).$$

<sup>(73)</sup>N.D.E. : À partir de 4.17, on appliquera ceci au cas où  $X$  est un  $S$ -groupe,  $g : X \times_S X \rightarrow X$  la multiplication,  $Y$  un sous-pré-schéma de  $X$  tel que  $Y_{\mathcal{J}}$  soit un sous-groupe de  $X_{\mathcal{J}}$ ,  $Y' = Y \times_S Y$ , et aux deux morphismes  $Y^3 \rightarrow X^2$  qui envoient  $(y_1, y_2, y_3)$  sur  $(y_1 y_2, y_3)$ , resp.  $(y_1, y_2 y_3)$ . Dans ce cas, la comparaison des obstructions ci-dessus montrera que l'obstruction à ce que  $Y$  soit un sous-groupe de  $X$  réside dans un certain groupe de cohomologie (de Hochschild)  $H^2(Y_0, N_0)$ .

<sup>(74)</sup>N.D.E. : Noter que, puisque  $f_0$  se factorise par  $Y'_0$ , on a  $f_0^* = f_0'^* i_0'^*$ .

(ii) *Supposons de plus  $Y'_0$  localement intersection complète dans  $X'_0$ . On a alors un morphisme naturel*

$$a_{g_0} : \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^*(\mathcal{N}_{Y'/X'} \otimes \mathcal{O}_{Y'_0}), \mathcal{J}\mathcal{O}_T) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^*g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J}\mathcal{O}_T).$$

(75) Pour construire  $a_{g_0}$ , il suffit d'exhiber un  $\mathcal{O}_{Y'_0}$ -morphisme

$$g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}) \longrightarrow \mathcal{N}_{Y'/X'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'_0}} \mathcal{O}_{Y'_0};$$

or on a de toutes façons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}) & \dashrightarrow & \mathcal{N}_{Y'/X'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'_0}} \mathcal{O}_{Y'_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ g_0^*(\mathcal{N}_{Y_0/X_0}) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{Y'_0/X'_0} \quad ; \end{array}$$

si  $Y'_0$  est localement intersection complète dans  $X'_0$ , la deuxième flèche verticale est un isomorphisme et on complète le carré immédiatement.

D'autre part, le foncteur  $f_0^*$  induit un morphisme de groupes abéliens

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(i_0^*g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J}\mathcal{O}_{Y'_0}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^*g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}), f_0^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_{Y'_0})),$$

donc pour construire  $b_{f_0}$ , il suffit de montrer que le morphisme de  $\mathcal{O}_{T_0}$ -modules  $f_0^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}) \rightarrow \mathcal{J}\mathcal{O}_T$  se factorise par  $f_0^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_{Y'_0})$ . Notant que

$$f_0^*(\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{X'_0}) = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0} = f_0^*(\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y'_0}),$$

a de toutes façons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0} & \longrightarrow & \mathcal{J}\mathcal{O}_T \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ f_0^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}) & \longrightarrow & f_0^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_{Y'_0}) \quad . \end{array}$$

Si  $Y'$  est plat sur  $S'$ , la première diagonale est un isomorphisme, d'où le résultat **138** annoncé.

**Remarque 4.12.1.** — (76) Supposons  $Y'$  et  $T$  plats sur  $S$ . Alors  $\mathcal{J}\mathcal{O}_{Y'_0} = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y'_0}$  et

$$f_0^*(\mathcal{J}\mathcal{O}_{Y'_0}) = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0} = \mathcal{J}\mathcal{O}_{T_0},$$

de sorte que dans ce cas  $b_{f_0}$  est simplement le morphisme

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(i_0^*g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y'_0}) &\longrightarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(f_0^*g_0^*(\mathcal{N}_{Y/X} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}), \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0}) & \end{aligned}$$

induit par  $f_0$ .

(75) N.D.E. : On a inversé l'ordre, commençant par  $a_{g_0}$ , et l'on a détaillé le cas de  $b_{f_0}$ .

(76) N.D.E. : On a ajoutée cette remarque, utilisée en 4.19.

**Proposition 4.13.** — *Supposons  $Y'$  plat sur  $S$  et  $Y'_0$  localement intersection complète dans  $X'_0$ . On a alors la formule :*

$$c(X, Y, g \circ f) = a_{g_0}(c(X', Y', f)) + b_{f_0}(c(X, Y, g \circ i')).$$

Comme la définition des différentes obstructions et des morphismes  $a_{g_0}$  et  $b_{f_0}$  est locale, on voit facilement qu'il suffit de vérifier la formule donnée lorsque les différents schémas en cause sont affines. Notons donc  $S = \text{Spec } \Lambda$ ,  $S_J = \text{Spec } \Lambda/J$ ,  $S_0 = \text{Spec } \Lambda/I$ ,  $T = \text{Spec } C$ ,  $X = \text{Spec } A$ ,  $Y = \text{Spec } A/I_Y = \text{Spec } B$ ,  $X' = \text{Spec } A'$ ,  $Y' = \text{Spec } A'/I_{Y'} = \text{Spec } B'$ .

On a donc un diagramme d'anneaux et d'idéaux <sup>(77)</sup>

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & & B \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \pi' & & \pi \\ C & \xleftarrow{f} & A' & \xleftarrow{g} & A \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & I_{Y'} & & I_Y \end{array} .$$

Étudions les différents termes de la formule à démontrer. Dans ce qui suit, si  $x \in I_Y$  (resp.  $u \in I_{Y'}$ ), on note  $\bar{x}$  (resp.  $\bar{u}$ ) son image dans  $I_Y/I_Y^2$  (resp.  $I_{Y'}/I_{Y'}^2$ ); d'autre part, si  $m$  appartient à un  $\Lambda$ -module  $M$ , on note  $m_0$  son image dans  $M_0 = M/IM$ . On a vu que  $c = c(X, Y, g \circ f)$  est l'unique  $C_0$ -morphisme  $I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_0 \rightarrow JC$  tel que  $c(\bar{x} \otimes 1) = f(g(x))$ , pour tout  $x \in I_Y$ .

Fixons  $x \in I_Y$ ; on a  $g(x) \in I_{Y'} + JA'$  puisque  $g_J(Y'_J) \subseteq Y_J$ . Écrivons  $g(x) = x' + \sum \lambda_i a'_i$ , avec  $x' \in I_{Y'}$ ,  $\lambda_i \in J$ ,  $a'_i \in A'$ . On a donc

$$(1) \quad c(X, Y, g \circ f)(\bar{x} \otimes 1) = f(g(x)) = f(x') + \sum \lambda_i f(a'_i).$$

<sup>(77)</sup>N.D.E. : On a conservé les notations de l'original, en notant  $f : A' \rightarrow C$  et  $g : A \rightarrow A'$  les morphismes d'anneaux correspondant à  $f : T \rightarrow X'$  et  $g : X' \rightarrow X$ . Ceci explique la formule  $c(X, Y, g \circ f)(\bar{x} \otimes 1) = f(g(x))$ , pour  $x \in I_Y$ .

Considérons maintenant  $a_{g_0}(c(X', Y', f))$ . D'après les définitions posées, il est défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & I_{Y'} & \xrightarrow{f} & C \\
 & & & \downarrow & & \uparrow \\
 I_{Y'_0}/I_{Y'_0}^2 \otimes_{B'_0} C_0 & \xleftarrow{\sim} & I_{Y'}/I_{Y'}^2 \otimes_{B'} C_0 & \xrightarrow{c(X', Y', f)} & & JC \\
 \uparrow \bar{g}_0 & & \uparrow & \nearrow a_{g_0}(c(X', Y', f)) & & \\
 I_{Y_0}/I_{Y_0}^2 \otimes_{B_0} C_0 & \xleftarrow{\quad} & I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_0 & & & .
 \end{array}$$

On a donc  $a_{g_0}(c(X', Y', f))(\bar{x} \otimes 1) = f(u)$ , où  $u$  est un élément de  $I_{Y'}$  dont l'image  $\bar{u}$  dans  $I_{Y'_0}/I_{Y'_0}^2$  vérifie

$$\bar{u}_0 \otimes 1 = \bar{g}_0(\bar{x}_0) \otimes 1 = \overline{g_0(x_0)} \otimes 1.$$

On peut donc prendre  $u = x'$  et on trouve

$$(2) \quad a_{g_0}(c(X', Y', f))(\bar{x} \otimes 1) = f(x').$$

Considérons enfin  $b_{f_0}(c(X, Y, g \circ i'))$ . Le morphisme de  $\Lambda_0$ -algèbres  $f_0 : A'_0 \rightarrow C_0$  se factorise par  $B'_0$ , et l'on a vu dans la démonstration de 4.12 que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 J \otimes_{\Lambda_0} A'_0 & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi'} & J \otimes_{\Lambda_0} B'_0 & \xrightarrow{\text{id} \otimes f_0} & J \otimes_{\Lambda_0} C_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \lambda & & \downarrow \\
 JA' & \xrightarrow{\pi'} & JB' & \xrightarrow{\psi} & JC
 \end{array}$$

i.e. il existe un morphisme de  $B'_0$ -modules  $\psi : JB' \rightarrow JC$  tel que  $\psi(\lambda\pi'(a')) = \lambda f(a')$ , pour tout  $a' \in A'$ ,  $\lambda \in J$ . Notons  $\phi : JB' \otimes_{B'_0} C_0 \rightarrow JC$  le morphisme de  $C_0$ -modules déduit de  $\psi$ .

Alors,  $b_{f_0}(c(X, Y, g \circ i'))$  est défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 I_Y & \xrightarrow{\pi' \circ g} & B' \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 I_Y/I_Y^2 \otimes_B B'_0 & \xrightarrow{c(X, Y, g \circ i')} & JB' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 I_Y/I_Y^2 \otimes_B C_0 & \xrightarrow{\quad} & JB' \otimes_{B'_0} C_0 \\
 & \searrow b_{f_0}(c(X, Y, g \circ i')) & \downarrow \phi \\
 & & JC.
 \end{array}$$

On a donc aussitôt

$$(3) \quad b_{f_0}(c(X, Y, g \circ i'))(\bar{x} \otimes 1) = \phi\left(\sum \lambda_i \pi'(a'_i)\right) = \sum \lambda_i f(a'_i).$$

La comparaison des trois résultats explicites (1), (2), (3) donne la formule cherchée.

**Corollaire 4.14.** — Soient  $Y, Y'$  deux sous-préschémas de  $X$ , plats, se réduisant suivant  $Y_{\mathcal{J}}$  ; supposons  $Y_0$  localement intersection complète dans  $X_0$ . Si  $f : T \rightarrow X$  est un  $S$ -morphisme tel que  $f_{\mathcal{J}}$  se factorise par  $Y_{\mathcal{J}} \rightarrow X_{\mathcal{J}}$ , on a la formule <sup>(78)</sup>

$$c(X, Y, f) - c(X, Y', f) = -b_{f_0}(d(Y, Y')).$$

141 En effet, appliquant la formule précédente au diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y' & & Y \\
 & & \downarrow i' & & \downarrow i \\
 T & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{\text{id}} & X
 \end{array}$$

on trouve  $c(X, Y, f) - c(X, Y', f) = b_{f_0}(c(X, Y, i'))$ . De plus, d'après 4.8 (ii), on a  $c(X, Y, i') = d(Y', Y) = -d(Y, Y')$ .

**Nota.** — En faisant dans la formule précédente  $f = i'$ , on retrouve la relation donnée dans 4.8 (ii). <sup>(79)</sup>

**Proposition 4.15.** — Soient  $X$  un  $S$ -groupe lisse sur  $S$  et  $Y$  un sous- $S$ -groupe plat et localement de présentation finie sur  $S$ . Alors  $Y$  est localement intersection complète (cf. 4.6.2) dans  $X$ .

<sup>(78)</sup>N.D.E. : On a mis à droite un signe  $-$ , conformément à la convention de 4.4.1.

<sup>(79)</sup>N.D.E. : Les éditeurs ne comprennent pas cette remarque, puisque 4.8 (ii) est utilisée pour démontrer la formule précédente.

*Démonstration.* <sup>(80)</sup> On va montrer que l'immersion  $Y \rightarrow X$  est *régulière* au sens de EGA IV<sub>4</sub>, 16.9.2, ce qui implique qu'elle l'est aussi au sens de 4.6.2, d'après EGA IV<sub>4</sub>, 19.5.1 (d'ailleurs, d'après *loc. cit.*, les deux définitions sont équivalentes si  $S$  est localement noethérien). Donc, dans ce qui suit, on prend « immersion régulière » au sens de EGA IV<sub>4</sub>, 16.9.2. Comme  $X$  et  $Y$  sont plats et localement de présentation finie sur  $S$ , alors, d'après EGA IV<sub>4</sub>, 19.2.4, il suffit de montrer que, pour tout  $s \in S$ ,  $Y_s \rightarrow X_s$  est une immersion régulière. D'après EGA IV<sub>4</sub>, 19.1.5 (ii), on est ramené à vérifier l'assertion sur les fibres géométriques de  $S$ , donc lorsque  $S$  est le spectre d'un corps  $k$  algébriquement clos.

D'après l'exposé V ou VI<sub>A</sub>, <sup>(81)</sup> le quotient  $X/Y$  existe et est lisse, le morphisme  $\pi : X \rightarrow X/Y$  est plat, et l'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{e} & \xrightarrow{i} & X/Y \end{array}$$

(où  $\bar{e}$  est l'image dans  $X/Y$  du point unité de  $X$ ). Donc, par changement de base plat (cf. EGA IV<sub>4</sub>, 19.1.5 (ii)), il suffit de voir que  $i$  est une immersion régulière, ce qui est immédiat puisque l'anneau local noethérien  $\mathcal{O}_{X/Y, \bar{e}}$  est lisse, donc son idéal maximal engendré par une suite régulière.

**4.16.** <sup>(82)</sup> Soit  $X$  un  $S$ -groupe *lisse* sur  $S$ , on note  $\mu : X \times_S X \rightarrow X$  sa loi de groupe. Donnons-nous un sous- $S_{\mathcal{J}}$ -groupe  $Y_{\mathcal{J}}$  de  $X_{\mathcal{J}}$ , *plat et localement de présentation finie* sur  $S_{\mathcal{J}}$ . D'après 4.15,  $Y_{\mathcal{J}}$  est localement intersection complète dans  $X$ .

Donc, d'après 4.6.5, tout  $S$ -préschéma *plat* <sup>(83)</sup>  $Y$  relevant  $Y_{\mathcal{J}}$  est localement intersection complète dans  $X$ , et un tel  $Y$  existe si  $Y_0$  est affine. De plus, dans ce cas 142

<sup>(80)</sup>N.D.E. : On a ajouté dans l'énoncé l'hypothèse que  $Y$  soit localement de présentation finie sur  $S$ , et l'on a donné la démonstration qui suit, plus directe que celle esquissée dans l'original. Pour être complet, détaillons aussi cette dernière. D'après EGA IV<sub>4</sub>, 16.9.10 (i) et 19.3.2, il suffit de voir que, pour tout  $y \in Y$ , le complété de l'anneau local  $\mathcal{O}_{Y, y}$  est le quotient d'un anneau local noethérien complet par une suite régulière. D'après *loc. cit.*, 19.3.3, l'ensemble des  $y \in Y$  vérifiant cette propriété est un ouvert  $U$  de  $Y$ ; comme  $Y$  est de type fini sur  $k$ , il suffit de montrer que  $U$  contient tout point fermé. Comme  $Y$  est un  $k$ -groupe il suffit, par un argument de translation, de montrer que la propriété est vraie pour le complété de  $\mathcal{O}_{Y, e}$ , c.-à-d., pour le « groupe formel »  $\hat{Y}$  correspondant à  $Y$  (cf. Exp. VII<sub>B</sub>). Or, comme  $X$  est lisse,  $\hat{X}$  est une algèbre de séries formelles  $k[[X_1, \dots, X_n]]$ , et on conclut à l'aide du théorème de structure de Dieudonné qui montre que  $\hat{Y}$  est isomorphe à un quotient de la forme

$$k[[X_1, \dots, X_n]] / (X_1^{p^{n_1}}, \dots, X_r^{p^{n_r}})$$

où  $p$  est l'exposant caractéristique de  $k$  (cf. J. Dieudonné, *Introduction to the theory of formal groups*, Marcel Dekker, 1973, §II.3.2; en particulier la preuve de la Proposition 3.)

<sup>(81)</sup>N.D.E. : Il faut ajouter dans V ou VI<sub>A</sub> que  $X/Y$  est lisse lorsque  $X$  l'est, en attendant voir VI<sub>B</sub>, 9.2 (ix).

<sup>(82)</sup>N.D.E. : On a réorganisé 4.16 en y regroupant, d'une part, les hypothèses énoncées à la fin de 4.15 et, d'autre part, la définition de l'obstruction  $DY$ .

<sup>(83)</sup>N.D.E. : On a corrigé l'original en rajoutant « plat ».

on a, d'après 4.8.0,

$$(4.16.1) \quad \mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0} = \mathcal{N}_{Y_0/X_0} = \mathcal{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\mathcal{J}}}} \mathcal{O}_{Y_0}.$$

D'autre part, notons  $\varepsilon_0 : S_0 \rightarrow Y_0$  la section unité de  $Y_0$  et  $\mathbf{n}_{Y_0/X_0}$  le  $\mathcal{O}_{S_0}$ -module quasi-cohérent :

$$\mathbf{n}_{Y_0/X_0} = \varepsilon_0^*(\mathcal{N}_{Y_0/X_0}).$$

Comme  $Y_0$  et  $X_0$  sont des  $S_0$ -groupes, on voit aisément que  $\mathcal{N}_{Y_0/X_0}$  est invariant par les translations (disons à gauche) de  $Y_0$ , donc <sup>(84)</sup> est l'image réciproque par  $Y_0 \rightarrow S_0$  de  $\mathbf{n}_{Y_0/X_0}$ , i.e. on a

$$(4.16.2) \quad \mathcal{N}_{Y_0/X_0} = \mathbf{n}_{Y_0/X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}.$$

Tenant compte de (4.16.1) et (4.16.2), on déduit d'une part de 4.5 que l'ensemble des sous- $S$ -pré-schémas  $Y$  de  $X$ , *plats* sur  $S$ , relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ , est vide ou principal homogène sous

$$(4.16.3) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0}}(\mathbf{n}_{Y_0/X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}),$$

et d'autre part de 4.8 que, pour tout tel  $Y$  et tout  $S$ -morphisme  $f : T \rightarrow X$  tel que  $f_{\mathcal{J}} : T_{\mathcal{J}} \rightarrow X_{\mathcal{J}}$  se factorise par  $Y_{\mathcal{J}}$ , l'obstruction  $c(X, Y, f)$  à ce que  $f$  se factorise par  $Y$  est un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(\mathbf{n}_{Y_0/X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0});$$

si de plus  $T$  est *plat* sur  $S$ , ce dernier groupe égale

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_0}}(\mathbf{n}_{Y_0/X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{T_0}).$$

Ceci conduit à introduire le foncteur en groupes  $N_0$  ci-dessous :

**Définition 4.16.1.** — Soit  $N_0$  le  $S_0$ -foncteur en groupes commutatifs défini par : pour tout  $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sch})_{/S_0}$ ,

$$(*) \quad \mathrm{Hom}_{S_0}(Z, N_0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(\mathbf{n}_{Y_0/X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_Z, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_Z).$$

Alors, l'ensemble des sous- $S$ -pré-schémas  $Y$  de  $X$ , *plats* sur  $S$ , relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ , est vide ou principal homogène sous

$$\mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0, N_0) = C^1(Y_0, N_0).$$

Pour chaque tel  $Y$ , considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y \times_S Y & & Y \\ \downarrow (i, i) & & \downarrow i \\ X \times_S X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

et notons  $DY = c(X, Y, \mu \circ (i, i))$  l'obstruction à ce que  $\mu \circ (i, i)$  se factorise par  $Y$ , i.e. à ce que  $Y$  soit stable par la loi de groupe de  $X$ ; d'après ce qui précède,  $DY$  est un élément de

$$N_0(Y_0 \times_{S_0} Y_0) = C^2(Y_0, N_0).$$

<sup>(84)</sup>N.D.E. : voir 4.25 plus loin.

**Lemme 4.17.** — <sup>(85)</sup> Soient  $X$  un  $S$ -groupe lisse sur  $S$  et  $Y_{\mathcal{J}}$  un sous- $S_{\mathcal{J}}$ -groupe de  $X_{\mathcal{J}}$ , plat et localement de présentation finie sur  $S_{\mathcal{J}}$ . Pour chaque sous-préschéma  $Y$  de  $X$ , plat sur  $S$  et relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ , considérons l'obstruction définie en 4.16.1 :

$$DY \in \text{Hom}_{S_0}(Y_0 \times_{S_0} Y_0, N_0) = C^2(Y_0, N_0)$$

- (i) Pour que  $Y$  soit un sous- $S$ -groupe de  $X$ , il faut et il suffit que  $DY = 0$ . 143
- (ii) Si on fait opérer  $Y_0$  sur  $N_0$  par functorialité à partir des automorphismes intérieurs de  $Y_0$ , alors  $DY \in Z^2(Y_0, N_0)$ .
- (iii) Si  $Y$  et  $Y'$  sont deux sous-préschémas de  $X$ , plats sur  $S$ , relevant  $Y_{\mathcal{J}}$  (de sorte qu'est définie la déviation  $d(Y, Y') \in C^1(Y_0, N_0)$ ), on a  $DY' - DY = \partial^1 d(Y, Y')$ .

Démontrons successivement ces diverses assertions.

**4.18.** *Démonstration de 4.17 (i).* Par définition, on a  $DY = 0$  si et seulement si  $Y$  est stable par la loi de groupe de  $X$ . Donc  $DY = 0$  si  $Y$  est un sous-groupe de  $X$ . Réciproquement, si  $DY = 0$ ,  $Y$  est muni de la loi induite  $\mu^Y$ , qui est associative et se réduit modulo  $\mathcal{J}$  suivant la loi de groupe sur  $X_{\mathcal{J}}$ ; comme  $Y$  est plat et localement de présentation finie sur  $S$ , il résulte de 3.3 que  $\mu^Y$  est une loi de groupe.

**4.19.** *Démonstration de 4.17 (ii).* Celle-ci se fait en comparant les deux valeurs de  $u = c(X, Y, \mu^2 \circ (i, i, i))$  calculées dans les deux diagrammes suivants  $(D_j)$ ,  $j = 1, 2$  :

$$(D_j) \quad \begin{array}{ccccc} Y \times_S Y \times_S Y & & Y \times_S Y & & Y \\ \downarrow (i, i, i) & & \downarrow (i, i) & & \downarrow i \\ X \times_S X \times_S X & \xrightarrow{f_j} & X \times_S X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

où  $f_1 = (1, \pi)$ ,  $f_2 = (\pi, 1)$ , et où l'on note  $\mu^2$  le morphisme

$$\mu \circ f_1 = \mu \circ f_2 : X \times_S X \times_S X \longrightarrow X.$$

<sup>(86)</sup> Posons  $\mu^Y = \mu \circ (i, i)$ ,  $f_j^Y = f_j \circ (i, i, i)$  et  $\mu^{2,Y} = \mu^2 \circ (i, i, i)$ . Pour  $j = 1, 2$ , notons  $a_j$  et  $b_j$  les morphismes

$$a_j = a_{(f_j^Y)_0, \mu_0} \quad \text{et} \quad b_j = b_{(f_j^Y)_0, \mu_0}$$

associés au couple de morphismes  $(f_j^Y, \mu)$  par le lemme 4.12; on a donc :

$$(\dagger) \quad \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0^3}} \left( (f_j^Y)_0^* (\mathcal{N}_{Y_0 \times Y_0 / X_0 \times X_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_{Y_0^3} \right) \xrightarrow{a_j} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0^3}} \left( (\mu^{2,Y})_0^* (\mathcal{N}_{Y_0 / X_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_{Y_0^3} \right) \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0^2}} \left( (\mu^Y)_0^* (\mathcal{N}_{Y_0 / X_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_{Y_0^2} \right) \xrightarrow{b_j} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_0^3}} \left( (\mu^{2,Y})_0^* (\mathcal{N}_{Y_0 / X_0}), \mathcal{J} \mathcal{O}_{Y_0^3} \right). \end{cases}$$

Comme  $\mathcal{N}_{Y_0 \times Y_0 / X_0 \times X_0} \simeq \text{pr}_1^* \mathcal{N}_{Y_0 / X_0} \oplus \text{pr}_2^* \mathcal{N}_{Y_0 / X_0}$  (puisque  $X_0$  et  $Y_0$  sont plats sur  $S_0$ ), et  $\mathcal{N}_{Y_0 / X_0} \simeq \mathfrak{n}_{Y_0 / X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}$ , alors :

$$(f_j^Y)_0^* (\mathcal{N}_{Y_0 \times Y_0 / X_0 \times X_0}) \simeq (\mathfrak{n}_{Y_0 / X_0} \oplus \mathfrak{n}_{Y_0 / X_0}) \otimes \mathcal{O}_{Y_0^3}$$

<sup>(85)</sup>N.D.E. : On a modifié 4.17 et 4.18 en tenant compte des ajouts faits dans 4.16.

<sup>(86)</sup>N.D.E. : On a légèrement modifié les notations, et détaillé le début de l'argument.

et, de même,

$$(\mu^{2,Y})_0^*(\mathcal{A}_{Y_0/X_0}) \simeq \mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes \mathcal{O}_{Y_0^3} \quad \text{et} \quad (\mu^Y)_0^*(\mathcal{A}_{Y_0/X_0}) \simeq \mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes \mathcal{O}_{Y_0^2}.$$

De plus, comme  $Y_0^2$  et  $Y_0^3$  sont plats sur  $S_0$ , alors (†) se réécrit sous la forme suivante :

$$(\ddagger) \quad \begin{cases} a_j : \text{Hom}_{S_0}(Y_0^3, N_0 \oplus N_0) \rightarrow \text{Hom}_{S_0}(Y_0^3, N_0) \\ b_j : \text{Hom}_{S_0}(Y_0^2, N_0) \rightarrow \text{Hom}_{S_0}(Y_0^3, N_0). \end{cases}$$

Appliquant deux fois 4.13 à  $c(X, Y, \mu^{2,Y}) = u$ , on obtient :

$$a_1(c(X^2, Y^2, f_1)) + b_1(c(X, Y, \mu^Y)) = u = a_2(c(X^2, Y^2, f_2)) + b_2(c(X, Y, \mu^Y)).$$

Or,  $c(X, Y, \mu^Y) = DY$  et, comme  $f_1 = (1, \mu)$  et  $f_2 = (\mu, 1)$ , on a, avec des notations évidentes :

$$c(X^2, Y^2, f_1) = (0, DY) \quad \text{et} \quad c(X^2, Y^2, f_2) = (DY, 0).$$

Donc, on obtient :

$$u = a_1((0, DY)) + b_1(DY) = a_2((DY, 0)) + b_2(DY).$$

La première chose que l'on remarque, c'est que  $b_j$  n'est autre que  $\text{Hom}_{S_0}((f_j^Y)_0, N_0)$ , c'est-à-dire le morphisme déduit de  $(f_j^Y)_0$  par functorialité.

L'identité ci-dessus devient donc :

$$a_1((0, DY)) - \text{Hom}((\mu, 1), N_0)(DY) + \text{Hom}((1, \mu), N_0)(DY) - a_2((DY, 0)) = 0.$$

On reconnaît les deux termes du milieu : ce sont les parties «  $DY(xy, z)$  » et «  $DY(x, yz)$  » de la formule du 2-cobord. Il ne reste plus donc qu'à identifier les deux autres termes.

Il nous faut d'abord calculer l'application  $a_j$ . Or elle provient, par image réciproque par  $(f_j^Y)_0$ , du morphisme de  $\mathcal{O}_{Y_0^2}$ -modules

$$P : \mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes \mathcal{O}_{Y_0^2} \longrightarrow (\mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \oplus \mathfrak{n}_{Y_0/X_0}) \otimes \mathcal{O}_{Y_0^2}$$

induit par le produit dans  $Y_0$ . Or ce morphisme se décrit de la manière suivante : considérons le fibré vectoriel  $V = \mathbf{V}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0})$ ;  $P$  donne par dualité un morphisme

$$\mathbf{V}(P) : V \times_{S_0} V \times_{S_0} Y_0 \times_{S_0} Y_0 \longrightarrow V \times_{S_0} Y_0 \times_{S_0} Y_0$$

145 qui s'exprime ensemblistement par

$$\mathbf{V}(P)(u, v, a, b) = (u + \text{Ad}(a)v, ab, b). \quad (87)$$

Ceci se démontre exactement comme le fait correspondant sur les algèbres de Lie, c'est-à-dire sur le module  $\omega_{Y_0/S_0}^1$ . On remarque d'abord que  $V$  est muni par functorialité en  $Y_0$  d'une structure de groupe dans la catégorie des fibrés vectoriels sur  $S_0$ ; en vertu du lemme déjà utilisé pour les algèbres de Lie (exposé II, 3.10), cette structure coïncide avec la structure de groupe sous-jacente à sa structure de  $\mathbf{O}_S$ -module. On voit ensuite que  $\mathbf{V}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_{Y_0}) = \mathbf{V}(\mathcal{A}_{Y_0/X_0})$  est lui aussi muni d'une structure de  $S_0$ -groupe qui n'est autre que le produit semi-direct de celle de  $V$  par celle de

(87) N.D.E. : On a remplacé  $a, b$  par  $ab, b$ .

$Y_0$ . Il ne reste plus qu'à identifier les opérations de  $Y_0$  sur  $V$  pour établir la formule cherchée.

Calculons maintenant les deux termes restants. Considérons d'abord  $a_1((0, DY))$ . On le calcule par le diagramme (où  $\mathfrak{n}$  désigne  $\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}$ ) :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{n} \otimes \mathcal{O}_{Y_0^2} & \xrightarrow{P} & (\mathfrak{n} + \mathfrak{n}) \otimes \mathcal{O}_{Y_0^2} \\
 \downarrow (f_1^Y)_0^* & & \downarrow (f_1^Y)_0^* \\
 \mathfrak{n} \otimes \mathcal{O}_{Y_0^3} & & (\mathfrak{n} + \mathfrak{n}) \otimes \mathcal{O}_{Y_0^3} \\
 \searrow a_1((0, DY)) & & \downarrow (0, DY) \\
 & & \mathcal{J} \otimes \mathcal{O}_{Y_0^3} .
 \end{array}$$

Considérant maintenant les fibrés vectoriels définis par ces différents modules comme autant de schémas sur  $S_0$  et prenant les points à valeurs dans n'importe quoi, on a, en notant  $(u, x, y, z)$  un point de  $\mathbb{V}(\mathcal{J}) \times Y_0^3$  ;

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Ad}(x)DY_{y,z}(u), x, yz) & \longleftarrow & (0 + DY_{y,z}(u), x, yz) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 & & (0 + DY_{y,z}(u), x, y, z) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (\text{Ad}(x)DY_{y,z}(u), x, y, z) & \longleftarrow & (u, x, y, z) .
 \end{array}$$

On a donc obtenu  $a_1((0, DY))(x, y, z) = \text{Ad}(x)DY(y, z)$ , ce qui est bien le premier 146 terme du cobord. On aurait de même  $a_2((DY, 0))(x, y, z) = DY(x, y)$ , d'où <sup>(88)</sup>

$$0 = \text{Ad}(x)DY(y, z) - DY(xy, z) + DY(x, yz) - DY(x, y) = (\partial^2 DY)(x, y, z).$$

**4.20.** *Démonstration de 4.17 (iii).* On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y' \times Y' & & Y \times Y & & Y & & Y' \\
 \downarrow \frown & & \downarrow \frown & & \downarrow \frown & & \downarrow \frown \\
 X \times X & \longrightarrow & X \times X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

<sup>(88)</sup>N.D.E. : on a changé les signes, pour les rendre compatibles avec I 5.1.

qui permet de calculer  $DY'$  à l'aide de  $DY$  et de  $d(Y, Y')$ . Le calcul se fait exactement comme précédemment ; nous en laissons les détails au lecteur. On trouve <sup>(89)</sup>

$$DY'(x, y) = d(Y', Y)(xy) + DY(x, y) + d(Y, Y')(x) + \text{Ad}(x)d(Y, Y')(y)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} DY'(x, y) - DY(x, y) &= \text{Ad}(x)d(Y, Y')(y) - d(Y, Y')(xy) + d(Y, Y')(x) \\ &= (\partial^1 d(Y, Y'))(x, y). \end{aligned}$$

**147** ***Théorème 4.21.** — Soient  $S$  un préschéma,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  deux idéaux nilpotents sur  $S$  tels que  $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{J}$  et  $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$ . Soient  $X$  un  $S$ -groupe lisse sur  $S$  et  $Y_{\mathcal{J}}$  un sous- $S_{\mathcal{J}}$ -groupe de  $X_{\mathcal{J}}$  (= sous-préschéma en groupes), plat et localement de présentation finie sur  $S_{\mathcal{J}}$ . Considérons le  $S_0$ -foncteur en groupes commutatifs  $N_0$  défini par*

$$\text{Hom}_{S_0}(Z, N_0) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_Z, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_Z), \quad Z \in \text{Ob}(\mathbf{Sch})/S_0,$$

sur lequel  $Y_0$  opère par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs de  $X_0$ .

(i) *Pour qu'il existe un sous- $S$ -groupe de  $X$ , plat sur  $S$ , qui se réduise suivant  $Y_{\mathcal{J}}$ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i<sub>1</sub>) *Il existe un sous-préschéma  $Y$  de  $X$ , plat sur  $S$ , relevant  $Y_{\mathcal{J}}$  (condition automatiquement vérifiée si  $Y_0$  est affine (4.6))*

(i<sub>2</sub>) *Une certaine obstruction canonique, élément de  $H^2(Y_0, N_0)$ , est nulle.*

(ii) *Si les conditions de (i) sont satisfaites, l'ensemble des sous- $S$ -groupes de  $X$ , plats sur  $S$  et se réduisant suivant  $Y_{\mathcal{J}}$  est un ensemble principal homogène sous le groupe  $Z^1(Y_0, N_0)$ .*

En effet, la condition (i<sub>1</sub>) est nécessaire. Supposons-la vérifiée et soit  $Y$  plat sur  $S$  relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ . Il nous faut chercher un  $Y'$  relevant aussi  $Y_{\mathcal{J}}$  tel que  $\partial DY' = 0$  (4.17 (i)). Mais cela revient à chercher un  $d(Y, Y') \in C^1(Y_0, N_0)$  tel que  $DY = \partial d(Y, Y')$  (4.17 (iii)).

**148** Soit  $c \in H^2(Y_0, N_0)$  la classe image de  $DY$  qui est un cocycle par 4.17 (ii). Elle ne dépend pas du choix de  $Y$  d'après 4.17 (iii), et sa nullité est nécessaire et suffisante à l'existence d'un  $d(Y, Y')$  vérifiant l'équation précédente. Ceci démontre (i). Si on a maintenant choisi  $Y$  tel que  $DY = 0$ , l'équation à résoudre s'écrit  $\partial d(Y, Y') = 0$ , ce qui démontre (ii).

***Remarque 4.22.** — Notons que  $\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}$  est de présentation finie sur  $S_0$  <sup>(90)</sup>. Donc le foncteur  $N_0$  s'écrit sur la catégorie des préschémas  $S$ -plats*

$$N_0 = W(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}, \mathcal{J})).$$

<sup>(89)</sup>N.D.E. : on a corrigé  $d(Y, Y')(y)$  en  $d(Y, Y')(x)$ .

<sup>(90)</sup>N.D.E. : Détailler ce point. Il semble, d'après 4.15, que  $\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}$  soit même *fini localement libre*, donc la restriction aux  $S_0$ -préschémas plats (corriger  $S$  en  $S_0$ ) est peut-être inutile . . . Dire aussi que le module  $\mathcal{F}$  dont on prend le  $W$  est *quasi-cohérent*, et donc  $H^2(Y_0^0, \mathcal{F}) = 0$  si  $Y_0$  est diagonalisable.

Il en résulte des isomorphismes <sup>(91)</sup> :

$$\begin{aligned} H^2(Y_0, N_0) &\simeq H^2(Y_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}, \mathcal{J})), \\ Z^1(Y_0, N_0) &\simeq Z^1(Y_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}, \mathcal{J})). \end{aligned}$$

**4.23.** Toujours sous les hypothèses de 4.21, nous allons maintenant étudier comment l'ensemble des  $Y$  relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ , se comporte vis-à-vis de la conjugaison par des sections de  $X$ . Si  $x$  est une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$ , l'automorphisme intérieur  $\text{Int}(x)$  défini par  $x$  transforme sous-groupes plats de  $X$  relevant  $Y_{\mathcal{J}}$  en sous-groupes plats de  $X$  relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ . Or, sous les conditions de 4.21 (ii), l'ensemble de ces sous-groupes est principal homogène sous  $Z^1(Y_0, N_0)$ ; nous allons voir qu'il existe alors un sous-groupe de  $Z^1(Y_0, N_0)$  tel que deux sous-groupes de  $X$ , plats sur  $S$ , et relevant  $Y_{\mathcal{J}}$  soient conjugués (par des  $x \in X(S)$  induisant l'unité de  $X(S_{\mathcal{J}})$ ) si et seulement si leur « différence » dans  $Z^1(Y_0, N_0)$  est un élément de ce sous-groupe. Dans les meilleurs cas, nous montrerons que ce dernier n'est autre que  $B^1(Y_0, N_0)$ , donc que l'ensemble des sous-groupes de  $X$  plats, relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ , modulo conjugaison par les  $x \in X(S)$  induisant l'unité de  $X(S_{\mathcal{J}})$ , est vide ou principal homogène sous  $H^1(Y_0, N_0)$  (proposition 4.36).

149

**4.24.** Soit  $Y$  un sous-groupe plat de  $X$ , se réduisant suivant  $Y_{\mathcal{J}}$ . Rappelons que nous avons introduit en 0.5 le foncteur  $L_{0X}$  (resp.  $L_{0Y}$ ) défini par l'identité par rapport au  $S_0$ -préschéma variable  $T$  :

$$\text{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_T)$$

(resp. de même en remplaçant  $X$  par  $Y$ ).

Or on a :

**Lemme 4.25.** — *Il existe une suite exacte canonique de  $Y_0$ -modules*

$$(+) \quad \mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \xrightarrow{d} \omega_{X_0/S_0}^1 \longrightarrow \omega_{Y_0/S_0}^1 \longrightarrow 0,$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Par image réciproque sur  $Y$ ,  $d$  donne le morphisme  $D$  de 4.8, (iii).*

(ii) *Si  $X_0$  et  $Y_0$  sont lisses sur  $S_0$ , alors  $d$  est injectif. Comme les deux  $\omega^1$  sont alors localement libres de type fini, il en est de même de  $\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}$  et la suite est localement scindée.*

D'après SGA 1 II, formule (4.3), il existe une suite exacte canonique de  $\mathcal{O}_{Y_0}$ -modules

$$\mathcal{N}_{Y_0/X_0} \xrightarrow{D} \Omega_{X_0/S_0}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{O}_{Y_0} \longrightarrow \Omega_{Y_0/S_0}^1 \longrightarrow 0.$$

Comme cette suite est invariante par les translations de  $Y_0$ , elle provient d'une suite (+) sur  $S_0$  par image réciproque par la projection de  $Y_0$  sur  $S_0$ . Faisant maintenant agir les automorphismes intérieurs de  $Y_0$ , on voit que (+) est une suite exacte de  $Y_0$ -modules. Comme (+) devient exacte par tensorisation avec  $\mathcal{O}_{Y_0}$ , elle est déjà exacte

150

<sup>(91)</sup>N.D.E. : avec les notations de I 5.3, supposant  $Y_0$  affine sur  $S_0$ .

( $Y_0$  est fidèlement plat sur  $S_0$ ). Pour la même raison  $d$  est injectif si et seulement si  $D$  l'est. Le reste résulte de SGA 1 II 4.10.

**4.26.** Pour tout  $S_0$ -préschéma  $T$ , (+) donne par functorialité une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0}(T, L_{0Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) \xrightarrow{d_x} \mathrm{Hom}_{S_0}(T, N_0).$$

En particulier, prenant pour  $T$  les puissances cartésiennes de  $Y_0$ , on en déduit une suite exacte de complexes de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow C^*(Y_0, L_{0Y}) \longrightarrow C^*(Y_0, L_{0X}) \xrightarrow{d^*} C^*(Y_0, N_0),$$

et en particulier, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & C^0(Y_0, L_{0Y}) & \longrightarrow & C^0(Y_0, L_{0X}) & \xrightarrow{d^0} & C^0(Y_0, N_0) \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C^1(Y_0, L_{0Y}) & \longrightarrow & C^1(Y_0, L_{0X}) & \xrightarrow{d^1} & C^1(Y_0, N_0) \quad . \end{array}$$

Remarquons que  $C^0(Y_0, L_{0Y})$  (resp.  $C^0(Y_0, L_{0X})$ ) n'est autre que  $\mathrm{Hom}_{S_0}(S_0, L_{0Y})$  (resp.  $\dots$ ) c'est-à-dire le groupe des sections de  $Y$  (resp.  $X$ ) sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$ . Notons aussi que  $d^1$  n'est autre que le morphisme  $v_{i_{Y_0}}$  de 4.8 (iii), où  $i_{Y_0} : Y_0 \rightarrow X_0$  est l'immersion canonique.

**Lemme 4.27.** — *Sous les conditions de 4.21 pour  $S, \mathcal{I}, \mathcal{J}$  et  $X$ , soit  $Y$  un sous-groupe de  $X$ , plat sur  $S$  et relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ . Soit  $x \in C^0(Y_0, L_{0X})$  une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$ . Alors  $d(Y, \mathrm{Int}(x)Y) \in C^1(Y_0, N_0)$  est donné par la formule*

$$d(\mathrm{Int}(x)Y, Y) = \partial d^0 x = d^1 \partial x.$$

En effet, posons  $Y' = \mathrm{Int}(x)Y$ . Par la formule

$$\begin{aligned} xyx^{-1} &= xyx^{-1}y^{-1}y = (x - \mathrm{Ad}(y)x)y \\ &= -(\partial x)(y) \cdot y, \end{aligned}$$

on voit que  $Y'$  peut se décrire comme l'image de  $Y$  par le morphisme composé (cf. 4.8 (iii)) :

$$Y \xrightarrow{(-\partial x, i_Y)} L'_X \times_S X \longrightarrow X.$$

Si  $i_Y$  désigne l'immersion canonique de  $Y$  dans  $X$ , on a par 4.8 (iii), et le résultat précédent :

$$c(X, Y', \mathrm{Int}(x) \circ i_Y) - c(X, Y', i_Y) = -d^1 \partial x.$$

Mais  $\mathrm{Int}(x) \circ i_Y$  se factorise par  $Y'$  par définition et le premier terme est nul ; par 4.8 (ii), on a  $c(X, Y', i_Y) = d(Y', Y)$ . Cela entraîne  $d(Y', Y) = d^1 \partial x$ .

**Corollaire 4.28.** — *Pour que deux sous-groupes  $Y$  et  $Y'$  de  $G$ , plats sur  $S$  et relevant  $Y_{\mathcal{J}}$ , soient conjugués par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$ , il faut et il suffit que  $d(Y, Y') \in \partial d^0 C^0(Y_0, L_{0X})$ .*

152

**Corollaire 4.29.** — Si  $d^0$  est surjectif,  $Y$  et  $Y'$  comme ci-dessus sont conjugués par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$  si et seulement si  $d(Y, Y') \in B^1(Y_0, N_0)$ .

**Corollaire 4.30.** — Soit  $Y$  comme dans 4.27 ; l'ensemble des conjugués de  $Y$  par des sections de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$  est isomorphe à :

$$C^0(Y_0, L_{0X}) / \text{Ker } d^1 \partial = d^1 \partial C^0(Y_0, L_{0X}).$$

Remarquons maintenant que  $C^0(Y_0/L_{0X}) / \text{Ker } d^1 \partial$  se calcule uniquement à l'aide du carré de gauche du diagramme commutatif de 4.26. Il en résulte en particulier que l'on peut aussi le calculer dans tout diagramme du même type ayant le même carré de gauche. Considérons en particulier le foncteur  $L_{0X}/L_{0Y}$  au-dessus de  $S_0$  défini par

$$\text{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}/L_{0Y}) = \text{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) / \text{Hom}_{S_0}(T, L_{0Y}).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^0(Y_0, L_{0Y}) & \longrightarrow & C^0(Y_0, L_{0X}) & \longrightarrow & C^0(Y_0, L_{0X}/L_{0Y}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C^1(Y_0, L_{0Y}) & \longrightarrow & C^1(Y_0, L_{0X}) & \longrightarrow & C^1(Y_0, L_{0X}/L_{0Y}) \longrightarrow 0 \end{array} \quad ,$$

d'où par la remarque précédente :

**Corollaire 4.31.** — Soit  $Y$  comme en 4.27 ; l'ensemble des conjugués de  $Y$  par des sections de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$  est isomorphe à

$$E = \partial C^0(L_{0X}/L_{0Y}) = C^0(L_{0X}/L_{0Y}) / H^0(Y_0, L_{0X}/L_{0Y}).$$

**Corollaire 4.32.** — Supposons de plus  $S_0$  affine et  $\mathcal{L}ie(Y_0/S_0)$  localement libre. Si on note  $\mathcal{F}_0 = [\mathcal{L}ie(X_0/S_0) / \mathcal{L}ie(Y_0/S_0)] \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}$ , on a  $E = \Gamma(S_0, \mathcal{F}_0) / H^0(Y_0, \mathcal{F}_0)$ .

153

En effet, on a pour tout  $T$  au-dessus de  $S_0$  une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{S_0}(T, L_{0Y}) \longrightarrow \text{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) \longrightarrow W(\mathcal{F}_0)(T).$$

Par le raisonnement qui nous a servi à prouver 4.31, nous pouvons calculer  $E$  comme l'image de  $C^0(Y_0, L_{0X})$  dans  $C^1(Y_0, W(\mathcal{F}))$ . Mais comme  $S_0$  est affine,  $C^0(Y_0, L_{0X}) \rightarrow C^0(Y_0, W(\mathcal{F}))$  est surjectif et on trouve bien le résultat annoncé.

**Corollaire 4.33.** — Soient  $S, \mathcal{I}, \mathcal{J}$  et  $X$  comme en 4.21. Supposons  $S$  affine. Soit  $Y$  un sous-groupe diagonalisable de  $X$ . L'ensemble des sous-groupes de  $X$ , conjugués de  $Y$  par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$ , est isomorphe à

$$E = \Gamma \left( S_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) / \mathcal{L}ie(X_0/S_0)^{\text{ad}(Y_0)} \right) \otimes_{\Gamma(S_0, \mathcal{O}_{S_0})} \Gamma(S_0, \mathcal{J}).$$

En effet, on écrit par I 4.7.3, (cf. 2.13)

$$\mathcal{L}ie(X_0/S_0) = \mathcal{L}ie(X_0/S_0)^{\text{ad}(Y_0)} \oplus \mathcal{R}.$$

Comme  $Y_0$  est commutatif on a  $\mathcal{L}ie(Y_0/S_0) \subset \mathcal{L}ie(X_0/S_0)^{\text{ad}(Y_0)}$ , donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \left( \mathcal{L}ie(X_0/S_0)^{\text{ad}(Y_0)} / \mathcal{L}ie(Y_0/S_0) \right) \otimes \mathcal{J} \oplus \mathcal{R} \otimes \mathcal{J}, \\ \mathcal{F}_0^{\text{ad}(Y_0)} &= \left( \mathcal{L}ie(S_0/S_0)^{\text{ad}(Y_0)} / \mathcal{L}ie(Y_0/S_0) \right) \otimes \mathcal{J}.\end{aligned}$$

154 Par 4.32, on a donc  $E \simeq \Gamma(S_0, \mathcal{R} \otimes \mathcal{J})$ . Retournant à la définition de  $\mathcal{R}$ , on a terminé.

**Corollaire 4.34.** — Soient  $S, \mathcal{I}, \mathcal{J}$  et  $X$  comme en 4.21. Supposons  $S$  affine. Soit  $Y$  un sous-groupe diagonalisable de  $X$ . Si  $x \in X(S)$  induit la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$  et normalise  $Y$ , alors il centralise  $Y$ .

Cela résulte immédiatement de la comparaison du corollaire précédent et de 2.14. En effet, 4.33 montre que les éléments de  $C^0(Y_0, L_{0X})$  qui respectent globalement  $Y$  sont les éléments de  $H^0(Y_0, L_{0X})$ , et on a vu en 2.14 que ce sont ceux-là même qui agissent trivialement sur l'immersion canonique  $Y \rightarrow X$ .

**4.35.** Revenons à la situation générale de 4.21 et supposons  $Y_{\mathcal{J}}$  lisse sur  $S_{\mathcal{J}}$ . Alors (SGA 1 II 4.10), tout sous-préschéma  $Y$  de  $X$  relevant  $Y_{\mathcal{J}}$  et plat sera lisse sur  $S$ . De plus, par 4.25 (ii), on a un isomorphisme de  $Y_0$ - $\mathcal{O}_{S_0}$ -modules :

$$\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}^{\vee} = \mathcal{L}ie(X_0/S_0) / \mathcal{L}ie(Y_0/S_0).$$

**Proposition 4.36.** — Sous les hypothèses de 4.21, supposons de plus  $Y_{\mathcal{J}}$  lisse sur  $S_{\mathcal{J}}$  et  $S_0$  affine. L'ensemble des sous- $S$ -groupes  $Y$  de  $X$  plats (ou lisses) sur  $S$ , se réduisant suivant  $Y_{\mathcal{J}}$ , modulo conjugaison par des sections de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_{\mathcal{J}}$ , est soit vide, soit un ensemble principal homogène sous le groupe

$$H^1(Y_0, \mathcal{L}ie(X_0/S_0) / \mathcal{L}ie(Y_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{J}).$$

155 Il nous suffit de vérifier que le corollaire 4.29 s'applique, c'est-à-dire que

$$d^0 : \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\omega_{X_0/S_0}^1, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}, \mathcal{J})$$

est surjectif. Or cela résulte de ce que la suite (+) de 4.25, (ii), est scindée,  $S_0$  étant affine.

Énonçons enfin un corollaire commun à 4.21 et 4.36, qui sera, en fait, la seule forme sous laquelle nous utiliserons par la suite les résultats généraux de ce numéro. <sup>(92)</sup>

**Corollaire 4.37.** — Soient  $S$  un préschéma et  $S_0$  le sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent  $\mathcal{I}$ . Soient  $X$  un  $S$ -groupe lisse sur  $S$ , et  $Y_0$  un sous- $S_0$ -groupe de  $X_0$ , plat sur  $S_0$ .

(i) Si  $S_0$  est affine,  $Y_0$  lisse sur  $S_0$ , et si

$$H^1(Y_0, [\mathcal{L}ie(X_0/S_0) / \mathcal{L}ie(Y_0/S_0)] \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{I}^{n+1} / \mathcal{I}^{n+2}) = 0$$

pour tout  $n \geq 0$ , deux sous- $S$ -groupes de  $X$ , plats (ou lisses) sur  $S$ , se réduisant suivant  $Y_0$ , sont conjugués par une section de  $X$  sur  $S$  induisant la section unité de  $X_0$ .

<sup>(92)</sup>N.D.E. : Par exemple, 4.37 est utilisé dans l'exposé IX pour prouver les énoncés 3.2 bis et 3.6 bis.

(ii) Si  $Y_0$  est affine et de présentation finie et si

$$H^2(Y_0, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_0}}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0}, \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2})) = 0$$

pour tout  $n \geq 0$ , il existe un sous-S-groupe de  $X$ , plat sur  $S$ , se réduisant suivant  $Y_0$ . 156

**4.38.** Il nous reste à relier les trois constructions que nous avons faites dans cet exposé. Pour éviter des complications inessentiellles, nous nous placerons dans la situation suivante :  $S_0$  est le spectre d'un corps  $k$ ,  $S$  est le spectre des nombres duaux  $D(k)$ ,  $X$  est un S-groupe lisse sur  $S$ ,  $Y$  un sous-S-groupe, affine et lisse sur  $S$ . On a une suite exacte de  $k$ -espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}ie Y_0 \xrightarrow{i} \mathcal{L}ie X_0 \xrightarrow{d} \mathfrak{n}_{Y_0/X_0}^\vee \longrightarrow 0,$$

donnant naissance à une suite exacte de cohomologie : <sup>(93)</sup>

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0) \xrightarrow{i^0} H^0(Y_0, \mathcal{L}ie X_0) \xrightarrow{d^0} H^0(Y_0, \mathcal{L}ie X_0 / \mathcal{L}ie Y_0) \\ &\xrightarrow{\partial^0} H^1(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0) \xrightarrow{i^1} H^1(Y_0, \mathcal{L}ie X_0) \xrightarrow{d^1} H^1(Y_0, \mathfrak{n}_{Y_0/X_0}^\vee) \xrightarrow{\partial^1} H^2(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0). \end{aligned}$$

Or ces divers groupes ont tous une signification géométrique.

- a)  $H^0(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0) = \mathcal{L}ie \underline{\text{Centr}}(Y)_0$  par (Exp. II 5.2.3).
- b)  $H^0(Y_0, \mathcal{L}ie X_0) = \mathcal{L}ie \underline{\text{Centr}}_X(Y)_0$ , (*idem*).
- c)  $H^0(Y_0, \mathcal{L}ie X_0 / \mathcal{L}ie Y_0) = \mathcal{L}ie \underline{\text{Norm}}_X(Y)_0 / \mathcal{L}ie Y_0$ , (*idem*).
- d)  $H^1(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0) = \mathcal{L}ie \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)_0 / \text{Im}(\mathcal{L}ie Y_0)$ , où  $\text{Im}(\mathcal{L}ie Y_0)$  désigne l'image de  $\mathcal{L}ie Y_0$  par le morphisme  $\mathcal{L}ie(\text{Int})_0$  déduit de  $\text{Int} : Y_0 \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)$ ; cela résulte aussitôt de 2.1 et II 4.2.
- e)  $H^1(Y_0, \mathcal{L}ie X_0)$  est le groupe des déviations entre homomorphismes  $Y \rightarrow X$  prolongeant l'immersion canonique  $i_0 : Y_0 \rightarrow X_0$ , modulo les déviations obtenues par l'action des automorphismes intérieurs de  $X$  définis par des éléments de  $X(S)$  donnant l'unité de  $X(S_0)$  (c'est-à-dire des éléments de  $\mathcal{L}ie X_0$ ) (cf. 2.1 et 1.2.2). 157
- f)  $H^1(Y_0, \mathfrak{n}_{Y_0/X_0}^\vee)$  est le groupe des déviations entre sous-groupes  $Y'$  de  $X$ , plats sur  $S$ , prolongeant  $Y_0$ , modulo les déviations obtenues par l'action des automorphismes intérieurs de  $X$  construits comme précédemment (cf. démonstration de 4.21).
- g)  $H^2(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0)$  est le groupe des déviations entre structures de groupe sur  $Y$  prolongeant celle de  $Y_0$ , modulo les S-automorphismes de  $Y$  induisant l'identité sur  $Y_0$  (cf. 3.5).

Nous proposons maintenant de montrer comment on peut expliciter les six morphismes de la suite exacte précédente dans l'interprétation géométrique que nous venons de donner.

1)  $i^0$  et  $d^0$  ne sont autres que les morphismes obtenus par passage à l'algèbre de Lie (puis par passage au quotient pour  $d^0$ ), à partir des monomorphismes canoniques :

$$\underline{\text{Centr}}(Y) \longrightarrow \underline{\text{Centr}}_X(Y) \longrightarrow \underline{\text{Norm}}_X(Y).$$

<sup>(93)</sup>N.D.E. : au lieu de l'abréviation  $H^i(\ )$  de l'original, on a écrit explicitement  $H^i(Y_0, \ )$ .

C'est en effet ce qu'il résulte immédiatement de la définition des identifications (a), (b), et (c).

- 2) On construit  $\partial^0$  ainsi. Soit  $\bar{x} \in \mathcal{L}ie \underline{\text{Norm}}_X(Y)_0 / \mathcal{L}ie Y_0$ . Relevons-le en un  $x \in \mathcal{L}ie \underline{\text{Norm}}_X(Y)_0 \subset \underline{\text{Norm}}_X(Y)$ . Alors  $\text{Int}(x)$  définit un automorphisme de  $Y$  induisant l'identité sur  $Y_0$ , donc un élément de  $\mathcal{L}ie \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)_0$ . Notons  $\text{Int}(x)$  l'image de cet élément dans  $\mathcal{L}ie \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)_0 / \text{Im}(\mathcal{L}ie Y_0)$ . Alors on a :

$$\partial^0(x) = -\overline{\text{Int}(x)} = \overline{\text{Int}(x^{-1})}.$$

En effet, calculons l'élément de  $\mathcal{L}ie \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)_0$  défini par  $\text{Int}(x)$ . Il correspondra par définition à un élément  $a$  de  $Z^1(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0)$  tel que

$$xyx^{-1} = a(y_0)y, \quad \text{pour tout } y \in Y(S'), S' \longrightarrow S.$$

Mais ceci s'écrit aussi  $a(y_0) = xyx^{-1}y^{-1} = x - \text{Ad}(y)x = -\partial(x)(y_0)$ .

- 3) Soit  $\bar{u}$  un élément de  $H^1(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0)$ , image canonique d'un

$$u \in \mathcal{L}ie \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y)_0 \subset \underline{\text{Aut}}_{S\text{-gr.}}(Y).$$

Alors, si  $i : Y \rightarrow X$  est l'immersion canonique, on a :

$$i^1(\bar{u}) = d(i, u \circ i).$$

En effet,  $d(i, u \circ i)$  est défini comme l'image d'un élément  $d \in Z^1(Y_0, \mathcal{L}ie X_0)$  tel que  $iu(y) = d(y_0)i(y)$ . Or  $\bar{u}$  est défini comme l'image d'un élément  $v \in Z^1(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0)$ , tel que  $u(y) = v(y_0)y$ . On peut donc choisir  $d(y_0) = iv(y_0)$ , ce qui démontre la relation annoncée.

- 4) Soit  $\bar{d}(i, i')$  l'image de la déviation  $d(i, i')$  dans  $H^1(Y_0, \mathcal{L}ie X_0)$ , où  $i' : Y \rightarrow X$  est un homomorphisme de groupes relevant  $i_0$ . Soit  $\bar{d}(Y, i'(Y))$  l'image de la déviation  $d(Y, i'(Y))$  dans  $H^1(Y_0, \mathfrak{n}_{Y_0/X_0})$ . Alors

$$d^1(\bar{d}(i, i')) = \bar{d}(Y, i'(Y)).$$

Cela résulte sans difficultés de 4.8 (ii) et (iii), en raisonnant comme dans la démonstration de 4.27.

- 5) Soit enfin  $Y'$  un sous-groupe de  $X$ , plat sur  $S$  et relevant  $Y_0$ . On a supposé que  $Y_0$  est *affine*. Alors on sait que  $Y$  et  $Y'$  sont isomorphes comme préschémas étendant  $Y_0$  (3.6), donc qu'il existe un isomorphisme de  $S$ -préschémas

$$f : Y \longrightarrow Y'$$

induisant l'identité sur  $Y_0$ . Transportons par  $f$  la structure de groupe de  $Y'$  et soit  $Y_1$  le groupe obtenu (qui a donc  $Y$  comme préschéma sous-jacent). Alors

$$\partial^1 \bar{d}(Y, Y') = \bar{d}(Y, Y_1).$$

En effet,  $d(Y, Y_1)$  est défini comme l'image d'un  $b \in Z^2(Y_0, \mathcal{L}ie Y_0)$  tel que  $f^{-1}(f(y)f(y')) = b(y_0, y'_0)yy'$ .

D'un autre côté,  $d(Y, Y')$  est défini comme l'image dans  $H^1(Y_0, \mathcal{L}ie X_0 / \mathcal{L}ie Y_0)$  d'un  $a \in Z^1(Y_0, \mathcal{L}ie X_0)$  tel que  $f(y) = a(y_0)y$ . Calculant  $b$ , on trouve aussitôt :

$$b(y_0, y'_0) = a(y_0 y'_0)^{-1} a(y_0) y a(y'_0) y' (yy')^{-1} = \partial a(y_0, y'_0).$$