Introduction à la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules

Pierre BERTHELOT*
(IRMAR, Université de Rennes)

Introduction 2

1. Calcul différentiel modulo p^n 7

1.1. Enveloppes à puissances divisées 7
1.2. Faisceaux d'opérateurs différentiels 11
1.3. Stratifications et costratifications 14

2. Opérations cohomologiques modulo p^n 17

2.1. Descente par Frobenius 18
2.2. Image inverse extraordinaire 22
2.3. Produit tensoriel externe 25
2.4. Image directe 26
2.5. Dualité 28

3. Passage aux schémas formels 32

3.1. Complétion des faisceaux d'opérateurs différentiels 32
3.2. Complexes quasi-cohérents 34
3.3. Complexes à isogénie près 36
3.4. Produit tensoriel et image inverse extraordinaire 37
3.5. Image directe et dualité 41

4. Passage à la limite sur le niveau 43

4.1. Le faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ 43
4.2. Passage à la limite inductive et localisation dans les catégories dérivées 46
4.3. Opérations cohomologiques sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ 48
4.4. Cohérence des faisceaux de fonctions à singularités surconvergentes 53
4.5. Transformation de Fourier 59

5. Variété caractéristique et holonomie 62

5.1. F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents 62
5.2. Variété caractéristique 65
5.3. Inégalité de Bernstein 67
5.4. Multiplicités et formule de l'indice 73

Bibliographie 75

---

* Pendant la préparation de cet article, l'auteur a bénéficié du soutien du programme TMR de la Communauté Européenne, dans le cadre du réseau *Arithmetic Algebraic Geometry* (Contrat n° ERBFMRXCT 960006).

Introduction

Ce texte est un résumé du cours fait au Centre Émile Borel durant le semestre « Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques », au printemps 1997. Son but est d'expliquer comment s'étendent les résultats de base de la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules, *i.e.* des modules sur les anneaux d'opérateurs différentiels, lorsqu'on se place sur un schéma X lisse sur un schéma de base S qui n'est pas nécessairement de caractéristique 0. Nous nous limiterons ici aux grandes lignes de la théorie, en donnant les principaux énoncés, mais peu d'indications sur les démonstrations. Pour celles-ci, le lecteur se reportera notamment à la série d'articles [5], [8], [10], [11], auxquels ce résumé vise aussi à servir d'introduction générale.

L'objectif de cette théorie « arithmétique » des $\mathscr{D}$-modules est de développer les outils nécessaires pour étudier au-delà de la caractéristique 0 la cohomologie de de Rham, et les cohomologies qui en dérivent : cohomologies cristalline, syntomique, rigide, …, et notamment pour traiter les « problèmes de coefficients » concernant ces cohomologies. Dans cette perspective, le cas où le schéma de base est un corps de caractéristique p, ou un quotient d'anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique, présente évidemment un intérêt particulier. Il s'agit alors de cohomologies dites « p-adiques », par opposition à la cohomologie étale ℓ-adique pour $\ell \neq p$, et, comme le soulignait Grothendieck dès le début [26], l'aspect le plus important de ces cohomologies est de rendre compte des phénomènes de p-torsion. Cette importance est aujourd'hui renforcée par le développement des théorèmes de comparaison avec la cohomologie étale p-adique, pour les schémas sur les corps locaux, dans la mesure où cette dernière est elle même par construction une limite de cohomologies de p-torsion. C'est pourquoi nous nous intéresserons d'abord aux résultats valables lorsque S est un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-schéma, puis ensuite à ceux qu'on peut en déduire concernant les modules sur certains faisceaux d'opérateurs différentiels sur un schéma formel p-adique lisse $\mathscr{X}$. Précisons néanmoins que nous nous limiterons dans le présent résumé à la théorie des $\mathscr{D}$-modules proprement dite, les applications cohomologiques elles-mêmes devant faire l'objet d'un article ultérieur.

La première étape, à laquelle est consacrée le chapitre 1, est donc de construire les faisceaux d'opérateurs différentiels qui apparaissent dans l'étude de la cohomologie de de Rham et de la cohomologie cristalline lorsque la base S n'est pas de caractéristique 0, faisceaux qui diffèrent alors du faisceau $\mathscr{D}_X \subset \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X)$ des opérateurs différentiels (relativement à S) au sens classique. En effet, bien que, sans aucune hypothèse sur S, le faisceau $\mathscr{D}_X$ soit défini pour tout morphisme lisse $f : X \to S$ (*cf.* [EGA IV, 16.8]), la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ est en général plus faible que celle d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche, lorsque S n'est pas de caractéristique 0. De plus, un exemple classique dû à Grothendieck [26] montre que la connexion de Gauss-Manin sur la cohomologie de de Rham relative n'est pas induite en général par une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche.

La théorie des enveloppes à puissances divisées permet par contre de modifier la construction de [EGA IV, 16.8] et fournit, sur une base S quelconque, un autre faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(0)}$ sur X, engendré librement par les dérivations, et tel que la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathscr{O}_X$-module soit équivalente à celle d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche. Pour les $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules, on peut définir en toute généralité les opérations de base de la théorie des $\mathscr{D}$-modules : image inverse exceptionelle $f^!$, produit tensoriel externe $\boxtimes$, image directe f_+, dual $\mathbb{D}$ (précisons que nos notations sont celles de Bernstein et Borel [17]). De plus, en remplaçant la notion de complexe borné à cohomologie cohérente par celle de complexe parfait [SGA 6], qui en est la généralisation naturelle lorsque S n'et pas régulier, nous montrons que ceux des théorèmes de stabilité de la théorie complexe qui ne font appel qu'à la notion de cohérence restent valables en toute généralité pour les $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules : la perfection est stable par $f^!$ pour f lisse, $\boxtimes$, f_+ pour f propre, $\mathbb{D}$.

Par contre, hors de la caractéristique 0, il n'existe pas au niveau des $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules de notion analogue à l'holonomie dans le cas complexe, qui permette d'assurer la stabilité par $f^!$ pour f quelconque. Cette situation est liée au fait que, hors de la caractéristique 0, la cohomologie de de Rham et la cohomologie cristalline diffèrent de la cohomologie étale ou de la cohomologie transcendante sur un point fondamental : ce ne sont pas des théories de nature topologique. En particulier, si S est de caractéristique p, et si $F : X \to X'$ est le morphisme de Frobenius relatif, l'homomorphisme F^* n'est pas un isomorphisme en cohomologie de de Rham ou cristalline — ce qui est du reste à l'origine de nombre d'applications parmi les plus importantes de ces cohomologies ! De même, l'image inverse d'un $\mathscr{D}_{X'}^{(0)}$-module cohérent $\mathscr{E}'$ n'est pas un $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module cohérent, sauf si $\mathscr{E}'$ est cohérent sur $\mathscr{O}_{X'}$, ce qui est par ailleurs trop restrictif pour assurer la stabilité par image directe.

Par contre, on s'aperçoit qu'il existe un nouveau faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(1)}$ agissant naturellement sur $F^*\mathscr{E}$, et on montre de plus que F^* est alors une équivalence de catégories entre $\mathscr{D}_{X'}^{(0)}$-modules et $\mathscr{D}_X^{(1)}$-modules [8] : ce théorème de descente apparaît comme une généralisation du théorème classique de Cartier établissant une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{O}_{X'}$-modules et celle des $\mathscr{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle [34]. Ce procédé s'itère, et amène à introduire, pour tout schéma lisse sur une base où les entiers premiers à p sont inversibles, un système inductif de faisceaux d'opérateurs différentiels $(\mathscr{D}_X^{(m)})_{m\geq 0}$ indexé par $\mathbb{N}$, dont la limite est le faisceau usuel $\mathscr{D}_X$, et à étudier plus généralement les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules [5].

Après quelques rappels sur les enveloppes à puissances divisées, généralisées par l'introduction de la notion de structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m, pour un entier $m \geq 0$ quelconque, le chapitre 1 présente la construction et les premières propriétés de base de ces faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Le faisceau $\mathscr{D}_X^{(m)}$ est obtenu en dualisant les enveloppes à puissances divisées partielles nilpotentes de l'idéal diagonal de X dans $X \times_S X$, à la manière de EGA IV, et est appelé faisceau des opérateurs différentiels de niveau m. Ce chapitre s'achève avec l'interprétation de la structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche (resp. à droite) en termes de stratifications (resp. co-stratifications) au sens de Grothendieck. Celle-ci est essentielle pour la théorie des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules, non seulement pour mettre en évidence la nature cristalline des constructions (ce que nous ne discuterons pas ici, *cf.* [8] et [10]), mais aussi dans bien des cas pour munir un module donné d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module. En effet, les faisceaux $\mathscr{D}_X^{(m)}$ pour $m \geq 1$ ne sont pas engendrés par les seules dérivations, mais par les opérateurs d'ordre $\leq p^m$, et on ne dispose pas toujours de formules explicites donnant l'action de ces opérateurs.

Le chapitre 2, consacré aux opérations cohomologiques dans le cadre algébrique (et tout particulièrement modulo p^n), commence avec le théorème de descente par Frobenius mentionné plus haut. Ce théorème s'énonce en fait sur n'importe quel schéma S annulé par une puissance de p, muni d'un idéal quasi-cohérent $\mathfrak{a}$ contenant p et possédant une structure d'idéal à puissances divisées partielles de niveau m. Il est alors valable pour tout morphisme de S-schémas lisses $F : X \to X'$ dont la réduction modulo $\mathfrak{a}$ est une puissance $F^s_{X_0/S_0}$ du morphisme de Frobenius relatif de la réduction de X, et il fournit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules et celle des $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules [8]. Le reste du chapitre est consacré aux propriétés de base des quatre opérations fondamentales, et notamment au théorème de finitude pour les morphismes propres [10], et au théorème de dualité relative de Virrion ([49], [51]). Parmi ces résultats, il convient de souligner tout particulièrement la complète compatibilité du foncteur F^* à toutes les opérations (ce qui, dans les cas de f_+ et $\mathbb{D}$, repose sur le théorème de descente). Nous en verrons plus loin les conséquences.

Certaines propriétés sont par contre en défaut tant que l'on reste sur une base annulée par une puissance p^n fixée. On constate deux types de problèmes :

a) Certains énoncés ne sont vrais qu'à isogénie près. Par exemple, pour $m \geq 1$, le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_X \otimes \mathscr{D}^{(m)}_X$ n'est pas une résolution de ω_X, mais les faisceaux de cohomologie du cône sont annulés par une puissance fixe de p, indépendante de n.

b) Certains énoncés nécessitent en plus de changer de niveau dans le système inductif des faisceaux $\mathscr{D}^{(m)}_X$. C'est le cas par exemple de l'isomorphisme $\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} u^! u_+$ lorsque u est une immersion fermée.

On est ainsi conduit à étudier les théories obtenues par passage à la limite à partir de la théorie algébrique du chapitre 2. Soient $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique, de corps résiduel k. Le chapitre 3 est consacré au passage à la limite projective sur un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse $\mathscr{X}$, de fibre spéciale X. On obtient ainsi pour tout m un faisceau d'opérateurs différentiels d'ordre infini $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, p-adiquement complet, qui reste un faisceau d'anneaux cohérent à sections nœthériennes. Lorsqu'on veut étendre les opérations cohomologiques aux complexes de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules, il apparaît alors des difficultés techniques liées aux complétions. Pour obtenir les formules voulues lorsqu'on compose plusieurs foncteurs qui ne préservent pas nécessairement la cohérence (notamment la transitivité des images inverses et directes), on est amené à intégrer la complétion à la définition de ces foncteurs, et donc aussi à imposer une condition de complétion aux complexes avec lesquels on travaille. Nous appelons *quasi-cohérents* les complexes $\mathscr{E}$ de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ tels que le complexe $\mathscr{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathscr{E}$ soit à cohomologie quasi-cohérente, et que $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathscr{E})$. Ces conditions sont vérifiées par les complexes bornés à cohomologie cohérente. On peut alors étendre à ces complexes les opérations cohomologiques étudiées précédemment, et en déduire par passage à la limite les propriétés voulues, en s'appuyant sur les méthodes de l'Appendice B de [12] sur la finitude de $\mathbb{R}\varprojlim$. On notera que, pour traiter les propriétés qui nécessitent de tensoriser par $\mathbb{Q}$, nous ne travaillons pas directement dans la catégorie dérivée des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules, où la condition de quasi-cohérence précédente n'aurait plus de sens, mais dans la catégorie triangulée des complexes quasi-cohérents de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules à isogénie près. Celle-ci contient une sous-catégorie pleine équivalente à la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$ [9].

Le second passage à la limite, qui fait l'objet du chapitre 4, consiste à passer à la limite inductive sur le niveau m. On obtient ainsi un faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{\dagger}$, qui est un sous-faisceau du complété p-adique $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}$ du faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}$ des opérateurs différentiels usuels, formé des opérateurs dont les coefficients vérifient une condition de décroissance de style Monsky-Washnitzer [44]. Ce faisceau n'a pas d'aussi bonnes propriétés de finitude que les faisceaux $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$, mais le faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$, bien que n'étant pas nœthérien, est cohérent, grâce à un théorème de platitude des homomorphismes $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \to \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m')}$ pour $m' \geq m$ [5]. Il est également de dimension homologique finie [8]. Comme précédemment, il y a lieu de tenir compte de la topologie naturelle de $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ dans la définition des opérations cohomologiques sur les $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-modules. Pour cela, nous partons de la catégorie dérivée des systèmes inductifs de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules. Par une localisation appropriée, nous construisons à partir de celle-ci une catégorie $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, dans laquelle on peut définir une sous-catégorie pleine formée de complexes « quasi-cohérents ». Sur cette sous-catégorie, qui contient une sous-catégorie pleine équivalente à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger})$ [9], on peut alors étendre les opérations cohomologiques précédentes et montrer que leurs propriétés sont préservées. On obtient ainsi entre autres la préservation de la cohérence par f_+ lorsque f est propre [10], et le théorème de dualité relative [49].

C'est au niveau de la théorie des $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-modules que s'effectue le lien avec la cohomologie rigide [3]. Si Z est un diviseur de X, et $j : \mathscr{U} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire de Z, on introduit le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ des fonctions à singularités surconvergentes le long de Z : c'est le sous-faisceau de $j_*\mathscr{O}_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$ dont les sections sur un ouvert affine où Z est défini par la réduction d'une section t de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ s'écrivent sous la forme $\sum_{i\geq 0} a_i/t^i$, où les a_i sont des sections de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ vérifiant la condition de décroissance de Monsky-Washnitzer. Ce faisceau possède une structure naturelle de $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module. Lorsque $\mathscr{X}$ est propre, la cohomologie rigide de $\mathscr{U}$ est par construction la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$. On voit donc que, grâce au théorème de finitude pour f_+ dans le cas propre, la cohérence de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ en tant que $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module entraîne la finitude de cette cohomologie. Ce théorème de cohérence, prouvé dans [6], était l'un des objectifs principaux de la théorie des $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-modules. Nous indiquons ici les principales idées de sa démonstration, basée sur les théorèmes précédents sur les opérations cohomologiques, et sur le théorème de de Jong [33].

Enfin, nous achevons ce chapitre consacré à la cohérence sur $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ par une rapide présentation des travaux de Huyghe sur la transformation de Fourier ([28], [29], [30]), qui fournissent une interprétation de la transformation de Fourier naïve sur la « complétée faible » de l'algèbre de Weyl au moyen des opérations cohomologiques définies ici. Cette interprétation est entièrement parallèle à celles que donnent Malgrange pour les $\mathscr{D}_X$-modules en caractéristique 0 [41] et Katz-Laumon pour les faisceaux ℓ-adiques. C'est aussi une illustration de la façon dont, sur un schéma formel propre, on peut utiliser les algèbres de la forme $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$, et les faisceaux d'opérateurs à singularités surconvergentes $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^{\dagger}Z)$ qui leur sont associés, pour traiter les opérations cohomologiques sur les variétés ouvertes.

Pour obtenir un théorème de finitude pour $f^!$ lorsque f est une immersion fermée (ce qui entraînerait le cas général), il faut néanmoins disposer d'une condition de finitude plus forte que la cohérence. En caractéristique 0, c'est la condition d'holonomie [37]. Au chapitre 5, nous dégageons une condition analogue pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, c'est à dire les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathscr{E}$ munis d'un isomorphisme $\Phi : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$. Les résultats des chapitres précédents entraînent que la structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module est stable par toutes les opérations cohomologiques, de sorte que tout $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module d'origine géométrique peut être muni d'une structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module. Une propriété essentielle des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, qui résulte de la descente par Frobenius, est l'existence pour un tel module $\mathscr{E}$ d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}^{(0)}$ canonique tel que $\mathscr{E} \simeq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)}$, dépendant fonctoriellement de $\mathscr{E}$ [8]. Nous expliquons comment, en passant par un modèle entier de celui-ci et en réduisant modulo p, on peut construire une variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathscr{E})$ dans le fibré cotangent T^*X de la fibre spéciale X, et même un cycle caractéristique $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E})$. Grâce à un analogue du théorème de Kashiwara pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans un sous-schéma fermé lisse, on montre que cette variété caractéristique vérifie l'inégalité de Bernstein $\dim(\mathrm{Car}(\mathscr{E})) \geq \dim(X)$ [11]. Cela justifie que l'on définisse comme en caractéristique 0 la notion de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module holonome par la condition $\dim(\mathrm{Car}(\mathscr{E})) = \dim(X)$. Beaucoup de questions sont encore ouvertes concernant cette notion d'holonomie, et nous en discutons quelques unes en 5.3.6. Néanmoins, un théorème de Virrion [52] montre que cette condition géométrique équivaut à la caractérisation homologique habituelle par la nullité des $\mathscr{H}^i(\mathbb{D}(\mathscr{E}))$ pour $i \neq 0$, et que l'on dispose ainsi d'une bonne notion de module dual pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes. De plus, nous montrons pour finir que le cycle caractéristique que nous construisons donne naissance dans le cas projectif à une formule pour la caractéristique d'Euler-Poincaré analogue à celle de Dubson-Kashiwara ([19], [39]).

Remerciements

C'est un plaisir de remercier pour leur participation les auditeurs du cours fait au Centre Émile Borel, et plus particulièrement O. Gabber, dont les nombreuses remarques et suggestions m'ont permis d'améliorer certains des résultats présentés ici. Je remercie aussi le personnel du Centre Émile Borel, et notamment son directeur J. Œsterlé, pour les excellentes conditions de travail qui ont permis le succès de ce semestre.

Notations et conventions générales

1) Ce texte étant de nature introductive, nous ferons ici de manière systématique quelques hypothèses mineures qui permettront de simplifier l'exposé, en renvoyant le lecteur intéressé par certains énoncés dans une situation plus générale aux articles [5], [8], [9], [10] et [11] :

(i) Nous supposerons que tous les schémas et schémas formels considérés sont quasi-compacts et quasi-séparés (de sorte qu'il en sera de même des morphismes entre schémas, d'après [EGA IV 1.2]). Grâce à [SGA 4, VI 5], cela assure que la cohomologie et les images directes commutent aux limites inductives filtrantes.

(ii) Lorsque nous considèrerons un morphisme lisse entre deux schémas ou schémas formels, nous supposerons qu'il est de dimension relative constante. Cela permet d'appliquer dans les catégories dérivées l'opérateur de translation par la dimension relative.

2) Soit $\mathscr{D}$ un faisceau d'anneaux. Sauf mention explicite du contraire, les $\mathscr{D}$-modules considérés seront des $\mathscr{D}$-modules à gauche.

3) Soit $\mathscr{D}$ un faisceau d'anneaux sur un schéma ou un schéma formel. Nous n'utiliserons ici les catégories $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D})$ que lorsque $\mathscr{D}$ est un faisceau d'anneaux cohérent. Dans ce cas, il s'git des sous-catégories pleines de $D^-(\mathscr{D})$ et $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D})$ dont les objets sont les complexes à cohomologie $\mathscr{D}$-cohérente.

Nous aurons aussi à utiliser les sous-catégories $D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D})$ et $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D})$. Rappelons que $D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D})$ est la sous-catégorie pleine de $D(\mathscr{D})$ dont les objets sont les complexes de Tor-dimension finie (voir [27, II 4] ou [SGA 6, I 5.2]), c'est à dire quasi-isomorphes à un complexe à termes plats, nuls hors d'un intervalle borné ; en particulier, $D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D})$ est une sous-catégorie pleine de $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D})$. Quant à la catégorie $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D})$, c'est la sous-catégorie pleine de $D(\mathscr{D})$ dont les objets sont les complexes parfaits [SGA 6, I 4.7], c'est à dire localement isomorphes à un complexe à termes localement projectifs de rang fini, nuls hors d'un intervalle borné. Lorsque $\mathscr{D}$ est cohérent, il revient au même d'après [SGA 6, I, 3.5 et 5.8.1] de demander qu'un tel complexe soit localement de Tor-dimension finie et à cohomologie cohérente. Compte tenu de l'hypothèse de quasi-compacité faite plus haut, nous aurons donc ici $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}) \cap D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D})$.

4) Pour tout faisceau abélien E, nous noterons $E_{\mathbb{Q}} := E \otimes \mathbb{Q}$.

1. Calcul différentiel modulo p^n

Nous rappellerons d'abord quelques notions plus ou moins classiques qui servent de point de départ au calcul différentiel sur un schéma de base quelconque : puissances divisées, algèbres d'opérateurs différentiels, stratifications. Lorsque le schéma de base est annulé par une puissance d'un nombre premier p, ces notions admettent des variantes dites « de niveau supérieur », qui sont à la base de la théorie présentée ici : comme nous le verrons plus loin, celles-ci sont directement liées à l'action de l'endomorphisme de Frobenius de la réduction modulo p.

1.1. Enveloppes à puissances divisées

Hors de la caractéristique nulle, le calcul différentiel repose de manière essentielle sur la notion d'idéal à puissances divisées, qui permet de donner un sens à la formule de Taylor pour une connexion intégrable.

1.1.1. Soient A un anneau commutatif, $I \subset A$ un idéal. Rappelons (*cf.* [2] ou [12]) qu'une *structure d'idéal à puissances divisées* (ou *PD-structure*) *sur* I est une famille $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$ d'applications de I dans A qui vérifient les conditions suivantes :

(i) $\forall\, x \in I$, $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_1(x) = x$, $\gamma_n(x) \in I$ pour $n \geq 1$;

(ii) $\forall\, x, y \in I$, $\forall\, n \geq 0$, $\gamma_n(x + y) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$;

(iii) $\forall\, x \in I$, $\forall\, a \in A$, $\forall\, n \geq 0$, $\gamma_n(ax) = a^n \gamma_n(x)$;

(iv) $\forall\, x \in I$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $\gamma_m(x)\gamma_n(x) = \binom{m+n}{n} \gamma_{m+n}(x)$;

(v) $\forall\, x \in I$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \dfrac{nm!}{(m!)^n n!} \gamma_{nm}(x)$.

On dit que (I, γ) est un *PD-idéal* de A. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur γ, on adopte en général la notation $x^{[n]}$ pour $\gamma_n(x)$. La condition (iv) entraîne que $n!\gamma_n(x) = x^n$. S'il existe un entier $n \geq 2$ tel que A soit une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-algèbre, I est donc un nilidéal.

Si (A, I, γ) et (A', I', γ') sont des anneaux munis de PD-idéaux, un *PD-morphisme* $\varphi : (A, I, \gamma) \to (A', I', \gamma')$ est un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to A'$ tel que $\varphi(I) \subset I'$, et que, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(\gamma_n(x)) = \gamma'_n(\varphi(x))$. Si $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ est un anneau muni d'un PD-idéal, et $\varphi : R \to A$ un homomorphisme d'anneaux, on dit que la PD-structure *α s'étend à A* s'il existe sur $\mathfrak{a}A$ une PD-structure $\bar{\alpha}$ (nécessairement unique) telle que $(R, \mathfrak{a}, \alpha) \to (A, \mathfrak{a}A, \bar{\alpha})$ soit un PD-morphisme. Si $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ et (A, I, γ) sont des anneaux munis de PD-idéaux, et $\varphi : R \to A$ un homomorphisme d'anneaux, on dit que la PD-structure γ est *compatible à* α si α s'étend à A, et s'il existe sur $\mathfrak{a}A + I$ une PD-structure prolongeant $\bar{\alpha}$ et γ.

Soient p un nombre premier, v_p la valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$ (normalisée par $v_p(p) = 1$), $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à l'idéal premier (p). Pour tout $n \geq 1$, $v_p(p^n/n!) \geq 1$, de sorte qu'il existe sur l'idéal $p\mathbb{Z}_{(p)}$ une PD-structure naturelle. Cette structure s'étend à toute $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Par contre, une PD-structure sur un idéal d'une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre n'est pas automatiquement compatible à celle de (p).

Soient $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ un anneau muni d'un PD-idéal, A une R-algèbre, $I \subset A$ un idéal. Il existe une R-algèbre $P_\alpha(I)$, munie d'un PD-idéal $\bar{I}$ dont la PD-structure (généralement notée $x \longmapsto x^{[n]}$) est compatible à α, et un R-homomorphisme $\varphi : A \to P_\alpha(I)$ tel que $\varphi(I) \subset \bar{I}$, qui soient universels pour les R-homomorphismes $(A, I) \to (B, J, \delta)$ envoyant I dans un PD-idéal (J, δ) dont la PD-structure est compatible à α (*cf.* [2, I 2.4.2], ou [12, 3.19]). La A-algèbre $P_\alpha(I)$, munie de son PD-idéal canonique, est appelée *enveloppe à puissances divisées* (*compatibles à* α), ou *PD-enveloppe, de* I ; lorsqu'aucune confusion n'en résulte, nous la noterons simplement $P(I)$.

1.1.2. Si l'on fixe un nombre premier p, l'étude de l'action de Frobenius amène à généraliser la notion d'idéal à puissances divisées. Nous supposons ici que les anneaux considérés sont des $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbres, et que toutes les PD-structures sont compatibles à la PD-structure canonique de (p). Pour tout entier $m \geq 0$, et tout idéal I d'un anneau A, nous noterons $I^{(p^m)}$ l'idéal engendré par les puissances x^{p^m} pour $x \in I$.

Soient alors $m \in \mathbb{N}$ un entier positif fixé, A une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, $I \subset A$ un idéal. Une *PD-structure partielle de niveau* m (ou *m-PD-structure*) sur I est la donnée d'un PD-idéal

$(J, \gamma) \subset I$ tel que

$$I^{(p^m)} + pI \subset J.$$

Nous dirons que (I, J, γ) est un *m-PD-idéal*. La donnée d'une m-PD-structure permet de définir sur I des opérations de *puissances divisées partielles* vérifiant des propriétés analogues aux relations (i) à (v) de 1.1.1 (*cf.* [5, 1.3.6]) : si $n \in \mathbb{N}$, on écrit $n = p^m q + r$, avec $0 \leq r < p^m$, et on pose

$$x^{\{n\}_{(m)}} = x^r \gamma_q(x^{p^m}).$$

En particulier, ces opérations vérifient les relations $q!\, x^{\{n\}_{(m)}} = x^n$. Si aucune confusion n'en résulte, nous noterons simplement $x^{\{n\}}$ pour $x^{\{n\}_{(m)}}$.

Si (A, I, γ) et (A', I', γ') sont deux anneaux munis de m-PD-idéaux, un m-PD-morphisme $\varphi : (A, I, J, \gamma) \to (A', I', J', \gamma')$ est un PD-morphisme $\varphi : (A, J, \gamma) \to (A', J', \gamma')$ tel que $\varphi(I) \subset I'$. Si I est un idéal quelconque d'une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre A, il existe une A-algèbre $P_{(m)}(I)$, et un m-PD-idéal $(\bar{I}, \tilde{I}, {}^{[-]}) \subset P_{(m)}(I)$ tel que $IP_{(m)}(I) \subset \bar{I}$, qui soient universels pour les homomorphismes de A dans un anneau A' envoyant I dans un m-PD-idéal (I', J', γ') de A'. L'algèbre $P_{(m)}(I)$, munie de son m-PD-idéal canonique $(\bar{I}, \tilde{I}, {}^{[-]})$, est appelée *enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m* (ou *m-PD-enveloppe*) *de* (A, I). Pour la construire, on procède la manière suivante (voir Be1, 1.4.1], où la construction est faite avec une condition de compatibilité plus générale) : on définit d'abord $P_{(m)}(I)$ comme étant l'enveloppe à puissances divisées usuelle $P(I^{(p^m)})$ (compatible aux puissances divisées canoniques de (p)) ; on prend alors pour $\tilde{I}$ le PD-idéal de $P(I^{(p^m)})$ engendré par $I^{(p^m)} + pI$, et pour $\bar{I}$ l'idéal $IP(I^{(p^m)}) + \tilde{I}$.

Pour $m = 0$, les définitions et constructions faites ici redonnent celles de 1.1.1. D'autre part, il résulte immédiatement de la définition qu'une m-PD-structure sur un idéal I peut aussi être vue comme une m'-PD-structure pour tout $m' \geq m$. La propriété universelle des enveloppes à puissances divisées entraîne donc que, pour m variable, celles-ci forment un système projectif

$$\ldots \longrightarrow P_{(m+1)}(I) \longrightarrow P_{(m)}(I) \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_{(0)}(I) = P(I).$$

1.1.3. Soit I un idéal d'un anneau A muni d'une m-PD-structure (J, γ). Cette structure permet de définir sur A une filtration d'anneau décroissante $(I^{\{n\}})_{n \geq 0}$, moins fine que la filtration I-adique et appelée *filtration m-PD-adique* : elle peut être caractérisée comme étant la filtration d'anneau la plus fine vérifiant les conditions suivantes :

(i) $I^{\{0\}} = A$, $I^{\{1\}} = I$;

(ii) Quels que soient $n \geq 1$, $x \in I^{\{n\}}$ et $k \geq 0$, $x^{\{k\}} \in I^{\{kn\}}$;

(iii) Quel que soit $n \geq 0$, $(J + pA) \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de $J + pA$.

Nous renvoyons à l'appendice de [8] pour les détails de sa construction dans le cas général ; lorsque $m = 0$, on note habituellement $I^{[n]}$ au lieu de $I^{\{n\}}$, et $I^{[n]}$ est alors l'idéal de A engendré par les produits $\gamma_{n_1}(x_1) \ldots \gamma_{n_k}(x_k)$, où les x_i sont dans I, et $\sum_i n_i \geq n$.

La condition (iii) entraîne que $J \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de J, de sorte qu'il munit

$I^{\{n\}}$ d'une m-PD-structure. De même, la PD-structure de $J + pA$ passe au quotient modulo $I^{\{n\}}$; le PD-idéal $J/(J \cap I^{\{n\}})$ munit alors l'idéal $I/I^{\{n\}} \subset A/I^{\{n\}}$ d'une m-PD-structure, telle que l'homomorphisme $A \to A/I^{\{n\}}$ soit un m-PD-morphisme.

On dit que I est *m-PD-nilpotent* s'il existe un entier n tel que $I^{\{n\}} = 0$. Si $I \subset A$ est un idéal quelconque, et $P_{(m)}(I)$ son enveloppe à puissances divisées de niveau m, on pose, pour tout entier $n \geq 0$,

$$P^n_{(m)}(I) \ = \ P_{(m)}(I)/\overline{I}^{\{n+1\}}.$$

L'image de $\overline{I}$ dans $P^n_{(m)}(I)$ est alors munie d'une m-PD-structure canonique, définie par l'image de $\widetilde{I}$, et la filtration m-PD-adique correspondante est l'image de celle de $P^n_{(m)}(I)$. En particulier, $\overline{I}$ est m-PD-nilpotent dans $P^n_{(m)}(I)$. Munies de leurs m-PD-idéaux canoniques, ces enveloppes à puissances divisées nilpotentes possèdent une propriété universelle évidente.

Par fonctorialité, la construction des enveloppes à puissances divisées s'entend aux idéaux d'un faisceau d'anneaux sur un espace topologique ; nous noterons $\mathscr{P}(\mathscr{I})$, $\mathscr{P}_{(m)}(\mathscr{I})$, $\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I})$ les enveloppes à puissances divisées d'un idéal $\mathscr{I}$. Si $X = \operatorname{Spec}(A)$ est un schéma affine, et $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal quasi-cohérent défini par un idéal $I \subset A$, alors ces faisceaux sont les faisceaux quasi-cohérents définis respectivement par $P(I)$, $P_{(m)}(I)$, $P^n_{(m)}(I)$.

1.1.4. En général, on ne sait pas donner de description simple de la structure algébrique des enveloppes à puissances divisées. On peut néanmoins expliciter cette structure si l'on fait des hypothèses de régularité convenables sur les anneaux A et A/I [5, 1.5.3].

Supposons d'abord que A soit un anneau de polynômes $R[t_1, \ldots, t_d]$, et I l'idéal d'augmentation $(t_1, \ldots, t_d)$. Nous noterons alors $R\langle t_1, \ldots, t_d\rangle_{(m)}$ l'enveloppe $P_{(m)}(I)$, et nous l'appellerons *algèbre de polynômes à puissances divisées de niveau m*. C'est un R-module libre de base les monômes à puissances divisées

$$\underline{t}^{\{\underline{k}\}} \ = \ t_1^{\{k_1\}} \ldots t_d^{\{k_d\}},$$

pour $\underline{k} = \{k_1, \ldots, k_d\} \in \mathbb{N}^d$. Le m-PD-idéal canonique $\overline{I}$ est l'idéal engendré par les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| := \sum_i k_i \geq 1$, et le sous-PD-idéal $\widetilde{I} \subset \overline{I}$ est l'idéal engendré par les éléments $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ tels que l'un des k_i soit $\geq p^m$, et par les éléments $p\,\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \geq 1$. Les idéaux $\overline{I}^{\{n\}}$ définissant la filtration m-PD-adique sont les idéaux engendrés par les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \geq n$. Par suite, les $P^n_{(m)}(I)$ sont des R-modules libres de type fini, ayant pour base les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leq n$.

Ces résultats peuvent notamment s'étendre lorsqu'on suppose plus généralement que A est une R-algèbre lisse, et $t_1, \ldots, t_d$ une suite d'éléments de A engendrant un idéal I tel que A/I soit lisse sur R :

(i) Pour tout n, le choix d'une section $A/I \to A/I^n$ fait de $P^n_{(m)}(I)$ une (A/I)-algèbre libre de type fini, ayant pour base les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leq n$, dont la m-PD-structure canonique est décrite comme plus haut ;

(ii) S'il existe un entier N tel que $p^N = 0$ dans R, alors l'image de I dans $P_{(m)}(I)$ est un idéal nilpotent, et le choix d'une section $A/I \to A/I^n$ pour n assez grand fournit un m-PDisomorphisme entre l'algèbre de polynômes à puissances divisées $(A/I)\langle t_1,\ldots,t_d\rangle_{(m)}$ et $P_{(m)}(I)$.

1.2. Faisceaux d'opérateurs différentiels

Soient S un schéma, X un S-schéma lisse de dimension relative d. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}_{X/S} \subset \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X)$ n'opère pas en général sur la cohomologie de de Rham relative d'un morphisme lisse de S-schémas lisses. Pour appliquer les méthodes de la théorie des $\mathscr{D}$-modules à la cohomologie de de Rham et à la cohomologie cristalline, on est donc amené à introduire un autre faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{(0)}_{X/S}$ sur X, tel que la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathscr{O}_X$-module soit équivalente à celle d'une structure de $\mathscr{D}^{(0)}_{X/S}$-module à gauche.

Plus généralement, si S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma, la théorie des enveloppes à puissances divisées partielles va nous permettre de construire un système inductif de faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$ indexé par $\mathbb{N}$, de limite $\mathscr{D}_{X/S}$, dont le rôle apparaîtra plus loin en liaison d'une part avec l'étude de l'action de Frobenius, d'autre part avec l'introduction sur un schéma formel lisse $\mathscr{X}$ du faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ correspondant aux conditions de convergence pour les isocristaux.

Nous explicitons ici la construction de ces faisceaux d'opérateurs différentiels, et certaines de leurs propriétés algébriques de base.

1.2.1. Rappelons d'abord la construction du faisceau des opérateurs différentiels usuels $\mathscr{D}_{X/S}$ donnée par Grothendieck dans [EGA IV, 16.8]. Si $\mathscr{I}$ est l'idéal de l'immersion diagonale $X \hookrightarrow X\times_S X$, le *faisceau des parties principales d'ordre n sur X relativement à S* est le faisceau quotient $\mathscr{P}^n_{X/S} = \mathscr{O}_{X\times X}/\mathscr{I}^{n+1}$. Il est muni de deux structures de $\mathscr{O}_X$-algèbre, définies par les homomorphismes d_0, $d_1 : \mathscr{O}_X \to \mathscr{P}^n_{X/S}$ tels que $d_0(f) = f\otimes 1$, $d_1(f) = 1\otimes f$, correspondant aux deux projections p_0 et p_1 de $X\times_S X$ sur X. Ces structures sont appelées respectivement *structure gauche* et *structure droite*.

Considérant $\mathscr{P}^n_{X/S}$ comme $\mathscr{O}_X$-module par la structure gauche, on définit le *faisceau des opérateurs différentiels* par dualité en posant

$$\mathscr{D}_{X/S,n} := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S}, \mathscr{O}_X), \qquad \mathscr{D}_{X/S} := \cup_{n\geq 0}\mathscr{D}_{X/S,n}.$$

Pour n, $n'\geq 0$, on dispose d'autre part d'un homomorphisme d'anneaux

$$\delta^{n,n'} : \mathscr{P}^{n+n'}_{X/S} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X/S}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{P}^{n'}_{X/S},$$

tel que $\delta^{n,n'}(a\otimes b) = (a\otimes 1)\otimes(1\otimes b)$. Le composé de deux opérateurs différentiels $P : \mathscr{P}^n_{X/S}\to\mathscr{O}_X$ et $Q : \mathscr{P}^{n'}_{X/S}\to\mathscr{O}_X$ est alors défini comme l'homomorphisme

$$PQ : \mathscr{P}^{n+n'}_{X/S} \xrightarrow{\delta^{n,n'}} \mathscr{P}^n_{X/S}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{P}^{n'}_{X/S} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes Q} \mathscr{P}^n_{X/S} \xrightarrow{P} \mathscr{O}_X.$$

On fait opérer $P : \mathscr{P}^n_{X/S}\to\mathscr{O}_X$ sur $\mathscr{O}_X$ en le composant avec le morphisme $d_1 : \mathscr{O}_X\to\mathscr{P}^n_{X/S}$, ce qui fournit un homomorphisme d'anneaux injectif $\mathscr{D}_{X/S} \hookrightarrow \mathscr{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X)$.

Sur un ouvert $U \subset X$ possédant un système de coordonnées locales $t_1, \dots, t_d$ (*i. e.* un S-morphisme étale $U \to \mathbb{A}^d_S$ sur l'espace affine relatif au-dessus de S), la structure de $\mathscr{D}_{X/S}$ s'explicite comme suit. Si l'on note $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{X\times X}$, les τ_i forment une suite régulière de générateurs de $\mathscr{I}$. Pour tout n, et chacune des deux structures de $\mathcal{O}_X$-algèbre, $\mathscr{P}^n_{X/S}$ est alors un $\mathcal{O}_X$-module libre de base les $\underline{\tau}^{\underline{k}} = \tau_1^{k_1} \dots \tau_d^{k_d}$ pour $|k| \leq n$. On note $(\underline{\partial}^{[\underline{k}]})_{|k|\leq n}$ la base duale de $\mathscr{D}_{X/S,n}$, de sorte que, sur U, $\mathscr{D}_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_U$-module libre de base les opérateurs $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$. La structure d'anneau de $\mathscr{D}_{X/S}$ est déterminée par les relations

$$\underline{\partial}^{[\underline{k}']}\,\underline{\partial}^{[\underline{k}'']} = \binom{\underline{k}'+\underline{k}''}{\underline{k}'}\underline{\partial}^{[\underline{k}'+\underline{k}'']}, \tag{1.2.1.1}$$

$$\underline{\partial}^{[\underline{k}]} f = \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}']}(f)\,\underline{\partial}^{[\underline{k}'']}, \tag{1.2.1.2}$$

pour tous $\underline{k}$, $\underline{k}'$, $\underline{k}'' \in \mathbb{N}^d$ et tout $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. En particulier, en notant $(\partial_i)_{1\leq i\leq d}$ la base de dérivations duale de la base (dt_i) de $\Omega^1_{X/S}$, on obtient la relation $\underline{k}!\,\underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \underline{\partial}^{\underline{k}} := \partial_1^{k_1}\dots\partial_d^{k_d}$, de sorte que les $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ jouent le rôle de puissances divisées des dérivations.

1.2.2. Fixons maintenant un entier $m \in \mathbb{N}$. Si $m \geq 1$, nous supposerons que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma. On modifie les constructions précédentes en introduisant les enveloppes à puissances divisées nilpotentes $\mathscr{P}^n_{X/S,(m)} := \mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I})$, que nous appellerons *faisceaux de parties principales de niveau m et d'ordre n*. Comme précédemment, ces faisceaux sont munis de deux structures de $\mathcal{O}_X$-algèbre. En utilisant la structure gauche, nous définirons le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre n* en posant

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X/S,n} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S,(m)}, \mathcal{O}_X)\,;$$

le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m* est alors le faisceau $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S} = \bigcup_{n\geq 0}\mathscr{D}^{(m)}_{X/S,n}$. En appliquant la fonctorialité des enveloppes à puissances divisées aux morphismes $\delta^{n,n'}$ construits en 1.2.1, on obtient des homomorphismes d'anneaux

$$\delta^{n,n'}_{(m)} : \mathscr{P}^{n+n'}_{X/S,(m)} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X/S,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X/S,(m)}$$

grâce auxquels on définit comme plus haut la structure d'anneau (filtré) de $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$. On définit de même l'opération de $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$ sur $\mathcal{O}_X$; on prendra garde que cette opération n'est pas fidèle en général (*c.f.* 1.2.5 plus bas).

Par la suite, le schéma de base S sera le plus souvent fixé, et nous omettrons alors l'indice S dans les notations : nous noterons donc $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$, $\mathscr{D}^{(m)}_X$, ..., au lieu de $\mathscr{P}^n_{X/S,(m)}$, $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$, ...

1.2.3. Sur un ouvert $U \subset X$ possédant des coordonnées locales $t_1, \dots, t_d$, la structure des faisceaux $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ est fournie par 1.1.4. En posant encore $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$, $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang fini, ayant pour bases les puissances divisées partielles $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leq n$. On munit alors $\mathscr{D}^{(m)}_{X,n}$ de la base duale, que l'on note $(\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle})_{|\underline{k}|\leq n}$, et $\mathscr{D}^{(m)}_X$ de la base formée par les $\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle}$ pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$; s'il est nécessaire de préciser le niveau m, on l'indiquera par les notations $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}_{(m)}}$, $\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}$. Pour expliciter la structure multiplicative de $\mathscr{D}_X^{(m)}$, on est amené à introduire des coefficients binômiaux modifiés (qui interviennent déjà dans les relations analogues à celles de 1.1.1 pour les puissances divisées partielles) : pour $k', k'' \in \mathbb{N}$, $k = k' + k''$, on écrit $k = p^m q + r$, $k' = p^m q' + r'$, $k'' = p^m q'' + r''$, avec $0 \leq r, r', r'' < p^m$, et on pose

$$\left\{ {k \atop k'} \right\}_{(m)} := \frac{q!}{q'!\,q''!}, \qquad \left\langle {k \atop k'} \right\rangle_{(m)} := \binom{k}{k'} \left\{ {k \atop k'} \right\}_{(m)}^{-1}.$$

Nous omettrons de préciser le niveau m si aucune confusion n'en résulte. Les coefficients $\left\{ {k \atop k'} \right\}$ sont dans $\mathbb{N}$, et les coefficients $\left\langle {k \atop k'} \right\rangle$ dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ [5, 1.1.3]. A partir des relations analogues à celles de 1.1.1 pour les puissances divisées partielles, on obtient alors

$$\underline{\partial}^{\langle\underline{k}'\rangle}\,\underline{\partial}^{\langle\underline{k}''\rangle} = \left\langle {\underline{k} \atop \underline{k}'} \right\rangle \underline{\partial}^{\langle\underline{k}'+\underline{k}''\rangle}, \tag{1.2.3.1}$$

$$\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle} f = \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\{ {\underline{k} \atop \underline{k}'} \right\} \underline{\partial}^{\langle\underline{k}'\rangle}(f)\,\underline{\partial}^{\langle\underline{k}''\rangle}. \tag{1.2.3.2}$$

En particulier, on déduit de (1.2.3.1) la relation $(\underline{k}!/\underline{q}!)\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle} = \underline{\partial}^{\underline{k}}$. Lorsque $m = 0$, on a donc simplement $\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle} = \underline{\partial}^{\underline{k}}$.

L'étude des propriétés de divisibilité de ces coefficients binômiaux modifiés [5] montre que, si $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ s'écrit $\underline{k} = p^m \underline{q} + \underline{r}$, avec $0 \leq r_i < p^m$, et $r_i = \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} p^j$, avec $0 \leq a_{i,j} < p$, alors

$$\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle} = u_{\underline{k}} \prod_{i=1}^{d} \Big(\prod_{j=0}^{m-1} (\partial_i^{\langle p^j\rangle})^{a_{i,j}} \Big) (\partial_i^{\langle p^m\rangle})^{q_i}, \tag{1.2.3.3}$$

où $u_{\underline{k}}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Rappelons qu'un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ sur un espace topologique $\mathscr{X}$ est dit *cohérent* si, pour tout ouvert $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$, tout idéal de type fini $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}_{|\mathscr{U}}$ de la restriction de $\mathscr{A}$ à $\mathscr{U}$ est de présentation finie [48]. Grâce aux relations (1.2.3.3), un argument classique ramenant au gradué associé à la filtration par l'ordre (voir [15], [17], [36], [40], [42], ...) montre que $\mathscr{D}_X^{(m)}$ a de bien meilleures propriétés de finitude que $\mathscr{D}_X$ (dont les anneaux de sections ne sont pas nœthériens en général) :

1.2.4. PROPOSITION [5, 2.2.5 et 3.1.2]. — *Supposons S localement nœthérien.*

(i) *Si X est affine, l'anneau $\Gamma(X, \mathscr{D}_X^{(m)})$ est nœthérien à gauche et à droite.*

(ii) *Le faisceau $\mathscr{D}_X^{(m)}$ est un faisceau d'anneaux cohérent.*

1.2.5. Pour m variable, et n fixé, les faisceaux $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ forment un système projectif, et les morphismes de transition sont compatibles aux homomorphismes $\delta^{n,n'}_{(m)}$. De plus, $\mathscr{P}^n_X$ s'envoie dans chacun des $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$, de manière compatible aux morphismes de transition, et aux homomorphismes $\delta^{n,n'}$. Il en résulte que les faisceaux $\mathscr{D}_X^{(m)}$ forment un système inductif de faisceaux d'anneaux, muni d'un homomorphisme d'anneaux dans $\mathscr{D}_X$:

$$\mathscr{D}_X^{(0)} \longrightarrow \mathscr{D}_X^{(1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathscr{D}_X^{(m)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathscr{D}_X.$$

Supposons que X soit muni d'un système de coordonnées locales $t_1, \dots, t_d$. Pour $k \in \mathbb{N}$, et tout entier m, posons $k = p^m q_m + r_m$, avec $0 \le r_m < p^m$. L'homomorphisme canonique $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m+1)}$ (resp. $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X$) envoie alors $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ sur $(\underline{q}_m!/\underline{q}_{m+1}!)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+1)}}$ (resp. sur $\underline{q}_m!\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$). En particulier, l'image de $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ dans $\mathscr{D}_X$ est égale à $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ lorsque chacun des k_i est tel que $k_i \le p^m$. Dans ce cas, nous commettrons parfois l'abus de notation consistant à noter $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ l'élément $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ de $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Il en résulte d'autre part que l'homomorphisme canonique

$$\varinjlim_m \mathscr{D}_X^{(m)} \longrightarrow \mathscr{D}_X$$

est un isomorphisme.

On remarquera que, pour $d \ge 1$, les homomorphismes $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m+1)}$ et $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X$ sont injectifs si et seulement si S est plat sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Par contre, si S est de caractéristique p, on vérifie sans difficulté que ces homomorphismes ont le même noyau, engendré en coordonnées locales par les opérateurs $\partial_i^{\langle p^{m+1} \rangle_{(m)}}$; d'autre part, l'image de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ dans $\mathscr{D}_X \subset \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X)$ est le sous-anneau des applications $\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}$-linéaires de $\mathscr{O}_X$ dans lui-même, en notant $X^{(m+1)}$ le schéma déduit de X par changement de base par le $(m+1)$-ième itéré de l'endomorphisme de Frobenius de S [5, 2.2.7]. En se ramenant à la caractéristique p, un dévissage permet d'en déduire la propriété suivante :

1.2.6. PROPOSITION [9]. — *Supposons que p soit localement nilpotent sur S. Alors, pour tout m, $\mathscr{D}_X^{(m+1)}$ est de Tor-dimension d à droite et à gauche sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$.*

1.3. Stratifications et costratifications

Les relations (1.2.3.3) montrent que, dans un système de coordonnées locales, la donnée d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module sur un $\mathscr{O}_X$-module est déterminée par l'action des opérateurs $\partial_i^{\langle p^j \rangle}$ pour $0 \le j \le m$. Si $m \ge 1$, il n'est pas toujours possible de décrire explicitement cette action, et il n'est pas toujours commode de vérifier directement que la structure qu'elle définit est indépendante du choix des coordonnées. C'est pourquoi on est souvent amené à utiliser l'interprétation cristalline (dûe à Grothendieck [26] dans le cas classique) d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module en termes de données de descente infinitésimales, encore appelées *stratifications*. Comme ce formalisme s'applique aussi bien aux $\mathscr{D}_X$-modules qu'aux $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules, nous engloberons dans notre présentation le cas des $\mathscr{D}_X$-modules en posant $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathscr{P}^n_{X,(\infty)} = \mathscr{P}^n_X$, $\mathscr{D}_X^{(\infty)} = \mathscr{D}_X$.

1.3.1. Rappelons d'abord que, si X est un schéma lisse sur une base S quelconque, la donnée d'une connexion intégrable ∇ sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ est équivalente à celle d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche prolongeant sa structure de $\mathscr{O}_X$-module (*cf.* [2, 4.1.3 et 4.2.12], ou [12, th. 4.8]). Sur un ouvert $U \subset X$ muni de coordonnées locales $t_1, \dots, t_d$, définissant des dérivations $\partial_1, \dots, \partial_d$, la connexion $\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1_X$ d'un $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module $\mathcal{E}$ est caractérisée par

$$\nabla(x) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i x \otimes dt_i$$

pour toute section x de $\mathcal{E}$. Inversement, si on se donne une connexion intégrable ∇, cette formule détermine l'action des ∂_i, et ces actions commutent grâce à la condition d'intégrabilité ; on vérifie qu'elles s'étendent en une structure de $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module à gauche en utilisant le fait que les puissances usuelles $\underline{\partial}^{\underline{k}}$ des ∂_i forment une base de $\mathcal{D}^{(0)}_X$ sur $\mathcal{O}_X$, grâce à 1.2.3.

1.3.2. Soit $m \in \overline{\mathbb{N}}$. On suppose dans ce qui suit que, si $0 < m < \infty$, S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma. Pour tous ν, $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \overline{\mathbb{N}}$, nous noterons $X^{\nu+1} = X^{\nu+1}_{/S}$, $\mathcal{I}_\nu$ l'idéal de l'immersion diagonale de X dans $X^{\nu+1}$, $\mathcal{P}_{X,(m)}(\nu)$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m de $\mathcal{I}_\nu$, $\overline{\mathcal{I}}_\nu$ son m-PD-idéal canonique, $\mathcal{P}^n_{X,(m)}(\nu) = \mathcal{P}_{X,(m)}(\nu)/\overline{\mathcal{I}}_\nu^{\{n+1\}}$, $\Delta^n_{X,(m)}(\nu) = \mathrm{Spec}(\mathcal{P}^n_{X,(m)}(\nu))$, $p_i : \Delta^n_{X,(m)}(\nu) \to X$, $q_{i,j} : \Delta^n_{X,(m)}(2) \to \Delta^n_{X,(m)}(1)$ les morphismes induits par les projections (pour $0 \le i < j \le \nu$). Pour $\nu = 1$, on notera simplement $\Delta^n_{X,(m)}$ au lieu de $\Delta^n_{X,(m)}(1)$.

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module. Une *m-PD-stratification* sur $\mathcal{E}$ est la donnée d'une famille d'isomorphismes $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$-linéaires

$$\varepsilon_n : p_1^*\mathcal{E} \xrightarrow{\ \sim\ } p_0^*\mathcal{E}$$

sur les $\Delta^n_{X,(m)}$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour $n' \le n$, $\varepsilon_{n'}$ est l'isomorphisme induit par ε_n par restriction à $\Delta^{n'}_{X,(m)}$, et $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}$.

(ii) Pour tout n, $q^*_{0,2}(\varepsilon_n) = q^*_{0,1}(\varepsilon_n) \circ q^*_{1,2}(\varepsilon_n)$ (condition de cocycle).

La donnée d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche sur $\mathcal{E}$ prolongeant sa structure de $\mathcal{O}_X$-module est alors équivalente à celle d'une m-PD-stratification sur $\mathcal{E}$. La correspondance s'effectue ainsi :

a) Si l'on suppose donnée une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche sur $\mathcal{E}$, la m-PD-stratification correspondante est donnée en coordonnées locales par la formule de Taylor

$$\varepsilon_n(1 \otimes x) = \sum_{|\underline{k}| \le n} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} x \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}. \tag{1.3.2.1}$$

b) Si l'on suppose donnée une m-PD-stratification (ε_n) sur $\mathcal{E}$, la structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche correspondante est caractérisée par l'action des $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$: pour toute section x de $\mathcal{E}$, on définit les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} x$ comme étant les composantes de $\varepsilon_n(1 \otimes x)$ dans la décomposition de $p_0^*\mathcal{E}$ comme somme directe de copies de $\mathcal{E}$ fournie par la base $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ de $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$.

1.3.3. On peut donner des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à droite une description analogue à celle des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à gauche en termes de stratifications. Pour tout morphisme fini localement libre $f : X \to Y$, et tout $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{F}$, nous noterons $f^\flat\mathcal{F}$ le $\mathcal{O}_X$-module défini par $f^\flat\mathcal{F} = \bar{f}^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$, où $\bar{f}$ désigne le morphisme d'espaces annelés $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, f_*\mathcal{O}_X)$. Une *m-PD-costratification* sur un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$ est alors la donnée d'une famille d'isomorphismes $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$-linéaires

$$\varepsilon_n\ :\ p_0^\flat\mathcal{M} \xrightarrow{\ \sim\ } p_1^\flat\mathcal{M}$$

sur les $\Delta^n_{X,(m)}$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour $n' \leq n$, $\varepsilon_{n'}$ est induit par ε_n via les isomorphismes de foncteurs

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{P}^n_{X,(m)}}(\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M})) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}, \mathcal{M}),$$

et $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}$.

(ii) Pour tout n, $q^\flat_{0,2}(\varepsilon_n)\ =\ q^\flat_{1,2}(\varepsilon_n) \circ q^\flat_{0,1}(\varepsilon_n)$.

Comme précédemment, la donnée d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à droite sur $\mathcal{M}$ prolongeant sa structure de $\mathcal{O}_X$-module est équivalente à celle d'une m-PD-costratification [8, 1.1.4] :

a) Les faisceaux $p_0^\flat\,\mathcal{M}$ et $p_1^\flat\mathcal{M}$ s'identifient respectivement à $\mathcal{M}\ \otimes\ \mathcal{D}^{(m)}_X$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à droite, et si l'on munit $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X)$ de la base $(\underline{\tilde{\partial}}^{\langle \underline{k}\rangle})$ duale de la base $(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}})$ de $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ (pour la structure droite), la costratification de $\mathcal{M}$ est définie par

$$\varepsilon_n(x \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle})\ =\ \sum_{\underline{h}\leq\underline{k}} \left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\} \underline{\tilde{\partial}}^{\langle \underline{h}\rangle} \otimes x\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}$$

pour toute section x de $\mathcal{M}$ et tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$.

b) Inversement, cette relation entraîne en particulier que $\varepsilon_n(x \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle})(1)\ =\ x\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}$, de sorte que la donnée de la costratification détermine l'action des $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}$ sur $\mathcal{M}$, et on vérifie que celle-ci se prolonge en une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à droite.

1.3.4. En caractéristique 0, on sait classiquement définir une action à droite de $\mathcal{D}_X$ sur le faisceau $\omega_X = \Omega^d_X$ des différentielles de degré maximum, donnée en coordonnées locales par l'action par l'opérateur adjoint. L'interprétation d'une structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite en termes de costratifications permet d'utiliser la théorie de la dualité de Grothendieck pour les faisceaux cohérents [27] pour étendre cette construction sans hypothèse de caractéristique.

Nous supposerons ici pour simplifier que S est localement nœthérien, le cas général en résultant par un argument classique de passage à la limite (voir [8, 1.2.6]). Reprenant les notations de [27], nous noterons $f^!$ le foncteur image inverse extraordinaire pour les complexes de modules quasi-cohérents : lorsque $f : X \to Y$ est un morphisme fini, $f^!$ est le foncteur dérivé du foncteur $f^\flat$ défini plus haut, qu'on note encore $f^\flat$; lorsque f est un morphisme lisse de dimension relative r, $f^!(\mathcal{F}) = f^*\mathcal{F} \otimes \omega_{X/Y}[r]$.

Soient $f : X \to S$ le morphisme donné, $p_i : \Delta^n_{X,(\infty)} \to X$ les morphismes induits par les projections de X^2 sur X. L'égalité $f \circ p_0 = f \circ p_1$ fournit des isomorphismes canoniques

$$(1.3.4.1)\quad \varepsilon_n\ :\ p_0^\flat\,\omega_X\ =\ p_0^!\,\omega_X\ \simeq\ p_0^! f^!(\mathcal{O}_S[-d])\ \simeq\ p_1^! f^!(\mathcal{O}_S[-d])\ \simeq\ p_1^!\,\omega_X\ =\ p_1^\flat\,\omega_X,$$

qui munissent ω_X d'une costratification. On en tire donc une structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite sur ω_X, d'où une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite pour tout m. En explicitant en coordonnées locales les isomorphismes définissant (1.3.4.1), on peut interpréter cette structure au moyen de la notion d'opérateur adjoint :

1.3.5. THÉORÈME [8, th. 1.2.3]. — *Soient $U \subset X$ un ouvert possédant un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, et $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Alors, pour la structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite sur ω_X définie en* 1.3.4, *on a*

$$(a\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d) \cdot P \;=\; ({}^{\mathrm{t}}P \cdot a)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d, \tag{1.3.5.1}$$

*où, pour tout opérateur $P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \in \Gamma(U, \mathcal{D}_X)$, on définit l'*opérateur adjoint *${}^{\mathrm{t}}P$ de P par*

$${}^{\mathrm{t}}P \;=\; \sum_{\underline{k}} (-1)^{|\underline{k}|}\, \underline{\partial}^{[\underline{k}]}\, a_{\underline{k}}. \tag{1.3.5.2}$$

1.3.6. Soient $m \in \overline{\mathbb{N}}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à droite. Les méthodes de 1.3.2 et 1.3.3 permettent de définir des structures de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module sur les produits tensoriels et les faisceaux d'homomorphismes selon les règles habituelles :

(i) Les faisceaux $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ possèdent une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche.

(ii) Les faisceaux $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ possèdent une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite.

Grâce à 1.3.4, on en déduit qu'on dispose toujours pour les $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules de la méthode standard pour transformer un module à droite en module à gauche, et réciproquement :

(iii) Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche, alors $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite ;

(iv) Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite, alors $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche.

Si l'on trivialise ω_X grâce au choix de la base $dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d$ associée à un système de coordonnnées locales, ce passage de gauche à droite (resp. de droite à gauche) consiste à faire agir un opérateur différentiel par l'intermédiaire de son adjoint.

2. Opérations cohomologiques modulo p^n

Nous présentons dans ce chapitre un certain nombre de résultats de finitude pour les opérations cohomologiques de base de la théorie des $\mathcal{D}$-modules, dans le cas des anneaux d'opérateurs $\mathcal{D}_X^{(m)}$ introduits au chapitre précédent. Précisons d'abord quelques points :

a) Sur un corps de caractéristique 0, la première condition de finitude importante pour un $\mathcal{D}_X$-module est la cohérence sur $\mathcal{D}_X$. Sur une base S localement nœthérienne plus générale, il ne suffit plus d'imposer aux complexes d'être bornés et à cohomologie cohérente, car les anneaux considérés ne sont plus de dimension homologique finie en général : il est facile de voir que $\mathscr{D}_X^{(0)}$ est de dimension homologique finie si et seulement si S est régulier, hypothèse qui ne sera pas satisfaite dans le cas — essentiel ici — où S est plat sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, avec $n \geq 2$. La généralisation adéquate de la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$ est alors la catégorie $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$ des complexes parfaits (voir le point 3) des conventions générales).

b) Dans la définition des opérations cohomologiques sur les $\mathscr{D}$-modules, les notations et les conventions de décalage que nous suivrons ici sont celles de Bernstein et Borel [17]. Rappelons qu'elles sont normalisées de telle sorte que, lorsque X est une variété complexe, la correspondance de Riemann-Hilbert covariante, définie par le foncteur de de Rham DR, ait les propriétés suivantes :

(i) Elle associe à un complexe réduit à un $\mathscr{D}_X$-module holonome placé en degré 0 un faisceau pervers (défini topologiquement, voir [1], ou [38]);

(ii) Sur la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ des complexes bornés à cohomologie holonome régulière, les opérations cohomologiques correspondent aux opérations de même nom sur la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X^{\mathrm{an}}, \underline{\mathbb{C}}_{X^{\mathrm{an}}})$ des complexes bornés à cohomologie constructible.

c) Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons dans ce qui suit au cas où $m \in \mathbb{N}$, bien que certains des résultats énoncés restent valables sur le faisceau $\mathscr{D}_X$. Rappelons que, lorsque $m > 0$, on suppose que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma.

d) Signalons que les résultats des sections 2.1, 2.2 et 2.4 sont « de nature cristalline » : si $\mathfrak{a} \subset \mathscr{O}_S$ est un m-PD-idéal quasi-cohérent, et m-PD-nilpotent, il suffit de se donner des morphismes de schémas entre les réductions modulo $\mathfrak{a}$, ou de supposer que les diagrammes considérés sont commutatifs modulo $\mathfrak{a}$. Nous ne développerons pas ce point ici, renvoyant le lecteur à [8] et [10] pour des énoncés précis.

2.1. Descente par Frobenius

Outre les homomorphismes de transition définis en 1.2.5, les faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(m)}$ sont reliés entre eux de manière essentielle par l'action du morphisme de Frobenius. Plus précisément, nous verrons ici que, si X est de caractéristique p, et $F : X \to X'$ le morphisme de Frobenius relatif (ou plus généralement pour tout relèvement de cette situation), le foncteur image inverse F^* induit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche et celle des $\mathscr{D}_X^{(m+1)}$-modules à gauche. Ce résultat est d'un usage constant, notamment parce qu'il permet de déduire certaines propriétés des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules du cas des $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules.

2.1.1. A l'origine du théorème de descente par Frobenius exposé ici se trouve le théorème de descente de Cartier, pour les modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle ([20], [21], [34]). Soient S un schéma de caractéristique p, X un S-schéma lisse.

Rappelons que, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module muni d'une connexion intégrable ∇, si $U \subset X$ est un ouvert muni de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, et si $\partial_1, \ldots, \partial_d$ est la base de dérivations duale de la base (dt_i) de Ω^1_X, ∇ est à p-courbure nulle (sur U) si et seulement si, pour toute section x de $\mathcal{E}$ au-dessus d'un ouvert de U, et tout i, $\partial_i^p x = 0$. Soient $X' = X^{(p/S)}$ l'image inverse de X par le morphisme de Frobenius absolu de S, $F : X \to X'$ le morphisme de Frobenius relatif. Pour tout $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{E}$, $F^*\mathcal{E}$ est muni d'une connexion intégrable canonique à p-courbure nulle, et le théorème de Cartier affirme alors que F^* induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$-modules et celle des $\mathcal{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle [34, th. 5.1].

Du point de vue des faisceaux d'opérateurs différentiels considérés ici, ce résultat s'interprète de la manière suivante. La donnée d'une connexion intégrable ∇ sur un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ équivaut à celle d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$-module à gauche. Soient $\mathcal{K}$ l'idéal bilatère noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{D}_X^{(0)} \to \mathcal{D}_X$, et $\overline{\mathcal{D}}_X^{(0)} = \mathcal{D}_X^{(0)}/\mathcal{K}$. Comme on l'a vu en 1.2.5, $\mathcal{K}$ est engendré localement par les opérateurs $\partial_i^{\langle p \rangle_{(0)}} = \partial_i^p$, de sorte que ∇ est à p-courbure nulle si et seulement si $\mathcal{K}\mathcal{E} = 0$. D'autre part, l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X \times_S X} \to \mathcal{P}_X^n$ se factorise par $\mathcal{O}_{X \times_{X'} X}$ pour tout n, puisque dans un anneau de caractéristique p tout élément d'un PD-idéal est de puissance p-ième nulle. On obtient alors l'équivalence des conditions suivantes [8, 2.6.2] :

(i) La connexion ∇ est à p-courbure nulle ;

(ii) La structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$-module à gauche de $\mathcal{E}$ est induite par une structure de $\overline{\mathcal{D}}_X^{(0)}$-module à gauche ;

(iii) La PD-stratification de $\mathcal{E}$ provient par extension des scalaires d'une donnée de descente de X à X'.

Comme F est un morphisme fini localement libre, toute donnée de descente de X à X' sur un $\mathcal{O}_X$-module est effective, d'où le théorème de Cartier.

2.1.2. Alors que la connexion image inverse par F d'une connexion intégrable ∇' sur un $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{E}'$ est simplement la connexion standard dont est munie canoniquement l'image inverse par F d'un $\mathcal{O}_{X'}$-module quelconque, et en particulier ne contient aucune information sur ∇', l'introduction de la famille de faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X^{(m)}$ va permettre de reconstruire la structure différentielle de $\mathcal{E}'$ à partir de celle de $F^*\mathcal{E}'$.

Ce principe s'appliquera plus généralement à tout relèvement d'une puissance du morphisme de Frobenius. Nous supposerons dans ce qui suit que S est un schéma annulé par p^N pour N assez grand, muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ tel que $p \in \mathfrak{a}$. Soient $S_0 \subset S$ le sous-schéma fermé défini par $\mathfrak{a}$, X un S-schéma lisse de réduction X_0 sur S_0, s un entier positif, $X_0^{(s)}$ le S_0-schéma déduit de X_0 par image inverse par le s-ième itéré du morphisme de Frobenius absolu de S_0, $F : X \to X'$ un morphisme de S-schémas lisses relevant le morphisme de Frobenius relatif $F^s_{X_0/S_0} : X_0 \to X_0^{(s)}$.

Gardons les notations de 1.3.2. Pour tout entier $\nu \geq 1$, le morphisme $F_\nu : X^{\nu+1} \to X'^{\nu+1}$ induit par F fournit un homomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$F_\nu^* \; : \; \mathcal{O}_{X'^{\nu+1}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{\nu+1}} \longrightarrow \mathcal{P}_{X,(m+s)}(\nu).$$

Supposons donné un système de coordonnées locales $t_1, \dots, t_d$ sur un ouvert de X, et soient $t'_1, \dots, t'_d$ des coordonnées locales sur l'ouvert correspondant de X' relevant les coordonnées $1 \otimes t_i \in \mathcal{O}_{X_0^{(s)}}$. Comme F est un relèvement du morphisme de Frobenius relatif, il existe des sections $a_i \in \mathfrak{a}\mathcal{O}_X$ telles que $F^*(t'_i) = t_i^{p^s} + a_i$. On en déduit [8, 2.2.2] que F_ν^* envoie l'idéal $\mathcal{I}'^{(p^m)}_\nu$ de $\mathcal{O}_{X'^{\nu+1}}$ (où $\mathcal{I}'_\nu$ est l'idéal de l'immersion diagonale de X' dans $X'^{\nu+1}$) dans le PD-idéal $\widetilde{\mathcal{I}}_\nu + \mathfrak{b}\overline{\mathcal{I}}_\nu$ de $\mathcal{P}_{X,(m+s)}$. En factorisant F_ν^* grâce à la propriété universelle des enveloppes à puissances divisées, on obtient alors un homomorphisme canonique Φ_ν : $\mathcal{P}_{X',(m)}(\nu) \to \mathcal{P}_{X,(m+s)}(\nu)$. On vérifie de plus que, pour tout n, Φ_ν envoie $\overline{\mathcal{I}}'^{\{n\}_{(m)}}_\nu$ dans $\overline{\mathcal{I}}^{\{n\}_{(m+s)}}_\nu$, d'où un système projectif d'homomorphismes

$$\Phi_\nu^n : \mathcal{P}^n_{X',(m)}(\nu) \longrightarrow \mathcal{P}^n_{X,(m+s)}(\nu).$$

Si $\mathcal{E}'$ est un $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche, les homomorphismes Φ_ν^n permettent de munir $\mathcal{E} = F^*\mathcal{E}'$ d'une $(m+s)$-PD-stratification, déduite par extension des scalaires de la m-PD-stratification de $\mathcal{E}'$. On obtient donc ainsi une structure canonique de $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-module sur $\mathcal{E}$. De même, si $\mathcal{M}'$ est un $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-module à droite, $\mathcal{M} = F^\flat\mathcal{M}'$ est muni d'une structure canonique de $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-module à droite, définie par la $(m+s)$-costratification déduite de la m-costratification de $\mathcal{M}'$ en appliquant les foncteurs $\Phi_\nu^{n\,\flat}$.

2.1.3. THÉORÈME [8, 2.3.6 et 2.4.6]. — *Sous les hypothèses précédentes, le foncteur F^* (resp. $F^\flat$) est une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche (resp. à droite) et la catégorie des $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-modules à gauche (resp. à droite).*

Généralisant la méthode décrite en 2.1.1, le principe de la démonstration pour les modules à gauche consiste à se ramener au théorème de descente fidèlement plate pour F et pour les morphismes induits par les Φ_ν au-dessus des $\Delta^n_{X',(m)}(\nu)$. On redescend ainsi non seulement le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ en un $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{E}'$, en observant que la $(m+s)$-stratification de $\mathcal{E}$ induit une donnée de descente de X à X', mais aussi les isomorphismes ε_n formant la $(m+s)$-stratification de $\mathcal{E}$; on vérifie de plus que les isomorphismes ε'_n ainsi obtenus munissent bien $\mathcal{E}'$ d'une m-PD-stratification.

Le cas des modules à droite se déduit de celui des modules à gauche en montrant que les foncteurs F^* et $F^\flat$ sont échangés par le passage de gauche à droite décrit en 1.3.6.

Exemple. — Un cas particulièrement important de descente par Frobenius est celui de $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$ vu comme bimodule sur lui-même. Soit $\check{\mathcal{O}}_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X'})$. Il existe alors un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-bimodules

$$\mathcal{D}^{(m+s)}_X \xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\mathcal{D}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \check{\mathcal{O}}_X) \simeq F^*F^\flat\mathcal{D}^{(m)}_{X'}, \tag{2.1.3.1}$$

où, dans la dernière expression, F^* est appliqué à la structure gauche de $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$, et $F^\flat$ à la structure droite, les deux opérations commutant entre elles.

2.1.4. Il est possible d'expliciter des foncteurs quasi-inverses de F^* et $F^\flat$. Appliquant F^* à la structure gauche de $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$ et $F^\flat$ à la structure droite, on observe que $F^*\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$ possède une structure canonique de $(\mathscr{D}_X^{(m+s)}, \mathscr{D}_{X'}^{(m)})$-bimodule, et $F^\flat\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$ une structure canonique de $(\mathscr{D}_{X'}^{(m)}, \mathscr{D}_X^{(m+s)})$-bimodule. Les foncteurs

$$\mathscr{E} \longmapsto (F^\flat\mathscr{D}_{X'}^{(m)}) \otimes_{\mathscr{D}_X^{(m+s)}} \mathscr{E}, \qquad \mathscr{M} \longmapsto \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{D}_X^{(m+s)}} F^*\mathscr{D}_{X'}^{(m)},$$

allant de la catégorie des $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-modules à gauche vers celle des $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche, et de la catégorie des $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-modules à droite vers celle des $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-modules à droite, sont alors respectivement quasi-inverses de F^* et $F^\flat$ [8, 2.5.6]. Le cas clé est fourni par l'isomorphisme de $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-bimodules

$$(F^\flat\mathscr{D}_{X'}^{(m)}) \otimes_{\mathscr{D}_X^{(m+s)}} F^*\mathscr{D}_{X'}^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{D}_{X'}^{(m)}, \tag{2.1.4.1}$$

qu'on déduit du théorème 2.1.3 et de (2.1.3.1).

On en déduit qu'un $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ est plat si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ est plat sur $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$. D'autre part, l'isomorphisme (2.1.3.1) montre aussi que $\mathscr{E}'$ est localement projectif sur $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$ si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ l'est sur $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$. Le corollaire suivant en résulte :

2.1.5. COROLLAIRE. — *Le foncteur F^* induit une équivalence entre les catégories $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_{X'}^{(m)})$ et $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m+s)})$ (resp. D_{tdf}, resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}$ si X est localement nœthérien).*

Une première application du théorème de descente est fournie par l'étude de la dimension homologique des anneaux $\mathscr{D}_X^{(m)}$:

2.1.6. COROLLAIRE [8, 4.4.3]. — *Soient S un schéma affine régulier de caractéristique p, $f : X \to S$ un morphisme affine et lisse, dont les fibres sont de dimension relative d, et posons $r = \sup_{x\in X} \dim \mathscr{O}_{S,f(x)}$. Alors, pour tout $m \geq 0$, l'anneau $\Gamma(X, \mathscr{D}_X^{(m)})$ est de dimension homologique $2d + r$.*

Lorsque $m = 0$, on peut comme en caractéristique 0 (voir par exemple [15], [36] ou [40]) utiliser la filtration par l'ordre pour majorer la dimension homologique de $\Gamma(X, \mathscr{D}_X^{(0)})$ par celle du gradué associé, qui est un anneau commutatif régulier de dimension $2d + r$. Un exemple classique montre que cette borne supérieure est atteinte. Lorsque $m \geq 1$, le gradué associé à la filtration par l'ordre n'est pas régulier, mais le foncteur $F^{m\,*}_{X/S}$ associé au morphisme de Frobenius relatif fournit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche et celle des $\mathscr{D}_{X'}^{(0)}$-modules à gauche (en posant ici $X' = X^{(m)}$). Le cas général résulte ainsi du cas $m = 0$.

L'énoncé suivant assure la commutation du foncteur F^* aux extensions de l'anneau d'opérateurs différentiels, et joue un rôle important dans les passages à la limite sur le niveau m :

2.1.7. PROPOSITION [8, 3.1.3]. — *Soit $m' \geq m$. Pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$, il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^{(m'+s)}_X$-modules*

$$\mathscr{D}^{(m'+s)}_X \otimes_{\mathscr{D}^{(m+s)}_X} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\mathscr{D}^{(m')}_{X'} \otimes_{\mathscr{D}^{(m)}_{X'}} \mathscr{E}'). \tag{2.1.7.1}$$

La flèche est définie par extension des scalaires. Pour prouver que c'est un isomorphisme, on se ramène au cas où $\mathscr{E}' = \mathscr{D}^{(m)}_{X'}$, puis au cas où $S = S_0$. Celui-ci se déduit de la description locale de l'homomorphisme canonique $\mathscr{D}^{(m+s)}_X \to F^*\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ (défini par l'image inverse de la section unité) lorsque S est de caractéristique p : il envoie $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+s)}}$ sur $1 \otimes \underline{\partial}'^{\langle k/p^s \rangle_{(m)}}$ si chacun des k_i est divisible par p^s, et sur 0 sinon.

Comme F^* préserve la platitude, on obtient aussi la variante dérivée de (2.1.7.1).

2.2. Image inverse extraordinaire

La fonctorialité par image inverse (au sens des $\mathscr{O}_X$-modules) de la structure de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module donne naissance à deux opérations importantes : l'image inverse extraordinaire $f^!$ et le changement de base. Bien que ce dernier ne joue guère de rôle en caractéristique 0, c'est un ingrédient indispensable de la théorie arithmétique, où il permet notamment de passer du cas algébrique au cas des schémas formels.

2.2.1. Considérons un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & T & \longrightarrow & U, \end{array}$$

dans lequel X, Y et Z sont respectivement lisses sur S, T et U. Soit $m \in \mathbb{N}$. Par fonctorialité, f induit pour tout n et tout ν des morphismes $\Delta^n_{X/S,(m)}(\nu) \to \Delta^n_{Y/T,(m)}(\nu)$ commutant aux projections. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T}$-module à gauche, il s'ensuit que $f^*\mathscr{F}$ est muni d'une m-PD-stratification relativement à S, image inverse de la m-PD-stratification de $\mathscr{F}$ relativement à T. On obtient ainsi sur $f^*\mathscr{F}$ une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$-module. Il est clair que cette construction est transitive : si $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{Z/U}$-module, l'isomorphisme canonique $(g \circ f)^*\mathscr{G} \simeq f^*(g^*\mathscr{G}))$ commute aux m-PD-stratifications, donc est $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$-linéaire.

Il est commode d'expliciter la structure de $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$-module de $f^*\mathscr{F}$ au moyen d'un bimodule canoniquement associé à f : reprenant une notation classique, nous poserons

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y} := f^*\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T};$$

$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y}$ est donc muni d'une structure de $(\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}, f^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T})$-bimodule. L'isomorphisme d'associativité

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T}} f^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\ \sim\ } f^*\mathscr{F} \tag{2.2.1.1}$$

est alors $\mathscr{D}_{X/S}^{(m)}$-linéaire.

Le foncteur f^* possède un dérivé gauche $\mathbb{L}f^* : D^-(\mathscr{D}_{Y/T}^{(m)}) \to D^-(\mathscr{D}_{X/S}^{(m)})$, calculable en prenant des résolutions par des $\mathscr{D}_{Y/T}^{(m)}$-modules plats, ou plus généralement par des $\mathscr{D}_{Y/T}^{(m)}$-modules qui sont plats en tant que $\mathscr{O}_Y$-modules.

2.2.2. Supposons d'abord que $X = S \times_T Y$, de sorte que la situation est celle d'un changement de base. Le morphisme de fonctorialité $\mathscr{D}_{X/S}^{(m)} \to f^*\mathscr{D}_{Y/T}^{(m)}$ est alors un isomorphisme, et on dispose d'un morphisme canonique $f^{-1}\mathscr{D}_{Y/T}^{(m)} \to \mathscr{D}_{X/S}^{(m)}$, qui est un homomorphisme d'anneaux. Le foncteur $\mathbb{L}f^*$ est alors simplement le composé de f^{-1} et du foncteur standard d'extension des scalaires par l'homomorphisme $f^{-1}\mathscr{D}_{Y/T}^{(m)} \to \mathscr{D}_{X/S}^{(m)}$. Par suite, ce foncteur préserve les conditions de finitude telles que la cohérence, la Tor-dimension finie ou la perfection.

Nous commettrons souvent l'abus de notation consistant à noter $\mathscr{O}_S \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_T} \mathscr{F}$ pour $\mathbb{L}f^*\mathscr{F}$, notamment lorsque le morphisme $S \to T$ est une immersion fermée.

2.2.3. Dans le cas général, on peut factoriser f par $Y_S = S \times_T Y$, ce qui ramène par transitivité au cas où $S = T$. Nous omettrons donc désormais de noter le schéma de base S. Du point de vue des six opérations cohomologiques de Grothendieck (normalisées de manière à assurer la correspondance de Riemann-Hilbert comme on l'a indiqué plus haut), le foncteur $\mathbb{L}f^*$ apparaît en général non pas comme le foncteur image inverse pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules, mais simplement comme un intermédiaire dans la construction du foncteur image inverse extraordinaire $f^!$. Ce dernier est défini en posant, pour tout $\mathscr{F} \in D^-(\mathscr{D}_Y^{(m)})$,

$$f^!\mathscr{F} \ := \ \mathbb{L}f^*\mathscr{F}[d_{X/Y}] \ \simeq \ \mathscr{D}_{X\to Y}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)}} f^{-1}\mathscr{F}[d_{X/Y}],$$

en notant d_X, d_Y les dimensions relatives de X et Y sur S, et $d_{X/Y} = d_X - d_Y$.

On déduit facilement de cette définition les propriétés suivantes :

(i) Si $g : Y \to Z$ est un second morphisme entre S-schémas lisses, il existe pour tout $\mathscr{G} \in D^-(\mathscr{D}_Z^{(m)})$ un isomorphisme canonique de $D^-(\mathscr{D}_X^{(m)})$

$$(g \circ f)^!\mathscr{G} \xrightarrow{\sim} f^!g^!\mathscr{G}. \tag{2.2.3.1}$$

(ii) Pour tout morphisme $S' \to S$, il existe dans $D^-(\mathscr{D}_{X'}^{(m)})$ un isomorphisme canonique

$$\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} f^!\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f'^!(\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}), \tag{2.2.3.2}$$

en notant $f' : X' \to Y'$ le morphisme déduit de f par changement de base.

(iii) Supposons que p soit nilpotent sur S, et que S soit muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ tel que $p \in \mathfrak{a}$. Soient $f_0 : X_0 \to Y_0$ la réduction de f modulo $\mathfrak{a}$, $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ des morphismes de S-schémas lisses relevant les s-ièmes itérés des morphismes de Frobenius relatifs de X_0 et Y_0, $f' : X' \to Y'$ un relèvement de $f_0^{(s)}$ tel que $f' \circ F_X = F_Y \circ f$. Pour tout $\mathscr{F}' \in D^-(\mathscr{D}_{Y'}^{(m)})$, il existe dans $D^-(\mathscr{D}_X^{(m+s)})$ un isomorphisme canonique

$$f^{!(m+s)}F_Y^*\mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F_X^*f'^{!(m)}\mathscr{F}', \tag{2.2.3.3}$$

les notations $f'^{!(m)}$ et $f^{!(m+s)}$ indiquant que les foncteurs image inverse extraordinaire sont appliqués respectivement aux niveaux m et $m+s$.

L'énoncé suivant résume les propriétés de finitude du foncteur $f^!$ pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules :

2.2.4. THÉORÈME [10]. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas lisses.*

(i) *Si $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $f^!\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

(ii) *Si f est lisse, S localement nœthérien, et $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $f^!\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$.*

Supposons maintenant que, si $m \geq 1$, p est localement nilpotent sur S. On a de plus :

(iii) *Si $\mathscr{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $f^!\mathscr{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

(iv) *Si f est lisse, et si $\mathscr{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $f^!\mathscr{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

La démonstration de (i) et (ii) s'effectue comme en caractéristique 0. Par contre, celle de (iii) et (iv) fait appel à la descente par Frobenius pour se ramener au cas $m = 0$.

2.2.5. *Remarques.* — (i) Comme en caractéristique 0, le foncteur $f^!$ ne préserve pas en général la cohérence lorsque f est une immersion fermée.

(ii) Pour m fixé, il n'existe pas pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules de condition de finitude non triviale qui soit préservée à la fois par image directe et par image inverse extraordinaire par un morphisme, même propre, de S-schémas lisses. Supposons en effet que S soit un schéma de caractéristique p, et soit $F : X \to X'$ le morphisme de Frobenius relatif d'un S-schéma lisse X. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-module, nous avons vu en 2.1.2 que $F^!\mathscr{F} = F^*\mathscr{F}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m+1)}$-module. Soient $\mathscr{K}_m = \mathrm{Ker}(\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m+1)})$, et $\overline{\mathscr{D}}_X^{(m)} = \mathscr{D}_X^{(m)}/\mathscr{K}_m$. L'anneau $\overline{\mathscr{D}}_X^{(m)}$ est alors un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini, de sorte que $F^!\mathscr{F}$ est de type fini sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ si et seulement s'il est de type fini sur $\mathscr{O}_X$, c'est à dire si et seulement si $\mathscr{F}$ est de type fini sur $\mathscr{O}_{X'}$. Mais d'autre part, si $i : Z \hookrightarrow X'$ est une immersion fermée de codimension ≥ 1, l'image directe $\mathscr{F} = i_+\mathscr{E}$ d'un $\mathscr{D}_Z^{(m)}$-module $\mathscr{E}$ n'est pas de type fini sur $\mathscr{O}_{X'}$ si $\mathscr{E} \neq 0$. Ce n'est donc qu'après des passages à la limite tels que ceux que nous effectuerons aux chapitres suivants que l'on peut espérer obtenir un formalisme complet du type des six opérations de Grothendieck.

(iii) Même si f est lisse, le foncteur $f^!$ ne commute pas en général aux extensions des scalaires par les homomorphismes $\mathscr{D}_Y^{(m)} \to \mathscr{D}_Y^{(m')}$ et $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m')}$ pour $m' \geq m$. Par exemple, si $Y = S$, et si $\mathscr{F} = \mathscr{O}_Y$, alors $f^{!(m)}\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X[d_X]$ pour tout m. Or l'homomorphisme $\mathscr{D}_X^{(0)} \to \mathscr{O}_X$ défini par la section unité a pour noyau l'idéal à gauche engendré localement par les dérivations ∂_i par rapport aux coordonnées, tandis que le noyau de $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{O}_X$ est engendré par les $\partial_i^{[p^j]}$ pour $0 \leq j \leq m$, et pas par les seuls opérateurs ∂_i si $m \geq 1$. Par suite, l'homomorphisme

$$\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{D}_X^{(0)}} \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X$$

n'est pas un isomorphisme en général. Il s'agit ici d'un problème de torsion (voir 3.4.6 plus bas).

2.3. Produit tensoriel externe

Soient X, Y deux S-schémas lisses, $Z = X \times_S Y$, et $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ les deux projections.

2.3.1. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module, on voit en appliquant 2.2.1 et 1.3.6 que le *produit tensoriel externe* de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, défini par

$$\mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F} \ := \ f^*\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_Z} g^*\mathscr{F},$$

possède une structure naturelle de $\mathscr{D}_Z^{(m)}$-module.

Lorsque la base n'est pas le spectre d'un corps, le produit tensoriel externe n'est pas en général un bifoncteur exact en l'un ou l'autre de ses arguments. Pour $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}_X^{(m)})$, $\mathscr{F} \in D^-(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, on peut définir le produit tensoriel externe dérivé $\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$ en remplaçant $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) par une résolution plate sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ (resp. $\mathscr{D}_Y^{(m)}$), ou plus généralement par une résolution par des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules plats sur $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{D}_Y^{(m)}$, $\mathscr{O}_Y$).

De ces définitions résultent aisément les propriétés suivantes :

(i) Pour tout morphisme $S' \to S$, il existe dans $D^-(\mathscr{D}_Z^{(m)})$ un isomorphisme de changement de base

$$\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} (\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}) \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E}) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_{S'}} (\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}). \tag{2.3.1.1}$$

(ii) Sous les hypothèses de 2.1.2, soient $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ des relèvements de $F^s_{X_0/S_0}$, $F^s_{Y_0/S_0}$, et $F_Z : Z \to Z' := X' \times_S Y'$ le morphisme produit. Pour $\mathscr{E}' \in D^-(\mathscr{D}_{X'}^{(m)})$, $\mathscr{F}' \in D^-(\mathscr{D}_{Y'}^{(m)})$, il existe un isomorphisme canonique de $D^-(\mathscr{D}_Z^{(m+s)})$

$$F_X^*\mathscr{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} F_Y^*\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_Z^*(\mathscr{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}'). \tag{2.3.1.2}$$

En utilisant les propriétés des faisceaux de parties principales à puissances divisées, et en dualisant, on voit d'autre part qu'il existe un isomorphisme canonique $\mathscr{D}_Z^{(m)}$-linéaire

$$\mathscr{D}_Z^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } f^*\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_Z} g^*\mathscr{D}_Y^{(m)}.$$

On en déduit en particulier des homomorphismes de faisceaux d'anneaux $f^{-1}\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_Z^{(m)}$, $g^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)} \to \mathscr{D}_Z^{(m)}$. On obtient alors les propriétés suivantes :

2.3.2. THÉORÈME [10]. — *Soient X, Y deux S-schémas lisses, $Z = X \times_S Y$.*

(i) *Si $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$ et $\mathscr{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$), alors $\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_Z^{(m)})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Z^{(m)})$).*

(ii) *Si S est localement nœthérien, et si $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, $\mathscr{F} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Z^{(m)})$.*

2.4. Image directe

Nous supposons ici que S est nœthérien, de dimension de Krull finie. Rappelons que les morphismes de S-schémas lisses considérés sont quasi-compacts et quasi-séparés. Ces hypothèses permettent notamment d'assurer que le foncteur $\mathbb{R}f_*$ soit de dimension cohomologique finie.

2.4.1. Comme en caractéristique 0, on peut associer à f un second bimodule, défini par

$$\mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X} := f^*_{\mathrm{d}}(\mathscr{D}^{(m)}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{-1}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X,$$

où l'indice d indique que le foncteur f^* est ici appliqué pour la structure droite de $\mathscr{O}_Y$-module de $\mathscr{D}^{(m)}_Y \otimes \omega_Y^{-1}$. Grâce à 1.3.6 et 2.2.1, on voit que $\mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}$ est muni d'une structure naturelle de $(f^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_Y, \mathscr{D}^{(m)}_X)$-bimodule. On vérifie qu'il est canoniquement isomorphe au bimodule $\omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*_{\mathrm{g}}(\mathscr{D}^{(m)}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{-1})$ obtenu en appliquant f^* à $\mathscr{D}^{(m)}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{-1}$ pour sa structure gauche de $\mathscr{O}_Y$-module [8, 3.4.1].

Si $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, on définit le foncteur image directe f_+ en posant

$$f_+\mathscr{E} := \mathbb{R}f_*(\mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_X} \mathscr{E}).$$

Le complexe $f_+\mathscr{E}$ appartient alors à $D^-(\mathscr{D}^{(m)}_Y)$. Si $m = 0$, ou si p est nilpotent sur S, $\mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}$ est de Tor-dimension finie sur $\mathscr{D}^{(m)}_X$, et le foncteur f_+ envoie alors $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{(m)}_X)$ dans $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{(m)}_Y)$.

On voit comme en caractéristique 0 (*cf.* [16], [17], [42], ...) que le foncteur f_+ vérifie la formule de transitivité : si $g : Y \to Z$ est un second S-morphisme vérifiant les mêmes hypothèses, il existe pour tout $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_X)$ un isomorphisme canonique de $D^-(\mathscr{D}^{(m)}_Z)$

$$(g\circ f)_+\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} g_+f_+\mathscr{E}. \tag{2.4.1.1}$$

On dispose d'autre part d'un théorème de changement de base pour le foncteur f_+ :

2.4.2. PROPOSITION. — *Soient $S' \to S$ un morphisme de schémas, $f' : X' \to Y'$ le morphisme déduit de f par changement de base. Pour tout complexe à cohomologie quasi-cohérente $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, le complexe $f_+\mathscr{E}$ appartient à $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}^{(m)}_Y)$, et il existe dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}^{(m)}_{Y'})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} f_+\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} f'_+(\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E}). \tag{2.4.2.1}$$

La formation des bimodules $\mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}$ commutant aux changements de base, il est facile de définir la flèche par adjonction. On peut alors utiliser l'existence de résolutions par des $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules induits au sens de M. Saito (c'est à dire de la forme $\mathscr{D}^{(m)}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}$, où $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{O}_X$-module, *cf.* [45] ou [46]) pour prouver la quasi-cohérence de $f_+\mathscr{E}$, et montrer que la flèche est un isomorphisme en se ramenant grâce à la platitude de X sur S à un énoncé classique pour la cohomologie des faisceaux quasi-cohérents.

En utilisant encore les résolutions par des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules induits, on obtient aussi la compatibilité de f_+ aux extensions du faisceau d'opérateurs différentiels, et, lorsque f est propre, la préservation de la cohérence (en reprenant ici un argument classique, voir par exemple [16], [39], ou [46]) :

2.4.3. PROPOSITION [10]. — *Soit $m' \geq m$. Pour tout $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, il existe un isomorphisme canonique de $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}_Y^{(m')})$*

$$\mathscr{D}_Y^{(m')} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_Y^{(m)}} f_{+^{(m)}}\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} f_{+^{(m')}}(\mathscr{D}_X^{(m')} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X^{(m)}} \mathscr{E}), \tag{2.4.3.1}$$

en notant $f_{+^{(m)}}$ et $f_{+^{(m')}}$ les foncteurs image directe correspondant aux niveaux m et m'.

2.4.4. PROPOSITION. — *Supposons que f soit propre. Pour tout $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, $f_+\mathscr{E}$ appartient à $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$. Si p est nilpotent sur S, et si $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, alors $f_+\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$.*

Enfin, en prouvant que f_+ préserve la finitude de la Tor-dimension, on obtient le théorème de finitude pour les images directes par un morphisme propre :

2.4.5. THÉORÈME [10]. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas lisses.*
(i) *Pour tout $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{qc,tdf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, $f_+\mathscr{E} \in D_{\mathrm{qc,tdf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$;*
(ii) *Si f est propre, et si $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, alors $f_+\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$.*

Grâce à la formule de transitivité, il suffit de prouver séparément l'assertion (i) dans le cas où f est lisse et dans celui où f est une immersion fermée. En utilisant la formule de projection, on se ramène dans les deux cas aux propriétés locales de $\mathscr{D}_{Y \leftarrow X}^{(m)}$. L'assertion (ii) est conséquence de (i) et de 2.4.4.

Remarque. — Lorsque S est un schéma de p-torsion, on ne peut pas espérer de théorème de finitude sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ pour les images directes par un morphisme non propre, même lorsque $\mathscr{E}$ est le faisceau $\mathscr{O}_X$. En effet, supposons que S soit un schéma de caractéristique p, et soit $j : X = Y \setminus D \hookrightarrow Y$ l'inclusion du complémentaire X d'un diviseur D de Y. Alors $j_+\mathscr{O}_X = j_*\mathscr{O}_X$. Or $j_*\mathscr{O}_X$ possède une structure canonique de $\mathscr{D}_Y$-module qui induit sa structure de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module. Par suite, $j_*\mathscr{O}_X$ est annulé par $\mathscr{K}_m = \mathrm{Ker}(\mathscr{D}_Y^{(m)} \to \mathscr{D}_Y)$, et, observant comme en 2.2.5 que $\mathscr{D}_Y^{(m)}/\mathscr{K}_m$ est un $\mathscr{O}_Y$-module de type fini, on voit qu'en général $j_*\mathscr{O}_X$ ne peut pas être de type fini sur $\mathscr{D}_Y^{(m)}$. Les procédures de passage à la limite développées dans les chapitres suivants nous permettront par contre d'obtenir un énoncé qui constitue un substitut « asymptotique » au défaut de cohérence de $j_+\mathscr{O}_X$ (voir 4.4.7).

Une autre propriété essentielle des images directes est leur compatibilité à l'image inverse par Frobenius, qu'on prouve grâce au théorème de descente par Frobenius et à la construction du foncteur quasi-inverse donnée en 2.1.4 :

2.4.6. THÉORÈME [8, 3.4.4]. — *Sous les hypothèses de* 2.1.2, *soient* X, Y *deux* S*-schémas lisses de réductions* X_0, Y_0 *sur* S_0, $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ *deux morphismes de* S*-schémas lisses relevant* $F^s_{X_0/S_0}$ *et* $F^s_{Y_0/S_0}$, $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme*, $f' : X' \to Y'$ *un* S*-morphisme relevant* $f_0^{(s)}$. *Si* $f' \circ F_X = F_Y \circ f$, *il existe pour tout* $\mathcal{E}' \in D^-(\mathcal{D}^{(m)}_{X'})$ *un isomorphisme canonique de* $D^-(\mathcal{D}^{(m+s)}_Y)$

$$f_{+^{(m+s)}} F_X^* \mathcal{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_Y^* f'_{+^{(m)}} \mathcal{E}'. \tag{2.4.6.1}$$

Remarque. — Ce résultat peut être utilisé pour l'étude du foncteur f_+ dans le cas où f est lisse. Soit $\omega_{X/Y} = \omega_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\omega_Y$. On construit d'abord un morphisme canonique de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à droite

$$\omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X \longrightarrow \mathcal{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X},$$

qui donne naissance à un morphisme de complexes

$$\Omega^{\bullet}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X [d_{X/Y}] \longrightarrow \mathcal{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}, \tag{2.4.6.2}$$

où le terme de gauche est le complexe de de Rham de $\mathcal{D}^{(m)}_X$ décalé. Lorsque $m = 0$, c'est un quasi-isomorphisme, et on en déduit un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R}f_*(\Omega^{\bullet}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})[d_{X/Y}] \xrightarrow{\ \sim\ } f_{+^{(0)}} \mathcal{E}. \tag{2.4.6.3}$$

Lorsque $m \geq 1$, il n'est plus vrai en général que le complexe de de Rham de $\mathcal{D}^{(m)}_X$ soit une résolution de $\mathcal{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}$. Le théorème 2.4.6 montre que l'isomorphisme (2.4.6.3) est remplacé par une variante décalée par l'action de Frobenius. Supposons en effet que l'on dispose de relèvements F_X, F_Y et f' comme dans l'énoncé. Il existe d'après le théorème de descente un $\mathcal{D}^{(0)}_{X'}$-module $\mathcal{E}'$ tel que $\mathcal{E} \simeq F^*\mathcal{E}'$, de sorte que l'on obtient un isomorphisme canonique

$$f_{+^{(m)}} \mathcal{E} \xrightarrow{\ \sim\ } F_Y^* \mathbb{R}f'_*(\Omega^{\bullet}_{X'/Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}')[d_{X/Y}]. \tag{2.4.6.4}$$

Rappelons que, comme on l'a signalé au point d) de l'introduction de ce chapitre, les conditions d'existence globale de F_X et F_Y (et a fortiori la condition de commutation $f' \circ F_X = F_Y \circ f$) ne sont en fait pas nécessaires dans l'énoncé du théorème lorsque $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent (resp. PD-nilpotent pour obtenir la formule (2.4.6.4)).

2.5. Dualité

Nous expliquons ici comment les théorèmes de dualité locale et globale s'étendent hors de la caractéristique nulle. Les résultats de cette section sont dûs à Virrion (voir [49], [50], [51], [52]).

2.5.1. Soient X un S-schéma lisse de dimension relative d, et $\mathcal{E} \in D^-(\mathcal{D}^{(m)}_X)$ un complexe de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à gauche. On définit comme en caractéristique 0 le *dual* de $\mathcal{E}$ en posant

$$\mathbb{D}(\mathscr{E}) \;:=\; \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^{(m)}}(\mathscr{E}, \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}[d]).$$

Le foncteur $\mathscr{H}om$ est pris ici pour la structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche de $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}[d]$, tandis que $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ est vu comme un complexe de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche grâce à l'action sur la droite tordue par 1.3.6. Ces deux structures de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche sur $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}$ sont d'ailleurs échangées par une involution naturelle β_X du bimodule à gauche $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}$ [8, 1.3.4].

En général, $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ n'est pas borné supérieurement, même si $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$. Le cadre qui permet d'obtenir une théorie de la dualité sur une base quelconque est celui des complexes parfaits (voir [SGA 6, I 7]). On obtient ainsi :

2.5.2. PROPOSITION [52, I 4]. — *Soit $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

(i) *Le complexe dual $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ appartient à $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

(ii) *Pour $m' \geq m$, il existe dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m')})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{D}_X^{(m')} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X^{(m)}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{(m')}(\mathscr{D}_X^{(m')} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X^{(m)}} \mathscr{E}), \tag{2.5.2.1}$$

en notant $\mathbb{D}^{(m)}$ et $\mathbb{D}^{(m')}$ les duaux aux niveaux m et m'.

(iii) *Pour tout changement de base $S' \to S$, il existe dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_{X'}^{(m)})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathbb{D}_X(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{X'}(\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E}), \tag{2.5.2.2}$$

en notant $\mathbb{D}_X$ et $\mathbb{D}_{X'}$ les duaux sur X et sur $X' = S' \times_S X$.

2.5.3. Soit $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$. On dispose du morphisme d'évaluation

$$\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^{(m)},\mathrm{d}}(\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^{(m)},\mathrm{g}}(\mathscr{E}, \mathscr{D}_X^{(m)}), \mathscr{D}_X^{(m)}),$$

les indices d et g précisant s'il s'agit de modules à droite ou à gauche. En transformant les modules à droite en modules à gauche par 1.3.6, et en utilisant l'involution β_X, on en déduit le morphisme de bidualité

$$\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{D}(\mathscr{E})). \tag{2.5.3.1}$$

En se ramenant au cas où $\mathscr{E} = \mathscr{D}_X^{(m)}$, on obtient alors le théorème de bidualité locale :

2.5.4. PROPOSITION [52, I (3.6)]. — *Pour tout $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, le morphisme de bidualité* (2.5.3.1) *est un isomorphisme.*

2.5.5. Sous les hypothèses de 2.1.2, soient X un S-schéma lisse de réduction X_0 modulo $\mathfrak{a}$, et $F : X \to X'$ un morphisme de S-schémas lisses relevant $F^s_{X_0/S_0}$. On vérifie [8, 2.4.4] que, pour tout $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite $\mathscr{M}'$, il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-modules à gauche

$$F^*(\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\omega_{X'}^{-1}) \xrightarrow{\sim} F^\flat(\mathcal{M}')\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_X^{-1}.$$

En utilisant celui-ci, et le théorème de descente, on obtient alors la commutation du dual à l'image inverse par Frobenius :

2.5.6. Proposition [52, II 3]. — *Sous les hypothèses précédentes, soit $\mathcal{E}'\in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_{X'}^{(m)})$.*

(i) *Il existe dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_X^{(m+s)})$ un isomorphisme canonique*

$$F^*\mathbb{D}_{X'}^{(m)}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_X^{(m+s)}(F^*\mathcal{E}'). \tag{2.5.6.1}$$

(ii) *L'isomorphisme de bidualité* (2.5.3.1) *est compatible à l'isomorphisme de commutation à l'image inverse par Frobenius* (2.5.6.1).

2.5.7. Voyons maintenant comment le théorème de dualité relative pour un morphisme propre s'étend hors de la caractéristique 0. Nous supposerons ici que S est un schéma nœthérien régulier, ou lisse sur le spectre d'un quotient d'anneau de valuation discrète, de sorte que $\mathcal{O}_S$ est un complexe dualisant sur S au sens de [27]. Soit $m\in\mathbb{N}$; si $m\geq 1$, nous supposerons comme d'habitude que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma.

Soient $f : X\to Y$ un morphisme propre de S-schémas lisses, d_X, d_Y les dimensions relatives de X et Y sur S. La théorie de la dualité de Grothendieck-Hartshorne fournit alors un morphisme trace $\mathrm{Tr}_f : \mathbb{R}f_*(\omega_X)[d_X]\to\omega_Y[d_Y]$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Y)$. D'autre part, on dispose sur la catégorie dérivée $D^-(\mathcal{D}_X^{(m)\,\mathrm{d}})$ du foncteur image directe pour les complexes de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à droite, défini par $f_+(\mathcal{M}) = \mathbb{R}f_*(\mathcal{M}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X^{(m)}}\mathcal{D}_{X\to Y}^{(m)})$. La première étape consiste à construire dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_Y^{(m)\,\mathrm{d}})$ un morphisme trace sur $f_+(\omega_X)$, relié au précédent par l'intermédiaire du morphisme

$$T_f\ :\ \mathbb{R}f_*(\omega_X)[d_X]\longrightarrow f_+(\omega_X)[d_X]$$

obtenu en appliquant $\mathbb{R}f_*$ au morphisme $\omega_X\to\omega_X\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X^{(m)}}\mathcal{D}_{X\to Y}^{(m)}$ déduit du morphisme canonique $\mathcal{D}_X^{(m)}\to\mathcal{D}_{X\to Y}^{(m)}$ et en décalant :

2.5.8. Théorème ([49, (5.1)], [51]). — *Sous les hypothèses précédentes, il existe dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_Y^{(m)\,\mathrm{d}})$ un morphisme canonique $\mathrm{Tr}_{+,f} : f_+(\omega_X)[d_X]\to\omega_Y[d_Y]$, s'insérant dans un triangle commutatif de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{O}_Y)$*

$$\begin{tikzcd} & f_+(\omega_X)[d_X] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}_{+,f}"] & \\ \mathbb{R}f_*(\omega_X)[d_X] \arrow[ur, "T_f"] \arrow[rr, "\mathrm{Tr}_f"] & & \omega_Y[d_Y], \end{tikzcd} \tag{2.5.8.1}$$

et vérifiant la condition de transitivité pour le composé de deux S-morphismes propres.

En caractéristique 0, la construction de ce morphisme trace fait appel à la résolution gauche de ω_X en tant que $\mathscr{D}_X$-module à droite par le complexe de de Rham de $\mathscr{D}_X$, puis, dans le cas analytique, à la résolution de Dolbeault pour calculer le foncteur f_+ (voir par exemple [16], [46], ou [47]). Sur une base plus générale, on ne dispose de la résolution de de Rham que pour $m = 0$. La méthode de Virrion est basée sur la construction, pour tout $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite $\mathscr{M}$, d'une résolution gauche canonique de $\mathscr{M}$ par des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite induits, la *résolution de Čech-Alexander* $\check{\mathrm{C}}\mathrm{A}^*(\mathscr{M})$. Cette résolution, de type simplicial, est construite par dualité à partir de la résolution de $\mathscr{O}_X$ par le complexe de Čech-Alexander $\check{\mathrm{C}}\mathrm{A}(L(\mathscr{O}_X))$ qui intervient dans le calcul de la cohomologie cristalline de X relativement à S (*cf.* [2], [12], [26], [32]). Son terme de degré $-\nu$ est de la forme $\check{\mathrm{C}}\mathrm{A}_\nu^*(\mathscr{M}) = \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\nu} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$, avec $\mathscr{H}_{X,\nu} = \varinjlim_n \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X,(m)}(\nu), \mathscr{O}_X)$.

On observe alors que le complexe de Cousin $\mathscr{K}_X^\bullet$ de ω_X est une résolution de ω_X par des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite, injectifs sur $\mathscr{O}_X$. En lui appliquant la construction précédente, on en déduit que le morphisme T_f est représenté dans $D(\mathscr{D}_Y^{(m)\,\mathrm{d}})$ par le morphisme de complexes

$$f_*(\mathscr{K}_X^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)})[d_X] \longrightarrow f_*(\mathscr{K}_X^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_{X\to Y}^{(m)})[d_X].$$

D'autre part, $\omega_Y[d_Y]$ est représenté par le complexe $\mathscr{K}_Y^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}_{Y,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{D}_Y^{(m)}$. En remarquant que chacun des complexes $\mathscr{K}_X^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\nu}$ (resp. $\mathscr{K}_Y^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}_{Y,\nu}$) est limite de complexes résiduels sur les voisinages infinitésimaux à puissances divisées $\Delta^n_{X,(m)}(\nu)$ (resp. $\Delta^n_{Y,(m)}(\nu)$), on peut alors utiliser la théorie du morphisme trace pour les complexes résiduels pour construire un morphisme de complexes

$$f_*(\mathscr{K}_X^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_{X\to Y}^{(m)})[d_X] \longrightarrow \mathscr{K}_Y^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}_{Y,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{D}_Y^{(m)}[d_Y]$$

dont la classe dans $D(\mathscr{D}_Y^{(m)\,\mathrm{d}})$ fournit le morphisme $\mathrm{Tr}_{f,+}$ voulu.

Cette construction permet alors d'établir le théorème de dualité relative :

2.5.9. THÉORÈME ([49, (5.4)], [51]). — *Sous les hypothèses de* 2.5.7*, soit* $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$*. Il existe dans* $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$ *un isomorphisme canonique*

$$\chi \;:\; f_+(\mathbb{D}_X(\mathscr{E})) \xrightarrow{\;\sim\;} \mathbb{D}_Y(f_+(\mathscr{E})), \tag{2.5.9.1}$$

vérifiant la condition de transitivité pour le composé de deux S-morphismes propres.

Via 1.3.6, on se ramène à l'énoncé analogue pour les complexes de modules à droite. La construction de χ se déduit de l'existence du morphisme trace. Pour prouver que c'est un isomorphisme, on ramène d'abord le cas où S est lisse sur un quotient d'anneau de valuation discrète $\mathscr{V}$ au cas où S est régulier, en utilisant pour la réduction modulo l'idéal maximal de $\mathscr{V}$ la compatibilité du morphisme trace au changement de base. Dans ce cas, les catégories $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)\,\mathrm{d}})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X^{(m)\,\mathrm{d}})$ coïncident, et on peut utiliser l'existence de résolutions par des modules induits de la forme $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$, où $\mathscr{L}$ est $\mathscr{O}_X$-cohérent, pour déduire l'énoncé du théorème de dualité de Grothendieck pour les $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, grâce à (2.5.8.1).

3. Passage aux schémas formels

Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique, p sa caractéristique résiduelle, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel, K son corps des fractions. Nous noterons $\mathcal{S} = \mathrm{Spf}(\mathcal{V})$, $S_i = \mathrm{Spec}(\mathcal{V}/\mathfrak{m}^{i+1})$. Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel, nous noterons $X_i = S_i \times_{\mathcal{S}} \mathcal{X}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$.

Nous expliquons ici comment, par passage à la limite projective pour i variable, les résultats du chapitre précédent sur les $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$-modules peuvent s'étendre à certains complexes de modules sur les complétés p-adiques des faisceaux d'opérateurs différentiels correspondants sur $\mathcal{X}$. Du point de vue cristallin, cela revient à passer de la cohomologie cristalline relativement à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ à la cohomologie cristalline relativement à $\mathbb{Z}_{(p)}$.

3.1. Complétion des faisceaux d'opérateurs différentiels

Donnons d'abord quelques propriétés algébriques des complétés p-adiques de ces faisceaux d'opérateurs différentiels.

3.1.1. Soient $m \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse. Les constructions faites en 1.2 gardent un sens sur $\mathcal{X}$, et fournissent un faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ dont la structure locale est décrite comme en 1.2.3. Nous noterons

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} := \varprojlim_i \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}/\mathfrak{m}^{i+1}\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)} \simeq \varprojlim_i \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$$

son complété p-adique, et nous l'appellerons *faisceau des opérateurs différentiels* (d'ordre infini) *de niveau m sur $\mathcal{X}$*. Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est un ouvert possédant un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, et si $\partial_1, \ldots, \partial_d$ sont les dérivations correspondantes, les sections de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ sur $\mathcal{U}$ sont donc données par

$$(3.1.1.1)\qquad \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}) = \{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \mid a_{\underline{k}} \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}), \text{ et } a_{\underline{k}} \to 0 \text{ pour } |\underline{k}| \to \infty \}.$$

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert affine quelconque, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ est un anneau nœthérien. Comme p est un élément du centre de $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, on en déduit que le complété p-adique $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})^{\wedge} \simeq \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ est un anneau nœthérien, et que les propriétés usuelles du passage au complété dans le cas commutatif nœthérien sont encore valables [5, 3.2]. Il s'ensuit que le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ est un faisceau d'anneaux cohérents.

Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module $\mathcal{E}$ est donc cohérent si et seulement s'il est localement de présentation finie. Lorsque $\mathcal{X}$ est affine, les techniques habituelles de passage à la limite projective permettent de montrer facilement les théorèmes A et B pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-modules cohérents [5, 3.3] :

A) Tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module cohérent est engendré par ses sections globales, et le foncteur

$\Gamma(\mathscr{X}, -)$ induit une équivalence entre la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules cohérents et celle des $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$-modules de type fini.

B) Si $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-module cohérent, $H^n(\mathscr{X}, \mathscr{E}) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

3.1.2. Lorsque $\mathscr{U}$ est quasi-compact, on a $\Gamma(\mathscr{U}, E_{\mathbb{Q}}) = \Gamma(\mathscr{U}, E)_{\mathbb{Q}}$ pour tout faisceau abélien E sur $\mathscr{U}$. Par suite, la description donnée en (3.1.1.1) reste valable pour $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$, avec $a_{\underline{k}} \in \Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}})_{\mathbb{Q}}$.

Le faisceau $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ est encore un faisceau d'anneaux cohérent. D'autre part, $\mathscr{X}$ étant de type fini sur $\mathscr{S}$, la catégorie $\mathrm{Coh}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$ des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-modules cohérents est équivalente à la catégorie $\mathrm{Coh}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})_{\mathbb{Q}}$ des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules cohérents à isogénie près [5, 3.4.5]. Il en résulte que les théorèmes A et B restent valables pour les $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-modules cohérents.

3.1.3. PROPOSITION [8, 4.4.4]. — *Soit $\mathscr{X}$ un schéma formel affine et lisse sur $\mathscr{V}$, de dimension relative d.*

(i) *L'anneau $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$ est de dimension homologique $2d + 1$.*

(ii) *L'anneau $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$ est de dimension homologique finie, comprise entre d et $2d$.*

Par un argument classique, on majore la dimension homologique de $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$ par celle de son gradué associé pour la filtration p-adique, égale à $2d + 1$ grâce à 2.1.6. Que cette borne soit atteinte résulte encore d'un exemple explicite. Il s'ensuit que la dimension homologique de $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$ est majorée par $2d + 1$. On obtient la majoration par $2d$ en montrant que tout $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$-module de type fini sans torsion possède une résolution projective de longueur $2d$. La minoration par d provient de ce que $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est de dimension projective d sur $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$.

Remarques. — (i) Il semble raisonable de conjecturer que, comme dans le cas de $\Gamma(X, \mathscr{D}_X)$ lorsque X est un schéma affine et lisse sur $\mathbb{C}$, la dimension homologique de $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$ est en fait égale à d.

(ii) Les catégories $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$) sont donc égales.

3.1.4. Soit e l'indice de ramification absolu de $\mathscr{V}$. Pour qu'il existe une m-PD-structure sur $\mathfrak{m}$ (nécessairement définie par les puissances divisées naturelles de $\mathfrak{m}^k$ pour un entier k convenable), il faut et suffit que $p^m \geq e/(p-1)$ [5, 1.3.1]. Supposons m fixé de manière que cette condition soit remplie, et soient $s \geq 1$ un entier, $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un morphisme de $\mathscr{S}$-schémas formels lisses relevant le morphisme de Frobenius relatif $F^s_{X_0/S_0}$. Le morphisme F est alors fini localement libre. En appliquant 2.1.2 aux morphismes $X_i \to X'_i$ définis par F, on en déduit par passage à la limite projective que $F^*\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$ possède une structure canonique de $(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)})$-bimodule, et $F^\flat\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$ une structure canonique de $(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)})$-bimodule. Si $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) est un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-module à gauche (resp. à droite), il en résulte grâce aux isomorphismes canoniques

$$F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\mathscr{E}, \qquad \mathscr{F} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} F^\flat \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \xrightarrow{\ \sim\ } F^\flat\mathscr{F},$$

que $F^*\mathscr{E}$ (resp. $F^\flat\mathscr{F}$) possède une structure naturelle de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-module à gauche (resp. à droite).

D'autre part, en passant à la limite projective sur i dans les isomorphismes (2.1.3.1) et (2.1.4.1), on en déduit qu'il existe comme en 2.1.3 et 2.1.4 des isomorphismes canoniques de bimodules

$$\text{(3.1.4.1)} \quad \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\ \ \sim\ \ } F^*F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}, \qquad (F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}) \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \xrightarrow{\ \ \sim\ \ } \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}.$$

Par suite, les foncteurs $\mathscr{E}' \longmapsto F^*\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E} \longmapsto (F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}) \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$-modules à gauche et celle des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-modules à gauche [8, 4.1.3].

Comme dans le cas algébrique, les propriétés de cohérence, de platitude, de Tor-dimension finie et de perfection sont conservées dans cette équivalence.

Ces résultats restent évidemment valables pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules.

3.2. Complexes quasi-cohérents

Dans le cas des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules, la méthode classique de définition des foncteurs $f^!$ et f_+ au moyen de produits tensoriels avec des bimodules canoniques tels que $\mathscr{D}_{X\to Y}$ et $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$ ne conduit pas en général aux propriétés voulues, à cause de problèmes liés à la complétion (voir à cet égard la remarque de 3.4.3 sur la formule de transitivité). Nous introduisons ici une sous-catégorie $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ de la catégorie $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, formée de complexes vérifiant une condition de complétion au sens des catégories dérivées, qui contient la sous-catégorie $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$. Sur $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, la construction et les propriétés de ces foncteurs se ramèneront aux résultats obtenus précédemment modulo p^i.

On note d la dimension relative de $\mathscr{X}$ sur $\mathscr{S}$; rappelons qu'elle est supposée constante.

3.2.1. Soit $X_\bullet$ le topos des systèmes projectifs de faisceaux $E_\bullet = (E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $\mathscr{X}$. Il est muni d'un morphisme de topos $\underleftarrow{l}_X : X_\bullet \to \mathscr{X}$, défini en posant

$$\underleftarrow{l}_{X*}(E_\bullet) := \varprojlim_i E_i, \qquad \underleftarrow{l}_X^{-1}(E) := (E)_{i\in\mathbb{N}},$$

où $(E)_{i\in\mathbb{N}}$ est le système projectif constant de valeur E. On notera que le foncteur $\underleftarrow{l}_{X*}$ est de dimension cohomologique finie sur la catégorie des faisceaux abéliens, de sorte que son dérivé droit $\mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}$ est défini sur la catégorie dérivée toute entière.

Nous considèrerons $X_\bullet$ comme un topos annelé en le munissant du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{X_\bullet} = (\mathscr{O}_{X_i})_{i\in\mathbb{N}}$, ce qui fait de $\underleftarrow{l}_X$ un morphisme de topos annelés. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module, $\underleftarrow{l}_X^*\mathscr{E}$ est donc le système projectif

$$\dots \longrightarrow \mathscr{E}/\mathfrak{m}^{i+1}\mathscr{E} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathscr{E}/\mathfrak{m}^2\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}/\mathfrak{m}\mathscr{E}.$$

Pour tout $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$, nous noterons $\mathscr{E}_i := \mathscr{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$. Nous dirons que $\mathscr{E}$ est *quasi-cohérent* s'il vérifie les conditions suivantes [9] :

(i) Le complexe $\mathscr{E}_0$ appartient à $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{X_0})$;

(ii) Le morphisme canonique

$$\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X*}\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}^*_X\mathscr{E}$$

est un isomorphisme.

Pour tout m, nous munirons également $X_\bullet$ du système projectif d'anneaux $(\mathscr{D}^{(m)}_{X_i})_{i\in\mathbb{N}}$. On peut alors considérer $\underset{\leftarrow}{l}_X : (X_\bullet, \mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet}) \to (\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ comme un morphisme de topos annelés, et définir la notion de complexe quasi-cohérent de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ par les conditions analogues à (i) et (ii) obtenues en remplaçant $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{O}_{X_\bullet}$, par $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet}$. Comme le foncteur $\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}^*_X$ au sens des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules induit par restriction des scalaires le foncteur $\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}^*_X$ au sens des $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules, il est clair qu'un complexe de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ est quasi-cohérent si et seulement s'il est quasi-cohérent en tant que complexe de $D^-(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$.

Nous noterons $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$) la sous-catégorie pleine (triangulée) de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^-(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$) dont les objets sont les complexes quasi-cohérents, et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ la sous-catégorie pleine de $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ dont les objets sont à cohomologie nulle en dehors d'un intervalle borné. On vérifie les propriétés suivantes [9] :

a) Si $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$, alors $\mathscr{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{X_i})$ pour tout i.

b) S'il existe un entier k tel que $\mathscr{E}$ soit dans l'image de $D^-(\mathscr{O}_{X_k})$, alors $\mathscr{E}$ est quasi-cohérent si et seulement si $\mathscr{E}$ est à cohomologie quasi-cohérente sur $\mathscr{O}_{X_k}$.

c) La sous-catégorie $D^-_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ des complexes à cohomologie $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-cohérente est une sous-catégorie de $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

Remarque. — Un contre-exemple de Gabber montre que, si $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$, ses faisceaux de cohomologie $\mathscr{H}^n(\mathscr{E})$ n'appartiennent pas nécessairement à $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$.

L'intérêt de cette notion de complexe quasi-cohérent vient de ce que les propriétés d'un complexe quasi-cohérent sur $\mathscr{X}$ se ramènent à celles du complexe $\mathscr{O}_{X_\bullet} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$ dans la catégorie dérivée des complexes de systèmes projectifs. Tout d'abord, en utilisant les résultats de l'appendice B de [12] sur la finitude du foncteur $\mathbb{R}\varprojlim$ sur un anneau nœthérien, on obtient la propriété suivante :

3.2.2. PROPOSITION. — *Soit $\mathscr{E}_\bullet \in D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet})$ un complexe vérifiant les conditions suivantes :*

a) $\mathscr{E}_0 \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$;

b) *Pour tout i, le morphisme canonique*

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_{i+1}}} \mathscr{E}_{i+1} \longrightarrow \mathscr{E}_i$$

est un isomorphisme.

Alors le morphisme canonique

$$\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}_X^* \mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X*}\mathscr{E}_{\bullet} \longrightarrow \mathscr{E}_{\bullet}$$

est un isomorphisme, et le complexe $\mathscr{E} = \mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X*}\mathscr{E}_{\bullet}$ *appartient à* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

D'autre part, si $\mathscr{E}$ est un complexe de $D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, la plupart de ses propriétés de finitude se ramènent à celles de $\mathscr{E}_0 := \mathscr{O}_{X_0} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$: pour que $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$), il faut et suffit que $\mathscr{E}_0 \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$, $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$) [9]. On obtient alors la caractérisation suivante de ces sous-catégories de $D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$:

3.2.3. THÉORÈME [9]. — *Les foncteurs* $\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}_X^*$ *et* $\mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X*}$ *sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie* $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ *(resp.* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$*) et la sous-catégorie pleine de la catégorie* $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_{\bullet}})$ *formée des complexes de systèmes projectifs* $\mathscr{E}_{\bullet}$ *vérifiant les conditions suivantes* :

a) *Le complexe* $\mathscr{E}_0$ *appartient à* $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$ *(resp.* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$, $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$*)*;

b) *Pour tout* i, *le morphisme canonique*

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_{i+1}}} \mathscr{E}_{i+1} \longrightarrow \mathscr{E}_i$$

est un isomorphisme.

Grâce à cette description des catégories $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, nous pourrons utiliser les résultats établis au chapitre précédent sur un schéma de p-torsion pour obtenir des résultats analogues pour les complexes de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules.

3.3. Complexes à isogénie près

Comme certaines des propriétés qu'on souhaite obtenir dans le cadre d'une théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules ne sont vérifiées qu'après tensorisation par $\mathbb{Q}$, on est amené à étudier les opérations cohomologiques de base sur les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules. Comme précédemment, la nécessité de tenir compte des propriétés de complétion ne permet pas de travailler avec la catégorie dérivée $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ toute entière. De fait, la catégorie que nous utiliserons n'est même pas une sous-catégorie de $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$: ce sera la catégorie quotient de la catégorie $D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ obtenue en inversant les isogénies. Lorsque $\mathscr{X}$ est quasi-compact et quasi-séparé, nous verrons en effet qu'elle contient une sous-catégorie pleine équivalente à la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, de sorte que, par l'intermédiaire des techniques de la section précédente, cette méthode nous permettra d'étendre aux complexes bornés de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents les résultats établis modulo p^i.

3.3.1. Si $\mathscr{C}$ est une catégorie additive, nous désignerons par $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, et nous appellerons *catégorie des objets de* $\mathscr{C}$ *à isogénie près*, la catégorie ayant mêmes objets que $\mathscr{C}$, et telle que l'ensemble des flèches entre deux objets soit donné par

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}}(E,F) \ := \ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)\otimes\mathbb{Q}.$$

Lorsque $\mathscr{C}$ est une sous-catégorie $D^*(\mathscr{A})$ d'une catégorie dérivée $D(\mathscr{A})$, nous emploierons la notation $D^*_{\mathbb{Q}}(\mathscr{A})$ plutôt que $D(\mathscr{A})_{\mathbb{Q}}$.

La catégorie $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ n'est autre que la catégorie localisée de $\mathscr{C}$ par rapport au système multiplicatif des isogénies de $\mathscr{C}$: un morphisme $f : E \to F$ est appelé *isogénie* s'il existe un entier $n \neq 0$ et un morphisme $g : F \to E$ tels que $g \circ f = n\mathrm{Id}_E$, $f \circ g = n\mathrm{Id}_F$. Lorsque $\mathscr{C}$ est une catégorie triangulée, les isogénies forment un système multiplicatif compatible à la structure triangulée, de sorte que $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ possède une structure naturelle de catégorie triangulée pour laquelle le foncteur de localisation $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ est exact.

Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est une foncteur additif (resp. exact) entre catégories additives (resp. triangulées), il s'étend de manière unique en un foncteur additif (resp. exact) $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{C}'_{\mathbb{Q}}$ compatible aux foncteurs de localisation.

3.3.2. Soit $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse. Pour tout m, nous noterons $D^-_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$) la sous-catégorie pleine de $D_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ obtenue en localisant $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$) par rapport aux isogénies. La tensorisation par $\mathbb{Q}$ définit un foncteur naturel

$$D_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}). \tag{3.3.2.1}$$

On prendra garde qu'en général l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})}(\mathscr{E},\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})}(\mathscr{E}_{\mathbb{Q}},\mathscr{F}_{\mathbb{Q}})$$

n'est ni injectif, ni surjectif, même si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$. Par la suite, c'est avec la catégorie $D^-_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ que nous travaillerons. Néanmoins, le résultat suivant permet d'identifier la sous-catégorie pleine $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ de $D^-_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ à la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ (rappelons que $\mathscr{X}$ est toujours supposé quasi-compact et quasi-séparé) :

3.3.3. PROPOSITION [9]. — *Le foncteur* (3.3.2.1) *induit une équivalence de catégories*

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\ \approx\ } D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}). \tag{3.3.3.1}$$

3.4. Produit tensoriel et image inverse extraordinaire

Les résultats des sections précédentes permettent de définir les opérations cohomologiques de base pour les complexes quasi-cohérents de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules (voir [10]). Commençons par discuter les cas du produit tensoriel et de l'image inverse extraordinaire.

3.4.1. Soient $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $\mathscr{M} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{X}})$ deux complexes de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules, respectivement à gauche et à droite, supposés quasi-cohérents au sens de 3.2.1. On définit leur produit tensoriel complété sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ en posant

$$\mathscr{M}\ \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\ \mathscr{E}\ :=\ \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}(\mathbb{L}\underleftarrow{l}^{*}_{X}\mathscr{M}\ \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet}}\ \mathbb{L}\underleftarrow{l}^{*}_{X}\mathscr{E}).$$

Il existe un morphisme canonique

$$\mathscr{M}\ \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\ \mathscr{E}\ \longrightarrow\ \mathscr{M}\ \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\ \mathscr{E},$$

et c'est un isomorphisme lorsque l'un des deux complexes appartient à $D^-_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

Si $\mathscr{M}$ est un $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$-bimodule, pour un certain entier m', alors $\mathscr{M}\ \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\ \mathscr{E}$ est de manière naturelle un complexe de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}})$. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{M}$ sont bornés, et si $\mathscr{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}})$, alors $\mathscr{M}\ \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\ \mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}})$.

On définit de la même manière le produit tensoriel complété sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$.

Grâce à la propriété universelle des catégories de fractions, ces produits tensoriels complétés s'étendent aux catégories localisées par rapport aux isogénies définies en 3.3.2. Pour $m' \geq m$, et $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, nous commettrons parfois l'abus de notation consistant à désigner par

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\ \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}\ \mathscr{E}$$

l'image dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}}\ \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\ \mathscr{E}$.

Exemple. — Plaçons-nous sous les hypothèses de 3.1.4, et soit $m' \geq m$. Si $\mathscr{E}' \in D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$, on obtient par passage à la limite projective à partir des isomorphismes (2.1.7.1) un isomorphisme de $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}})$

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}}\ \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}}\ F^*\mathscr{E}'\ \xrightarrow{\ \sim\ }\ F^*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'}\ \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}}\ \mathscr{E}') \tag{3.4.1.1}$$

qui s'écrit simplement

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}}\ \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}}\ F^*\mathscr{E}'\ \xrightarrow{\ \sim\ }\ F^*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'}\ \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}}\ \mathscr{E}') \tag{3.4.1.2}$$

lorsque $\mathscr{E}' \in D^-_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$. On dispose aussi des isomorphismes analogues dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $D^-_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$).

3.4.2. Soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ deux $\mathscr{V}$-schémas formels lisses de dimensions relatives $d_{\mathscr{X}}$ et $d_{\mathscr{Y}}$, $d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} = d_{\mathscr{X}} - d_{\mathscr{Y}}$, $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un $\mathscr{V}$-morphisme. Pour tout $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$, nous définirons l'image inverse extraordinaire $f^!\mathscr{F}$ en posant

$$f^!\mathscr{F}\ :=\ \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}(f^!_\bullet(\mathbb{L}\underleftarrow{l}^{*}_{Y}\mathscr{F})), \tag{3.4.2.1}$$

où $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ est le morphisme de topos tel que $f_{\bullet *}$ (resp. $f^{-1}_\bullet$) associe à un système projectif de faisceaux sur $\mathscr{X}$ (resp. sur $\mathscr{Y}$) le système projectif de ses images directes sur $\mathscr{Y}$ (resp. inverses sur $\mathscr{X}$) ; si $\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet \to Y_\bullet}$ est le système projectif des $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i \to Y_i}$, le foncteur $f^!_\bullet$ est alors défini en posant, pour tout complexe $\mathscr{F}_\bullet \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_{Y_\bullet})$,

$$f^!_\bullet\mathscr{F}_\bullet\ :=\ \mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet \to Y_\bullet}\ \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}_\bullet\mathscr{D}^{(m)}_{Y_\bullet}}\ f^{-1}_\bullet\mathscr{F}_\bullet\,[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}].$$

Soit $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} = \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X_i\to Y_i}$. Alors $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}}$ est muni d'une structure naturelle de $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, $f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$-bimodule. Il existe dans $D(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ un morphisme canonique

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}} f^{-1}\mathcal{F}[d_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}] \longrightarrow f^!\mathcal{F}, \tag{3.4.2.2}$$

qui est un isomorphisme si $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$.

Comme dans le cas algébrique, le foncteur $f^!$ vérifie la formule de transitivité :

3.4.3. PROPOSITION [10]. — *Soient $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ deux morphismes de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses.*

(i) *Pour tout $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$, $f^!\mathcal{F}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$.*

(ii) *Pour tout $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Z}})$, il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ un isomorphisme canonique*

$$f^!(g^!\mathcal{G})) \xrightarrow{\ \sim\ } (g\circ f)^!\mathcal{G}. \tag{3.4.3.1}$$

Ces propriétés résultent de la relation (2.2.3.2) assurant la compatibilité de $f^!$ au changement de base modulo p^i, de 3.2.2, et de la formule de transitivité dans le cas algébrique.

Remarque. — Si l'on avait pris pour définition de $f^!$ le terme de gauche de (3.4.2.2), la formule de transitivité ne serait pas valable en général, même pour $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Z}}$. En effet, si l'on prend $\mathcal{X} = \mathcal{Z} = \mathrm{Spf}\,\mathcal{V}\{t\}$, $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$, et si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est la projection, $g : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{Z}$ la section nulle, alors $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Z}})$ est l'anneau de séries formelles (commutatives) convergentes en 2 variables $\mathcal{V}\{t, \partial\}$, tandis que $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} \otimes_{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}} f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}})$ est le produit tensoriel non complété $\mathcal{V}\{t\} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}\{\partial\}$. L'homomorphisme canonique

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}} f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Z}}$$

n'est donc pas un isomorphisme en général.

Si l'on suppose par contre que $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Z}})$, et que de plus $g^!\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$, alors tous les morphismes du carré

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}} f^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{g^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Z}}} g^{-1}\mathcal{G})[d_{\mathcal{X}/\mathcal{Z}}] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Z}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{(g\circ f)^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Z}}} (g\circ f)^{-1}\mathcal{G}[d_{\mathcal{X}/\mathcal{Z}}] \arrow[d, "\wr"] \\
f^!(g^!\mathcal{G})) \arrow[r, "\sim"] & (g\circ f)^!\mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

sont des isomorphismes.

3.4.4. Plaçons-nous ici sous les hypothèses de 3.1.4, et supposons donnés des morphismes de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $F_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, $F_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$ relevant $F^s_{X_0/S_0}$ et $F^s_{Y_0/S_0}$, ainsi qu'un $\mathcal{V}$-morphisme $f' : \mathcal{X}' \to \mathcal{Y}'$ relevant $f_0^{(s)}$. Supposons de plus que $f' \circ F_{\mathcal{X}} = F_{\mathcal{Y}} \circ f$. Comme les morphismes $F_{\mathcal{X}}$ et $F_{\mathcal{Y}}$ sont finis localement libres, on déduit facilement de (2.2.3.3) qu'il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}})$ un isomorphisme canonique

$$f^{!(m+s)}F_{\mathscr{Y}}^{*}\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_{\mathscr{X}}^{*}f'^{!(m)}\mathscr{F}' \tag{3.4.4.1}$$

pour tout $\mathscr{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}'})$.

3.4.5. Le foncteur $f^!$ se factorise de manière naturelle en un foncteur

$$f^! \,:\, D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$$

qui vérifie la formule de transitivité pour le composé de deux morphismes. Le foncteur composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\ \approx\ } D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \hookrightarrow D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \xrightarrow{\ f^!\ } D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$$

s'identifie canoniquement au foncteur qui associe à un complexe $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ le complexe

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} f^{-1}\mathscr{F}\,[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}].$$

3.4.6. PROPOSITION [10]. — (i) *Le foncteur $f^!$ envoie $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ dans $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.*

(ii) *Si f est lisse, le foncteur $f^!$ envoie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.*

(iii) *Si f est lisse, le morphisme canonique*

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \,\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} f^{!(m)}\mathscr{F} \longrightarrow f^{!(m')}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \,\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} \mathscr{F})$$

est un isomorphisme pour tout $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$.

Les assertions (i) et (ii) résultent des propriétés analogues sur les S_i. Pour prouver l'assertion (iii), on introduit sur $\mathscr{X}$ le complexe de Spencer relatif $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} \otimes \wedge^{\bullet}\mathscr{T}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}$, et on montre que le morphisme naturel

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} \otimes \wedge^{\bullet}\mathscr{T}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}}$$

est une isogénie de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

3.4.7. Soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ deux $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ le $\mathscr{V}$-schéma formel produit. On étend par la même méthode le produit tensoriel externe en un bifoncteur

$$\widehat{\boxtimes}^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathscr{S}}} \,:\, D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \times D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow D^{-}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}}),$$

qui envoie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \times D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}$). On procède de même pour étendre sa construction en un bifoncteur entre les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}$, et entre les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}$.

Lorsqu'on dispose de relèvements $F_{\mathscr{X}} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$, $F_{\mathscr{Y}} : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}'$ de $F^s_{X_0/S_0}$ et $F^s_{Y_0/S_0}$, et que l'on définit $F_{\mathscr{Z}} : \mathscr{Z} \to \mathscr{Z}'$ comme étant le produit $F_{\mathscr{X}} \times F_{\mathscr{Y}}$, on obtient pour $\mathscr{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$ et $\mathscr{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}'})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}$) un isomorphisme canonique de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{Z}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}$)

$$F_{\mathscr{X}}^{*}\mathscr{E}' \,\widehat{\boxtimes}^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathscr{S}}} F_{\mathscr{Y}}^{*}\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_{\mathscr{Z}}^{*}(\mathscr{E}' \,\widehat{\boxtimes}^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{F}'). \tag{3.4.7.1}$$

3.5. Image directe et dualité

Indiquons maintenant comment s'appliquent les méthodes de 3.2 et 3.3 pour l'étude des images directes, et pour étendre le théorème de dualité relative.

3.5.1. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. Pour tout $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, on définit l'image directe de $\mathscr{E}$ en posant

$$f_+\mathscr{E} := \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{Y*}(f_{\bullet +}(\mathbb{L}\underleftarrow{l}^*_X\mathscr{E})), \tag{3.5.1.1}$$

où $f_\bullet$ est défini comme en 3.4.2, et, pour $\mathscr{E}_\bullet \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet})$, $f_{\bullet +}\mathscr{E}_\bullet$ est le complexe

$$f_{\bullet +}\mathscr{E}_\bullet := \mathbb{R}f_{\bullet *}(\mathscr{D}^{(m)}_{Y_\bullet \leftarrow X_\bullet} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet}} \mathscr{E}_\bullet).$$

Nous poserons encore $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}} = \varprojlim_i \mathscr{D}^{(m)}_{Y_i\leftarrow X_i}$. On dispose sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}}$ d'une structure de $(f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$-bimodule, et il existe dans $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ un morphisme canonique

$$\mathbb{R}f_*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}) \longrightarrow f_+\mathscr{E}. \tag{3.5.1.2}$$

On vérifie que c'est un isomorphisme lorsque $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

Grâce au théorème de changement de base 2.4.2, les propriétés établies modulo p^i s'étendent sur $\mathscr{X}$. Donnons d'abord un énoncé ne nécessitant que la quasi-cohérence :

3.5.2. PROPOSITION. — *Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ deux morphismes de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses.*

(i) *Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $f_+\mathscr{E}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}})$ un isomorphisme canonique*

$$g_+(f_+\mathscr{E})) \xrightarrow{\ \sim\ } (g \circ f)_+\mathscr{E}. \tag{3.5.2.1}$$

Lorsque $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, on obtient de même le théorème de finitude pour les images directes par un morphisme propre :

3.5.3. THÉORÈME. — *Supposons que $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ soit un morphisme propre.*

(i) *Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $f_+\mathscr{E}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, et tout $m' \geq m$, il existe un isomorphisme canonique*

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}} f_{+^{(m)}}\mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } f_{+^{(m')}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}). \tag{3.5.3.1}$$

3.5.4. Par passage à la limite, on obtient également la commutation de f_+ aux images inverses par Frobenius définies en 3.1.4. Supposons en effet qu'on soit sous les hypothèses de 3.4.4. En utilisant la finitude de $F_{\mathscr{X}}$ et $F_{\mathscr{Y}}$ et la quasi-cohérence des images directes, on voit que la commutation de f_+ aux images inverses par Frobenius dans le cas algébrique, vue en 2.4.6, entraîne qu'il existe pour tout $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'})$ un isomorphisme canonique

$$f_{+^{(m+s)}}(F^*_{\mathcal{X}}\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} F^*_{\mathcal{Y}}\, f'_{+^{(m)}}\mathcal{E}' \tag{3.5.4.1}$$

dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$.

3.5.5. Le foncteur f_+ se factorise en un foncteur encore noté

$$f_+ \,:\, D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}),$$

qui vérifie les mêmes propriétés que sur $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$. Compte tenu de ce que le foncteur $\mathbb{R}f_*$ commute à la tensorisation par $\mathbb{Q}$, on voit que le foncteur composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\approx} D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}) \hookrightarrow D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}) \xrightarrow{f_+} D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}) \longrightarrow D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$$

s'identifie canoniquement au foncteur qui associe à $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ le complexe

$$\mathbb{R}f_*(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{X},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}).$$

Lorsque f est lisse, on dispose par passage à la limite à partir de (2.4.6.2) d'un morphisme de complexes

$$\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}[d_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}] \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{X}}. \tag{3.5.5.1}$$

C'est un isomorphisme pour $m = 0$, et une isogénie pour tout m. Pour tout $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$, on obtient donc dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$ un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R}f_*(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E})[d_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}] \xrightarrow{\sim} f_+\mathcal{E}. \tag{3.5.5.2}$$

3.5.6. Soit $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}) = D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ un complexe parfait. Comme dans le cas algébrique, on définit le complexe dual en posant [52]

$$\mathbb{D}(\mathcal{E}) \;:=\; \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}}(\mathcal{E}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X}}[d_{\mathcal{X}}]).$$

Le complexe $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ appartient à $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$, donc est quasi-cohérent, et on en déduit des isomorphismes canoniques

$$\mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}\mathbb{L}\underleftarrow{l}^*_X\,\mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_{X_\bullet}}(\mathbb{L}\underleftarrow{l}^*_X\,\mathcal{E}, \mathcal{D}^{(m)}_{X_\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{X_\bullet}} \omega^{-1}_{X_\bullet}[d_{\mathcal{X}}]).$$

Supposons maintenant que f soit un morphisme propre. La construction du morphisme trace esquissée en 2.5.8 est suffisamment fonctorielle pour fournir, dans la catégorie dérivée des systèmes projectifs, un morphisme $\mathrm{Tr}_{f_\bullet,+} : f_{\bullet,+}\,\omega_{X_\bullet}[d_{\mathcal{X}}] \to \omega_{Y_\bullet}[d_{\mathcal{Y}}]$. En appliquant $\mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}$, on obtient donc dans $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$ un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_{f,+} \,:\, f_+(\omega_{\mathcal{X}})[d_{\mathcal{X}}] \longrightarrow \omega_{\mathcal{Y}}[d_{\mathcal{Y}}].$$

La construction du morphisme de dualité relative s'effectue alors comme dans le cas algébrique, et le théorème de dualité relative s'obtient par passage à la limite à partir de 2.5.9 :

3.5.7. THÉORÈME [49, (5.5.3)]. — *Soient $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$). Il existe alors dans $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$) un isomorphisme canonique*

$$\chi \; : \; f_+(\mathbb{D}_{\mathcal{X}}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\;\sim\;} \mathbb{D}_{\mathcal{Y}}(f_+(\mathcal{E})), \tag{3.5.7.1}$$

vérifiant la condition de transitivité pour le composé de deux morphismes propres.

4. Passage à la limite sur le niveau

Nous restons ici sous les hypothèses du chapitre précédent. Si X est un S-schéma lisse au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$, nous avons vu en 1.2.5 que le passage à la limite inductive pour m variable dans le système inductif des faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_X$ redonne le faisceau usuel $\mathcal{D}_X$, qui ne joue guère de rôle dans l'étude de la cohomologie de de Rham et de la cohomologie cristalline hors de la caractéristique nulle. Par contre, si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, un passage à la limite similaire sur les complétés $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ permet d'introduire un nouveau faisceau, noté $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}$, qui est directement lié à l'étude de la cohomologie rigide de la réduction de $\mathcal{X}$ sur k (voir [3]).

4.1. Le faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$

Nous commençons donc ici l'étude des faisceaux d'opérateurs différentiels obtenus en passant à la limite inductive pour m variable dans les systèmes de faisceaux $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})_{m\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})_{m\in\mathbb{N}}$.

4.1.1. Soit $\mathcal{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse. On définit un nouveau faisceau d'opérateurs différentiels sur $\mathcal{X}$ en posant

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}} := \varinjlim_{m} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}.$$

Il sera appelé *faisceau des opérateurs différentiels* (d'ordre infini) *de niveau fini sur $\mathcal{X}$*. Si $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$ est le complété p-adique du faisceau usuel des opérateurs différentiels sur $\mathcal{X}$, la description des sections des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ donnée en (3.1.1.1) montre que les morphismes naturels $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$ sont injectifs. Par suite, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}$ est un sous-faisceau d'anneaux de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$. Soient $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ un ouvert affine muni de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, et $\|\text{-}\|$ une norme de Banach sur l'algèbre affinoïde $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})_{\mathbb{Q}}$ [18]. En utilisant la base $(\underline{\partial}^{[\underline{k}]})$ de $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}})$, on peut alors décrire le sous-anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}) \subset \Gamma(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}})$ sous la forme suivante [5, 2.4.4] :

$$\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}) = \{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{k}} \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}), \text{ et } \exists\, c, \eta \in \mathbb{R}, \eta < 1, \text{ tels que } \|a_{\underline{k}}\| < c\,\eta^{|\underline{k}|} \}. \tag{4.1.1.1}$$

Nous reviendrons plus loin (voir 4.4.1) sur les relations entre les conditions de décroissance qui apparaissent ici et celles, complètement analogues, de Monsky-Washnitzer [44].

Pour tout i, la réduction de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ est égale à $\mathscr{D}_{X_i}$. Par suite, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ n'est pas un faisceau d'anneaux nœthérien. De plus, $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ n'est pas de présentation finie sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$, puisque $\mathscr{O}_{X_i}$ ne l'est pas sur $\mathscr{D}_{X_i}$. Nous nous intéresserons donc essentiellement dans ce qui suit au faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.

En utilisant l'existence d'un morphisme canonique surjectif $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \to F^*\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}'}$, où $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ est un relèvement local du Frobenius de X_0, on voit que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ n'est pas non plus un faisceau d'anneaux nœthériens [8, 4.2.3]. Mais on peut néanmoins montrer :

4.1.2. THÉORÈME [5, 3.6.1 (i)]. — *Le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est cohérent* (*à gauche et à droite*).

C'est une conséquence formelle du théorème de platitude suivant :

4.1.3. THÉORÈME [5, 3.5.3]. — *Pour tout $m' \geq m$, les homomorphismes $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ sont plats à gauche et à droite.*

Il suffit de prouver que, pour tout ouvert affine $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ sur lequel il existe un système de coordonnées locales, l'homomorphisme induit entre les sections est plat. La méthode de la démonstration consiste à introduire un anneau D' tel que

$$\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \subset D' \subset \Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}}),$$

et qui possède les propriétés suivantes :

(i) $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) = D'_{\mathbb{Q}}$;

(ii) $\widehat{D}' = \Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}})$;

(iii) D' est un anneau nœthérien.

La condition (iii) entraîne que $\widehat{D}'$ est plat sur D', de sorte que l'énoncé résulte alors des conditions (i) et (ii).

4.1.4. Par passage à la limite inductive, on peut montrer que, lorsque $\mathscr{X}$ est un schéma formel affine, les théorèmes A et B sont vrais pour les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents [5, 3.6.4]. Plus précisément :

A) Tout $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est engendré par ses sections globales, et le foncteur $\Gamma(\mathscr{X}, -)$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, et celle des $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-modules de présentation finie.

B) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, $H^n(\mathscr{X}, \mathscr{E}) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

A partir de 3.1.3, les résultats précédents fournissent une estimation de la dimension homologique des anneaux $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ lorsque $\mathscr{X}$ est affine :

4.1.5. COROLLAIRE. — *Supposons que $\mathscr{X}$ soit affine, de dimension relative d sur $\mathscr{S}$. Alors :*

(i) *Tout $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module de présentation finie possède une résolution projective de type fini de longueur $2d$.*

(ii) *L'anneau $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est de dimension homologique finie, comprise entre d et $2d+1$.*

Comme en 3.1.3, on conjecture que $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est en fait de dimension homologique d.

4.1.6. *Exemples.* — Mentionnons ici quelques exemples de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents provenant de la cohomologie rigide (voir [3]). Nous noterons $\mathscr{X}_K$ la fibre générique de $\mathscr{X}$, qui est un espace analytique rigide sur K, et $\mathrm{sp} : \mathscr{X}_K \to \mathscr{X}$ le morphisme de spécialisation.

(i) Un *isocristal convergent* sur X_0 s'interprète comme la donnée d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-module localement libre de rang fini E, muni d'une connexion intégrable dont la série de Taylor converge sur le tube de la diagonale de X_0 dans $\mathscr{X}_K \times \mathscr{X}_K$. Le $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E} = \mathrm{sp}_* E$ est alors localement projectif de rang fini, et la condition de convergence permet de le munir d'une structure canonique de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module, pour laquelle il est cohérent [3, (3.1.4)]. Le foncteur sp_* définit ainsi une équivalence entre la catégorie des isocristaux convergents sur X_0 et celle des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents qui sont $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérents [5, 4.1.4]. Rappelons qu'en particulier tout F-isocristal sur X_0 est convergent (voir [4, 2.4.1]).

(ii) Soient $Z \subset X_0$ un fermé, $j : U \hookrightarrow X_0$ l'inclusion du complémentaire de Z, $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ le sous-schéma formel ouvert d'espace sous-jacent U. Pour tout faisceau F sur $\mathscr{X}_K$, on pose $j^{\dagger}F = \varinjlim_V j_{V*}\, j_V^{-1}F$, où V parcourt l'ensemble des voisinages stricts du tube $]U[_{\mathscr{X}} = \mathscr{U}_K$ de U dans $\mathscr{X}_K$. Un *isocristal sur U surconvergent le long de Z* s'interprète comme la donnée d'un $j^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-module localement libre de rang fini E, muni d'une connexion intégrable dont la série de Taylor est convergente sur un voisinage strict du tube de U dans $\mathscr{X}_K \times \mathscr{X}_K$, dans celui de X_0 dans $\mathscr{X}_K \times \mathscr{X}_K$.

Le complexe $\mathscr{E} = \mathbb{R}\mathrm{sp}_* E$ (qui est réduit au seul terme $\mathrm{sp}_* E$ lorsque Z est un diviseur) peut alors être muni d'une structure naturelle de complexe de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (*cf.* [3, (4.1.5)], en supposant $\mathscr{X}$ séparé). Il y a lieu d'observer qu'en général ses faisceaux de cohomologie ne sont pas nécessairement cohérents sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, à cause de difficultés provenant des nombres de Liouville p-adiques (voir 5.3.6 plus bas pour une discussion de ce problème).

(iii) Du point de vue de la théorie développée ici, le complexe $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*\, j^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$ constitue le substitut naturel du complexe $\mathbb{R}j_*\mathscr{O}_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$, qui n'a pas de propriétés de finitude satisfaisantes (même si $\mathscr{X}$ est propre, sa cohomologie de de Rham n'est pas de dimension finie en général). De même, si l'on pose pour tout faisceau abélien F sur $\mathscr{X}_K$

$$\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z[}(F) \;=\; \mathrm{Ker}(F \to j^{\dagger}F),$$

le complexe $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z[}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K})$ constitue le substitut naturel du complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Nous verrons en 4.4.9 que ces deux complexes sont à cohomologie $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérente.

4.2. Passage à la limite inductive et localisation dans les catégories dérivées

Comme pour les $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules et les $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-modules, on ne peut pas définir des opérations cohomologiques pour les $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-modules avec une généralité suffisante sans tenir compte de la topologie de $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$. La méthode que nous emploierons est une extension de celle que nous avons utilisée en 3.3 dans le cas des complexes de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-modules : nous ne travaillerons pas directement dans la catégorie dérivée $D(\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger})$, mais dans une catégorie triangulée convenable, munie d'un foncteur exact à valeurs dans $D(\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger})$ qui induise une équivalence entre une sous-catégorie pleine et la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger})$. Pour construire cette catégorie, nous partirons de la catégorie des systèmes inductifs de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules pour m variable, puis nous la localiserons en deux étapes : nous inverserons d'abord les ind-isogénies entre systèmes inductifs, puis nous effectuerons une localisation qui constituera une certaine forme de passage à la limite préservant la structure triangulée.

Nous nous limiterons ici aux systèmes inductifs de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules, renvoyant le lecteur à [9] pour une étude plus générale.

4.2.1. Nous travaillerons dans le topos $\mathscr{X}^{(\bullet)}$ des systèmes inductifs de faisceaux $(E^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ sur $\mathscr{X}$. On peut le considérer comme annelé par le système inductif de faisceaux d'anneaux $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)} = (\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$. Un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-module $\mathscr{E}^{(\bullet)}$ est simplement la donnée d'un système inductif de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules $\mathscr{E}^{(m)}$, tel que les applications de transition $\alpha^{(m',m)} : \mathscr{E}^{(m)} \to \mathscr{E}^{(m')}$ soient semi-linéaires par rapport aux homomorphismes $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)} \to \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m')}$. S'il n'en résulte pas de confusion, nous noterons simplement $\mathscr{E}$ un tel système, au lieu de $\mathscr{E}^{(\bullet)}$.

Sur la catégorie des systèmes inductifs, la notion d'isogénie considérée en 3.3 n'est plus suffisante, car on souhaite pouvoir considérer des morphismes f pour lesquels l'entier n tel qu'il existe g vérifiant $g \circ f = n$, $f \circ g = n$, puisse varier avec m sans être nécessairement borné. On est ainsi conduit à remplacer cette notion par la notion plus souple de ind-isogénie introduite plus bas. Nous nous limiterons ici au cas des p-isogénies, *i.e.* telles que n soit une puissance de p, en renvoyant à [9] pour le cas général.

Soit M l'ensemble des applications croissantes $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, qui est lui même un ensemble ordonné filtrant. On peut associer à tout $\chi \in M$ un foncteur exact χ^* de la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-modules dans elle-même en associant à un système inductif $(\mathscr{E}^{(m)}, \alpha^{(m',m)})$ le système inductif obtenu en posant $(\chi^*\mathscr{E})^{(m)} = \mathscr{E}^{(m)}$, et en prenant pour morphismes de transition les morphismes $p^{\chi(m')-\chi(m)}\alpha^{(m',m)} : \mathscr{E}^{(m)} \to \mathscr{E}^{(m')}$, $m \leq m'$. On dispose alors d'un morphisme naturel de systèmes inductifs $\theta_{\mathscr{E},\chi} : \mathscr{E} \to \chi^*\mathscr{E}$, défini par la multiplication par $p^{\chi(m)}$ sur $\mathscr{E}^{(m)}$.

Les foncteurs χ^* passent à la catégorie dérivée $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$. Nous dirons qu'un morphisme $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ de $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ est une *ind-isogénie* s'il existe $\chi \in M$, et un morphisme $g : \mathscr{F} \to \chi^*\mathscr{E}$ de $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, tels que $g \circ f = \theta_{\mathscr{E},\chi}$ et $\chi^*(f) \circ g = \theta_{\mathscr{F},\chi}$. Les ind-isogénies forment un système multiplicatif Ξ compatible avec la structure triangulée de $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, qui contient les morphismes $\theta_{\mathscr{E},\chi}$. Pour $* \in \{\emptyset, +, -, \mathrm{b}\}$, nous noterons $\underset{\rightarrow}{D}{}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ la catégorie triangulée obtenue en localisant $D^*(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ par rapport à $\Xi \cap D^*(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$. Si $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ sont deux systèmes inductifs, on a donc

$$\mathrm{Hom}_{\underrightarrow{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})}(\mathscr{E},\mathscr{F}) = \varinjlim_{\chi\in M} \mathrm{Hom}_{D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})}(\mathscr{E},\chi^*\mathscr{F}).$$

La catégorie $\underrightarrow{D}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ est une sous-catégorie pleine de $\underrightarrow{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, car les foncteurs χ^* commutent à la troncation.

Il existe un foncteur exact naturel $\underrightarrow{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}) \to D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(\bullet)})$ factorisant le foncteur de tensorisation par $\mathbb{Q}$.

Exemple. — Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme lisse. Pour m variable, les morphismes (3.5.5.1) définissent un morphisme $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-linéaire à droite

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}] \longrightarrow \widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}}. \tag{4.2.1.1}$$

Ce morphisme est une ind-isogénie [9]. En particulier, le morphisme canonique

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}[d_{\mathscr{X}}] \longrightarrow \omega_{\mathscr{X}^{(\bullet)}},$$

où $\omega_{\mathscr{X}^{(\bullet)}}$ est le système inductif constant de valeur $\omega_{\mathscr{X}}$, est une ind-isogénie.

4.2.2. L'étape suivante consiste à remplacer le passage à la limite inductive par une autre localisation. Soit L l'ensemble des applications $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui sont croissantes, et telles que $\lambda(m) \geq m$ pour tout m. C'est de manière naturelle un ensemble ordonné filtrant. Pour tout $\lambda \in L$, et tout $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-module $\mathscr{E}$, nous noterons $\lambda^*\mathscr{E}$ le $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-module tel que $(\lambda^*\mathscr{E})^{(m)} = \mathscr{E}^{(\lambda(m))}$, et que, pour $m' \geq m$, le morphisme de transition $(\lambda^*\mathscr{E})^{(m)} \to (\lambda^*\mathscr{E})^{(m')}$ soit le morphisme donné $\mathscr{E}^{(\lambda(m))} \to \mathscr{E}^{(\lambda(m'))}$. On dispose d'un morphisme canonique $\rho_{\mathscr{E},\lambda} : \mathscr{E} \to \lambda^*\mathscr{E}$. Le foncteur λ^* est exact, et s'étend donc en un foncteur exact sur $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$. Il est facile de voir que λ^* transforme une ind-isogénie en ind-isogénie, de sorte qu'il s'étend également à la catégorie localisée $\underrightarrow{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ par rapport à Ξ.

Soit Λ l'ensemble des morphismes $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ de $\underrightarrow{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ tels qu'il existe $\lambda \in L$, et un morphisme $g : \mathscr{F} \to \lambda^*\mathscr{E}$, tels que $g \circ f = \rho_{\mathscr{E},\lambda}$ et $\lambda^*(f) \circ g = \rho_{\mathscr{F},\lambda}$. L'ensemble Λ est encore un système multiplicatif, compatible à la structure triangulée de $\underrightarrow{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$. Pour $* \in \{\emptyset, +, -, \mathrm{b}\}$, on note $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ la catégorie triangulée déduite de $\underrightarrow{D}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ par localisation par rapport à $\Lambda \cap \underrightarrow{D}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$. La catégorie $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ est encore une sous-catégorie pleine de $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$. Si $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ sont deux complexes de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-modules, on a par construction

$$\mathrm{Hom}_{\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})}(\mathscr{E},\mathscr{F}) = \varinjlim_{\lambda\in L}\varinjlim_{\chi\in M} \mathrm{Hom}_{D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})}(\mathscr{E},\lambda^*\chi^*\mathscr{F}).$$

Le foncteur $\varinjlim$, allant de la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-modules vers celle des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules, est un foncteur exact. Il s'étend en un foncteur exact $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}) \to D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$. Par composition avec le foncteur de tensorisation par $\mathbb{Q}$, une ind-isogénie est transformée en isomorphisme, ce qui fournit une extension de $\varinjlim$ en un foncteur $\underrightarrow{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}) \to D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Celui-ci transforme tout morphisme de Λ en un isomorphisme, d'où finalement un foncteur

$$\varinjlim \;:\; \underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}) \longrightarrow D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}).$$

Pour $* \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, ce foncteur envoie $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ dans $D^*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.

4.2.3. On peut introduire des conditions de finitude sur les objets de $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$.

(i) Soit $\mathscr{E} \in \underrightarrow{LD}^-_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$). Nous dirons que $\mathscr{E}$ est *quasi-cohérent* s'il est isomorphe dans $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ à un complexe $\mathscr{E}'$ tel que, pour tout m, le complexe $\mathscr{E}'^{(m)}$ soit dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$). Pour $* \in \{-, \mathrm{b}\}$, la sous-catégorie pleine de $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ dont les objets sont les complexes quasi-cohérents sera notée $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Il est facile de vérifier que c'est une sous-catégorie triangulée de $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$.

(ii) Notons d'abord que, si $\lambda \in L$, tout $\lambda^*\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$-module $\mathscr{F}$ peut être considéré comme un $\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$-module par l'intermédiaire du morphisme $\rho_{\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}},\lambda} : \widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}} \to \lambda^*\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$. Pour $* \in \{-, \mathrm{b}\}$, soit $\mathscr{E} \in \underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Nous dirons que $\mathscr{E}$ est *cohérent* s'il existe $\lambda \in L$, $\mathscr{E}' \in \underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\lambda^*\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, et un isomorphisme $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}'$ dans $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, tels que $\mathscr{E}'$ vérifie les conditions suivantes :

a) Pour tout m, $\mathscr{E}'^{(m)} \in D^*_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\lambda(m))}_{\mathscr{X}})$;

b) Pour tous $m \leq m'$, le morphisme canonique

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(\lambda(m'))}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(\lambda(m))}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}'^{(m)} \longrightarrow \mathscr{E}'^{(m')}$$

est un isomorphisme.

Bien que ce soit moins évident sur la définition, la sous-catégorie pleine de $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ dont les objets sont les complexes cohérents est aussi une sous-catégorie triangulée de $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Nous la noterons $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. C'est une sous-catégorie de $\underrightarrow{LD}^*_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$.

Exemple. — Le système constant de valeur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ est cohérent dans $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, car le complexe $\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ vérifie les conditions a) et b) ci-dessus, et le morphisme canonique

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{O}_{\mathscr{X}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$$

est une ind-isogénie.

L'intérêt de cette notion de cohérence provient du théorème suivant :

4.2.4. THÉORÈME [9]. — *Le foncteur* $\varinjlim$ *induit une équivalence de catégories*

$$\varinjlim \; : \; \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\;\approx\;} D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}).$$

4.3. Opérations cohomologiques sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$

La méthode générale que nous suivrons consiste à définir des opérations cohomologiques entre les catégories $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ (pour $\mathscr{X}$ variable), en factorisant grâce à la propriété universelle des catégories localisées les opérations dont on dispose sur $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ au moyen des constructions antérieures. Ces opérations vérifieront alors automatiquement les mêmes relations que sur les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$. D'autre part, on s'assure que, lorsqu'on compose avec le foncteur $\varinjlim$, et qu'on identifie la sous-catégorie $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ par 4.2.4, on retrouve les définitions classiques de ces opérations.

4.3.1. Considérons d'abord la descente par Frobenius. On reprend ici les hypothèses de 3.1.4. Pour m assez grand, l'idéal maximal de $\mathscr{V}$ possède une m-PD-structure, de sorte que $F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ possède une structure canonique de $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$-bimodule, et $F^{\flat}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ une structure canonique de $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}})$-bimodule. Par passage à la limite inductive sur m, il en résulte que $F^*\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ et $F^{\flat}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ possèdent respectivement une structure canonique de $(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$-bimodule et de $(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-bimodule.

En passant à la limite inductive dans les isomorphismes (3.1.4.1), on en déduit des isomorphismes de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-bimodules et de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-bimodules

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*F^{\flat}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}, \qquad F^{\flat}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}.$$

Il en résulte que les foncteurs $\mathscr{E}' \longmapsto F^*\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E} \longmapsto F^{\flat}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-modules à gauche et celle des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche, préservant les conditions de finitude usuelles, et induisant une équivalence entre $D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$ et $D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.

De même, les foncteurs $\mathscr{E}' \longmapsto F^*\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E} \longmapsto F^{\flat}\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}'} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$ se factorisent par les catégories localisées construites en 4.2, et induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre les catégories $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}'})$ et $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, préservant les sous-catégories $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}$ et $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}$. Le foncteur $\varinjlim$ commute à ces équivalences.

4.3.2. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. En appliquant les foncteurs $\mathbb{L}\underleftarrow{l}^*_X$ et $\mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}$ sur la catégorie des système inductifs, on définit comme en 3.4.2 un foncteur $f^! : D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \to D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Sa factorisation par les catégories localisées construites en 4.2 fournit un foncteur $\underrightarrow{LD}^-_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \to \underrightarrow{LD}^-_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, qui induit un foncteur

$$f^! : \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}). \tag{4.3.2.1}$$

Si $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ est un second morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, et si $\mathscr{G} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}})$, on dispose alors dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ de la formule de transitivité

$$f^!(g^!\mathscr{G})) \xrightarrow{\ \sim\ } (g\circ f)^!\mathscr{G}.$$

En effet, celle-ci résulte par construction de (3.4.3.1).

Soit d'autre part $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$; c'est un $(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}, f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$-bimodule. Le foncteur composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\ \approx\ } \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \xrightarrow{\ f^!\ } \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\ \varinjlim\ } D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$$

est alors canoniquement isomorphe au foncteur

$$\mathscr{F} \longmapsto \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} f^{-1}\mathscr{F}. \tag{4.3.2.2}$$

Lorsque $f^!$ envoie $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$ dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, nous pourrons ainsi identifier grâce à 4.2.4 le foncteur $f^!$ au foncteur défini par (4.3.2.2), et le considérer comme un foncteur que nous noterons encore généralement $f^! : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Cette situation se produit notamment lorsque f est lisse, grâce à 3.4.6 :

4.3.3. THÉORÈME [10]. — *Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme lisse de $\mathscr{V}$-schémas formels.*

(i) *Pour tout $\mathscr{F} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$, le complexe $f^!\mathscr{F}$ appartient à $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$.*

(ii) *Soit $\mathscr{F}^{(m)} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$. Si l'on considère $f^!$ comme un foncteur de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ grâce à* (i) *et* 4.2.4, *il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} f^{!(m)}\mathscr{F}^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } f^!(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} \mathscr{F}^{(m)}). \tag{4.3.3.1}$$

A partir de 3.4.4, on obtient par ailleurs :

4.3.4. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 3.4.4, *il existe pour tout $\mathscr{F}' \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}'})$ un isomorphisme canonique de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$*

$$f^!F^*_{\mathscr{Y}}\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*_{\mathscr{X}}f'^!\mathscr{F}'. \tag{4.3.4.1}$$

Lorsque f est lisse et $\mathscr{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}',\mathbb{Q}})$, cet isomorphisme peut être vu comme un isomorphisme de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ via 4.2.4.

4.3.5. Soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ deux $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Le produit tensoriel externe construit en 3.4.7 s'étend en un bifoncteur

$$\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathscr{S}}} : \underrightarrow{LD}^{-}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \times \underrightarrow{LD}^{-}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow \underrightarrow{LD}^{-}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}}).$$

On vérifie qu'il induit un bifoncteur

$$\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \times \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}}),$$

de sorte qu'on peut utiliser 4.2.4 et le considérer comme un bifoncteur

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \times D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \longrightarrow D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}).$$

Lorsqu'on dispose de relèvements de Frobenius comme en 3.4.7, on obtient, pour $\mathscr{E}' \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}'})$, $\mathscr{F}' \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}'})$, un isomorphisme canonique

$$F^*_{\mathscr{X}}\mathscr{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathscr{S}}} F^*_{\mathscr{Y}}\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*_{\mathscr{Z}}(\mathscr{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{F}'). \tag{4.3.5.1}$$

Lorsque $\mathscr{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$, $\mathscr{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}',\mathbb{Q}})$, on peut encore le considérer comme un isomorphisme de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}})$.

4.3.6. Considérons à nouveau un morphisme $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. Appliquant la méthode de 3.5.1 au niveau de la catégorie dérivée des systèmes inductifs, on obtient un foncteur $f_+ : D^-(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}) \to D^-(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}}^{(\bullet)})$. En le factorisant par les catégories $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}$, et en utilisant la préservation de la quasi-cohérence vue en 3.5.2, on obtient un foncteur

$$f_+ : \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}) \longrightarrow \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}}^{(\bullet)}). \tag{4.3.6.1}$$

Si $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ est un second morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, et si $\mathscr{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, on déduit encore de 3.5.2 l'isomorphisme de transitivité

$$g_+(f_+\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} (g \circ f)_+\mathscr{E} \tag{4.3.6.2}$$

dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Z}}^{(\bullet)})$.

Supposons que f soit un morphisme lisse. Comme le morphisme (4.2.1.1) est une ind-isogénie, on en déduit pour tout $\mathscr{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ un isomorphisme de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{Y}})$

$$\mathbb{R}f_*(\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E})[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}] \xrightarrow{\sim} f_+\mathscr{E}. \tag{4.3.6.3}$$

4.3.7. On introduit d'autre part le $(f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-bimodule $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Le foncteur composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\approx} \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}) \xrightarrow{f_+} \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\varinjlim} D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$$

est alors canoniquement isomorphe au foncteur

$$\mathscr{E} \longmapsto \mathbb{R}f_*(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}). \tag{4.3.7.1}$$

Lorsque f_+ envoie $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}}^{(\bullet)})$, nous utiliserons à nouveau 4.2.4 pour considérer f_+ comme un foncteur encore noté $f_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$.

Grâce au théorème de finitude suivant, dont la démonstration repose sur 3.5.3, cette situation se produit notamment lorsque f est propre :

4.3.8. THÉORÈME [10]. — *Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme propre de $\mathscr{V}$-schémas formels.*

(i) *Pour tout $\mathscr{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, le complexe $f_+\mathscr{E}$ appartient à $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}}^{(\bullet)})$.*

(ii) *Soit $\mathscr{E}^{(m)} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Si l'on considère f_+ comme un foncteur de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ grâce à* (i) *et* 4.2.4, *il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} f_{+^{(m)}}(\mathscr{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} f_+(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)}). \tag{4.3.8.1}$$

Enfin, on déduit de 3.5.4 la commutation du foncteur f_+ aux images inverses par Frobenius :

4.3.9. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 3.4.4, *il existe pour tout $\mathscr{E}' \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(\bullet)})$ un isomorphisme canonique de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}}^{(\bullet)})$*

$$f_+(F^*_{\mathscr{X}}\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} F^*_{\mathscr{Y}} f'_+\mathscr{E}'. \tag{4.3.9.1}$$

Lorsque f est propre et $\mathscr{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$, cet isomorphisme peut être considéré comme un *isomorphisme de* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ *via* 4.2.4.

4.3.10. Si $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) = D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, on définit son dual en posant

$$\mathbb{D}(\mathscr{E}) \ := \ \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{E}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega^{-1}_{\mathscr{X}}[d_{\mathscr{X}}]),$$

qui est lui aussi un complexe de $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. On dispose encore de l'isomorphisme de dualité locale

$$\mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{D}(\mathbb{D}(\mathscr{E})).$$

Soit $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un relèvement de $F^{s}_{X_0/S_0}$. En procédant comme dans le cas algébrique, on obtient pour $\mathscr{E}' \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$ l'isomorphisme de commutation du dual à l'image inverse par Frobenius [52]

$$F^{*}\mathbb{D}_{\mathscr{X}'}(\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathscr{X}}(F^{*}\mathscr{E}'). \tag{4.3.10.1}$$

4.3.11. S'il existe un entier m, un complexe $\mathscr{E}^{(m)} \in D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ et un isomorphisme

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E},$$

on en déduit un isomorphisme

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathscr{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathscr{E}).$$

De même, si l'on se limite aux systèmes inductifs indexés par les entiers $m' \geq m$ et que l'on pose

$$\mathscr{E}^{(\bullet)} \ := \ \widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}^{(m)},$$

on peut définir dans $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ un système inductif $\mathbb{D}(\mathscr{E}^{(\bullet)})^{(\bullet)}$, tel que, pour tout $m' \geq m$, on ait $\mathbb{D}(\mathscr{E}^{(\bullet)})^{(m')} \simeq \mathbb{D}^{(m')}(\mathscr{E}^{(m')})$. En appliquant le foncteur $\varinjlim : D(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \to D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) \to D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, on obtient alors l'isomorphisme

$$\varinjlim \mathbb{D}(\mathscr{E}^{(\bullet)})^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathscr{E}).$$

4.3.12. Supposons que $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ soit un morphisme propre de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. Pour tout m, on dispose d'après 3.5.6 d'un morphisme trace $\mathrm{Tr}^{(m)}_{f,+} : f^{(m)}_{+}(\omega_{\mathscr{X}})[d_{\mathscr{X}}] \to \omega_{\mathscr{Y}}[d_{\mathscr{Y}}]$ dans $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{Y}})$. En utilisant le foncteur $f^{(\bullet)}_{+} : D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{X}}) \to D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{Y}})$ défini pour les modules à droite de manière analogue à 4.3.6, on montre que ces morphismes proviennent d'un morphisme

$$\mathrm{Tr}^{(\bullet)}_{f,+} \ : \ f^{(\bullet)}_{+}(\omega_{\mathscr{X}})[d_{\mathscr{X}}] \to \omega_{\mathscr{Y}}[d_{\mathscr{Y}}]$$

dans la catégorie dérivée $D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{Y}})$. En appliquant le foncteur $\varinjlim$, on en déduit un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}^{\dagger}_{f,+} \ : \ f_{+}(\omega_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})[d_{\mathscr{X}}] \longrightarrow \omega_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}[d_{\mathscr{Y}}]$$

dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, où l'on peut prendre $f_+(\omega_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) = \mathbb{R}f_*(\omega_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ grâce au théorème de finitude symétrique de 4.3.8 pour les modules à droite.

Comme précédemment, le morphisme trace permet de définir pour tout complexe $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ un morphisme de dualité relative. Par un passage à la limite basé sur 4.3.11, on obtient alors à partir du cas des complexes parfaits de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules le théorème de dualité relative pour les complexes parfaits de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules :

4.3.13. THÉORÈME [49, (5.7.2)]. — *Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme propre de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. Pour tout complexe $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, il existe un isomorphisme canonique*

$$\chi \ : \ f_+(\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E})) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{D}_{\mathscr{Y}}(f_+(\mathscr{E})) \tag{4.3.13.1}$$

dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$.

4.4. Cohérence des faisceaux de fonctions à singularités surconvergentes

Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel propre et lisse, de réduction $X = X_0$ sur k, $Z \subset X$ un diviseur, $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire, $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ le sous-schéma formel ouvert dont l'espace sous-jacent est U. Avec les notations de 4.1.6, le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z) := \mathrm{sp}_* \, j^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$ possède une structure naturelle de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module. D'autre part, la cohomologie rigide de U est, essentiellement par construction [7], la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$. Il résulte alors de l'isomorphisme de comparaison (4.3.6.3) et du théorème de finitude 4.3.8 que, si l'on peut montrer que $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ est cohérent en tant que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module, les espaces de cohomologie rigide $H^n_{\mathrm{rig}}(U/K)$ sont des K-espaces vectoriels de dimension finie. Bien qu'il existe par ailleurs des démonstrations directes de la finitude de la cohomologie rigide (voir [7], [25], [43]), la cohérence de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est un résultat essentiel pour l'étude de celle-ci, ne serait-ce que parce qu'il permet d'obtenir des théorèmes de finitude plus généraux, utilisant par exemple la cohérence des images directes par un morphisme propre.

Nous expliquons ici, en suivant la méthode présentée dans [6], comment les résultats qui précèdent permettent de prouver la cohérence sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$, et, plus généralement, des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules associés à une sous-variété localement fermée de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$.

4.4.1. On commence par construire (*cf.* [5, 4.2]) un système inductif de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-algèbres $\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z)$, p-adiquement séparées et complètes, munies d'une action de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, qui soient des modèles entiers des algèbres affinoïdes de certains voisinages stricts du tube $\mathscr{U}_K$ de U dans $\mathscr{X}_K$, et telles que l'on ait un isomorphisme $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire

$$\varinjlim_{m} \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_* \, j^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}.$$

Pour cela, on part d'une situation algébrique « universelle ». Fixons un entier $m \in \mathbb{N}$, et soient $\mathbb{A} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_{(p)}[t]$, $r \in \mathbb{N}$ un entier tel que $p^{m+1} \mid r$, T une indéterminée. On pose

$$\mathscr{B}(t, r) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}}[T]/(t^r T - p).$$

L'algèbre $\mathscr{B}(t, r)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}[1/t] \otimes \mathbb{Q}$, et on vérifie qu'elle est stable par l'action de $\mathscr{D}_{\mathbb{A}}^{(m)} \subset \mathscr{D}_{\mathbb{A}} \otimes \mathbb{Q}$ [5, 4.2.1].

Soient S un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma, X un S-schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. La donnée de f définit un unique morphisme $\varphi : X \to \mathbb{A}$ tel que $\varphi^*(t) = f$. On a alors

$$\varphi^* \mathscr{B}(t, r) = \mathcal{O}_X[T]/(f^r T - p),$$

et, d'après 2.2.1, l'algèbre $\mathscr{B}(f, r) := \varphi^* \mathscr{B}(t, r)$ est munie d'une structure canonique de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module. On vérifie que cette structure est compatible à la multiplication sur $\mathscr{B}(f, r)$, *i.e.* donne naissance à des formules du type de la formule de Leibnitz pour décrire l'action des opérateurs $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ sur un produit de deux éléments (voir [5, 2.3.4]).

Supposons que S soit muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, m-PD-nilpotent. Soient $S_0 \subset S$ le sous-schéma fermé défini par $\mathfrak{a}$, X_0 la réduction de X modulo $\mathfrak{a}$, $Z \subset X_0$ un diviseur. Grâce à l'action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ sur $\mathscr{B}(f, r)$, on peut identifier canoniquement les algèbres $\mathscr{B}(f, r)$ et $\mathscr{B}(g, r)$ associées à des sections de $\mathcal{O}_X$ relevant deux équations locales de Z dans X_0 [5, 4.2.2]. Par recollement, on associe ainsi canoniquement au diviseur Z une $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathscr{B}_X(Z, r)$ munie d'une action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ compatible avec sa structure d'algèbre. Nous noterons $\mathscr{B}_X^{(m)}(Z)$ l'algèbre $\mathscr{B}_X(Z, p^{m+1})$. Il résulte de cette construction que, si $g : X' \to X$ est un morphisme de S-schémas lisses, tel que l'image inverse Z' de Z dans X'_0 soit un diviseur, il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres $g^* \mathscr{B}_X(Z, r) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_{X'}(Z', r)$, compatible à l'action de $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$.

Soient maintenant $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, X_i sa réduction modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$. La donnée du diviseur $Z \subset X_0$ permet de construire, pour tout m assez grand pour que $\mathfrak{m}$ soit muni d'une m-PD-structure m-PD-nilpotente, et tout r tel que $p^{m+1} \mid r$, une $\mathcal{O}_{X_i}$-algèbre $\mathscr{B}_{X_i}(Z, r)$ munie d'une action de $\mathscr{D}_{X_i}^{(m)}$. En passant à la limite projective pour i variable, on obtient donc une $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-algèbre

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z, r) := \varprojlim_i \mathscr{B}_{X_i}(Z, r)$$

munie d'une action de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$. Si $\mathscr{X}$ est affine, posons $A = \Gamma(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}})$, $B = \Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z, r))$, et supposons que $f \in A$ relève une équation de Z dans X_0. On a alors

$$B = A\{T\}/(f^r T - p),$$

et $B \otimes \mathbb{Q}$ est l'algèbre de l'ouvert affinoïde de $\mathscr{X}_K$ défini par la condition $|f(x)| \geq |p|^{1/r}$, qui est un voisinage strict de $\mathscr{U}_K$, lui-même défini par la condition $|f(x)| = 1$.

Pour tout m assez grand, nous poserons

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}^{(m)}(Z) := \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z, p^{m+1}), \quad \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}(Z) := \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}^{(m)}(Z) \otimes \mathbb{Q}, \quad \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) := \varinjlim_m \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}(Z).$$

D'après sa construction, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ est muni d'une action naturelle de $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^\dagger$, et il s'identifie canoniquement à $\mathrm{sp}_* j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$. Il sera appelé *faisceau des fonctions à singularités surconvergentes le long de* Z. Il ne dépend que du support du diviseur Z. Lorsque $\mathcal{X}$ est affine, et f comme plus haut, ses sections sur $\mathcal{X}$ s'interprètent aussi comme le complété faible de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})[1/f]$ au sens de Monsky-Washnitzer [44], tensorisé par $\mathbb{Q}$.

Pour prouver la cohérence de ce faisceau sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, on traite d'abord le cas d'un diviseur à croisements normaux stricts :

4.4.2. LEMME [3, (4.3.2)]. — *Si Z est un diviseur à croisements normaux stricts, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ est cohérent sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$.*

Pour le voir, on peut supposer que $\mathcal{X}$ possède un système de coordonnées locales $t_1,\ldots,t_d$ tel que Z soit défini modulo $\mathfrak{m}$ par l'équation $t_1 \ldots t_r$, $1 \le r \le d$, et on montre alors par un calcul explicite que $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ possède la présentation

$$(\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})^d \xrightarrow{\ \psi\ } \mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) \longrightarrow 0,$$

avec $\varphi(P) = P.(1/t_1 \ldots t_r)$, et

$$\psi(P_1,\ldots,P_d) \ = \ \sum_{i=1}^{r} P_i \partial_i t_i + \sum_{i=r+1}^{d} P_i \partial_i .$$

4.4.3. Nous aurons à travailler avec une généralisation des faisceaux d'opérateurs différentiels considérés jusqu'ici, obtenue en considérant non seulement des opérateurs à coefficients dans le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ (ou $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$), mais plus généralement dans un faisceau d'algèbres muni d'une opération des faisceaux précédents.

Soient m un entier, S un schéma (au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$ si $m \ge 1$), X un S-schéma lisse, $\mathscr{B}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre munie d'une action de $\mathscr{D}^{(m)}_X$ compatible à sa structure d'algèbre. On peut alors munir le faisceau $\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}^{(m)}_X$ d'une structure naturelle de faisceau d'anneaux, telle que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}^{(m)}_X$ en soient des sous-anneaux, et que les produits $(1 \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle})(b \otimes 1)$ soient donnés par la formule de Leibnitz [5, 2.3.5]. Lorsque $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, on obtient ainsi pour tout diviseur $Z \subset X_0$ des faisceaux d'anneaux

$$\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \ := \ \varprojlim_i \, (\mathscr{B}^{(m)}_{X_i}(Z) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathscr{D}^{(m)}_{X_i}),$$

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) \ := \ \varinjlim_m \, (\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})_{\mathbb{Q}}.$$

Le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ sera appelé *faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini* (et d'ordre infini), *à singularités surconvergentes le long de* Z.

Les résultats des chapitres précédents s'étendent directement aux complexes sur des faisceaux d'anneaux de la forme $\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}^{(m)}_X$, $\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ ou $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$. Pour ne pas alourdir ce texte, nous ne les détaillerons pas ici, et nous les utiliserons librement dans la suite quand cela sera nécessaire (pour des énoncés en forme, le lecteur pourra consulter [5], [8], [10], [49], [52], …). Il convient seulement de prendre garde que ces anneaux ne sont plus nécessairement de dimension homologique finie, de sorte qu'il y a lieu de travailler systématiquement avec les catégories dérivées de complexes parfaits D_{parf}, plutôt qu'avec les catégories dérivées de complexes bornés à cohomologie cohérente $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}$.

Signalons également que le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ est plat sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ [5, 4.3.11].

4.4.4. Un autre outil de la démonstration est la cohomologie locale à support strict dans un sous-schéma fermé de la fibre spéciale.

Soient m un entier, S un schéma sur lequel p est nilpotent, muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, supposé m-PD-nilpotent, S_0 le sous-schéma fermé de S défini par $\mathfrak{a}$, X un S-schéma lisse, Z un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_X$. On note $\mathscr{P}^n_{(m),\alpha}(\mathscr{I})$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m et d'ordre n de $\mathscr{I}$, compatible à α (au sens de [5, 1.4.2]). L'enveloppe $\mathscr{P}_{(m),\alpha}(\mathscr{I})$ possède une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module, telle que, pour tous n, $n' \in \mathbb{N}$, tout $P \in \mathscr{D}^{(m)}_{X,n}$ et tout $x \in \overline{\mathscr{I}}^{\{n'\}}$, on ait $Px \in \overline{\mathscr{I}}^{\{n'-n\}}$. Il en résulte que, pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module $\mathscr{E}$, le faisceau

$$\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathscr{E}) \ := \ \varinjlim_n \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^n_{(m),\alpha}(\mathscr{I}), \mathscr{E})$$

possède une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module.

Les conditions de compatibilité à la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$ et de nilpotence entraînent que $\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathscr{E})$ ne dépend que de la réduction de Z modulo $\mathfrak{a}$. Le foncteur dérivé $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ joue dans une certaine mesure le rôle de cohomologie locale à support dans Z, et nous noterons son n-ième faisceau de cohomologie $\mathscr{H}^{(m),n}_Z(\mathscr{E})$. Bien que le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ ne vérifie pas en général les propriétés topologiques de la cohomologie à supports dans un fermé (il faut pour cela passer au niveau des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules comme nous le ferons plus loin), il se comporte à certains égards de manière analogue lorsque Z est lisse sur S_0 (ou sur S), et nous l'appellerons *cohomologie locale à support strict dans* Z (*de niveau* m). Ainsi, si r est la codimension de Z dans X, la description locale de la structure des $\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I})$ donnée en 1.1.4 entraîne alors que, pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module $\mathscr{E}$, les $\mathscr{H}^{(m),n}_Z(\mathscr{E})$ sont nuls pour $n \notin [0, r]$, et que le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ est défini sur $D^-(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, et commute aux changements de base $S' \to S$. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module plat, les $\mathscr{H}^{(m),n}_Z(\mathscr{E})$ sont nuls pour $n \neq r$, et leur formation commute donc aussi aux changements de base. Enfin, le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ est alors relié comme en caractéristique nulle [17, VI 7.13] au composé de l'image inverse extraordinaire et de l'image directe :

4.4.5. Proposition [6, 1.4]. — *Soit $u : Z \hookrightarrow X$ une immersion fermée entre deux S-schémas lisses. Pour tout $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, il existe un isomorphisme canonique*

$$u_{+^{(m)}} u^{!^{(m)}} \mathscr{E} \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathscr{E}). \tag{4.4.5.1}$$

Supposons maintenant que $\mathscr{X}$ soit un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, Z un sous-schéma fermé de X_0, et reprenons les notations des sections précédentes. Soit m assez grand pour que $\mathfrak{m}$ possède une m-PD-structure m-PD-nilpotente. On peut définir le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ sur la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ en posant

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}(\mathscr{E}) \;:=\; \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}(\mathbb{L}\underleftarrow{l}^{*}_{X}\mathscr{E}),$$

où, dans le terme de droite, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}$ est pris dans la catégorie des systèmes projectifs. On étend ensuite ce foncteur aux systèmes inductifs pour m variable, et on obtient par passage aux catégories localisées un foncteur

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z} \;:\; \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}),$$

que nous appellerons *cohomologie locale à support strict dans Z* (*surconvergente*). L'énoncé précédent s'étend alors aux catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$). En particulier, lorsque $\mathscr{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ est tel que $u^{!(m)}\mathscr{E}$ appartienne à $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}})$), on obtient ainsi dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ un isomorphisme

$$u_{+}u^{!}\mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathscr{E}). \tag{4.4.5.2}$$

analogue à (4.4.5.1).

On peut alors utiliser ce résultat pour $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ afin de définir sur $\mathscr{H}^{\dagger,r}_{Z}(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) := \mathscr{H}^{r}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}))$ un isomorphisme d'autodualité :

4.4.6. LEMME [6, 2.1]. — *Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, $Z \subset X_0$ un sous-schéma fermé lisse sur k de sa fibre spéciale, de codimension r dans X_0. Il existe alors un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{D}(\mathscr{H}^{\dagger,r}_{Z}(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{H}^{\dagger,r}_{Z}(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}). \tag{4.4.6.1}$$

Indiquons maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème de cohérence :

4.4.7. THÉORÈME ([6], [10]). — *Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse de fibre spéciale X_0, $Z \subset X_0$ un diviseur. Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ des fonctions sur $\mathscr{X}$ à singularités surconvergentes le long de Z est cohérent sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.*

On peut supposer $\mathscr{X}$ affine et connexe. Grâce au théorème de de Jong sur les altérations de variétés algébriques [33], il existe un k-schéma lisse X' et un morphisme $f : X' \to X$ projectif, génériquement fini et étale, tel que $Z' = f^{-1}(Z)$ soit un diviseur à croisements normaux stricts dans X'. On choisit une immersion fermée $u : X' \hookrightarrow Y = \mathbb{P}^{r}_{X}$ de X' dans un espace projectif de base X, et on note $\mathscr{Y}$ l'espace projectif formel $\mathbb{P}^{r}_{\mathscr{X}}$ de base $\mathscr{X}$, $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ la projection, $T = g^{-1}(Z)$ l'image inverse de Z dans Y.

On pose $\mathscr{E} = \mathscr{H}^{\dagger,r}_{X'}(\mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, $\mathscr{H} = \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T) \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}$, qui peut être vu comme un complexe de $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. On vérifie d'abord que $\mathscr{H}$ est cohérent sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$. C'est une question locale sur $\mathscr{Y}$, ce qui permet de supposer u relevé en l'immersion d'un sous-schéma formel lisse $u : \mathscr{X}' \hookrightarrow \mathscr{Y}$. On construit alors un isomorphisme $\mathscr{H} \simeq u_{+}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z'))$, de sorte que l'affirmation résulte du lemme 4.4.2 et du théorème de finitude 4.3.8 dans le cas d'une immersion fermée.

Le théorème de finitude 4.3.8 entraîne alors que $g_+(\mathscr{H})$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Pour prouver l'énoncé, il suffit donc de montrer que $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ est isomorphe à un facteur direct de $g_+(\mathscr{H})$. Pour cela, on observe que, pour tout i et tout m, on a par construction $g^*\mathscr{B}^{(m)}_{X_i}(Z) \simeq \mathscr{B}^{(m)}_{Y_i}(T)$. Il en résulte que les résultats des sections précédentes s'appliquent aussi au morphisme $\tilde{g} : (\mathscr{Y}, \mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)) \to (\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z))$. Le foncteur image directe $\tilde{g}_+$ correspondant envoie $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z))$, et on dispose d'un morphisme canonique $\tilde{g}_+\mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)[r] \to \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$, déduit du morphisme trace par passage de droite à gauche. Par construction, les foncteurs $R\underline{\Gamma}^{(m)}_{X'}$ sont munis d'un morphisme canonique $R\underline{\Gamma}^{(m)}_{X'} \to \mathrm{Id}$, qui définit par passage à la limite un morphisme $\mathscr{E} \to \mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}[r]$. En tensorisant par $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)$ et en appliquant $\tilde{g}_+$, on en déduit un morphisme

$$\tau \ : \ \tilde{g}_+\mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$$

dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z))$. En prenant le dual sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$, et en utilisant le lemme 4.4.6, on obtient un morphisme en sens inverse

$$\tau' \ : \ \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) \longrightarrow \tilde{g}_+\mathscr{H}.$$

On montre alors que le composé $\tau' \circ \tau$ est égal à la multiplication par le degré générique de X' sur X, et on achève la démonstration en vérifiant que, par restriction des scalaires de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, le complexe $\tilde{g}_+\mathscr{H}$ s'identifie à $g_+\mathscr{H}$.

4.4.8. Soient maintenant $Z \subset X_0$ une sous-variété localement fermée quelconque, $\overline{Z}$ son adhérence, $T = \overline{Z} \smallsetminus Z$, $U = X_0 \smallsetminus T$, j l'inclusion de U dans X_0. Sur la fibre générique $\mathscr{X}_K$ de $\mathscr{X}$, on dispose du foncteur $j^\dagger$ des germes de sections surconvergentes au voisinage du tube $\mathscr{U}_K$ de U, et du foncteur $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}$ des sections à support strictement contenu dans le tube de $\overline{Z}$. Soit $E = j^\dagger\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$. Lorsque $\mathscr{X}$ est propre sur $\mathscr{V}$, la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}_K$ à coefficients dans E est par construction la cohomologie rigide de U à supports dans Z, de sorte que, pour la cohomologie rigide, le faisceau E joue le rôle du complexe $\mathbb{R}j_*\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z(\underline{\mathbb{C}}_U)$ dans le cas complexe (en notant $\underline{\mathbb{C}}_U$ le faisceau constant de valeur $\mathbb{C}$ sur U). Cette cohomologie de de Rham s'identifie d'autre part à la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}$ à coefficients dans le complexe $\mathscr{E} = \mathbb{R}\mathrm{sp}_*E$.

Le complexe $\mathscr{E}$ possède une structure naturelle de complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (définie par la méthode de [3, 4.1]). Par un dévissage basé sur les suites exactes de Čech de [7, 1.2], on voit que le théorème précédent implique :

4.4.9. COROLLAIRE. — *Avec les notations précédentes, le complexe* $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*\, j^\dagger\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$ *appartient à* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ *pour tout sous-variété localement fermée* $Z \subset X_0$.

4.5. Transformation de Fourier

Les faisceaux $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ construits en 4.4.1 jouent un rôle important dans l'étude des variétés ouvertes. En effet, comme on l'a vu dans la remarque de 2.4.5, le foncteur image directe usuel j_+ associé à une immersion ouverte ne se comporte pas de manière satisfaisante modulo p^n, et il en est de même sur les schémas formels. Pour cette raison, nous procéderons comme en cohomologie rigide, et nous étudierons les $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules associés à une variété quelconque au moyen de compactifications de celle-ci. Le cas le plus simple est celui où $\mathscr{X}$ est un schéma formel propre et lisse sur $\mathscr{V}$, et Z est comme précédemment un diviseur de sa fibre spéciale. En notant encore $j : \mathscr{U} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire, le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ joue le rôle d'une « image directe surconvergente » de $\mathscr{O}_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$. En ayant à l'esprit le cas algébrique, où j_* induit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{O}_U$-modules quasi-cohérents et celle des $j_*\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents, on est amené à remplacer la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$-modules cohérents par celle des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents, et le foncteur j_* (resp. j^*) par la restriction des scalaires de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ (resp. l'extension des scalaires de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$).

Nous expliquons ici comment cette philosophie peut être mise en œuvre pour développer la transformation de Fourier pour les $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, grâce aux résultats de Huyghe (voir [28], [29], [30], [31]). Énonçons d'abord un théorème général de Huyghe, qui montre que, lorsque Z est un diviseur ample dans un schéma projectif, les $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents se comportent bien du point de vue cohomologique comme des faisceaux cohérents sur un schéma affine ; on peut voir ce théorème comme un analogue des théorèmes A et B, avec surconvergence à l'infini :

4.5.1. THÉORÈME [31, 5.3.3]. — *Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel projectif et lisse, $Z \subset X$ un diviseur ample de sa fibre spéciale, et posons $D^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) = \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z))$. Alors :*

(i) *L'anneau $D^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ est cohérent, et le foncteur $\Gamma(\mathscr{X}, -)$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents et celle des $D^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents.*

(ii) *Pour tout $n \geq 1$, et tout $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-module cohérent $\mathscr{E}$, on a $H^n(\mathscr{X}, \mathscr{E}) = 0$.*

Huyghe établit en outre un théorème d'invariance qui montre que la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents ne dépend pas de la compactification lisse $\mathscr{X}$ de $\mathscr{U}$:

4.5.2. THÉORÈME [31, 7.3.3]. — *Soient $f : \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ un morphisme propre de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, $Z \subset X$, $Z' \subset X'$ deux diviseurs des fibres spéciales de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$, $\mathscr{U} = \mathscr{X} \setminus Z$, $\mathscr{U}' = \mathscr{X}' \setminus Z'$. On suppose que f induit un isomorphisme $\mathscr{U}' = f^{-1}(\mathscr{U}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{U}$. Alors les foncteurs $f^!$ et f_+ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents, et celle des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$-modules cohérents.*

Soient maintenant N un entier, $\mathscr{X}$ l'espace projectif formel de dimension N sur $\mathcal{V}$, Z l'hyperplan à l'infini de X, et $\mathscr{U} = \mathscr{X} \setminus Z$ l'espace affine formel de dimension N sur $\mathcal{V}$. Nous noterons simplement $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$. Soient $t_1, \ldots, t_N$ les coordonnées canoniques sur l'espace affine, $\partial_1, \ldots, \partial_N$ les dérivations correspondantes. La K-algèbre des sections globales de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ s'identifie alors à la « complétée faible » de l'algèbre de Weyl :

4.5.3. PROPOSITION ([28], [29]). — *Il existe un isomorphisme canonique de K-algèbres*

$$\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)) \xrightarrow{\sim} A_N(K)^{\dagger}, \tag{4.5.3.1}$$

où $A_N(K)^{\dagger}$ est la K-algèbre d'opérateurs différentiels définie par

$$A_N(K)^{\dagger} := \{\sum_{\underline{i},\underline{k}} a_{\underline{i},\underline{k}} \underline{t}^{\underline{i}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]},\ a_{\underline{i},\underline{k}} \in K \mid \exists\, c, \eta < 1 \text{ tels que } \forall\ \underline{i}, \underline{k},\ |a_{\underline{i},\underline{k}}| \le c\,\eta^{|\underline{i}|+|\underline{k}|} \}.$$

4.5.4. Supposons maintenant que K contienne un élément π tel que

$$\pi^{p-1} = -p,$$

et fixons un tel élément. On vérifie aisément qu'il existe un unique automorphisme ϕ de la K-algèbre $A_N(K)^{\dagger}$ telle que

$$\phi(\partial_i) = \pi\, t_i, \qquad \phi(\partial_i) = -\partial_i/\pi.$$

Pour tout $A_N(K)^{\dagger}$-module E, on obtient donc en faisant agir $A_N(K)^{\dagger}$ sur E par l'intermédiaire de ϕ un nouvel $A_N(K)^{\dagger}$-module, que nous noterons $\phi_* E$, π étant ici fixé une fois pour toutes. Le foncteur qui à E associe $\phi_* E$ est la *transformation de Fourier naïve* (*définie par* π).

Soient $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent, et $E = \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{E})$. D'après 4.5.3, E est muni d'une structure canonique de $A_N(K)^{\dagger}$-module, pour laquelle il est cohérent d'après 4.5.1. Comme le $A_N(K)^{\dagger}$-module $\phi_* E$ est encore cohérent, il existe, grâce au théorème 4.5.1, un unique $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent $\mathscr{E}^{\phi}$ tel que $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{E}^{\phi}) = \phi_* E$. Le problème de la *transformation de Fourier géométrique* est de donner une interprétation du foncteur $\mathscr{E} \longmapsto \mathscr{E}^{\phi}$ au moyen des opérations cohomologiques de la théorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules, de manière analogue à la transformation de Fourier géométrique de Malgrange en caractéristique 0 [41], ou à la transformation de Fourier ℓ-adique de Deligne-Katz-Laumon [35].

4.5.5. Précisons d'abord comment la donnée de π détermine le noyau $\mathscr{N}_{\pi}$ de la transformation de Fourier géométrique. Soit $\mathscr{P}^1$ (resp. $\mathscr{A}^1$) l'espace affine (resp. projectif) formel de dimension 1 sur $\mathcal{V}$. On note $\mathscr{L}_{\pi} = \mathrm{sp}_* L_{\pi}$ le $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}$-module cohérent défini par le F-isocristal de Dwork L_{π} associé à π : rappelons que le $\mathcal{O}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}$-module sous-jacent à $\mathscr{L}_{\pi}$ est $\mathcal{O}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}(\infty)$, et qu'il est muni de l'unique structure de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module compatible à celle de $\mathcal{O}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}(\infty)$ pour laquelle $\partial \cdot 1 = -\pi$ (*cf.* [3]).

Soit $\mathcal{X}'$ (resp. $\mathcal{U}'$) l'espace projectif (resp. affine) dual, et soit $\mu : \mathcal{U} \times \mathcal{U}' \to \mathcal{A}^1 \subset \mathcal{P}^1$ l'accouplement de dualité. D'après [28, 4.1], il existe un schéma formel lisse $\mathcal{Y}$, et un morphisme projectif $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}'$, tels que, si l'on note $\mathcal{W} = f^{-1}(\mathcal{U} \times \mathcal{U}')$, le morphisme $\mathcal{W} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ soit un isomorphisme, et que le morphisme composé $\mu \circ f$ se prolonge en un morphisme $\lambda : \mathcal{Y} \to \mathcal{P}^1$. Soit $T = f^{-1}(\infty) \subset Y$. Suivant Katz-Laumon [35], on convient de considérer $\mathcal{L}_\pi$ comme un complexe réduit à un seul module, placé en degré 1. Si l'on applique le foncteur

$$\lambda^! : D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}^1,\mathbb{Q}}(\infty)) \to D^-(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$$

à $\mathcal{L}_\pi[-1]$, on vérifie, grâce au fait que $\mathcal{L}_\pi$ est défini par un isocristal surconvergent, que $\lambda^!(\mathcal{L}_\pi[-1])$ se réduit à un seul $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)$-module cohérent, placé en degré $2-2N$. Utilisant l'équivalence du théorème 4.5.2, on l'identifie via f_+ à un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent, placé en degré $2-2N$; nous poserons $\mathcal{N}_\pi := f_+\lambda^!(\mathcal{L}_\pi[-1])$.

Soient p_1, p_2 les projections de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$. La transformation de Fourier géométrique associe alors à un complexe $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ le complexe

$$\phi_*\mathcal{E} \;:=\; p_{2+}(\mathcal{N}_\pi \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)} p_1^!\mathcal{E}[-2N]).$$

En explicitant le calcul de ces foncteurs, Huyghe prouve qu'on obtient ainsi une transformation associant à tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent (au décalage près), et établit la relation avec la transformation de Fourier naïve sur les sections globales :

4.5.6. THÉORÈME ([28], [30]). — *Avec les notations précédentes, soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent. Alors* :

(i) *Le complexe $\phi_*\mathcal{E}$ est réduit à un seul $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module, cohérent et placé en degré $N-2$.*

(ii) *Il existe un isomorphisme canonique de $D^\dagger_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-modules*

$$\Gamma(\mathcal{X}', \phi_*\mathcal{E}[2-N]) \xrightarrow{\sim} \phi_*\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}).$$

Le transformé $\mathcal{E}^\phi$ construit en 4.5.4 s'identifie donc au module $\phi_*\mathcal{E}[2-N]$.

4.5.7. Il existe aussi une transformation de Fourier à supports compacts. Pour la définir, on munit $\mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ du diviseur $Z' = p_2^{-1}(\infty)$, et on note ρ_* le foncteur de restriction des scalaires de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$ à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$. Huyghe montre alors [28] que, pour tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent $\mathcal{E}$, le complexe $\rho_*\mathbb{D}(\mathcal{N}_\pi \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)} p_1^!\mathcal{E})$, où le dual $\mathbb{D}$ est pris par rapport à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$, est à cohomologie cohérente sur $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$. On peut alors prendre son dual $\mathbb{D}'$ par rapport à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$. Le foncteur $\mathbb{D}'\rho_*\mathbb{D}$ joue ici le rôle d'image directe à supports compacts pour l'immersion ouverte $\mathcal{U} \times \mathcal{U}' \hookrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{U}'$. On définit donc la transformation de Fourier à supports compacts en posant, pour $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty))$

$$\phi_!\mathcal{E} \;:=\; p'_{2+}(\mathbb{D}'\rho_*\mathbb{D}(\mathcal{N}_\pi \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}',\mathbb{Q}}(\infty)} p_1^!\mathcal{E}[-2N])),$$

où p'_{2+} est le foncteur image directe relatif aux faisceaux $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z')$ et $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$. En utilisant le théorème de dualité relative 4.3.13, on peut alors montrer, comme en caractéristique 0 ou en cohomologie ℓ-adique, l'égalité des transformations de Fourier avec ou sans conditions de supports :

4.5.8. THÉORÈME [28]. — *Il existe sur $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ un isomorphisme fonctoriel*

$$\phi_!\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \phi_*\mathscr{E}.$$

5. Variété caractéristique et holonomie

Comme en caractéristique nulle, la cohérence sur l'un quelconque des anneaux d'opérateurs différentiels étudiés ici n'est pas préservée en général par image inverse par une immersion fermée. Dans ce chapitre, nous introduisons, pour les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents munis d'une action de Frobenius, une condition d'holonomie pour laquelle il paraît raisonnable de conjecturer la stabilité par image inverse par un morphisme quelconque. Cette condition, qui est de nature géométrique, repose sur la construction d'une variété caractéristique dans l'espace cotangent à la réduction de $\mathscr{X}$ modulo $\mathfrak{m}$. Nous montrons que cette variété caractéristique vérifie l'inégalité de Bernstein, et nous expliquons les résultats de Virrion [52] montrant que cette caractérisation géométrique de l'holonomie est équivalente à la caractérisation homologique usuelle au moyen du dual. Enfin, suivant la méthode de Laumon [39], nous montrons que la formule de Dubson-Kashiwara [19] exprimant la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome au moyen du cycle caractéristique reste valable pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes.

5.1. F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents

La notion de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module introduite ici, *i.e.* de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module muni d'une action de Frobenius, généralise la notion de F-isocristal comme la notion usuelle de $\mathscr{D}_X$-module en caractéristique 0 généralise celle de fibré à connexion intégrable. La donnée d'une action de Frobenius impose des conditions de finitude plus fortes que celles que vérifient les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents quelconques : nous verrons en particulier qu'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent provient de manière canonique d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent par extension des scalaires de $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Mais ce qui rend la structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module essentielle pour la géométrie algébrique est surtout sa complète stabilité par toutes les opérations cohomologiques. Il en résulte que tout $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module « d'origine géométrique » peut être muni d'une structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module.

On suppose ici que k est un corps parfait de caractéristique p, et on se limite pour simplifier au cas où $\mathcal{V}$ est l'anneau $W = W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k (voir [8, 4.5.1] pour une définition plus générale). On note σ l'automorphisme de Frobenius de W, et $X = X_0$ la réduction de $\mathcal{X}$ modulo p.

5.1.1. *Définition.* — Soient $\mathcal{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel, $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un relèvement σ-linéaire de l'endomorphisme de Frobenius absolu de X. Un *F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module* sur $\mathcal{X}$ est la donnée d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$ et d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$. Les morphismes de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules sont les morphismes $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaires commutant à l'action de Frobenius. De même, nous appellerons *F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-complexe* la donnée d'un complexe $\mathcal{E} \in D(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{X}})$) et d'un isomorphisme $\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$ dans $D(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{X}})$). Les faisceaux de cohomologie d'un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-complexe sont naturellement des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules.

Nous dirons qu'un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $(\mathcal{E}, \Phi)$ est cohérent si $\mathcal{E}$ est cohérent en tant que $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module.

On peut définir plus généralement une notion analogue en remplaçant l'endomorphisme de Frobenius par sa puissance s-ième, pour un entier s fixé ; nous nous limiterons ici au cas $s = 1$.

Comme pour les isocristaux, le choix du relèvement F ne joue aucun rôle dans cette définition, et, par les arguments de recollement usuels (pour lesquels le lecteur pourra se reporter à [8]), il n'est en fait même pas nécessaire de supposer qu'il existe un tel relèvement globalement sur $\mathcal{X}$ pour donner un sens aux notions de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module et de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-complexe.

Exemples. — (i) Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, muni de l'inverse de l'isomorphisme tautologique $F^*\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. En appliquant 5.1.2, on dispose de procédés systématiques de construction de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules (éventuellement cohérents).

(ii) Soit $\mathrm{sp} : \mathcal{X}_K \to \mathcal{X}$ le morphisme de spécialisation. Alors sp_* établit une équivalence entre la catégorie des F-isocristaux convergents sur la fibre spéciale X de $\mathcal{X}$, et la catégorie des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents qui sont $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-cohérents [8, 4.6.3].

(iii) Si $Z \subset X$ est un diviseur, si $U = X \setminus Z$, et si E est un F-isocristal sur U surconvergent le long de Z, alors $\mathcal{E} = \mathrm{sp}_* E$ a une structure naturelle de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module [8, 4.6.7]. On conjecture que $\mathcal{E}$ est alors cohérent sur $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ (et même holonome, voir 5.3.6 plus bas).

(iv) En particulier, les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ étudiés en 4.4.7 sont de manière naturelle des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. De même, les complexes $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(j^{\dagger}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z[}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ étudiés en 4.4.9 sont de manière naturelle des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-complexes bornés à cohomologie cohérente.

5.1.2. D'après 4.3.4, 4.3.5, 4.3.9 et 4.3.10, les foncteurs F^* commutent aux quatre opérations de base de la théorie des $\mathcal{D}$-modules : $f^!$, $\boxtimes$, f_+ et $\mathbb{D}$ (auxquelles on pourrait du reste ajouter les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}$ définis en 4.4.4). Il en résulte que ces foncteurs transforment F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$-complexes en F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$-complexes. Plus précisément, si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un morphisme de W-schémas formels lisses, on obtient :

(i) Si $\mathcal{F}$ est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathcal{Y}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$), alors $f^!\mathcal{F}$ est un F-

$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ si f est lisse).

(ii) Soit $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, et $\mathscr{F}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$), alors $\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}{}^\dagger_W \mathscr{F}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}})$).

(iii) Si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$), alors $f_+\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ si f est propre).

(iv) Si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, alors $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.

La première propriété fondamentale des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents est l'existence d'un procédé de descente canonique d'un tel module sur le faisceau $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$:

5.1.3. THÉORÈME [8, 4.5.4]. — *Avec les hypothèses précédentes, la catégorie des* F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-*modules cohérents* $(\mathscr{E}, \Phi)$ *est équivalente à la catégorie des couples* $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$ *où* $\mathscr{E}^{(0)}$ *est un* $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-*module cohérent, et* $\Phi^{(1)}$ *un isomorphisme* $\widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-*linéaire*

$$\Phi^{(1)} \,:\, \widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\mathscr{E}^{(0)}.$$

Décrivons le foncteur qui associe un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $(\mathscr{E}, \Phi)$ à la donnée de $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$. On pose

$$\mathscr{E} \,:=\, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)},$$

et on définit Φ comme étant l'isomorphisme composé

$$\mathscr{E} = \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathscr{E}^{(0)} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)}) = F^*\mathscr{E},$$

où le premier isomorphisme est déduit de $\Phi^{(1)}$ par extension des scalaires de $\widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, et le second provient des isomorphismes (3.4.1.2) par passage à la limite inductive.

Inversement, le raisonnement standard pour les modules de présentation finie permet de redescendre $\mathscr{E}$ en un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent pour m assez grand, et de même pour Φ. Pour passer de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, on utilise alors le théorème de descente par Frobenius de 3.1.4 et les isomorphismes (3.4.1.2).

Remarques. — (i) Pour $p = 2$, l'idéal pW n'est pas PD-nilpotent, et on ne dispose pas des techniques de recollement permettant de définir globalement le foncteur F^* sur la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules. Dans ce cas, il faut donc supposer F donné sur $\mathscr{X}$ pour pouvoir conclure comme dans l'énoncé, ou se contenter de redescendre sur un anneau $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ pour $m \geq 1$.

(ii) Il résulte du théorème que la catégorie des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents est nœthérienne (bien que $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ ne soit pas nœthérien).

5.2. Variété caractéristique

Soient $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse, X sa réduction modulo p. Nous expliquons ici comment associer à tout F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}$ une sous-variété réduite de l'espace cotangent T^*X, analogue à la variété caractéristique d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent lorsque X est une variété lisse sur $\mathbb{C}$.

Comme en caractéristique 0 (voir [13], [36]), cette construction repose sur la notion de bonne filtration (pour la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels). Toutefois, cette notion n'est pas disponible directement pour les modules sur des faisceaux tels que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ ou $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, qui sont des faisceaux d'opérateurs d'ordre infini et n'ont donc pas de filtration par l'ordre. C'est pourquoi nous procèderons en plusieurs étapes : descente de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, passage par un modèle entier sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$, réduction au cas des $\mathscr{D}^{(0)}_{X_i}$-modules cohérents, pour lesquels on dispose de la notion de bonne filtration.

5.2.1. Pour tout m, nous noterons $X^{(m)}$ le k-schéma déduit de X par changement de base par la puissance m-ième de l'automorphisme de Frobenius de k, et $F^m : X \to X^{(m)}$ le morphisme de Frobenius relatif correspondant.

Pour tout m, le faisceau $\mathscr{D}^{(m)}_X$ est muni de la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels, et le gradué associé $\operatorname{gr}\mathscr{D}^{(m)}_X$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre commutative, quasi-cohérente. Nous noterons $T^{(m)*}X$, et nous appellerons *espace cotangent de niveau m* de X, le schéma réduit

$$T^{(m)*}X \ := \ (\operatorname{Spec}\operatorname{gr}\mathscr{D}^{(m)}_X)_{\mathrm{red}}.$$

Soit $\mathscr{T}_X$ le faisceau des dérivations sur X. Lorsque $m = 0$, l'isomorphisme $\mathscr{T}_X \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{gr}_1\mathscr{D}^{(0)}_X$ s'étend comme en caractéristique 0 en un isomorphisme

$$\mathbb{S}(\mathscr{T}_X) \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ \operatorname{gr}\mathscr{D}^{(0)}_X,$$

de sorte que $T^{(0)*}X$ est le fibré cotangent usuel T^*X. Le lemme suivant donne une interprétation analogue pour $m \geq 1$:

5.2.2. LEMME [11]. — *Pour tout m, il existe un isomorphisme canonique*

$$T^{(m)*}X \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ X \times_{X^{(m)}} T^*X^{(m)}.$$

Comme $T^*X^{(m)}$ est lui-même déduit de T^*X par changement de base par le morphisme de projection $X^{(m)} \to X$, on peut aussi identifier $T^{(m)*}X$ à l'image inverse de T^*X par l'endomorphisme de Frobenius absolu de X. En particulier, on dispose ainsi d'un homéomorphisme

$$|T^{(m)*}X| \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ |T^*X| \tag{5.2.2.1}$$

qui nous permettra d'identifier les parties fermées de $T^{(m)*}X$ et T^*X.

5.2.3. Soient $m \in \mathbb{N}$, S un schéma nœthérien (au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$ si $m \geq 1$), et X un S-schéma lisse. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent, une *bonne filtration* sur $\mathscr{E}$ est une filtration croissante par des sous-$\mathcal{O}_X$-modules $\mathscr{E}_n$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $\mathscr{E} = \cup_n \mathscr{E}_n$, et il existe n_0 tel que $\mathscr{E}_n = 0$ pour $n < n_0$;

b) Quels que soient n, k, $\mathscr{D}_{X,k}^{(m)} \mathscr{E}_n \subset \mathscr{E}_{n+k}$;

c) Il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, on ait

$$\mathscr{E}_n = \sum_{j=0}^{p^m-1} \mathscr{D}_{X,n-n_1+j}^{(m)} \mathscr{E}_{n_1-j}; \tag{5.2.3.1}$$

d) Chacun des $\mathscr{E}_n$ est cohérent sur $\mathcal{O}_X$.

On remarquera que la condition c) est la condition usuelle lorsque $m = 0$. Lorsque $m \geq 1$, $\mathrm{gr}\,\mathscr{D}_X^{(m)}$ n'est pas engendré par ses éléments de degré 1, et on est amené à modifier celle-ci comme en (5.2.3.1) pour assurer que la filtration par l'ordre sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ ait les propriétés voulues.

Comme $\mathrm{gr}\,\mathscr{D}_X^{(m)}$ est un anneau gradué nœthérien, les propriétés usuelles des bonnes filtrations restent valables (voir [16], [17], [36], [40], [42], …). En particulier :

(i) Si $(\mathscr{E}_n)$, $(\mathscr{E}'_n)$ sont deux bonnes filtrations sur $\mathscr{E}$, il existe des entiers k_1 et k_2 tels que

$$\mathscr{E}_{n-k_1} \subset \mathscr{E}'_n \subset \mathscr{E}_{n+k_2}$$

pour tout n.

(ii) Une filtration vérifiant a) et b) est bonne si et seulement si $\mathrm{gr}\,\mathscr{E}$ est un $\mathrm{gr}\,\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent.

(iii) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent, $(\mathscr{E}_n)$ une bonne filtration sur $\mathscr{E}$, et $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$ un sous-$\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent, la filtration induite $(\mathscr{E}' \cap \mathscr{E}_n)$ sur $\mathscr{E}'$, et la filtration image $(\mathscr{E}_n/(\mathscr{E}' \cap \mathscr{E}_n))$ sur $\mathscr{E}/\mathscr{E}'$, sont des bonnes filtrations.

(iv) Tout $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent $\mathscr{E}$ possède une bonne filtration, car $\mathscr{E}$ peut s'écrire globalement sur X comme quotient d'un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module induit $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{L}$, où $\mathscr{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.

5.2.4. Soient i un entier fixé, $S_i = \mathrm{Spec}\, W_i(k)$, X_i un S_i-schéma lisse de réduction X sur k, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}_{X_i}^{(m)}$-module cohérent, $(\mathscr{E}_n)$ une bonne filtration sur $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{I}$ est l'annulateur du $\mathrm{gr}\,\mathscr{D}_X^{(m)}$-module $\mathrm{gr}\,\mathscr{E}$, et $\mathscr{J}$ l'idéal racine de $\mathscr{I}$, on voit comme en caractéristique 0 que $\mathscr{J}$ est indépendant de la bonne filtration choisie (*cf.* [13], [36], [40], ...). On appellera *variété caractéristique de* $\mathscr{E}$, et on notera $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E})$, le fermé de $T^{(m)\,*}X$ défini par l'idéal $\mathscr{J}$. On vérifie facilement les propriétés suivantes :

(i) Pour toute suite exacte $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ de $\mathscr{D}_{X_i}^{(m)}$-modules cohérents, on a

$$\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}) = \mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}') \cup \mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}'').$$

(ii) Pour tout $i' \leq i$, on a

$$\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}/p^{i'+1}\mathscr{E}) = \mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}).$$

(iii) Soit $F^m : X_i \to X_i$ un σ^m-morphisme relevant sur S_i la puissance m-ième de l'endomorphisme de Frobenius absolu de X, $\mathscr{E}^{(0)}$ un $\mathscr{D}^{(0)}_{X_i}$-module cohérent, et $\mathscr{E} = F^{m*}\mathscr{E}^{(0)}$, qui est un $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$-module cohérent. Alors l'identification (5.2.2.1) donne

$$\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}) \;=\; \mathrm{Car}^{(0)}(\mathscr{E}^{(0)}).$$

5.2.5. Soient $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse, X_i sa réduction modulo p^{i+1}. Si $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent, on définit sa variété caractéristique $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E})$ comme étant la variété caractéristique $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}/p\mathscr{E})$ de sa réduction modulo p.

Soit maintenant $\mathscr{E}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Il existe alors un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent $\mathscr{E}'$ sans torsion tel que $\mathscr{E} \simeq \mathscr{E}'_{\mathbb{Q}}$. On peut définir $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E})$ comme étant égale à $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}')$, grâce au lemme suivant :

5.2.6. LEMME [11]. — *Soient $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$ deux $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules cohérents sans p-torsion, tels qu'il existe une isogénie $\varphi : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$. Alors* $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}') = \mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{E}'')$.

5.2.7. Sous les hypothèses de 5.2.5, soit $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. D'après 5.1.3, il existe un unique couple $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)} : \widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, et $\Phi^{(1)}$ un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire, tel que $(\mathscr{E}, \Phi)$ provienne de $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$ par extension de l'anneau d'opérateurs de $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. On peut donc sans ambiguïté définir la variété caractéristique de $\mathscr{E}$ en posant

$$\mathrm{Car}(\mathscr{E}) \;:=\; \mathrm{Car}^{(0)}(\mathscr{E}^{(0)}).$$

Il convient seulement d'observer que, grâce à 5.2.4 (iii), il est équivalent de redescendre $(\mathscr{E}, \Phi)$ en $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+1)})$ pour un entier m arbitrairement choisi, ce qui permet de donner un sens à cette définition y compris pour $p = 2$.

Exemple. — On montre [11] que la variété caractéristique d'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}$ est égale à la section nulle de T^*X si et seulement si $\mathscr{E}$ est un F-isocristal convergent (voir 4.1.6 (ii)).

5.3. Inégalité de Bernstein

En caractéristique 0, la variété caractéristique d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent non nul $\mathscr{E}$ vérifie l'inégalité de Bernstein : $\dim(\mathrm{Car}(\mathscr{E})) \geq \dim(X)$ (*cf.* [16], [36], [40], [42], ...). Si S est un $\mathbb{Z}/p^n$-schéma, la variété caractéristique construite plus haut ne vérifie pas nécessairement cette inégalité, même lorsque S est le spectre d'un corps. Par exemple, si X est la droite affine sur un corps de caractéristique p, et si $x \in X$ est l'origine, $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^p$ possède une structure naturelle de $\mathscr{D}^{(0)}_X$-module, et sa variété caractéristique est réduite au point x

de la section nulle de T^*X, donc est de dimension $0 < \dim(X)$. Si $\mathscr{X}$ est la droite affine formelle sur W, le même exemple, vu comme $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-module, montre que cette inégalité n'est pas non plus vérifiée pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-modules.

L'inégalité de Bernstein est par contre vérifiée pour les F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. La méthode de la démonstration est classique : elle consiste à établir cette propriété par récurrence sur la dimension de $\mathscr{X}$, en montrant que, si $u : \mathscr{Z} \hookrightarrow \mathscr{X}$ est l'inclusion d'un sous-schéma formel fermé, lisse sur W, le foncteur u_+ induit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans $\mathscr{Z}$ et celle des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-modules cohérents (énoncé analogue d'un théorème classique de Kashiwara, *cf.* [16], [17], [36], [40], [42], ...). On notera que cette équivalence est fausse pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules lorsque m est fixé (voir l'exemple donné en 5.3.1).

L'inégalité de Bernstein permet alors de définir les F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes comme étant ceux dont la variété caractéristique est de dimension égale à $\dim(X)$. Le théorème 5.3.10 plus bas, dû à Virrion (*cf.* [49], [52]), montre que, comme en caractéristique 0, cette définition est équivalente à la caractérisation homologique usuelle au moyen du dual.

5.3.1. Soient $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse, et $u : \mathscr{Z} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'immersion d'un sous-schéma formel fermé lisse, défini par un idéal cohérent $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Précisons d'abord la structure de l'image directe $u_+\mathscr{F}$ d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{F}$. L'hypothèse de cohérence, et le fait que u soit un morphisme fini, entraînent que $u_+\mathscr{F}$ est défini par

$$u_+\mathscr{F} \;=\; u_*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Z},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}} \mathscr{F}),$$

et $u^!u_+\mathscr{E}$ par

$$u^!u_+\mathscr{E} \;=\; \mathbb{L}u^*(u_*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Z},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}))[d_{\mathscr{Z}/\mathscr{X}}].$$

En utilisant au voisinage d'un point de $\mathscr{X}$ un système de coordonnées locales $t_1,\dots,t_d$ tel que $\mathscr{I} = (t_1,\dots,t_r)$, avec $r \le d$, on voit qu'il existe un isomorphisme naturel de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-modules

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{H}^0u^!u_+\mathscr{F} \;=\; \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(t_i : u_+\mathscr{F} \to u_+\mathscr{F}), \tag{5.3.1.1}$$

et que $u_+\mathscr{F}$ est engendré comme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module par l'image de $\mathscr{F}$, donc possède un système de générateurs annulés par $\mathscr{I}$.

Par contre, si $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans $\mathscr{Z}$, il n'est pas toujours vrai que $\mathscr{E}$ soit engendré par ses sections annulées par $\mathscr{I}$. Par exemple, si l'on prend pour $\mathscr{X}$ la droite affine formelle, et pour $\mathscr{Z}$ la section nulle, définie par $t = 0$, le $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module

$$\mathscr{E} \;=\; \widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}/\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(t^p - p)$$

est nul sur $\mathscr{X} \setminus \mathscr{Z}$, mais ne possède aucune section non nulle annulée par t. Par suite, $\mathscr{E}$ n'est pas de la forme $u_+\mathscr{F}$, et le foncteur u_+, allant de la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-modules cohérents vers celle des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans $\mathscr{Z}$, n'est pas essentiellement surjectif.

La première étape consiste à prouver que cette surjectivité essentielle est vraie asymptotiquement :

5.3.2. THÉORÈME [11]. — *Soient $m \in \mathbb{N}$, $u : \mathscr{Y} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'inclusion d'un sous-W-schéma formel fermé lisse, $\mathscr{E}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans $\mathscr{Y}$. Il existe un entier $m' \geq m$, un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{F}^{(m')}$ et un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire*

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } u_+^{(m')}\mathscr{F}^{(m')}. \tag{5.3.2.1}$$

On remarquera que, si m' est fixé, $\mathscr{F}^{(m')}$ est déterminé de manière unique d'après (5.3.1.1). D'autre part, les foncteurs $u_+^{(m')}$ commutent aux extensions du faisceau d'opérateurs différentiels d'après (3.5.3.1), de sorte que, pour tout $m'' \geq m'$, on dispose sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m'')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ d'un isomorphisme analogue à (5.3.2.1), dans lequel $\mathscr{F}^{(m')}$ est remplacé par $\mathscr{F}^{(m'')} := \widehat{\mathscr{D}}^{(m'')}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} \mathscr{F}^{(m')}$. Compte tenu des énoncés de commutation de u_+ et $u^!$ à l'image inverse par Frobenius, on obtient ainsi pour les $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules et F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents l'analogue du théorème de Kashiwara :

5.3.3. THÉORÈME [11]. — *Soit $u : \mathscr{Y} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'inclusion d'un sous-schéma formel fermé lisse. Alors les foncteurs u_+ et $u^!$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$-modules (resp. F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$-modules) cohérents, et celle des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (resp. F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules) cohérents à support dans $\mathscr{Y}$.*

On observe alors que l'équivalence de 5.1.3 commute aux foncteurs $u_+^{(0)}$ et u_+, ce qui entraîne que la variété caractéristique de l'image directe $\mathscr{E} = u_+\mathscr{F}$ se déduit de celle de $\mathscr{F}$ par la même description qu'en caractéristique 0 (voir [16], ou [40]) : si $Z \hookrightarrow X$ est la réduction de u modulo p, on dispose des applications entre fibrés cotangents

$$T^*Z \xleftarrow{\ q\ } Z \times_X T^*X \xhookrightarrow{\ v\ } T^*X,$$

et la variété caractéristique de $\mathscr{E}$ est donnée par

$$\mathrm{Car}(\mathscr{E}) = v(q^{-1}(\mathrm{Car}(\mathscr{F}))).$$

L'argument habituel (voir [36], [40], [42]) permet alors de montrer l'inégalité de Bernstein par récurrence sur la dimension de X :

5.3.4. THÉORÈME [11]. — *Soit $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Pour tout point x du support de $\mathscr{E}$, on a*

$$\dim_x \mathrm{Car}(\mathscr{E}) \geq \dim_x X. \tag{5.3.4.1}$$

5.3.5. Soient d la dimension de X, et $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Nous appellerons *dimension* de $\mathcal{E}$ en un point x du support de $\mathcal{E}$ la dimension en x de $\mathrm{Car}(\mathcal{E})$, et nous poserons $\dim \mathcal{E} = \sup_x(\dim_x \mathrm{Car}(\mathcal{E}))$, $\operatorname{codim} \mathcal{E} = 2d - \dim \mathcal{E}$. Si X est de dimension d, l'inégalité de Bernstein assure que, si $\mathcal{E} \neq 0$, alors $\dim \mathcal{E} \geq d$. Nous dirons que $\mathcal{E}$ est *holonome* si $\mathcal{E} = 0$, ou si $\dim \mathcal{E} = d$.

Si $\mathcal{E} \in D(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ est muni d'une structure de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-complexe, nous dirons que $\mathcal{E}$ est *holonome* si ses faisceaux de cohomologie sont des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes. Nous noterons F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-complexes holonomes à cohomologie bornée.

Exemples. — (i) Tout F-isocristal convergent est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module holonome, dont la variété caractéristique est réduite à la section nulle de T^*X. Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module holonome, il existe un ouvert non vide $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ tel que la restriction de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{U}$ soit un F-isocristal convergent. Si $\mathcal{X}$ est une courbe, et $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si la condition précédente est vérifiée.

(ii) Si $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ est une suite exacte de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ le sont.

(iii) Si $u : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ est une immersion fermée entre W-schémas formels lisses, et si $\mathcal{E}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$, alors $u_+\mathcal{E}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$ [11].

(iv) Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un morphisme lisse de W-schémas formels lisses, et si $\mathcal{F}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$, alors $f^!\mathcal{F}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ [11].

(v) Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont deux W-schémas formels lisses, si $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, et si $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ (resp. F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$), alors $\mathcal{E} \boxtimes^{\mathbb{L}}_W \mathcal{F}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}})$ [11].

(vi) Si $\mathcal{E}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$, alors $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ [52].

(vii) J'ignore s'il existe des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents non holonomes.

5.3.6. On peut conjecturer que les F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-complexes holonomes bornés possèdent en un sens convenable toutes les propriétés de stabilité des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie holonome sur les variétés lisses sur un corps de caractéristique 0. En particulier, on s'attend à ce que les propriétés suivantes soient vraies, pour un morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de W-schémas formels lisses :

A) Si $\mathcal{E}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ et est à support propre sur $\mathcal{Y}$, alors $f_+\mathcal{E}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$. Grâce à 5.3.5 (iii) et à la formule de transitivité, il suffirait de le prouver lorsque f est lisse.

B) Si $\mathcal{F}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$, alors $f^!\mathcal{F}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$. Grâce à 5.3.5 (iv) et à la formule de transitivité, il suffirait de le prouver lorsque f est une immersion fermée.

C) Si Z est un fermé de X, et si $\mathcal{E}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$, alors $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E})$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$.

On peut montrer que les conjectures B et C sont équivalentes [11].

On remarquera que la conjecture C joue le rôle de la stabilité des modules holonomes par image directe par une immersion ouverte lorsque la base est un corps de caractéristique 0. En effet, si $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte, et $Z = X \setminus U$, on dispose dans ce cas du triangle de localisation

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}j_* j^*\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z(\mathscr{E})[1].$$

Il en résulte que, si $\mathscr{E}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_X)$, $\mathbb{R}j_* j^*\mathscr{E}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_X)$ si et seulement si $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z(\mathscr{E})$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_X)$. De plus, les foncteurs $\mathbb{R}j_*$ et j^* sont alors des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_U)$ et la sous-catégorie pleine de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_X)$ formée des complexes $\mathscr{E}$ tels que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z(\mathscr{E}) = 0$. Dans le cas des W_i-schémas lisses, ou des W-schémas formels lisses, nous avons vu plus haut que la topologie de Zariski est trop grossière pour fournir une bonne notion d'image directe par une immersion ouverte. On peut par contre conjecturer que l'on obtient un formalisme du type des opérations de Grothendieck en considérant les schémas formels $\mathscr{X}$ propres et lisses sur W, et en associant à un ouvert $\mathscr{U}$ d'un tel schéma, de complémentaire Z, la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ formée des complexes $\mathscr{E}$ tels que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_Z(\mathscr{E}) = 0$. Le foncteur $\mathbb{R}j_*$ est alors remplacé par l'inclusion de cette sous-catégorie, qui respecte l'holonomie par définition, et le foncteur j^* par le cône du morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_Z \to \mathrm{Id}$, ou plus exactement, pour définir effectivement un foncteur, par le foncteur construit comme en 4.4.4 et 4.4.5 en dérivant les foncteurs

$$\varinjlim_n \mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{O}_{X_i}}(\mathscr{O}_{X_i} \to \mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I}), -)$$

sur la catégorie des complexes de $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$-modules. La préservation de l'holonomie par le foncteur ainsi obtenu est alors équivalente à la conjecture C.

On notera que, lorsque Z est un diviseur de X, il existe a priori un autre substitut au foncteur $\mathbb{R}j_* j^*$, à savoir le composé de l'extension des scalaires de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$, et de la restriction des scalaires de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, déjà considéré en 4.5. En fait, il existe un isomorphisme canonique entre ces deux foncteurs [10]. Une variante de la conjecture C est alors la suivante :

D) Si $\mathscr{E}$ est un $F\text{-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module cohérent dont la restriction à $\mathscr{U}$ est holonome, alors $\mathscr{E}$ est un $F\text{-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome.

Cette conjecture entraînerait en particulier que l'algèbre $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ construite en 4.4.1 est un $F\text{-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome. Plus généralement, on peut montrer que la conjecture D entraîne la conjecture C [11].

On remarquera que, même si l'on suppose de plus que $\mathscr{E}$ est de la forme $\mathrm{sp}_* E$, où E est un F-isocristal surconvergent le long de Z, cette assertion n'est plus nécessairement vraie si l'on ne dispose pas de l'action de Frobenius. Par exemple, si $\mathscr{X}$ est la droite projective, si $Z = \{0, \infty\}$, et si $c \in \mathbb{Z}_p$ est un nombre de Liouville p-adique, le $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)/\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)(t\partial - c)$ correspond à un isocristal sur $\mathbb{G}_m$, surconvergent en 0 et ∞, mais n'est pas cohérent sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Par contre, l'existence d'une structure de F-isocristal entraîne que les exposants de Christol-Mebkhout sont rationnels [22], ce qui exclut toute difficulté liée aux nombres de Liouville.

5.3.7. Précisons pour finir les résultats reliant la condition géométrique d'holonomie introduite en 5.3.5 et la condition homologique usuelle, d'après [49], [50], [52]. On note d la dimension de X.

Si $\mathcal{E}$ est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, le complexe dual $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-complexe, de sorte que ses faisceaux de cohomologie

$$\mathcal{H}^{i-d}(\mathbb{D}(\mathcal{E})) \;=\; \mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathcal{X}}^{-1})$$

sont eux-même des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, d'après (4.3.10.1). Si $\mathcal{E}^{(0)}$ est le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent asocié à $\mathcal{E}$ par l'équivalence 5.1.3, les théorèmes de commutation du dual aux extensions de l'anneau d'opérateurs différentiels, et à l'image inverse par Frobenius permettent de se ramener à l'étude des faisceaux analogues pour $\mathcal{E}^{(0)}$ sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$. En prenant un modèle entier $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}^{(0)}$, et en utilisant la suite exacte des coefficients universels pour $\mathbb{D}(\mathcal{E}')$, on peut relier les $\mathcal{E}xt^{i}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathcal{X}}^{-1})$ aux $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{(0)}_{X}}(\mathcal{E}'/p\mathcal{E}', \mathcal{D}^{(0)}_{X} \otimes \omega_{X}^{-1})$. Comme l'anneau $\mathcal{D}^{(0)}_{X}$ a un gradué régulier, on peut appliquer à l'étude du dual d'un $\mathcal{D}^{(0)}_{X}$-module cohérent les méthodes de Malgrange [40]. On obtient ainsi :

5.3.8. THÉORÈME [52]. — *Soit $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent.*

(i) *Pour tout i, $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathcal{X}}^{-1})$ est de codimension $\geq i$;*

(ii) *$\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathcal{X}}^{-1}) = 0$ pour tout $i < \mathrm{codim}(\mathcal{E})$.*

L'inégalité de Bernstein pour les F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules permet alors d'en déduire pour ceux-ci un résultat plus précis que celui que fournit la majoration de 4.1.5 sur la dimension homologique de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$:

5.3.9. COROLLAIRE. — *Tout F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est de dimension projective locale au plus d.*

Le théorème 5.3.8 entraîne de plus que, si $\mathcal{E}$ est holonome, les $\mathcal{E}xt^{i}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathcal{X}}^{-1})$ sont nuls pour $i \neq d$, et $\mathcal{E}xt^{d}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathcal{X}}^{-1})$ est lui-même holonome. D'autre part, le théorème de bidualité locale pour les F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents donne naissance à une suite spectrale dont tous les termes sont eux-mêmes des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. En étudiant cette suite spectrale par les méthodes de [40], on obtient en particulier la réciproque de cette propriété, d'où la caractérisation homologique de l'holonomie :

5.3.10. THÉORÈME [52]. — *Pour qu'un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent soit holonome, il faut et suffit que $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathcal{X}}^{-1}) = 0$ pour $i \neq d$.*

Comme en caractéristique nulle, le théorème de bidualité locale donne alors un foncteur de dualité interne à la catégorie des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes, en posant

$$\mathcal{E}^{*} \;:=\; \mathcal{H}^{0}(\mathbb{D}(\mathcal{E})) \;=\; \mathcal{E}xt^{d}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathcal{X}}^{-1}).$$

5.4. Multiplicités et formule de l'indice

La méthode utilisée en 5.3 pour construire la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathscr{E})$ d'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}$ permet également de définir une multiplicité pour chacune des composantes irréductibles de $\mathrm{Car}(\mathscr{E})$, donc un cycle caractéristique à support dans $\mathrm{Car}(\mathscr{E})$. Nous exposons ici cette construction, puis nous montrons que, lorsque X est projectif sur k, on peut appliquer la méthode développée par Laumon dans [39], et en déduire pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes une formule de l'indice global analogue à celle de Dubson-Kashiwara [19].

5.4.1. Soit $i \geq 0$ un entier, et plaçons nous d'abord, comme en 5.2.4, sur un schéma X_i lisse sur $S_i = \mathrm{Spec}\, W_i(k)$. Supposons donné un $\mathscr{D}^{(0)}_{X_i}$-module cohérent $\mathscr{E}$, muni d'une bonne filtration $(\mathscr{E}_n)$, et soit δ la dimension de $\mathscr{E}$. Soit $\xi \in T^*X$ le point générique d'un fermé irréductible de dimension δ. On définit la *multiplicité* de $\mathscr{E}$ en ξ comme étant la longueur du $\mathcal{O}_{T^*X,\xi}$-module $(\mathrm{gr}\,\mathscr{E})_{\xi}$. Un argument classique basé sur la comparaison des bonnes filtrations (voir [14], [15], [36], [40], ...) montre que cet entier ne dépend pas de la bonne filtration choisie ; nous le noterons $m_{\xi}(\mathscr{E})$. On définit alors le *cycle caractéristique* de $\mathscr{E}$ par

$$\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) \;:=\; \sum_{\dim \xi = \delta} m_{\xi}(\mathscr{E})\overline{\{\xi\}}.$$

Ce cycle est positif par construction.

Les propriétés qui suivent sont classiques :

(i) Si la suite $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ est exacte, et si $\dim_{\xi} \mathrm{gr}\,\mathscr{E}' = \dim_{\xi} \mathrm{gr}\,\mathscr{E} = \dim_{\xi} \mathrm{gr}\,\mathscr{E}''$, alors $m_{\xi}(\mathscr{E}) = m_{\xi}(\mathscr{E}') + m_{\xi}(\mathscr{E}'')$.

(ii) Si $\mathscr{E}$ est plat sur W_i, alors $m_{\xi}(\mathscr{E}) = i\, m_{\xi}(\mathscr{E}/p\mathscr{E})$.

Grâce à celles-ci, on montre le lemme suivant :

5.4.2. LEMME [11]. — *Soient $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$ deux $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-modules cohérents sans p-torsion, tels qu'il existe une isogénie $\varphi : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$, et soit δ la dimension de $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$. Pour tout point $\xi \in T^*X$ de dimension δ, on a $m_{\xi}(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}') = m_{\xi}(\mathscr{E}''/p\mathscr{E}'')$.*

Soit $\mathscr{E}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent, que l'on suppose sans p-torsion. On définit son cycle caractéristique en posant

$$\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) \;:=\; \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}/p\mathscr{E}).$$

Sous les hypothèses du lemme, on voit donc que si $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ sont isogènes, alors $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}') = \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}'')$. Par suite, si l'on suppose maintenant que $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, on peut définir son cycle caractéristique en choisissant un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent sans torsion $\mathscr{E}'$ tel que $\mathscr{E}'_{\mathbb{Q}} \simeq \mathscr{E}$, et en posant $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) := \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}')$.

Enfin, si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, il lui correspond par l'équivalence de 5.1.3 un unique couple $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$. Comme $\mathscr{E}^{(0)}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, on sait définir son cycle caractéristique d'après ce qui précède, et on pose $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) := \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}^{(0)})$.

Remarque. — Pour tout m, on peut aussi définir un cycle caractéristique pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, ce qui permet de donner un sens à la définition précédente lorsque $p = 2$. Nous renvoyons le lecteur à [11] pour le détail de cette construction et de ses propriétés.

A partir de l'existence du cycle caractéristique, on obtient classiquement :

5.4.3. PROPOSITION [11]. — *Soit $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse.*

(i) *Pour tout suite exacte de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$, on a*

$$\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) \;=\; \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}') + \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}'').$$

(ii) *La catégorie des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes est artinienne.*

Une autre application importante de la construction du cycle caractéristique est le théorème de l'indice :

5.4.4. THÉORÈME [11]. — *Soient $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse de dimension relative d, dont la réduction X sur k est projective, et $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome. On note $\mathrm{DR}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E})$ le complexe de de Rham de $\mathscr{X}$ à coefficients dans $\mathscr{E}$, placé entre les degrés $-d$ et 0, et*

$$\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}) \;:=\; \sum_{i=-d}^{d} \dim_K H^i(\mathscr{X}, \mathrm{DR}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E}))$$

sa caractéristique d'Euler-Poincaré. On a alors

(5.4.4.1) $$\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}) \;=\; (X \cdot \mathrm{ZCar}(\mathscr{E})),$$

où le terme de droite est le degré du cycle d'intersection dans T^*X de la section nulle de T^*X et du cycle caractéristique de $\mathscr{E}$.

Soient $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$ le couple correspondant à $\mathscr{E}$ dans l'équivalence de 5.1.3, $\mathscr{E}'$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent sans torsion tel que $\mathscr{E}'_{\mathbb{Q}} \simeq \mathscr{E}^{(0)}$. On montre successivement les relations suivantes, qui entraînent le théorème :

(i) $\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}) = \chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}^{(0)})$;

(ii) $\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}^{(0)}) = \chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}')$;

(iii) $\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}') = (X \cdot \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}'))$.

Cette dernière relation n'est que l'application directe de la méthode de Laumon pour prouver [39, (6.6.4)] : on vérifie en effet que l'hypothèse de caractéristique 0 faite dans [39] n'intervient réellement que pour assurer que $\mathscr{D}_X$ soit de dimension homologique finie, et que, lorsque $f : X \to \operatorname{Spec} k$ est le morphisme structural d'un k-schéma lisse, il existe pour tout $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{E}$ un isomorphisme $f_+\mathscr{E} \simeq \mathbb{R}\Gamma(X, \mathrm{DR}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E}))$. Or ces deux propriétés sont vraies pour $\mathscr{D}^{(0)}_X$ sur un corps de caractéristique p. Comme l'ensemble des outils utilisés par

Laumon est disponible tel quel pour les $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules, on peut conclure.

Remarque. — Comme le montre Garnier (*cf.* [23], [24]), cette formule fait apparaître le lien existant, lorsque $\mathscr{X}$ est une courbe, entre les multiplicités du cycle caractéristique d'un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome, et la théorie de l'irrégularité.

Bibliographie

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32** (1960-67).

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer-Verlag (1972-73).

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lecture Notes in Math. **225**, Springer-Verlag (1971).

[1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)*, Astérisque **100**, p. 5-171 (1982).

[2] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. **407**, Springer-Verlag (1974).

[3] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathscr{D}$-modules*, in *p-adic Analysis* (ed. F. Baldassarri, S. Bosch, B. Dwork), Lecture Notes in Math. **1454**, p. 80-124, Springer-Verlag (1990).

[4] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres. Première partie*, Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[5] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **29**, p. 185-272 (1996).

[6] P. Berthelot, *Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes*, C. R. Acad. Sc. Paris **323**, p. 35-40 (1996).

[7] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, avec un appendice de A. J. de Jong, Inventiones Math. **128**, p. 329-377 (1997).

[8] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques II. Descente par Frobenius*, Prépublication IRMAR 98-32, Université de Rennes (1998), à paraître aux Mémoires de la Soc. Math. France.

[9] P. Berthelot, *Limites de faisceaux quasi-cohérents et conditions de finitude dans les catégories dérivées*, en cours de rédaction.

[10] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques III. Images directes et inverses*, en cours de rédaction.

[11] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques IV. Variété caractéristique*, en préparation.

[12] P. Berthelot, A. Ogus, *Notes on Crystalline Cohomology*, Math. Notes **21**, Princeton University Press (1978).

[13] J. Bernstein, *Modules over the ring of differential operators. A study of fundamental solutions to equations with constant coefficients*, Funk. Anal. i Pril. **5**, p. 1-16 (1971).

[14] J. Bernstein, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Funk. Anal. i Pril. **6**, p. 26-40 (1972).

[15] J.-E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland (1979).

[16] J.-E. Björk, *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications*, Mathematics and its applications **247**, Kluwer (1993).

[17] A. Borel, *Algebraic D-modules*, Perspectives in Math. **2**, Academic Press (1987).

[18] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Grundlehren des math. Wissenschaften **261**, Springer-Verlag (1984).

[19] J.-L. Brylinski, A. Dubson, M. Kashiwara, *Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale*, C. R. Acad. Sc. Paris **293**, p. 573-576 (1981).

[20] P. Cartier, *Une nouvelle opération sur les formes différentielles*, C. R. Acad. Sc. Paris **244**, p. 426-428 (1957).

[21] P. Cartier, *Dérivations et diviseurs en géométrie algébrique*, Thèse Fac. Sc. Paris, Gauthier-Villars (1959).

[22] G. Christol, Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II*, Annals of Math. **146**, p. 345-410 (1997).

[23] L. Garnier, *Quelques propriétés des $\mathcal{D}^{\dagger}$-modules holonomes sur une courbe*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1 (1993).

[24] L. Garnier, *Cohérence sur $\mathcal{D}^{\dagger}$ et irrégularité des isocristaux surconvergents de rang 1*, Forum Math. **9**, p. 569-601 (1997).

[25] E. Große-Klönne, *de Rham-Kohomologie in der rigiden Analysis*, Thèse de Doctorat, Universität Münster (1998).

[26] A. Grothendieck, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes*, notes by J. Coates and O. Jussila, *in Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland (1968).

[27] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag (1966).

[28] C. Huyghe, *Construction et étude de la transformation de Fourier pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1 (1995).

[29] C. Huyghe, *Interprétation géométrique sur l'espace projectif des $A_N(K)^{\dagger}$-modules cohérents*, C. R. Acad. Sc. Paris **321**, p. 587-590 (1995).

[30] C. Huyghe, *Transformation de Fourier des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-modules*, C. R. Acad. Sc. Paris **321**, p. 759-762 (1995).

[31] C. Huyghe, *$\mathcal{D}^{\dagger}(\infty)$-affinité des schémas projectifs*, Ann. Inst. Fourier **48**, p. 913-956 (1998).

[32] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations II*, Lecture Notes in Math. **283**, Springer-Verlag (1972).

[33] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83**, p. 51-93 (1997).

[34] N. M. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turittin*, Publ. Math. IHES **35**, p. 175-232 (1971).

[35] N. M. Katz, G. Laumon, *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles*, Publ. Math. IHES **62**, p. 145-202 (1986).

[36] M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial differential equations* (Master's thesis, Tokyo University, 1970), trad. par A. D'Agnolo et J.-P. Schneiders, Mémoires Soc. Math. France **63** (1995).

[37] M. Kashiwara, *On the Holonomic Systems of Linear Differential Equations, II*, Inventiones math. **49**, p. 121-135 (1978).

[38] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der math. Wissenschaften **292**, Springer-Verlag (1990).

[39] G. Laumon, *Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-modules filtrés*, in *Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Math. **1016**, p. 151-237, Springer-Verlag (1983).

[40] M. Lejeune, B. Malgrange, Séminaire *Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels*, Grenoble (1975-76).

[41] B. Malgrange, *Transformation de Fourier géométrique*, Séminaire Bourbaki, Exposé 692 (1987-88), Astérisque **161-162**, p. 133-150 (1989).

[42] Z. Mebkhout, *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents*, Travaux en Cours **35**, Hermann (1989).

[43] Z. Mebkhout, *Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière*, Amer. Journal of Math. **119**, p. 1027-1081 (1997).

[44] P. Monsky, G. Washnitzer, *Formal Cohomology I*, Annals of Math. **88**, p. 181-217 (1968).

[45] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS **24**, p. 849-995, Kyoto Univ. (1988).

[46] M. Saito, *Induced $\mathscr{D}$-modules and differential complexes*, Bull. Soc. Math. France **117**, p. 361-387 (1989).

[47] P. Schapira, J.-P. Schneiders, *Elliptic Pairs I : Relative Finiteness and Duality*, in *Index Theorem for Elliptic Pairs*, Astérique **224**, p. 5-60 (1994).

[48] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Annals of Math. **61**, p. 197-278 (1955).

[49] A. Virrion, *Théorèmes de dualité locale et globale dans la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1 (1995).

[50] A. Virrion, *Théorème de bidualité et caractérisation des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes*, C. R. Acad. Sc. Paris **319**, série I, p. 1283-1286 (1994).

[51] A. Virrion, *Théorème de dualité relative pour les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques*, C. R. Acad. Sc. Paris **321**, série I, p. 751-754 (1995).

[52] A. Virrion, *Dualité locale et holonomie pour les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques*, Prépublication IRMAR 98-12, Université de Rennes (1998), à paraître au Bull. Soc. Math. France.

Pierre BERTHELOT
IRMAR
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France

e-mail : Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr
web : http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo