Géométrie algébrique/Algebraic geometry

Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide

Pierre BERTHELOT
IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex, France.
E-mail : Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr

Résumé. Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Par des méthodes analogues à celles de [3], nous établissons la dualité de Poincaré et la formule de Künneth pour la cohomologie rigide des variétés algébriques sur k.

Poincaré duality and Künneth formula for rigid cohomology.

Abstract. *Let k be a field of characteristic $p > 0$. Using methods analog to those of* [3], *we prove that Poincaré duality and the Künneth formula hold for the rigid cohomology of algebraic varieties over k.*

Abridged English Version

1. The trace morphism

Let k be a field of characteristic $p > 0$, W a Cohen ring of k, $K = \mathrm{Frac}(W)$. If X is a separated k-scheme of finite type and $n = \dim X$, the rigid cohomology groups with proper support $H^i_{\mathrm{c,rig}}(X)$ vanish for $i > 2n$. One can therefore define a trace morphism $\mathrm{Tr}_X : H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X) \to K$ as follows. We first reduce to the case where X is affine and smooth and choose a smooth affine W-scheme X' lifting X and a compactification $h : \overline{X}' \to \mathrm{Spec}(W)$ of X'. Then $\omega_{\overline{X}'_K} = h^!K$ is a dualizing complex on the generic fiber $\overline{X}'_K$ of $\overline{X}'$, whose restriction to X'_K is isomorphic to $\Omega^n_{X'_K}[n]$. Using the usual trace morphism and GAGA on the analytic space associated to $\overline{X}'_K$, we get a morphism

$$H^n_{]X[}(X'^{\,\mathrm{an}}_K, \Omega^n_{X'^{\,\mathrm{an}}_K}) \xrightarrow{\sim} H^0_{]X[}(\overline{X}'^{\,\mathrm{an}}_K, \omega^{\mathrm{an}}_{\overline{X}'_K}) \longrightarrow H^0(\overline{X}'^{\,\mathrm{an}}_K, \omega^{\mathrm{an}}_{\overline{X}'_K}) \xrightarrow{\sim} H^0(\overline{X}'_K, \omega_{\overline{X}'_K}) \longrightarrow K.$$

One shows that this morphism vanishes on $H^n_{]X[}(X'^{\,\mathrm{an}}_K, \Omega^{n-1}_{X'^{\,\mathrm{an}}_K})$, can be factored through a morphism $\mathrm{Tr}_X : H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X) \to K$, and that this morphism is independant of the choice of X'.

When X is proper and smooth over k, Tr_X can be identified with the trace morphism for crystalline cohomology (via [3, 1.9]). If $f : Y \to X$ is a finite étale morphism between smooth affine k-schemes, there exists a trace morphism $\mathrm{Tr}_{f,\mathrm{c}} : H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(Y) \to H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X)$ (*cf.* [3, 3.6] and 1.4 below), and the morphisms Tr_X and Tr_Y commute with $\mathrm{Tr}_{f,\mathrm{c}}$. If $Z' \hookrightarrow X'$ is a closed immersion between smooth and quasi-projective W-schemes, with reduction $Z \hookrightarrow X$, then the construction of the Gysin map given in [3, 5.2-5.4] has an analog $G_{Z'/X',\mathrm{c}}$ for rigid cohomology with compact supports, and $G_{Z'/X',\mathrm{c}}$ commutes with Tr_Z and Tr_X.

2. Poincaré duality

Let X be as above, and $Z \subset X$ a closed subscheme. The basic constructions of rigid cohomology allow us to define pairings

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X) \otimes_K \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X).$$

Using the trace map Tr_X, we get the duality morphism

$$\eta_{Z,X} : \mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{Hom}_K(\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Z), K)[-2n].$$

These morphisms are compatible with the distinguished triangles relating the cohomologies of X, Z and $U = X \setminus Z$. When X is proper and smooth, the morphism $\eta_{X,X}$ can be identified with the Poincaré duality morphism in crystalline cohomology. If $f : X \to Y$ is a finite étale morphism between affine smooth k-schemes, $\eta_{Y,Y}$ and $\eta_{X,X}$ are compatible with the functoriality maps and the trace maps between $H^*_{\mathrm{rig}}(X)$ and $H^*_{\mathrm{rig}}(Y)$ on the one hand, $H^*_{\mathrm{c,rig}}(X)$ and $H^*_{\mathrm{c,rig}}(Y)$ on the other hand. When $Z' \hookrightarrow X'$ is a closed immersion between smooth quasi-projective W-schemes, with reduction $Z \hookrightarrow X$, the morphisms $\eta_{Z,Z}$ and $\eta_{Z,X}$ are compatible with the Gysin map $G_{Z',X'}$.

To show that the morphism $\eta_{Z,X}$ is an isomorphism, we argue as in the proof of the finiteness theorem [3, th. 3.1]. Using the above properties and de Jong's theorem [5, th. 4.1], we prove by induction on n the following two assertions:

$(\mathrm{a})_n$ For any smooth separated k-scheme X such that $\dim X \leq n$, η_X is an isomorphism.

$(\mathrm{b})_n$ For any k-scheme Z such that $\dim Z \leq n$, and any closed immersion $Z \hookrightarrow X$ into a smooth separated k-scheme, $\eta_{Z,X}$ is an isomorphism.

3. Künneth formula

A similar induction can be used to prove that the Künneth formula holds for rigid cohomology and rigid cohomology with compact supports, and that these cohomologies commute with arbitrary base field extension.

On désigne par k un corps de caractéristique $p > 0$, W un anneau de Cohen de k (*cf.* [EGA, 0, (19.8.4)]), K son corps des fractions. Tous les k-schémas considérés sont supposés séparés et de type fini. Soient X un k-schéma, $Z \subset X$ un sous-schéma fermé, $U = X \setminus Z$. On choisit une compactification $\overline{X}$ de X sur k, et on suppose qu'il existe une immersion fermée de $\overline{X}$ dans un W-schéma formel p-adique P lisse au voisinage de X (*cf.* [3, 1.3]). Si V est un ouvert de $\overline{X}$, on note $]V[$ le tube de V dans la fibre générique P_K de P, $j_V^\dagger$ le foncteur « faisceau des germes de sections surconvergentes au voisinage de $]V[$ », $\underline{\Gamma}_{]V[}$ le foncteur « faisceau des sections à support dans $]V[$ » (foncteurs de la catégorie des faisceaux abéliens sur $]\overline{X}[$ dans elle-même, *cf.* [3, 1.2]); on pose $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[} = \mathrm{Ker}(j_X^\dagger \to j_U^\dagger)$. Par construction (*cf.* [1], [2], [3]), la cohomologie rigide de X à support dans Z (resp. à supports compacts) est définie par

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X) = \mathbb{R}\Gamma(]\overline{X}[, \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}\,\Omega^\bullet_{]\overline{X}[}) \simeq \mathbb{R}\Gamma(]\overline{X}[, (j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[} \to j_U^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[})_s),$$

$$\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X) = \mathbb{R}\Gamma(]\overline{X}[, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}(\Omega^\bullet_{]\overline{X}[})) \simeq \mathbb{R}\Gamma(]\overline{X}[, (\underline{\Gamma}_{]U[}(\mathcal{I}^\bullet) \to \underline{\Gamma}_{]X[}(\mathcal{I}^\bullet))_s),$$

où $\mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective de $\Omega^\bullet_{]\overline{X}[}$, l'indice s désigne le complexe simple associé à un bicomplexe, et $j_X^\dagger \mathcal{O}_{]\overline{X}[}$ et $\underline{\Gamma}_{]X[}(\mathcal{I}^0)$ sont placés en bidegré $(0, 0)$. Ces complexes sont indépendants des choix faits ; le complexe $\mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X)$ est contravariant par rapport aux morphismes $f : X' \to X$, où $Z' \subset X'$ est tel que $f^{-1}(Z) \subset Z'$, le complexe $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X)$ est contravariant par rapport aux morphismes propres $X' \to X$, et on dispose des triangles distingués

$$\begin{aligned}\Delta(X,Z)\ &:\ \mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(U) \xrightarrow{+1}\ ,\\ \Delta_{\mathrm{c}}(X,Z)\ &:\ \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(U) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Z) \xrightarrow{+1}\ .\end{aligned}$$

1. Le morphisme trace

PROPOSITION 1.1. — *Soit X un k-schéma de dimension n. Alors $H^i_{\mathrm{c,rig}}(X) = 0$ pour $i > 2n$.*

Lorsque X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$, on peut prendre $\overline{X} = \mathbb{P}^n_k$, $P = \widehat{\mathbb{P}}^n_W$. Le tube $]X[$ est alors la boule unité fermée de l'espace $\mathbb{A}^{n\,\mathrm{an}}_K$, et l'énoncé résulte de ce que son complémentaire est réunion de n ouverts de Stein. Dans le cas général, une récurrence sur n permet de se ramener au cas où X est affine et lisse. En le plongeant dans un espace affine et en appliquant le théorème de normalisation de Nœther, on montre qu'on peut encore se ramener au calcul de la cohomologie de de Rham d'un espace de Stein lisse de dimension n, à support dans le complémentaire de la réunion de n ouverts de Stein.

1.2. On veut construire un morphisme trace $\mathrm{Tr}_X : H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X) \to K$. Quitte à composer avec le morphisme trace pour une extension finie de K, il suffit de le faire après une extension finie de k. On peut alors remplacer X par X_{red} et se ramener au cas où il existe dans X un ouvert U affine, lisse et géométriquement connexe tel que $\dim(X \setminus U) < n$. La proposition précédente entraine qu'il suffit de construire le morphisme $\mathrm{Tr}_U : H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(U) \to K$.

On suppose donc X affine, lisse et connexe. Soient X' un W-schéma affine et lisse relevant X, $\overline{X}'$ une compactification projective de X, $f : \overline{X}'_K \to \mathrm{Spec} K$. Le complexe $\omega_{\overline{X}'_K} = f^!K$ est un complexe dualisant sur $\overline{X}'_K$, égal à $\Omega^n_{\overline{X}'_K}[n]$ sur l'ouvert lisse X'_K de $\overline{X}'_K$, et on dispose du morphisme trace $\mathbb{R}\Gamma(\overline{X}'_K, \omega_{\overline{X}'_K}) \to K$ [4, VII 3.4]. Puisque $\omega_{\overline{X}'_K}$ est à cohomologie cohérente, le morphisme $\mathbb{R}\Gamma(\overline{X}'_K, \omega_{\overline{X}'_K}) \to \mathbb{R}\Gamma(\overline{X}'^{\,\mathrm{an}}_K, \omega^{\mathrm{an}}_{\overline{X}'_K})$ est un isomorphisme. Comme $X'^{\,\mathrm{an}}_K$ est un voisinage strict de $]X[$ dans $\overline{X}'^{\,\mathrm{an}}_K$, on obtient un homomorphisme

$$H^n_{]X[}(X'^{\,\mathrm{an}}_K, \Omega^n_{X'^{\,\mathrm{an}}_K}) \xrightarrow{\ \sim\ } H^0_{]X[}(\overline{X}'^{\,\mathrm{an}}_K, \omega^{\mathrm{an}}_{\overline{X}'_K}) \longrightarrow H^0(\overline{X}'^{\,\mathrm{an}}_K, \omega^{\mathrm{an}}_{\overline{X}'_K}) \xrightarrow{\ \sim\ } H^0(\overline{X}'_K, \omega_{\overline{X}'_K}) \longrightarrow K.$$

On montre alors que le composé $H^n_{]X[}(X'^{\,\mathrm{an}}_K, \Omega^{n-1}_{X'^{\,\mathrm{an}}_K}) \to H^n_{]X[}(X'^{\,\mathrm{an}}_K, \Omega^n_{X'^{\,\mathrm{an}}_K}) \to K$ est nul, de sorte qu'on obtient une factorisation

$$\mathrm{Tr}_{X'}\ :\ H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X)\ =\ H^{2n}_{]X[}(X'^{\,\mathrm{an}}_K, \Omega^{\bullet}_{X'^{\,\mathrm{an}}_K}) \longrightarrow K.$$

Le morphisme $\mathrm{Tr}_{X'}$ ne dépend pas de la compactification $\overline{X}'$ et ne change pas si l'on remplace X par un ouvert sans changer X'. Nous verrons qu'il ne dépend en fait que de X.

1.3. Soient $i' : Z' \hookrightarrow X'$ une immersion fermée de codimension r entre W-schémas quasi-projectifs et lisses, de réduction $i : Z \hookrightarrow X$, $n = \dim X$. A partir du morphisme de Gysin algébrique associé à i', on obtient, en passant aux K-espaces analytiques rigides définis par Z' et X', et en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}$, un morphisme de Gysin en cohomologie rigide à supports propres $G_{Z'/X',c} : \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Z) \to \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X)[2r]$ (*cf.* [3] pour l'analogue sans condition de supports). Il résulte alors des constructions faites que l'on a $\mathrm{Tr}_{X'} \circ G_{Z'/X',c} = \mathrm{Tr}_{Z'}$ sur $H^{2(n-r)}_{\mathrm{c,rig}}(Z)$.

1.4. Soient X un k-schéma affine et lisse, et $f : Y \to X$ un morphisme fini étale de degré d. Si $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $B = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, si A', B' sont des W-algèbres lisses relevant A et B, et si $A^\dagger$, $B^\dagger$ sont leurs complétées faibles, il existe un homomorphisme fini étale $\varphi : A^\dagger \to B^\dagger$ relevant l'homomorphisme $A \to B$. Compte tenu de l'isomorphisme entre cohomologie rigide et cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine et lisse [3, 1.10], φ induit un morphisme trace Tr_f : $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(Y) \to \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(X)$ [3, 3.6]. D'autre part, on peut montrer que φ définit un morphisme fini étale entre un voisinage strict de $]Y[$ et un voisinage strict de $]X[$ (dans les espaces analytiques associés aux fibres génériques de $Y' = \operatorname{Spec} B'$ et $X' = \operatorname{Spec} A'$). On en déduit un morphisme trace $\mathrm{Tr}_{f,\mathrm{c}} : \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Y) \to \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X)$. Le morphisme $(1/d)\mathrm{Tr}_f$ (resp. $(1/d)\mathrm{Tr}_{f,\mathrm{c}}$) est alors un projecteur de $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(Y)$ sur $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(X)$ (resp. $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Y)$ sur $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X)$).

PROPOSITION 1.5. — *Soit X un k-schéma géométriquement irréductible de dimension n. Alors $H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X)$ est un K-espace vectoriel de dimension* 1.

On peut remplacer X par un ouvert non vide quelconque U, ou par une compactification de U, et faire une extension finie du corps de base. On peut alors se réduire au cas où X est affine et lisse, relevé en X' affine, lisse et possédant une section sur W. Appliquant 1.3 à celle-ci, on voit que $\dim_K H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X) \geq 1$. Lorsque X est un ouvert d'un k-schéma propre et lisse, il résulte du théorème de comparaison avec la cohomologie cristalline [3, 1.9] que l'énoncé est vrai pour X. Dans le cas général, le théorème de de Jong [5, th. 4.1] permet de supposer qu'il existe dans X un ouvert non vide U possédant un revêtement étale V, où V est un ouvert d'un k-schéma propre et lisse. D'après 1.4, $H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(U)$ s'injecte dans $H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(V)$, d'où la proposition.

PROPOSITION 1.6. — *Le morphisme $\mathrm{Tr}_{X'}$ défini en* 1.2 *est indépendant du choix de X'.*

On peut supposer que X est géométriquement connexe. Soient X'_1 et X'_2 deux W-schémas affines et lisses relevant X. Il existe un isomorphisme entre les complétés formels de X'_1 et X'_2, et on peut prolonger cet isomorphisme en un isomorphisme ε entre des voisinages stricts V_1 et V_2 de $]X[_{X'_1}$ et $]X[_{X'_2}$ dans $X'^{\mathrm{an}}_{1,K}$ et $X'^{\mathrm{an}}_{2,K}$. On peut d'autre part supposer qu'il existe une section $Y' = \operatorname{Spec} W \hookrightarrow X'_1$, donnant, grâce à ε, une section $Y' \hookrightarrow X'_2$. D'après 1.3 et 1.5, les morphismes de Gysin $G_{Y'/X'_i,\mathrm{c}}$ sont des inverses des morphismes $\mathrm{Tr}_{X'_i}$. Il suffit donc de montrer que $G_{Y'/X'_i,\mathrm{c}}$ est indépendant de i, ce qu'on déduit de la description explicite du morphisme de Gysin en coordonnées locales.

On notera désormais Tr_X le morphisme trace défini en 1.2.

1.7. On montre que le morphisme trace vérifie les propriétés suivantes :

(i) Si X est propre et lisse sur k, l'isomorphisme de comparaison $H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X) = H^{2n}_{\mathrm{rig}}(X) \simeq H^{2n}_{\mathrm{cris}}(X) \otimes K$ [3, th. 1.9] identifie les morphismes trace en cohomologie rigide et en cohomologie cristalline.

(ii) Sous les hypothèses de 1.4, le morphisme $\mathrm{Tr}_{f,\mathrm{c}} : H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(Y) \to H^{2n}_{\mathrm{c,rig}}(X)$ commute aux morphismes traces Tr_Y et Tr_X.

2. Dualité de Poincaré

En gardant les mêmes notations, on vérifie facilement le lemme :

LEMME 2.1. — *Soient E, F deux faisceaux de K-espaces vectoriels sur le tube $]\overline{X}[$ de $\overline{X}$ dans P. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}om_K(j^\dagger_X E, F) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\Gamma}_{]X[}(\mathcal{H}om_K(E, F)).$$

Par adjonction, on en déduit que tout accouplement $E^\bullet \otimes_K F^\bullet \to G^\bullet$ entre deux complexes de K-espaces vectoriels sur $]\overline{X}[$ définit un accouplement $j^\dagger_X E^\bullet \otimes_K \underline{\Gamma}_{]X[} F^\bullet \to \underline{\Gamma}_{]X[} G^\bullet$.

2.2. Soient $Z \subset X$ un sous-schéma fermé, $U = X \setminus Z$. Appliquant ce qui précède à une résolution injective $\mathcal{I}^\bullet$ de $\Omega^\bullet_{]\overline{X}[}$, à un accouplement $\mathcal{I}^\bullet \otimes_K \mathcal{I}^\bullet \to \mathcal{I}^\bullet$ prolongeant celui de $\Omega^\bullet_{]\overline{X}[}$, et aux deux ouverts X et U de $\overline{X}$, on obtient par passage à la cohomologie un accouplement

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X) \otimes_K \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X),$$

indépendant des choix faits. En composant avec le morphisme trace défini en 1.6, on en déduit le morphisme de dualité

(2.2.1) $\eta_{Z,X} \,:\, \mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Z)\check{}\,[-2n] \;:=\; \mathbb{R}\mathrm{Hom}_K(\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Z), K)[-2n]$,

noté η_X lorsque $Z = X$. Il s'insère dans un morphisme de triangles distingués

(2.2.2) $(\eta_{Z,X}, \eta_X, \eta_U) \,:\, \Delta_{\mathrm{rig}}(X, Z) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{Hom}_K(\Delta_{\mathrm{c,rig}}(X, Z), K)[-2n]$.

2.3. En utilisant 1.3, 1.4 et 1.7, on vérifie que les morphismes (2.2.1) satisfont les propriétés suivantes :

(i) Si X est propre et lisse, le morphisme η_X s'identifie (via [3, th. 1.9]) au morphisme de dualité de Poincaré en cohomologie cristalline.

(ii) Si $f : Y \to X$ est un morphisme fini étale entre k-schémas affines et lisses, les morphismes η_X, η_Y et les morphismes trace définis en 1.4 sont compatibles : on a $\eta_X \circ \mathrm{Tr}_f = (f^*)\check{} \circ \eta_Y$, $\eta_Y \circ f^* = (\mathrm{Tr}_{f,\mathrm{c}})\check{} \circ \eta_X$.

(iii) Sous les hypothèses de 1.3, les morphismes $\eta_{Z,X}$, η_Z sont compatibles au morphisme de Gysin : on a $\eta_{Z,X} \circ G_{Z'/X'} = \eta_Z$.

THÉORÈME 2.4 (Dualité de Poincaré). — *Soient X un k-schéma lisse, $Z \subset X$ un sous-schéma fermé. Le morphisme de dualité* (2.2.1) *est un isomorphisme.*

La démonstration s'effectue par une double récurrence analogue à celle qu'on utilise dans [3, 3.3] pour démontrer le théorème de finitude. On prouve alternativement :

$(\mathrm{a})_n$ Pour tout k-schéma lisse X tel que $\dim X \le n$, le morphisme η_X est un isomorphisme.

$(\mathrm{b})_n$ Pour tout k-schéma Z tel que $\dim Z \le n$, et toute immersion fermée $Z \hookrightarrow X$, où X est un k-schéma lisse, le morphisme $\eta_{Z,X}$ est un isomorphisme.

L'assertion $(\mathrm{a})_0$ est claire, et elle entraîne $(\mathrm{b})_0$ en appliquant la propriété 2.3 (iii). Pour prouver que $(\mathrm{b})_{n-1}$ entraîne $(\mathrm{a})_n$, on remarque d'abord que $(\mathrm{a})_n$ est vraie lorsque X est propre et lisse, d'après 2.3 (i). Grâce à $(\mathrm{b})_{n-1}$ et au morphisme de triangles (2.2.2), il en résulte que $(\mathrm{a})_n$ est vraie pour tout ouvert d'un k-schéma propre et lisse. Si X est un k-schéma lisse quelconque, le théorème de de Jong permet de supposer qu'il existe une altération génériquement étale $f : X' \to X$ telle que X' soit un ouvert d'un k-schéma projectif et lisse. Soit U un ouvert affine de X tel que $\dim(X \setminus U) < \dim(X)$, et que $U' = f^{-1}(U)$ soit fini étale sur U. D'après 1.4, les complexes $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(U)$ et $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(U)\check{}$ sont facteurs directs de $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(U')$ et $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(U')\check{}$, et, d'après 2.3 (ii), les morphismes η_U et $\eta_{U'}$ sont compatibles aux inclusions et aux projecteurs définis par la trace de f. Comme $\eta_{U'}$ est un isomorphisme, il en est de même de η_U, et donc de η_X en utilisant à nouveau $(\mathrm{b})_{n-1}$ et les triangles (2.2.2).

Pour prouver que $(\mathrm{a})_n$ et $(\mathrm{b})_{n-1}$ entraînent $(\mathrm{b})_n$, on vérifie que, grâce à $(\mathrm{b})_{n-1}$, on peut se ramener par excision au cas où Z est lisse, X affine, et l'immersion $Z \hookrightarrow X$ relevable en une immersion $Z' \hookrightarrow X'$ entre W-schémas affines et lisses. La propriété 2.3 (iii) permet alors de conclure grâce à $(\mathrm{a})_n$.

Remarque. — Dans la situation considérée en 1.3 et 2.3 (iii), le morphisme $G_{Z'/X'}$ (resp. $G_{Z'/X',\mathrm{c}}$) est dual du morphisme de fonctorialité $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X) \to \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(Z)$ (resp. $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(X) \to \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(Z)$), et est donc indépendant du relèvement $Z' \hookrightarrow X'$ (question laissée ouverte dans [3]).

3. Formule de Künneth

3.1. Pour $i \in \{1, 2\}$, soient X_i un k-schéma, $Z_i \subset X_i$ un sous-schéma fermé, $\overline{X}_i$ une compactification de X_i, $\overline{X}_i \hookrightarrow P_i$ une immersion fermée de $\overline{X}_i$ dans un W-schéma formel lisse au voisinage de X_i, $p_i :]\overline{X}_1 \times \overline{X}_2[\to]\overline{X}_i[$ le morphisme induit par la projection, E_i un faisceau de

K-espaces vectoriels sur $]\overline{X}_i[$. Il existe des accouplements canoniques

$$p_1^{-1}(\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[}(E_1)) \otimes_K p_2^{-1}(\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_2[}(E_2)) \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1\times Z_2[}(p_1^{-1}(E_1) \otimes_K p_2^{-1}(E_2)),$$

$$p_1^{-1}(\underline{\Gamma}_{]X_1[}(E_1)) \otimes_K p_2^{-1}(\underline{\Gamma}_{]X_2[}(E_2)) \longrightarrow \underline{\Gamma}_{]X_1\times X_2[}(p_1^{-1}(E_1) \otimes_K p_2^{-1}(E_2)).$$

On en déduit des morphismes de Künneth, compatibles aux morphismes de fonctorialité :

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z_1,\mathrm{rig}}(X_1) \otimes_K \mathbb{R}\Gamma_{Z_2,\mathrm{rig}}(X_2) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z_1\times Z_2,\mathrm{rig}}(X_1 \times X_2), \tag{3.1.1}$$

$$\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X_1) \otimes_K \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X_2) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,rig}}(X_1 \times X_2). \tag{3.1.2}$$

Pour X_2 fixé, ces morphismes s'insèrent dans des morphismes de triangles distingués

$$\Delta(X_1, Z_1) \otimes_K \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(X_2) \longrightarrow \Delta(X_1 \times X_2, Z_1 \times X_2), \tag{3.1.3}$$

$$\Delta_{\mathrm{c}}(X_1, Z_1) \otimes_K \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{c,\,rig}}(X_2) \longrightarrow \Delta_{\mathrm{c}}(X_1 \times X_2, Z_1 \times X_2). \tag{3.1.4}$$

THÉORÈME 3.2. — (i) *Si X_1 et X_2 sont lisses sur k, le morphisme* (3.1.1) *est un isomorphisme.*
(ii) *Quels que soient X_1 et X_2, le morphisme* (3.1.2) *est un isomorphisme.*

3.3. Outre (3.1.3) et (3.1.4), la démonstration utilise les propriétés suivantes :
(i) Si, pour $i = 1, 2$, X_i est propre et lisse sur k, et $Z_i = X_i$, les morphismes (3.1.1) et (3.1.2) s'identifient au morphisme de Künneth en cohomologie cristalline.
(ii) Si, pour $i = 1, 2$, X_i est affine et lisse sur k, $f_i : Y_i \to X_i$ est un revêtement étale, et $Z_i = X_i$, les morphismes (3.1.1) (resp. (3.1.2)) relatifs à X_1 et X_2 d'une part, Y_1 et Y_2 d'autre part, commutent aux morphismes $\mathrm{Tr}_{f_1} \otimes \mathrm{Tr}_{f_2}$ et $\mathrm{Tr}_{f_1\times f_2}$ (resp. $\mathrm{Tr}_{f_1,\mathrm{c}} \otimes \mathrm{Tr}_{f_2,\mathrm{c}}$ et $\mathrm{Tr}_{f_1\times f_2,\mathrm{c}}$) définis en 1.4.
(iii) Si, pour $i = 1, 2$, $Z'_i \hookrightarrow X'_i$ est une immersion fermée entre W-schémas quasi-projectifs et lisses, de réduction $Z_i \hookrightarrow X_i$, les morphismes (3.1.1) relatifs à Z_1 et Z_2 d'une part, X_1 et X_2 d'autre part, commutent aux morphismes de Gysin $G_{Z'_1/X'_1} \otimes G_{Z'_2/X'_2}$ et $G_{Z'_1\times Z'_2/X'_1\times X'_2}$.

3.4. Une fois ces propriétés établies, la démonstration de 3.2 (i) s'effectue de manière analogue à celle de 2.4, en prouvant par une double récurrence les assertions suivantes :
$(\mathrm{a})_n$ Pour tout couple (X_1, X_2) de k-schémas lisses tel que $\dim X_1 + \dim X_2 \leq n$, le morphisme $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(X_1) \otimes \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(X_2) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}(X_1 \times X_2)$ est un isomorphisme.
$(\mathrm{b})_n$ Pour tout couple de k-schémas lisses (X_1, X_2), et tout couple de sous-schémas fermés (Z_1, Z_2) de X_1 et X_2 tels que $\dim Z_1 + \dim Z_2 \leq n$, le morphisme (3.1.1) est un isomorphisme.
La démonstration de 3.2 (ii) se fait par une récurrence simple du même type.

Remarque. — La même méthode permet de prouver que la cohomologie rigide commute à une extension arbitraire du corps de base.

Références bibliographiques

[1] **Berthelot P., 1986.** Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p, Journées d'analyse p-adique (1982), in Introduction aux cohomologies p-adiques, *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire **23**, p. 7-32.

[2] **Berthelot P., 1996.** Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, Première partie (version provisoire 1991), *Prépublication IRMAR*, 96-03, Université de Rennes (1996).

[3] **Berthelot P., 1997.** Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, *Inventiones Math* **128**, p.329-377.

[4] **Hartshorne R., 1966.** Residues and Duality, Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag.

[5] **De Jong A.J., 1996.** Smoothness, semi-stability and alterations, *Publ. Math. IHES* **83**, p. 51-93.