Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide

Pierre Berthelot

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes cedex, France

avec un appendice par

Aise Johan de Jong

Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA

Sommaire

Introduction

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. La première méthode systématique permettant de définir une bonne cohomologie p-adique pour certaines classes de variétés algébriques sur k remonte à une trentaine d'années, et est dûe à Monsky et Washnitzer [22]. Inspirée par les travaux de Dwork sur les fonctions ζ des variétés algébriques sur les corps finis, elle s'applique uniquement aux variétés affines et lisses, et repose sur des théorèmes d'invariance et de fonctorialité pour la cohomologie de de Rham d'un relèvement adéquat de la variété donnée. Grâce aux techniques de Dwork, cette théorie permet de prouver le théorème de rationalité des fonctions zêta [24], mais les propriétés des espaces de cohomologie ainsi obtenus sont restées jusqu'ici assez mystérieuses. En particulier, la finitude de ces espaces n'avait pas été démontrée, sauf en degré ≤ 1 par Monsky lui-même [25], et en tous degrés pour les variétés possédant une bonne compactification, grâce à la cohomologie rigide [6]. Un des principaux résultats du présent article est de prouver cette propriété de finitude pour toute variété lisse.

Le théorème d'invariance de Monsky-Washnitzer a été l'une des motivations qui ont amené à cette époque Grothendieck à introduire la cohomologie cristalline, conçue elle aussi comme une généralisation de la cohomologie de de Rham [15], mais construite par des méthodes très différentes de celles de Monsky et Washnitzer. Un progrès essentiel apporté par les méthodes cristallines a été de pouvoir travailler modulo p^n, et en particulier de fournir dans le cas lisse un théorème de comparaison entre la réduction modulo p de la cohomologie cristalline, et la cohomologie de de Rham relativement à k. Dans le cas des variétés propres et lisses, un argument simple permet alors de déduire le théorème de finitude pour la cohomologie cristalline du théorème de finitude usuel pour la cohomologie des faisceaux algébriques cohérents en caractéristique p [5, VII 1.1].

Dans le cas des variétés non propres, la cohomologie cristalline n'est plus de type fini, et, comme l'avait souligné Grothendieck dès le départ [15, 7.5], il y a lieu de la remplacer par une théorie qui généralise à la fois la cohomologie cristalline dans le cas propre et lisse, et la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine et lisse. C'est ce qui a motivé l'introduction par la suite de la cohomologie rigide [3], qui fournit une telle généralisation. Dans ce cadre, on peut également construire une cohomologie à supports propres, ce qui faisait défaut dans la théorie cristalline comme dans celle de Monsky-Washnitzer. Pour les variétés qui sont complémentaires d'un diviseur à croisements normaux stricts dans une variété projective et lisse, et en se limitant aux coefficients constants, les propriétés déjà connues de ces cohomologies sont suffisantes pour en déduire la finitude de la cohomologie à supports propres, et, par dualité, de la cohomologie sans supports [6]. Par contre, en l'absence du théorème de résolution des singularités en caractéristique p, la question de la finitude était restée ouverte pour des variétés lisses arbitraires. Nous expliquons ici comment, grâce au magnifique théorème prouvé récemment par A. J. de Jong sur l'existence d'altérations projectives et lisses pour une variété quelconque ([19, th. 4.1], cf. théorème 3.4), il est maintenant possible de démontrer ces résultats sans avoir recours à la résolution des singularités.

Dans la première section, nous commençons par rappeler la construction de la cohomologie rigide. Celle-ci repose sur des choix auxiliaires (compactification de la variété donnée, plongement dans un schéma formel lisse), et, pour fournir une démonstration complète, nous donnons brièvement la preuve des théorèmes d'indépendance annoncés dans [3]. Nous nous limitons ici au cas des coefficients constants, qui sera le seul considéré dans cet article, en renvoyant le cas de la cohomologie à coefficients dans un isocristal surconvergent à un exposé plus systématique [6]. Nous n'avons pas non plus inclus de rappels sur la démonstration des théorèmes de fibration qui sont au cœur de ces résultats, leur rédaction étant déjà en circulation depuis quelques années [5], et destinée à être incorporée dans [6]. Enfin, nous renvoyons encore à [6] pour le cas de la cohomologie à supports propres, car la démonstration du théorème de finitude est alors analogue, en plus simple, à celle que nous donnons dans le cas de la cohomologie sans supports (cf. 3.9 (i)). Par contre, nous donnons la preuve des théorèmes de comparaison, d'une part avec la cohomologie cristalline dans le cas propre et lisse, d'autre part avec la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine et lisse, car ils jouent un rôle essentiel dans la démonstration du théorème de finitude. Dans la seconde section, nous introduisons la cohomologie rigide à supports dans un sous-schéma fermé, et nous en montrons quelques propriétés élémentaires, notamment la suite exacte d'excision, fondamentale pour les récurrences qui suivront.

La troisième section est consacrée à la démonstration du théorème de finitude pour la cohomologie rigide des variétés lisses, avec des coefficients constants (ou dans certains cas qui s'y ramènent aisément, comme ceux qui interviennent dans la théorie des sommes exponentielles). Dans son esprit, cette démonstration est du même type que celle que donne Hartshorne pour la cohomologie de de Rham en caractéristique nulle [17, II (6.1)]. Elle procède par une double récurrence, portant d'une part sur la cohomologie sans supports d'une variété lisse de dimension $\leq n$, d'autre part sur la cohomologie d'une variété lisse de dimension arbitraire à supports dans une sous-variété quelconque de dimension $\leq n$. Outre le théorème d'altération de de Jong, grâce auquel on peut utiliser le théorème de finitude pour la cohomologie cristalline, un ingrédient essentiel de cette récurrence est fourni par un cas particulier de l'isomorphisme de Gysin entre cohomologie rigide d'une sous-variété lisse et cohomologie rigide à supports dans cette sous-variété.

La démonstration de ce dernier énoncé, qui constitue techniquement le cœur du présent article, occupe les sections 4 et 5. Rappelons que, dans le cas d'une variété affine et d'un diviseur principal lisse, l'isomorphisme de Gysin avait déjà été construit par Monsky et Washnitzer [23] (voir aussi [13, 7.1]). Faute de savoir pour l'instant le construire en toute généralité en cohomologie rigide, nous nous limitons dans la section 5 à en donner une construction dans le cas de variétés relevables, ce qui suffit pour la démonstration du théorème de finitude. Dans ce cas, on peut partir de l'isomorphisme de Gysin algébrique au niveau des complexes de de Rham des variétés relevées, et en déduire, en passant aux faisceaux analytiques rigides associés, un isomorphisme de Gysin analytique ayant pour but la cohomologie locale “méromorphe” à supports dans la sous-variété relevée. Pour obtenir l'isomorphisme voulu au niveau de la cohomologie rigide, on est alors amené à comparer des complexes de de Rham “à singularités méromorphes” et “à singularités surconvergentes” le long d'un diviseur lisse. Ce théorème de comparaison, établi dans la section 4, est du même type que le théorème de comparaison de Grothendieck en analytique complexe ; on peut le voir comme une généralisation du théorème de comparaison de Baldassarri-Chiarellotto [1] (mais ici seulement dans le cas des coefficients constants), lorsqu'on se trouve dans une situation avec singularités surconvergentes le long d'un diviseur arbitraire à l'infini. La méthode que nous employons fait appel à la théorie des anneaux d'opérateurs différentiels complétés développée dans [8], grâce à une généralisation des théorèmes de présentation de [7].

Comme corollaires de ces constructions, nous obtenons une variante locale de l'isomorphisme de Gysin, analogue du théorème de pureté cohomologique en cohomologie étale, et nous prouvons pour la cohomologie rigide le classique théorème d'annulation en degrés $< 2d$ de la cohomologie à supports dans une sous-variété de codimension d.

Enfin, A. J. de Jong montre en appendice comment, par des réductions géométriques supplémentaires, on peut donner une variante de la démonstration du théorème de finitude exposée dans la section 3 qui ne fasse pas appel à l'isomorphisme de Gysin.

Mentionnons pour finir qu'il existe une autre approche du théorème de finitude, reposant sur un théorème de l'indice pour les équations différentielles p-adiques. Cette approche, mentionnée par Monsky en parallèle avec sa démonstration de la finitude de la cohomologie de de Rham en caractéristique 0 [26], a été développée par Mebkhout (non publié). Depuis la rédaction de cet article, Christol m'a signalé avoir obtenu récemment, en collaboration avec Mebkhout, une forme du théorème de l'indice qui généralise suffisamment leurs résultats antérieurs pour pouvoir utiliser cette méthode [11]. Cela fournirait donc une autre démonstration de la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, reposant sur des techniques entièrement différentes de celle que nous exposons ici.

Remerciements. C'est un plaisir de remercier A. J. de Jong pour toutes les discussions que nous avons eues sur son théorème d'altération et sur les applications qu'on peut en tirer, ainsi que R. Crew et B. Le Stum pour leurs commentaires sur mes premières tentatives pour exposer ces résultats. Je remercie d'autre part l'Isaac Newton Institute (Cambridge) pour l'ambiance très stimulante dans laquelle a été commencée, en Juin 93, la partie de ce travail relative à l'isomorphisme de Gysin. Enfin, c'est aussi un plaisir de remercier S. Bloch et W. Messing pour tous les échanges que nous y avons eus sur cette question.

Conventions générales. — Nous supposerons dans cet article que tous les schémas ou schémas formels considérés sont séparés.

Pour tout faisceau de groupes abéliens E, nous noterons $E_{\mathbb{Q}} := E \otimes \mathbb{Q}$.

1. Rappels sur la cohomologie rigide

On fixe un corps k de caractéristique $p > 0$, et un anneau de valuation discrète complet $\mathcal{V}$ d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k, dont l'idéal maximal sera noté $\mathfrak{m}$, et le corps des fractions K. La valuation est supposée normalisée par $v(p) = 1$, et on lui associe la valeur absolue telle que $|p| = p^{-1}$. On note $\Gamma_0^* \subset \mathbb{R}^*$ le sous-groupe multiplicatif des valeurs absolues d'éléments de K^*, et $\Gamma^* = \Gamma_0^* \otimes \mathbb{Q}$, qui est un sous-groupe multiplicatif dense de $\mathbb{R}^*$.

Nous rappelons d'abord ici sans démonstration les constructions géométriques de base permettant de définir la cohomologie rigide relativement à K d'un k-schéma de type fini X, en renvoyant à [5] pour les justifications nécessaires. Nous donnons ensuite rapidement la démonstration des théorèmes d'indépendance annoncés dans [3], qui assurent l'existence et la fonctorialité de la cohomologie rigide. L'idée est en gros la suivante : on compactifie X en un schéma $\overline{X}$ propre sur k, puis on plonge $\overline{X}$ dans un $\mathcal{V}$-schéma formel p-adique $\hat{P}$ lisse au voisinage de X; au schéma formel $\hat{P}$, on associe par la théorie de Raynaud [29] un espace analytique rigide $\hat{P}_K$ sur K; la donnée du sous-schéma $\overline{X}$ de $\hat{P}$ définit un ouvert $]\overline{X}[$ de $\hat{P}_K$, le tube de $\overline{X}$ dans $\hat{P}_K$, qui joue le même rôle qu'un voisinage infinitésimal de $\overline{X}$ dans $\hat{P}$; on construit sur $]\overline{X}[$ un faisceau de fonctions “à singularités surconvergentes le long de $\overline{X} \setminus X$”, et, grâce à un théorème de fibration pour le morphisme induit entre les tubes par un morphisme lisse de schémas formels, on prouve que la cohomologie de de Rham de $]\overline{X}[$ à coefficients dans ce faisceau est indépendante des choix faits pour $\overline{X}$ et $\hat{P}$, et fonctorielle en X. Nous montrerons enfin la commutation de cette cohomologie aux extensions finies du corps K, et les théorèmes de comparaison avec la cohomologie cristalline et avec la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

1.1. Soit $\hat{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel p-adique, localement de type fini. Suivant Raynaud [29], on peut associer à $\hat{P}$ un espace analytique rigide $\hat{P}_K$, qu'on appelle *fibre générique* de X. Lorsque $\hat{P}$ est affine, égal à $\operatorname{Spf} A$, $\hat{P}_K$ est l'espace affinoïde $\operatorname{Spm}(A \otimes K)$. Lorsque $\hat{P}$ est le complété formel d'un $\mathcal{V}$-schéma propre P, de fibre générique P_K, $\hat{P}_K$ s'identifie à l'espace analytique P_K^{an} associé à P_K [5, (0.3.5)]. L'espace $\hat{P}_K$ est muni d'un morphisme canonique d'espaces annelés $\mathrm{sp} : \hat{P}_K \to \hat{P}$, appelé *morphisme de spécialisation* [5, (0.2.2)]. Si $\hat{P} = \operatorname{Spf} A$, le morphisme sp associe à un point $x \in \operatorname{Spm}(A \otimes K)$, de corps résiduel $K(x)$, le point de $\operatorname{Spf} A$ correspondant à l'idéal maximal image inverse par l'homomorphisme $A \to A \otimes K \to K(x)$ de l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $K(x)$; le cas général s'en déduit par recollement. La construction de l'espace $\hat{P}_K$ et du morphisme $\mathrm{sp} : \hat{P}_K \to \hat{P}$ est fonctorielle en $\hat{P}$; nous noterons $u_K : \hat{P}'_K \to \hat{P}_K$ le morphisme d'espaces analytiques défini par un morphisme de schémas formels $u : \hat{P}' \to \hat{P}$.

Pour toute partie localement fermée X de la fibre spéciale P_0 de $\hat{P}$, on appelle *tube* de X dans $\hat{P}$ le sous-ensemble

$$]X[_{\hat{P}} = \mathrm{sp}^{-1}(X) \subset \hat{P}_K.$$

C'est un ouvert de $\hat{P}_K$, fonctoriel par rapport au couple $(X, \hat{P})$ [5, (1.1.1)]. S'il existe $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in \Gamma(\hat{P}, \mathcal{O}_{\hat{P}})$ tels que $X = (\bigcap_{i=1}^r V(f_i)) \cap (\bigcup_{j=1}^s D(g_j))$, le tube $]X[_{\hat{P}}$ est l'ouvert de $\hat{P}_K$ défini par les conditions

$$]X[_{\hat{P}} = \{ x \in \hat{P}_K \mid \forall\, i,\ |f_i(x)| < 1\ ;\ \exists\, j,\ |g_j(x)| = 1 \}. \tag{1.1.1}$$

Par construction, le morphisme de spécialisation induit un morphisme d'espaces topologiques $\mathrm{sp} :]X[_{\hat{P}} \to X$.

Soient $\overline{X}$ un sous-schéma fermé de P_0, et $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ une immersion ouverte, de complémentaire Z. Le tube $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ est la réunion disjointe des tubes $]X[_{\hat{P}}$ et $]Z[_{\hat{P}}$, mais le recouvrement ainsi obtenu n'est pas admissible en général. On dit qu'un ouvert

$V \subset\,]\overline{X}[_{\hat{P}}$ est un *voisinage strict* de $]X[_{\hat{P}}$ dans $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ si les deux ouverts V et $]Z[_{\hat{P}}$ forment un recouvrement admissible de $]\overline{X}[_{\hat{P}}$. Par exemple, si $\hat{P}$ est le complété formel d'un $\mathcal{V}$-schéma séparé P, et si X' est un ouvert de P de fibre spéciale X, l'espace analytique $X_K'^{\mathrm{an}}$ associé à la fibre générique X'_K de X' est un voisinage strict de $]X[_{\hat{P}}$ dans $\hat{P}_K$ [5, (1.2.4) (ii)].

Un autre cas particulier important est celui qu'on obtient en considérant un $\mathcal{V}$-schéma affine X', de fibre spéciale X, et une immersion fermée $X' \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$. Si $\overline{X}'$ est l'adhérence schématique de X' dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$, et $\hat{\overline{X}}'$ son complété formel, le tube $]X[_{\hat{\overline{X}}'}$ est l'intersection de $X_K'^{\mathrm{an}}$ avec la boule unité fermée de $\mathbb{A}_K^{n\,\mathrm{an}}$, et un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_{\hat{\overline{X}}'}$ dans $\hat{\overline{X}}'_K = \overline{X}_K'^{\mathrm{an}}$ est fourni par les intersections de $X_K'^{\mathrm{an}}$ avec les boules de rayon $\lambda > 1$ dans $\mathbb{A}_K^{n\,\mathrm{an}}$ [5, (1.2.4) (iii)].

1.2. Soient $\hat{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel de fibre spéciale P_0, $\overline{X} \subset P_0$ un sous-schéma fermé, X un ouvert de $\overline{X}$, $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ l'immersion ouverte correspondante. On définit un foncteur $j^\dagger$ de la catégorie des faisceaux abéliens sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ dans elle-même en associant à un faisceau abélien E le faisceau

$$j^\dagger E \;=\; \varinjlim_{V} j_{V*} j_V^{-1} E,$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages stricts de $]X[_{\hat{P}}$ dans $]\overline{X}[_{\hat{P}}$, et j_V est l'inclusion de V dans $]\overline{X}[_{\hat{P}}$. On vérifie que le foncteur $j^\dagger$ est exact, et que le morphisme canonique $E \to j^\dagger E$ est un épimorphisme [5, (2.1.3)]. Si $Z = \overline{X} \setminus X$, on définit de plus un foncteur $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}$ par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[} E \longrightarrow E \longrightarrow j^\dagger E \longrightarrow 0; \tag{1.2.1}$$

le foncteur $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}$ est également exact.

Les foncteurs $j^\dagger$ et $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}$ vérifient les propriétés suivantes [5, 2.1] :

(i) La restriction de $j^\dagger E$ (resp. $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[} E$) à $]X[_{\hat{P}}$ est égale à celle de E (resp. est nulle), et sa restriction à $]Z[_{\hat{P}}$ est nulle (resp. est égale à celle de E).

(ii) Si $(X_i)_{i=1,\ldots,r}$ est un recouvrement ouvert de X, si, pour toute suite $i_1 < \ldots < i_k$, on note $X_{i_1\ldots i_k} = X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}$, et si $j_{i_1\ldots i_k} : X_{i_1\ldots i_k} \hookrightarrow \overline{X}$ est l'immersion ouverte correspondante, il existe pour tout faisceau abélien E des suites exactes de faisceaux sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$

$$0 \longrightarrow j^\dagger E \longrightarrow \prod_i j_i^\dagger E \longrightarrow \prod_{i_1<i_2} j_{i_1 i_2}^\dagger E \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_{1\ldots r}^\dagger E \longrightarrow 0, \tag{1.2.2}$$

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[} E \longrightarrow E \longrightarrow \prod_i j_i^\dagger E \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_{1\ldots r}^\dagger E \longrightarrow 0. \tag{1.2.3}$$

(iii) Soient X_1 et X_2 deux ouverts de $\overline{X}$, $X = X_1 \cap X_2$, j_1, j_2 et j les immersions ouvertes correspondantes, Z_i le complémentaire de X_i ($i = 1, 2$), $Z = Z_1 \cap Z_2$. Il existe des isomorphismes canoniques de foncteurs

$$\Gamma^\dagger_{]Z_1[} \circ j_2^\dagger \simeq j_2^\dagger \circ \Gamma^\dagger_{]Z_1[}, \qquad \Gamma^\dagger_{]Z_1[} \circ \Gamma^\dagger_{]Z_2[} \simeq \Gamma^\dagger_{]Z[}, \qquad j_1^\dagger \circ j_2^\dagger \simeq j^\dagger. \tag{1.2.4}$$

(iv) Soit $j_V : V \hookrightarrow \,]\overline{X}[_{\hat{P}}$ l'inclusion d'un voisinage strict de $]X[_{\hat{P}}$. Si E est un faisceau abélien sur V, on note encore $j^\dagger E$ le faisceau sur V défini par $j^\dagger E = \varinjlim_{V'} j_{V,V'*} j_{V,V'}^{-1} E$, où V' parcourt l'ensemble des voisinages stricts de $]X[_{\hat{P}}$ contenus dans V, et $j_{V,V'}$ est l'inclusion de V' dans V. On notera également $j^\dagger E$ le faisceau sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ défini par $j^\dagger E = \varinjlim_{V'} j_{V'*} j_{V,V'}^{-1} E$. Cet abus de notation est justifié par les relations

$$\varinjlim_{V'} j_{V'*} j_{V,V'}^{-1} E \xrightarrow{\sim} j_{V*}(j^\dagger E), \qquad R^k j_{V*}(j^\dagger E) = 0, \quad \forall\, k \geq 1, \tag{1.2.5}$$

qu'on vérifie immédiatement par restriction à V d'une part, et à $]Z[_{\hat{P}}$ d'autre part. Le foncteur $j^\dagger$ ainsi obtenu de la catégorie des faisceaux abéliens sur V dans celle des faisceaux abéliens sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ est encore exact.

(v) Soient $i : \overline{X} \hookrightarrow \overline{X}'$ une immersion fermée, $j' = i \circ j$. On suppose que j' est une immersion ouverte de X dans $\overline{X}'$. Alors $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ est un voisinage strict de $]X[_{\hat{P}}$ dans $]\overline{X}'[_{\hat{P}}$, et, si l'on note $i_K : \,]\overline{X}[_{\hat{P}} \hookrightarrow \,]\overline{X}'[_{\hat{P}}$, on a d'après (iv)

$$j'^\dagger E \xrightarrow{\sim} i_{K*} j^\dagger E, \qquad R^k i_{K*} j^\dagger E = 0, \quad \forall\, k \geq 1. \tag{1.2.6}$$

(vi) Le foncteur $j^\dagger$ commute aux limites inductives filtrantes : cela résulte de ce qu'il existe toujours un système fondamental de voisinages stricts dont l'intersection avec tout ouvert affinoïde de $]\overline{X}'[_{\hat{P}}$ est quasi-compacte [5, (1.2.9)].

1.3. Soient X un k-schéma séparé, $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ une compactification de X sur k : il en existe d'après un théorème de Nagata [27]. On suppose qu'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\hat{P}$ lisse aux points de X, et une immersion fermée $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$. On définit la *cohomologie rigide* de X (relativement à K) en posant

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) := H^*(]\overline{X}[_{\hat{P}}, j^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[}). \tag{1.3.1}$$

Le fait que ces espaces de cohomologie soient indépendants des choix faits pour $\overline{X}$ et $\hat{P}$, et soient fonctoriels en X, résultera des théorèmes qui suivent.

Remarque. — On peut définir les groupes $H^*_{\mathrm{rig}}(X/K)$ sans supposer qu'il existe globalement sur $\overline{X}$ une immersion fermée $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$, par l'intermédiaire d'un complexe de Čech construit au moyen d'immersions locales. Dans le cadre de cet article, nous nous limiterons néanmoins au cas où l'on dispose d'une immersion globale. Cette hypothèse est en particulier satisfaite lorsque X est quasi-projectif sur k, et que l'on prend pour $\overline{X}$ une compactification projective de X.

Montrons d'abord l'indépendance des groupes de cohomologie (1.3.1) par rapport au plongement de $\overline{X}$ dans $\hat{P}$.

1.4. THÉORÈME. — *Soient $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ une immersion ouverte entre k-schémas de type fini, $i : \overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$, $i' : \overline{X} \hookrightarrow \hat{P}'$ deux immersions fermées dans des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses aux points de X, $u : \hat{P}' \to \hat{P}$ un morphisme lisse aux points de X, tel que $i = u \circ i'$. Notons respectivement $j^\dagger$ et $j'^\dagger$ les foncteurs sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ et $]\overline{X}[_{\hat{P}'}$ définis par l'immersion j, $u_K :]\overline{X}[_{\hat{P}'} \to]\overline{X}[_{\hat{P}}$ le morphisme induit par u. Alors le morphisme canonique*

$$j^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}} \longrightarrow \mathbb{R}u_{K*} j'^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}} \tag{1.4.1}$$

est un isomorphisme.

Nous indiquons sommairement les grandes lignes de la démonstration, en renvoyant le lecteur à [6, III] pour plus de détails. L'énoncé est local sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$, et on peut se ramener au cas où $\hat{P}$ et $\hat{P}'$ sont affines en prenant des recouvrements ouverts affines $(\hat{P}_\alpha)$ et $(\hat{P}'_\alpha)$ de $\hat{P}$ et $\hat{P}'$ tels que $u(\hat{P}'_\alpha) \subset \hat{P}_\alpha$ et $\hat{P}'_\alpha \cap \overline{X} = \hat{P}_\alpha \cap \overline{X}$. On localise ensuite sur X grâce aux suites exactes (1.2.2) pour se ramener au cas où $Z = \overline{X} \setminus X$ est défini par une équation dans $\overline{X}$, et où le faisceau conormal à X dans $P'_X := X \times_{\hat{P}} \hat{P}'$ est libre, de rang d. En prolongeant une suite régulière de générateurs de l'idéal de X dans P'_X en une suite de sections de l'idéal de $\overline{X}$ dans $\overline{X} \times_{\hat{P}} \hat{P}'$, et en relevant celles-ci dans $\hat{P}'$, on définit un morphisme φ de $\hat{P}'$ dans l'espace affine formel $\hat{P}'' = \hat{\mathbb{A}}^d \times \hat{P}$ au-dessus de $\hat{P}$, envoyant $\overline{X}$ dans la section nulle de $\hat{P}''$. Il résulte alors du théorème de fibration fort [5, (1.3.7)] que φ_K induit un isomorphisme entre un voisinage strict de $]X[_{\hat{P}'}$ dans $]\overline{X}[_{\hat{P}'}$ et un voisinage strict de $]X[_{\hat{P}''}$ dans $]\overline{X}[_{\hat{P}''}$. On peut ainsi ramener l'énoncé au cas où $\hat{P}' = \hat{\mathbb{A}}^d \times \hat{P}$, et où i' est le composé de i et de la section nulle.

Par récurrence, il suffit de traiter le cas $d = 1$. On montre alors les assertions suivantes, qui entraînent le théorème :

(i) Le morphisme canonique $j^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}} \longrightarrow u_{K*} j'^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}}$ est un quasi-isomorphisme;

(ii) Le complexe $R^1 u_{K*} j'^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}}$ est acyclique;

(iii) Les faisceaux $R^i u_{K*} j'^\dagger \Omega^k_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}}$ sont nuls pour tout k et tout $i \geq 2$.

Soit t la coordonnée canonique sur $\hat{\mathbb{A}}^1$. Pour montrer (i), on se place au-dessus d'un affinoïde $W \subset]\overline{X}[_{\hat{P}}$, et on utilise le recouvrement admissible de $]\overline{X}[_{\hat{P}'}$ fourni par les tubes fermés $[\overline{X}]_{\hat{P}',\eta}$, pour $\eta \to 1^-$, $\eta \in \Gamma^*$: rappelons que, si $\overline{X}$ est défini dans la fibre spéciale P_0 de P par les réductions d'équations $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(\hat{P}, \mathcal{O}_{\hat{P}})$, on définit $[\overline{X}]_{\hat{P},\eta}$ par

$$[\overline{X}]_{\hat{P},\eta} = \{\, x \in \hat{P}_K \mid \forall\, i,\ |f_i(x)| \leq \eta \,\},$$

et de même pour $[\overline{X}]_{\hat{P}',\eta}$. Pour tout faisceau E sur $]\overline{X}[_{\hat{P}'}$, et toute suite croissante $\eta_n \in \Gamma^*$ de limite 1, on a alors

$$\Gamma(W, u_{K*}E) \;=\; \varprojlim_n \Gamma(u_K^{-1}(W) \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, E). \tag{1.4.2}$$

Soit d'autre part $h \in \Gamma(\hat{P}, \mathcal{O}_{\hat{P}})$ relevant une équation de Z dans $\overline{X}$. Pour tout $\lambda < 1$, on note U_λ l'ouvert de $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ défini par la condition $|h(x)| \geq \lambda$, et $U'_\lambda = u_K^{-1}(U_\lambda) \subset]\overline{X}[_{\hat{P}'}$. Fixons une suite strictement croissante $\underline{\eta} = (\eta_n)$ de limite 1, telle que $\eta_n \in \Gamma^*$. D'après [5, (1.2.4) (i)], un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_{\hat{P}'}$ dans $]\overline{X}[_{\hat{P}'}$ est alors donné par les ouverts $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ associés aux suites croissantes $\underline{\lambda} = (\lambda_n)$ de limite 1, avec $\lambda_n \in \Gamma^*$, et définis par

$$V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}} = U'_{\lambda_n} \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}.$$

Comme $u_K^{-1}(W) \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}$ est quasi-compact, le foncteur $\Gamma(u_K^{-1}(W) \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, -)$ commute aux limites inductives filtrantes. D'autre part, on a

$$[\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n} = [\overline{X}]_{\hat{P},\eta_n} \times D(0, \eta_n^+),$$

où, pour tout réel η, on note $D(0, \eta^+)$ le disque fermé de centre 0 et de rayon η. Comme $W \subset]\overline{X}[_{\hat{P}}$, il résulte du principe du maximum [10, 6.2.1, prop. 4] que $W \subset [\overline{X}]_{\hat{P},\eta_n}$ pour n assez grand. En posant $A = \Gamma(W, \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}}})$, $B_\lambda = \Gamma(W \cap U_\lambda, \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}}})$ et $B = \Gamma(W \cap]X[_{\hat{P}}, \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}}})$, on obtient alors les descriptions suivantes :

$$\Gamma(W, j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}}}) \simeq \varinjlim_n B_{\lambda_n},$$

$$\Gamma(W, u_{K*}j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[}) \simeq \left\{ \sum_k a_k t^k \in B[[t]] \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall n, \exists \lambda_n < 1 \text{ tel que}, \forall k, \exists a_{k,n} \in B_{\lambda_n} \\ \text{d'image } a_k \text{ dans } B, \text{ tel que } \| a_{k,n} \| \eta_n^k \to 0 \end{array} \right\},$$

la norme étant prise dans B_{λ_n}. On en déduit sans difficulté la variante suivante du lemme de Poincaré : si ∂ est la dérivation par rapport à t, la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(W, j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}}}) \longrightarrow \Gamma(W, u_{K*}j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}}) \xrightarrow{\partial} \Gamma(W, u_{K*}j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}}) \longrightarrow 0$$

est exacte. L'assertion (i) en résulte.

Pour prouver l'assertion (ii), on se ramène à montrer que, pour tout k, l'homomorphisme

$$(1.4.3) \qquad H^1(u_K^{-1}(W), j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}}) \xrightarrow{\partial} H^1(u_K^{-1}(W), j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$$

est un isomorphisme. Pour cela, on utilise encore le recouvrement de $]\overline{X}[_{\hat{P}'}$ par les $[\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}$ afin de faire un calcul de cohomologie de Čech, à la manière de [20, p. 271-272]. Un 1-cocycle s'interprète alors comme une famille de sections $g_n \in \Gamma(u_K^{-1}(W) \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$, et un tel cocycle est un cobord si et seulement s'il existe une famille de sections $f_n \in \Gamma(u_K^{-1}(W) \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$ telles que $g_n = f_n - f_{n+1}$ pour tout n. Supposons d'abord que (g_n) soit un cocycle tel que (∂g_n) soit un cobord. Il existe alors une suite croissante $\lambda_n \in \Gamma^*$ de limite 1, et des sections $f_n \in \Gamma(u_K^{-1}(W) \cap U'_{\lambda_n} \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$ telles que, pour tout n, on ait $\partial g_n = f_n - f_{n+1}$ dans $\Gamma(u_K^{-1}(W) \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$. Soit $f'_n \in \Gamma(u_K^{-1}(W) \cap U'_{\lambda_{n+1}} \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$ une section telle que $\partial f'_n = f_{n+1}$; il en existe, car $\eta_n < \eta_{n+1}$. Le cocycle (g_n) est alors cohomologue au cocycle $(g_{n+1} - f'_n + f'_{n+1})$. Comme celui-ci est tel que $\partial(g_{n+1} - f'_n + f'_{n+1}) = 0$, on a $g_{n+1} - f'_n + f'_{n+1} \in \Gamma(W \cap [\overline{X}]_{\hat{P},\eta_n}, j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}}})$. Comme $W \subset [\overline{X}]_{\hat{P},\eta_n}$ pour n assez grand, le cocycle $(g_{n+1} - f'_n + f'_{n+1})$ est nécessairement un cobord, ce qui entraîne l'injectivité du morphisme (1.4.3). D'autre part, si (g_n) est un cocycle quelconque, il existe une suite croissante $\lambda_n \in \Gamma^*$ de limite 1 telle que, pour tout n, g_n provienne d'une section de $\Gamma(u_K^{-1}(W) \cap U'_{\lambda_n} \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$. On peut alors trouver une famille de sections $g'_n \in \Gamma(u_K^{-1}(W) \cap U'_{\lambda_{n+1}} \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$ telles que $\partial g'_n = g_{n+1}$ dans $\Gamma(u_K^{-1}(W) \cap U'_{\lambda_{n+1}} \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, \mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$, d'où un cocycle (g'_n) tel que $\partial(g'_n) = (g_{n+1})$. Comme (g_n) et (g_{n+1}) sont des cocycles cohomologues, cela montre la surjectivité de (1.4.3).

Enfin, pour prouver (iii), on déduit d'abord des théorèmes de Kiehl que les faisceaux de la forme $j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}}$ sont cohomologiquement triviaux sur les ouverts affinoïdes, grâce à la commutation de la cohomologie aux limites inductives et au fait que l'intersection des U'_λ avec un ouvert affinoïde est encore affinoïde. Il résulte alors de (1.4.2) que les groupes $H^i(u_K^{-1}(W), j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$ s'identifient aux groupes $R^i\varprojlim_n \Gamma(u_K^{-1}(W) \cap [\overline{X}]_{\hat{P}',\eta_n}, j'^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}})$. Ils sont donc nuls pour $i \geq 2$, d'où (iii).

En appliquant le foncteur $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*$ à l'isomorphisme (1.4.1), on obtient :

1.5. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de* 1.4, *le morphisme u induit un isomorphisme*

$$\mathbb{R}\mathrm{sp}_* j^\dagger\Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j'^\dagger\Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}'}}.$$

Rappelons que le morphisme de spécialisation $\mathrm{sp} : \hat{P}_K \to \hat{P}$ induit un morphisme d'espaces topologiques $]X[_{\hat{P}} \to X$ (resp. $\hat{P}'$), ce qui donne un sens à l'énoncé.

Soient alors $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}_1$ et $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}_2$ deux plongements de $\overline{X}$ dans des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses au voisinage de X. En introduisant le plongement diagonal $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}_1 \times \hat{P}_2$, et en appliquant le corollaire aux projections sur $\hat{P}_1$ et $\hat{P}_2$, on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R}\mathrm{sp}_* j^\dagger\Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}_2}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j^\dagger\Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}_1}},$$

dont on vérifie facilement qu'il donne lieu à une formule de transitivité pour trois plongements de $\overline{X}$ dans des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses au voisinage de X. Par conséquent, le complexe $\mathbb{R}\mathrm{sp}_* j^\dagger\Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}}$, vu comme objet de la catégorie dérivée des complexes de K-vectoriels sur $\overline{X}$, est indépendant à isomorphisme canonique près du choix de $\hat{P}$. Nous emploierons la notation

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X,\overline{X})/K) := \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j^\dagger\Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}}.$$

Ce complexe est de plus fonctoriel en $(X, \overline{X})$. En effet, supposons donné un morphisme $(f, \bar{f}) : (X, \overline{X}) \to (Y, \overline{Y})$, et choisissons des plongements $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$, $\overline{Y} \hookrightarrow \hat{P}'$ dans des schémas formels lisses respectivement au voisinage de X et Y. On introduit alors le plongement naturel $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}'' := \hat{P} \times \hat{P}'$, et les projections $q : \hat{P}'' \to \hat{P}$, $q' : \hat{P}'' \to \hat{P}'$, et on définit le morphisme de fonctorialité comme le composé

$$\mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_Y^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{Y}[_{\hat{P}'}} \xrightarrow{q'^*} \mathbb{R}\bar{f}_* \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}''}} \xrightarrow[\sim]{q^{*-1}} \mathbb{R}\bar{f}_* \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}},$$

où l'on a noté $j_X : X \hookrightarrow \overline{X}$, $j_Y : Y \hookrightarrow \overline{Y}$. Il est formel de vérifier qu'il est indépendant des choix effectués, et satisfait la formule de transitivité pour deux morphismes composables. De même, on vérifie que, s'il existe $g : \hat{P} \to \hat{P}'$ induisant $\bar{f}$ sur $\overline{X}$, alors le morphisme de fonctorialité ainsi défini coïncide avec le morphisme naturel induit par g^*.

L'indépendance des groupes de cohomologie (1.3.1) par rapport au choix de la compactification $\overline{X}$ résulte alors de l'énoncé suivant :

1.6. THÉORÈME. — *Soient $j : X \hookrightarrow \overline{X}$, $j' : X \hookrightarrow \overline{X}'$ deux immersions ouvertes entre k-schémas de type fini, $v : \overline{X}' \to \overline{X}$ un k-morphisme tel que $v \circ j' = j$. Si v est propre, le morphisme canonique*

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X, \overline{X})/K) \longrightarrow \mathbb{R}v_* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X, \overline{X}')/K)$$

est un isomorphisme.

L'énoncé étant local sur $\overline{X}$, on peut supposer $\overline{X}$ affine. Grâce au lemme de Chow, sous la forme précise donnée par Gruson-Raynaud [16, cor. 5.7.14], on peut trouver un éclatement $\overline{X}'' \to \overline{X}'$ centré hors de X tel que $\overline{X}'' \to \overline{X}$ soit projectif, ce qui ramène au cas où v est projectif. On choisit une immersion fermée $i : \overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$ dans un $\mathcal{V}$-schéma formel affine lisse au voisinage de X, et une $\hat{P}$-immersion fermée $i' : \overline{X}' \hookrightarrow \hat{P}' = \hat{\mathbb{P}}^N_{\mathcal{V}} \times \hat{P}$ dans un espace projectif formel au-dessus de $\hat{P}$. Soient $u : \hat{P}' \to \hat{P}$, $P'_{\overline{X}} := \hat{P}' \times_{\hat{P}} \overline{X}$. En utilisant les suites exactes (1.2.2), on voit qu'il suffit de prouver l'énoncé pour les ouverts d'un recouvrement de X, de sorte qu'on peut supposer qu'il existe un entier m et une section $s \in \Gamma(P'_{\overline{X}}, \mathcal{O}_{P'_{\overline{X}}}(m))$ telle que $X = \overline{X}' \cap D(s)$ dans $P'_{\overline{X}}$. Quitte à localiser davantage, on peut aussi supposer qu'il existe des sections $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_N \in \Gamma(D(s), \mathcal{O}_{P'_{\overline{X}}})$ formant une suite régulière de générateurs de l'idéal de X dans $D(s)$. Multipliant les $\bar{t}_i$ par s^d, pour un entier d convenable, on peut supposer qu'elles se prolongent en des sections de $\Gamma(P'_{\overline{X}}, \mathcal{O}_{P'_{\overline{X}}}(dm))$, encore notées $\bar{t}_i$. Soient $t_1, \ldots, t_N \in \Gamma(\hat{P}', \mathcal{O}_{\hat{P}'}(dm))$ des relèvements des $\bar{t}_i$, $\hat{T} \subset \hat{P}'$ le sous-schéma formel défini par l'annulation des t_i, $u' : \hat{T} \to \hat{P}$.

D'après (1.2.6), on ne change pas le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X, \overline{X}')/K) = \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j'^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}'[_{\hat{P}'}}$ si l'on remplace $\overline{X}'$ par l'adhérence de X dans $P'_{\overline{X}}$. Cela permet de supposer que $\hat{T}$ contient $\overline{X}'$. Par construction, $\hat{T}$ est étale sur $\hat{P}$ aux points de X. Comme $\overline{X}'$ est propre sur $\overline{X}$, le morphisme $u' : \hat{T} \to \hat{P}$ induit alors un isomorphisme entre des voisinages stricts de $]X[_{\hat{T}}$ dans $]\overline{X}'[_{\hat{T}}$ et de $]X[_{\hat{P}}$ dans $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ [5, (1.3.5)]. Par conséquent, le morphisme composé

$$j^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}} \longrightarrow \mathbb{R}u_{K*} j'^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}'[_{\hat{P}'}} \longrightarrow \mathbb{R}u'_{K*} j'^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}'[_{\hat{T}}}$$

est un isomorphisme. Le théorème résulte donc de ce que, d'après 1.4, le second morphisme est un isomorphisme.

On en déduit aussitôt :

1.7. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de* 1.6, *le morphisme canonique*

$$\mathbb{R}\Gamma(\overline{X}, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X,\overline{X})/K)) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(\overline{X}', \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X,\overline{X}')/K))$$

est un isomorphisme.

Soient $j_1 : X \hookrightarrow \overline{X}_1$, $j_2 : X \hookrightarrow \overline{X}_2$ deux compactifications de X sur k, $\overline{X}_3$ l'adhérence schématique de X plongé diagonalement dans $\overline{X}_1 \times \overline{X}_2$. En appliquant le corollaire aux projections de $\overline{X}_3$ sur $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$, on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R}\Gamma(\overline{X}_2, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X,\overline{X}_2)/K)) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\Gamma(\overline{X}_1, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X,\overline{X}_1)/K)),$$

vérifiant la condition de transitivité pour une troisième compactification. Par conséquent, la formule (1.3.1) définit bien, à isomorphisme canonique près, des groupes de cohomologie ne dépendant que de X. La fonctorialité en X se montre comme en 1.5 : si $f : X \to Y$ est un morphisme de k-schémas, et si $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont des compactifications de X et Y, notons $\overline{X}'$ l'adhérence schématique de X dans $\overline{X} \times \overline{Y}$, et $v : \overline{X}' \to \overline{X}$, $v' : \overline{X}' \to \overline{Y}$ les deux projections; le morphisme f^* induit sur la cohomologie rigide est alors défini comme le composé

$$\mathbb{R}\Gamma(\overline{Y}, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((Y,\overline{Y})/K)) \xrightarrow{v'^*} \mathbb{R}\Gamma(\overline{X}', \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X,\overline{X}')/K)) \xrightarrow[\sim]{v^{*-1}} \mathbb{R}\Gamma(\overline{X}, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X,\overline{X})/K)),$$

dont on vérifie encore formellement qu'il satisfait la condition de transitivité pour deux morphismes composables.

Nous aurons à utiliser un cas simple de compatibilité à l'extension des scalaires :

1.8. PROPOSITION. — *Soient K' une extension finie de K, d'anneau des entiers $\mathcal{V}'$, de corps résiduel k', X un k-schéma de type fini, X' le k'-schéma qui s'en déduit par changement de base. Il existe alors un isomorphisme canonique*

$$K' \otimes_K H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \xrightarrow{\ \sim\ } H^*_{\mathrm{rig}}(X'/K').$$

Si on choisit une compactification $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ de X, et un plongement $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$ dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X, on obtient par changement de base une compactification $j' : X' \hookrightarrow \overline{X}'$, et un plongement $\overline{X}' \hookrightarrow \hat{P}'$, où $\hat{P}'$ est lisse au voisinage de X'. Soit $u : \hat{P}' \to \hat{P}$. Comme K' est fini sur K, on peut considérer $\hat{P}'_{K'}$ comme un espace analytique sur K, fini au-dessus de $\hat{P}_K$. De plus, il résulte de la description (1.1.1) que $u_K^{-1}(]\overline{X}[_{\hat{P}}) =]\overline{X}'[_{\hat{P}'}$. Il suffit alors de démontrer que le morphisme canonique

$$K' \otimes_K j^\dagger\Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}/K} \longrightarrow \mathbb{R}u_{K*}\, j'^\dagger\Omega^\bullet_{]\overline{X}'[_{\hat{P}'}/K'}.$$

est un isomorphisme. C'est une propriété locale sur $\hat{P}$, qu'on peut donc supposer affine. On peut également localiser sur X grâce aux suites exactes (1.2.2), de sorte qu'on peut supposer $\overline{X} \setminus X$ défini dans $\overline{X}$ par la réduction d'une équation $h \in \Gamma(\hat{P}, \mathcal{O}_{\hat{P}})$. Pour $\lambda < 1$, soit U_λ (resp. U'_λ) l'ouvert de $]\overline{X}[_{\hat{P}}$ (resp. $]\overline{X}'[_{\hat{P}'}$) formé des points x tels que $|h(x)| \geq \lambda$; on a donc $U'_\lambda = u_K^{-1}(U_\lambda)$. Fixons une suite croissante d'éléments $\lambda_n \in \Gamma^*$ de limite 1. Si $W = \mathrm{Spf}\, A$ est un ouvert affinoïde de $]\overline{X}[_{\hat{P}}$, on a

$$\Gamma(W, K' \otimes_K j^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}/K}) \;=\; \varinjlim_n K' \otimes_K \Gamma(W \cap U_{\lambda_n}, \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}/K}).$$

D'autre part, $W' = u_K^{-1}(W)$ est l'ouvert affinoïde de $]\overline{X}'[_{\hat{P}'}$ d'algèbre $K' \otimes_K A$, et on a

$$\begin{aligned}\Gamma(W', j'^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}'[_{\hat{P}'}/K'}) \;&=\; \varinjlim_n \Gamma(W' \cap U'_{\lambda_n}, \Omega^\bullet_{]\overline{X}'[_{\hat{P}'}/K'}) \\ &=\; \varinjlim_n K' \otimes_K \Gamma(W \cap U_{\lambda_n}, \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}/K}).\end{aligned}$$

Comme les ouverts $W' \cap U'_{\lambda_n}$ sont affinoïdes, on déduit des théorèmes de Kiehl que les $H^i(W', j'^\dagger \Omega^k_{]\overline{X}'[_{\hat{P}'}/K'})$ sont nuls pour tout k et tout $i \geq 1$, et l'énoncé en résulte.

Pour terminer ces généralités sur la cohomologie rigide, indiquons comment elle est reliée à la cohomologie cristalline d'une part, et à la cohomologie de Monsky-Washnitzer d'autre part.

1.9. PROPOSITION. — *Si X est propre et lisse sur k, et si W est un anneau de Cohen de k, il existe un isomorphisme canonique*

(1.9.1) $$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \xrightarrow{\;\sim\;} H^*_{\mathrm{cris}}(X/W) \otimes K$$

identifiant la cohomologie rigide et la cohomologie cristalline de X.

Compte tenu de 1.8, on peut supposer que $\mathcal{V} = W$. On construit d'abord un homomorphisme (1.9.1) en supposant seulement que X est propre sur k. Pour le calcul de la cohomologie rigide, on peut donc prendre $\overline{X} = X$. Soit $X \hookrightarrow \hat{P}$ une immersion fermée dans un W-schéma formel lisse au voisinage de X. Par définition, on a

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \;=\; H^*(X, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X, X)/K)),$$

et, puisque $\overline{X} \setminus X$ est vide,

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X, X)/K) \;=\; \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Omega^\bullet_{]X[_{\hat{P}}}.$$

Si $\hat{U} = \mathrm{Spf}\, A$ est un ouvert affine de $\hat{P}$, il résulte de (1.1.1) que $\mathrm{sp}^{-1}(\hat{U}) \cap\,]X[_{\hat{P}}$ est un espace quasi-Stein au sens de Kiehl [20, 2.3]. Par conséquent, les $R^i\mathrm{sp}_* \Omega^k_{]X[_{\hat{P}}}$ sont nuls pour $i \geq 1$, et on a simplement

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathrm{rig}}((X,X)/K) \;=\; \mathrm{sp}_*\Omega^\bullet_{]X[_{\hat{P}}} \;\simeq\; (\mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{]X[_{\hat{P}}}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}}.$$

Soient $\mathcal{I}$ l'idéal de X dans $\hat{P}$, $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ l'enveloppe à puissances divisées (compatibles à celles de l'idéal $(p) = \mathfrak{m}$) de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{O}_{\hat{P}}$, $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{I})$ sa complétion p-adique. Si $\mathcal{O}_{X/W}$ est le faisceau structural du topos cristallin de X, et si $u_{X/W} : (X/W)_{\mathrm{cris}} \to X_{\mathrm{Zar}}$ est le morphisme canonique du topos cristallin dans le topos zariskien de X, on a d'après [9, th. 7.23]

$$H^*_{\mathrm{cris}}(X/W) \;\simeq\; H^*(X, \mathbb{R}u_{X/W*}\mathcal{O}_{X/W}) \;\simeq\; H^*(X, \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{I}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}}).$$

Comme X est séparé et quasi-compact, la cohomologie commute à la tensorisation par $\mathbb{Q}$, et, pour définir l'homomorphisme (1.9.1), il suffit donc de construire un morphisme de complexes

$$(\mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{]X[_{\hat{P}}}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}} \longrightarrow \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{I}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P},\mathbb{Q}}, \tag{1.9.2}$$

et il suffit pour cela de construire un morphisme de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$-algèbres $\mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{]X[_{\hat{P}}} \to \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{Q}$ compatible à l'action des dérivations.

Un tel morphisme existe sans hypothèse de propreté sur X. En effet, si l'on pose $\eta = p^{-1/p}$, on dispose d'abord du morphisme naturel $\mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{]X[_{\hat{P}}} \to \mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{[X]_{\hat{P},\eta}}$. Soient $\hat{U} = \mathrm{Spf}\, A$ un ouvert affine de $\hat{P}$, $I = \Gamma(\hat{U}, \mathcal{I})$, $B = \Gamma(\hat{U}, \mathcal{P}(\mathcal{I}))$. Si $(f_1,\dots,f_r)$ sont des générateurs de I, on a alors

$$\Gamma(\hat{U}, \mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{[X]_{\hat{P},\eta}}) \;=\; A\{T_1,\dots,T_r\}/(f_1^p - pT_1,\dots,f_r^p - pT_r) \otimes \mathbb{Q}.$$

On définit un homomorphisme A-linéaire

$$A[T_1,\dots,T_r]/(f_1^p - pT_1,\dots,f_r^p - pT_r) \longrightarrow B$$

en envoyant T_i sur $(p-1)!f_i^{[p]}$, d'où, par passage aux complétés et tensorisation par $\mathbb{Q}$, un homomorphisme

$$\Gamma(\hat{U}, \mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{[X]_{\hat{P},\eta}}) \longrightarrow \Gamma(\hat{U}, \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{Q})$$

qui est l'unique homomorphisme continu de $(A \otimes \mathbb{Q})$-algèbres entre ces anneaux. Pour $\hat{U}$ variable, ces homomorphismes se recollent, et fournissent le morphisme cherché : $\mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{]X[_{\hat{P}}} \to \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{Q}$. Par continuité, il est clair qu'il commute aux dérivations. Il est clair qu'il est également fonctoriel en (X, P).

Pour achever la démonstration de 1.9, il suffit de montrer que le morphisme (1.9.2) est un quasi-isomorphisme lorsque X est lisse sur k. Cette propriété étant locale, on peut alors supposer $\hat{P}$ affine. Or, à quasi-isomorphisme près, la source et le but de (1.9.2) ne dépendent pas du choix du plongement de X dans un schéma formel lisse $\hat{P}$, et il est clair par construction que (1.9.2) est fonctoriel par rapport à l'immersion $X \hookrightarrow \hat{P}$. Lorsque X est affine et lisse, on peut choisir pour $\hat{P}$ un relèvement de X. Dans ce cas, $\mathcal{I} = \mathfrak{m}\mathcal{O}_{\hat{P}}$, de sorte que $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{I}) = \mathcal{O}_{\hat{P}}$, et $]X[_{\hat{P}} = \hat{P}_K$, de sorte que $\mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{]X[_{\hat{P}}} = \mathcal{O}_{\hat{P}} \otimes \mathbb{Q}$. Le morphisme (1.9.2) se réduit alors à l'identité, d'où la proposition.

1.10. PROPOSITION. — *Si X est affine et lisse sur k, il existe un isomorphisme canonique*

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathrm{MW}}(X/K) \tag{1.10.1}$$

identifiant la cohomologie rigide et la cohomologie de Monsky-Washnitzer de X.

Posons $X = \operatorname{Spec} A_0$. D'après le théorème d'Elkik [12, th. 6], il existe une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A de réduction A_0 sur k. Si $A^\dagger$ est la complétée faible de A [22, 1.1], on peut donner de $A^\dagger$ la description suivante (cf. [28, § 2]). Lorsque $A = \mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]$, $A^\dagger$ est la sous-algèbre de l'algèbre de séries formelles $\mathcal{V}[[t_1,\ldots,t_n]]$ formée des séries $\varphi = \sum_{\underline{k}} \alpha_{\underline{k}} \underline{t}^{\underline{k}}$ dont les coefficients $\alpha_{\underline{k}} \in \mathcal{V}$ vérifient une majoration de la forme $|\alpha_{\underline{k}}| < c\eta^{|\underline{k}|}$, avec $\eta < 1$; il revient au même de demander que la série φ ait un rayon de convergence $\rho > 1$. Dans le cas général, si $A \simeq \mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]/I$ est une présentation de A, on a $A^\dagger = \mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]^\dagger/I\mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]^\dagger$. Le complexe de de Rham de $A^\dagger$ peut être défini comme étant $\Omega^\bullet_{A^\dagger} = A^\dagger \otimes_A \Omega^\bullet_A$. Par définition, la cohomologie de Monsky-Washnitzer de X est alors la cohomologie du complexe $\Omega^\bullet_{A^\dagger,\mathbb{Q}}$.

Soit $X' = \operatorname{Spec} A$, et supposons choisie une présentation $A \simeq \mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]/I$, correspondant à une immersion fermée $X' \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$. On note $\overline{X}'$ l'adhérence schématique de X' dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$, $\hat{\overline{X}}'$ son complété formel, $\overline{X}$ sa réduction sur k, qui est une compactification de X, et $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ l'inclusion. Puisque X' est lisse sur $\mathcal{V}$, $\hat{\overline{X}}'$ est lisse sur $\mathcal{V}$ aux points de X. On peut donc calculer la cohomologie rigide de X en utilisant le plongement $\overline{X} \hookrightarrow \hat{\overline{X}}'$. On se trouve alors dans la situation considérée en 1.1 : le tube de $\overline{X}$ dans $\hat{\overline{X}}'$ est l'espace $\hat{\overline{X}}'_K = \overline{X}'^{\mathrm{an}}_K \subset \mathbb{P}^{n\,\mathrm{an}}_K$, celui de X est l'intersection de X'^{an}_K avec la boule unité fermée, et un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_{\hat{\overline{X}}'}$ dans $\hat{\overline{X}}'_K$ est fourni par les intersections V_λ de X'^{an}_K avec les boules de rayon $\lambda > 1$. Soit j_λ l'inclusion de V_λ dans $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$. Comme $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$ est quasi-compact, on a

$$H^i(\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K, j^\dagger\Omega^k_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}) = \varinjlim_\lambda H^i(\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K, j_{\lambda *}\Omega^k_{V_\lambda}) \simeq \varinjlim_\lambda H^i(V_\lambda, \Omega^k_{V_\lambda}),$$

le dernier isomorphisme résultant de ce que j_λ est l'inclusion d'un ouvert affinoïde dans un espace séparé, et $\Omega^k_{V_\lambda}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{O}_{V_\lambda}$. Par suite, $H^i(\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K, j^\dagger\Omega^k_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}) = 0$ pour tout k et tout $i \geq 1$, ce qui fournit l'isomorphisme

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \xrightarrow{\sim} H^*(\varinjlim_\lambda \Gamma(V_\lambda, \Omega^\bullet_{V_\lambda})).$$

Il résulte alors immédiatement de la description du complexe $\Omega^\bullet_{A^\dagger}$ donnée plus haut que l'on a un isomorphisme canonique $\Omega^\bullet_{A^\dagger,\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_\lambda \Gamma(V_\lambda, \Omega^\bullet_{V_\lambda})$, d'où l'on déduit l'isomorphisme (1.10.1).

Il reste à prouver que cet isomorphisme est bien compatible aux morphismes de fonctorialité des deux théories cohomologiques, ce qui n'est pas tout à fait clair a priori. Soit $f : X = \operatorname{Spec} B_0 \to Y = \operatorname{Spec} A_0$ un morphisme de k-schémas affines et lisses, défini par $\varphi_0 : A_0 \to B_0$. Si $X' = \operatorname{Spec} B$, $Y' = \operatorname{Spec} A$ sont deux $\mathcal{V}$-schémas affines et lisses relevant X et Y, il existe un homomorphisme $\varphi^\dagger : A^\dagger \to B^\dagger$ relevant φ_0 [28, (2.4.4)]. L'homomorphisme $f^*_{\mathrm{MW}} : H^*_{\mathrm{MW}}(Y/K) \to H^*_{\mathrm{MW}}(X/K)$ est alors l'homomorphisme induit par $\varphi^\dagger$. D'autre part, choisissons des plongements de X' et Y' dans des espaces affines $\mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$ et $\mathbb{A}^m_{\mathcal{V}}$; soient $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$ les fermetures projectives correspondantes de X' et Y', $\overline{Z}' \subset \overline{X}' \times \overline{Y}'$ l'adhérence de X' pour le plongement dans $\mathbb{P}^{n+m}_{\mathcal{V}}$ donné par le graphe de f, $u : \overline{Z}' \to \overline{X}'$, $v : \overline{Z}' \to \overline{Y}'$ les deux projections, $\overline{Z}$ la réduction de $\overline{Z}'$ sur k. D'après 1.7, l'homomorphisme $f^*_{\mathrm{rig}} : H^*_{\mathrm{rig}}(Y/K) \to H^*_{\mathrm{rig}}(X/K)$ est le composé

$$H^*(\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K, j^\dagger_Y \Omega^\bullet_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K}) \xrightarrow{v^*} H^*(\overline{Z}'^{\mathrm{an}}_K, j'^\dagger_X \Omega^\bullet_{\overline{Z}'^{\mathrm{an}}_K}) \xrightarrow[\sim]{u^{*-1}} H^*(\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K, j^\dagger_X \Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}),$$

où $j^\dagger_Y$ (resp. $j^\dagger_X$, $j'^\dagger_X$) est le foncteur défini sur $\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K$ (resp. $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$, $\overline{Z}'^{\mathrm{an}}_K$) par l'immersion ouverte $Y \hookrightarrow \overline{Y}$ (resp. $X \hookrightarrow \overline{X}$, $X \hookrightarrow \overline{Z}$). Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons U_λ (resp. V_λ) l'intersection de X'^{an}_K (resp. Y'^{an}_K) avec la boule fermée de rayon λ de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$ (resp. $\mathbb{A}^m_{\mathcal{V}}$). L'homomorphisme $\hat{\varphi} : \hat{A} \to \hat{B}$ induit par $\varphi^\dagger$ entre les complétés définit un morphisme

$$g \ : \ ]X[_{\hat{\overline{X}}'} = \mathrm{Spm}(\hat{B} \otimes K) \longrightarrow \ ]Y[_{\hat{\overline{Y}}'} = \mathrm{Spm}(\hat{A} \otimes K).$$

Fixons $\mu > 1$. D'après [5, (2.5.3)], il existe $\lambda > 1$ tel que g se prolonge en un morphisme $U_\lambda \to V_\mu$, que nous noterons encore g. Au-dessus de U_λ, g définit donc une section $s : U_\lambda \to \overline{Z}'^{\mathrm{an}}_K$ de la projection u. Compte tenu de 1.2 (iv), f^*_{rig} peut s'écrire comme le composé

$$H^*(V_\mu, j^\dagger_Y \Omega^\bullet_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K}) \xrightarrow{v^*} H^*(U_\lambda \times V_\mu, j'^\dagger_X \Omega^\bullet_{\overline{Z}'^{\mathrm{an}}_K}) \xrightarrow[\sim]{u^{*-1}} H^*(U_\lambda, j^\dagger_X \Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}).$$

Comme $u \circ s = \mathrm{Id}$, et que u^* est un isomorphisme d'après 1.4, on a $u^{*-1} = s^*$. On en déduit donc $f^*_{\mathrm{rig}} = s^* \circ v^* = g^*$, ce qui entraîne que f^*_{rig} correspond à f^*_{MW} via l'isomorphisme (1.10.1).

2. Cohomologie rigide à supports dans un fermé

Nous allons maintenant étendre la construction de la cohomologie rigide d'un k-schéma de type fini X de manière à obtenir une notion de cohomologie à supports dans un fermé $Z \subset X$. Nous montrerons ensuite que les espaces obtenus possèdent bien les propriétés formelles d'une cohomologie à supports dans un fermé.

2.1. Soient X un k-schéma de type fini, $Z \subset X$ un sous-schéma fermé, $j_X : X \hookrightarrow \overline{X}$ une compactification de X au-dessus de k, $\overline{Z} \subset \overline{X}$ un sous-schéma fermé tel que $\overline{Z} \cap X = Z$, $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$ une immersion fermée dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X. On pose $U = X \setminus Z$, et, pour tout ouvert V de $\overline{X}$, on note j_V l'immersion ouverte de V dans $\overline{X}$. Pour tout faisceau abélien E sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$, on dispose d'une suite exacte canonique

(2.1.1) $$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[} j^\dagger_X E \longrightarrow j^\dagger_X E \longrightarrow j^\dagger_U E \longrightarrow 0.$$

En effet, si $V = \overline{X} \setminus \overline{Z}$, la définition du foncteur $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}$ montre qu'il suffit de vérifier qu'on a un isomorphisme canonique $j_V^\dagger j_X^\dagger E \simeq j_U^\dagger E$, et cela résulte de (1.2.4).

2.2. PROPOSITION. — *Soient X un k-schéma de type fini, $Z \subset X$ un sous-schéma fermé, $j_X : X \hookrightarrow \overline{X}$ une compactification de X au-dessus de k, $\overline{Z} \subset \overline{X}$ un sous-schéma fermé tel que $\overline{Z} \cap X = Z$, $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$ une immersion fermée dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X. Alors les espaces de cohomologie $H^*(]\overline{X}[_{\hat{P}}, \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}})$ ne dépendent pas, à isomorphisme canonique près, des choix effectués pour $\overline{Z}$, $\overline{X}$ et $\hat{P}$. De plus, pour $T \subset Y$ fermé, ils sont fonctoriels par rapport aux morphismes $f : X \to Y$ tels que $f^{-1}(T) \subset Z$.*

Si $\overline{X}$ et $\hat{P}$ sont fixés, il résulte de la suite exacte (2.1.1) que, pour tout faisceau abélien E sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$, le faisceau $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger E$ est indépendant du choix du fermé $\overline{Z}$ tel que $\overline{Z} \cap X = Z$. Il en est donc de même des espaces de cohomologie considérés.

Soient $f : X \to Y$ un k-morphisme, $T \subset Y$ un fermé tel que $f^{-1}(T) \subset Z$. On peut alors trouver des compactifications $X \hookrightarrow \overline{X}$, $Y \hookrightarrow \overline{Y}$ telles qu'il existe un k-morphisme $g : \overline{X} \to \overline{Y}$ prolongeant f, et des immersions fermées $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$, $\overline{Y} \hookrightarrow \hat{P}'$ dans des schémas formels lisses au voisinage de X (resp. Y), telles qu'il existe un $\mathcal{V}$-morphisme $h : \hat{P} \to \hat{P}'$ prolongeant g. Posons $U = X \setminus Z$, $V = Y \setminus T$. Par hypothèse, on a $f(U) \subset V$. Grâce aux suites exactes (2.1.1), les morphismes de fonctorialité (cf. [5, (2.1.4)])

$$h_K^{-1} j_Y^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{Y}[_{\hat{P}'}} \longrightarrow j_X^\dagger h_K^{-1} \Omega^\bullet_{]\overline{Y}[_{\hat{P}'}} \longrightarrow j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}},$$
$$h_K^{-1} j_V^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{Y}[_{\hat{P}'}} \longrightarrow j_U^\dagger h_K^{-1} \Omega^\bullet_{]\overline{Y}[_{\hat{P}'}} \longrightarrow j_U^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}},$$

induisent un morphisme canonique

$$h_K^{-1} \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{T}[} j_Y^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{Y}[_{\hat{P}'}} \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}},$$

d'où l'on déduit par adjonction un morphisme

$$\text{(2.2.1)} \qquad \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{T}[} j_Y^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{Y}[_{\hat{P}'}} \longrightarrow \mathbb{R}h_* \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}}.$$

Supposons d'abord que f et g soient l'identité de X et $\overline{X}$, que $Z = T$, et que h soit lisse au voisinage de X. Grâce au théorème 1.4, et aux triangles distingués déduits des suites exactes (2.1.1), le morphisme (2.2.1) est alors un isomorphisme, ce qui entraîne que les espaces $H^*(]\overline{X}[_{\hat{P}}, \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}})$ ne dépendent pas de $\hat{P}$. Si maintenant on suppose que f est l'identité de X, que $T = Z$, et que g est propre, il résulte de 1.6 que le morphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{T}[} j_Y^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{Y}[_{\hat{P}'}} \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \mathbb{R}h_* \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}}$$

déduit de (2.2.1) est un isomorphisme, de sorte que les espaces $H^*(]\overline{X}[_{\hat{P}}, \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}})$ ne dépendent pas non plus de $\overline{X}$.

Grâce à (2.2.1), on procède alors comme en 1.5 et 1.7 pour faire de ces espaces des foncteurs en (X, Z), en prenant pour morphismes $(X, Z) \to (Y, T)$ les morphismes $f : X \to Y$ tels que $f^{-1}(T) \subset Z$.

2.3. *Définition.* — Avec les notations de l'énoncé précédent, on définit la *cohomologie rigide de X à supports dans Z* par

$$H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) \;=\; H^*(]\overline{X}[_{\hat{P}}, \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, j^\dagger_X\, \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}}).$$

On observera que, pour X fixé, ces espaces ne dépendent que de l'espace topologique sous-jacent à Z, et non de sa structure de schéma, car, par définition, il en est ainsi des tubes et des voisinages stricts. Si $Z = X$, on peut prendre $\overline{Z} = \overline{X}$, et on a alors $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} = \mathrm{Id}$, de sorte que $H^*_{X,\mathrm{rig}}(X/K) = H^*_{\mathrm{rig}}(X/K)$.

D'autre part, la suite exacte (2.1.1) fournit la suite exacte longue de cohomologie habituelle

$$\text{(2.3.1)} \qquad \ldots \longrightarrow H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig}}(X/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig}}(U/K) \longrightarrow \ldots.$$

Compte tenu de 1.8, on en déduit que les espaces $H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$ commutent à toute extension finie $K \to K'$ du corps de base.

2.4. PROPOSITION. — *Soient X un k-schéma de type fini, $Z \subset X$ un sous-schéma fermé.*

(i) *Si X' est un ouvert de X contenant Z, l'homomorphisme canonique*

$$\text{(2.4.1)} \qquad H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) \longrightarrow H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X'/K)$$

est un isomorphisme.

(ii) *Si $Z = Z_1 \cup Z_2$, avec $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, l'homomorphisme canonique*

$$\text{(2.4.2)} \qquad H^*_{Z_1,\mathrm{rig}}(X/K) \oplus H^*_{Z_2,\mathrm{rig}}(X/K) \longrightarrow H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$$

est un isomorphisme.

Fixons comme précédemment une compactification $\overline{X}$ de X, qui est donc aussi une compactification de X', et une immersion fermée $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$ dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X. Soient $\overline{Z}$ l'adhérence de Z dans $\overline{X}$, $j_X : X \hookrightarrow \overline{X}$, $T = \overline{X} \setminus X$, $j_{X'} : X' \hookrightarrow \overline{X}$, $T' = \overline{X} \setminus X'$. Pour tout faisceau abélien E sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$, la suite exacte (1.2.1) relative à T' fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]T'[}\, j^\dagger_X E \longrightarrow j^\dagger_X E \longrightarrow j^\dagger_{X'} E \longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur exact $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}$, on en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}\cap T'[}\, j^\dagger_X E \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, j^\dagger_X E \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, j^\dagger_{X'} E \longrightarrow 0,$$

compe tenu de (1.2.4). Comme $Z \subset X'$, on a $\overline{Z} \cap T' \cap X = \emptyset$, d'où $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}\cap T'[}\, j^\dagger_X E \subset \underline{\Gamma}^\dagger_{]T[}\, j^\dagger_X E = 0$, et l'assertion (i) en résulte.

Sous les hypothèses de (ii), soit $\overline{Z}_i$ l'adhérence de Z_i, $i = 1, 2$. Posons $X_i = X \setminus Z_i$. Pour tout faisceau abélien E, on dispose alors d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1[} j_X^\dagger E \oplus \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_2[} j_X^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2[} j_X^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & j_X^\dagger E \arrow[r] \arrow[d, equal] & j_X^\dagger E \oplus j_X^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & j_X^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & j_X^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & j_{X_1}^\dagger E \oplus j_{X_2}^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & j_{X_1 \cap X_2}^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes inférieures sont exactes d'après (1.2.2), et les deux colonnes de droite aussi d'après (2.1.1). Il en résulte que le morphisme de la ligne supérieure est un isomorphisme, ce qui entraîne l'assertion (ii).

2.5. PROPOSITION. — *Soient X un k-schéma séparé de type fini, $T \subset Z \subset X$ deux sous-schémas fermés, $X' = X \setminus T$, $Z' = Z \setminus T$. Il existe alors une suite exacte d'excision*

(2.5.1) $\quad \ldots \longrightarrow H^i_{T,\mathrm{rig}}(X/K) \longrightarrow H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)) \longrightarrow H^i_{Z',\mathrm{rig}}(X'/K) \longrightarrow \ldots .$

Soient encore $\overline{X}$ une compactification de X, et $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$ une immersion fermée dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X. On note $\overline{Z}$, $\overline{T}$ les adhérences de Z et T dans $\overline{X}$, et j_X, $j_{X'}$, $j_{\overline{X}\setminus\overline{T}}$ les immersions ouvertes de X, X' et $\overline{X} \setminus \overline{T}$ dans $\overline{X}$. Pour tout faisceau abélien F sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{T}[} F \longrightarrow F \longrightarrow j^\dagger_{\overline{X}\setminus\overline{T}} F \longrightarrow 0.$$

Si E est un faisceau abélien sur $]\overline{X}[_{\hat{P}}$, cette suite exacte, appliquée à $F = \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger E$, fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{T}[} j_X^\dagger E \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger E \longrightarrow j^\dagger_{\overline{X}\setminus\overline{T}} \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger E \longrightarrow 0.$$

D'après (1.2.4), on a les isomorphismes

$$j^\dagger_{\overline{X}\setminus\overline{T}} \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger E \xrightarrow{\sim} \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j^\dagger_{\overline{X}\setminus\overline{T}} j_X^\dagger E \xrightarrow{\sim} \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_{X'}^\dagger E.$$

Comme $\overline{X}$ est une compactification de X', et que $\overline{Z}$ est un fermé de $\overline{X}$ tel que $\overline{Z} \cap X' = Z'$, on a par construction

$$H^i_{Z',\mathrm{rig}}(X'/K) = H^i(]\overline{X}[_{\hat{P}}, \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j^\dagger_{X'} \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\hat{P}}}),$$

et l'énoncé en résulte.

3. Le théorème de finitude

Dans cette section, nous montrons comment, grâce à un argument de récurrence sur la dimension basé sur le théorème de de Jong, on peut déduire le théorème de finitude de la cohomologie rigide de l'existence d'un isomorphisme de Gysin dans le cas relevable. Les notations sont les mêmes que dans les sections précédentes.

3.1. THÉORÈME. — *Soient X un k-schéma lisse, et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé. Alors les espaces de cohomologie $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$ sont de dimension finie sur K.*

Lorsque $Z = X$ et que X est affine, le théorème de comparaison 1.10 permet d'en déduire aussitôt :

3.2. COROLLAIRE. — *Soit X un k-schéma affine et lisse. Alors les espaces de cohomologie de Monsky-Washnitzer $H^*_{\mathrm{MW}}(X/K)$ sont de dimension finie sur K.*

3.3. Comme la cohomologie rigide commute aux extensions finies du corps K, il suffit de montrer le théorème 3.1 lorsque $\mathcal{V}$ est un anneau de Cohen de k, ce que nous supposerons dorénavant. De plus, si k' est une extension finie de k, et $K' = \mathrm{Frac}\,\mathcal{V}'$, où $\mathcal{V}'$ est un anneau de Cohen de k', il existe un homomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ relevant $k \to k'$, et $\mathcal{V}'$ est alors fini sur $\mathcal{V}$; si X', Z' sont les k'-schémas déduits de X, Z par extension des scalaires, on voit de même que la finitude de $H^*_{Z',\mathrm{rig}}(X'/K')$ entraîne celle de $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$.

La démonstration du théorème 3.1 procède alors par récurrence sur n, en montrant alternativement les deux assertions suivantes :

$(\mathrm{a})_n$ Pour tout corps k de caractéristique p et tout k-schéma lisse X de dimension $\leq n$, $H^*_{\mathrm{rig}}(X)$ est de dimension finie sur K;

$(\mathrm{b})_n$ Pour tout corps k de caractéristique p, tout k-schéma de type fini Z de dimension $\leq n$, et toute k-immersion fermée $Z \hookrightarrow X$ dans un k-schéma lisse, $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X)$ est de dimension finie sur K.

L'assertion $(\mathrm{a})_0$ est claire. Pour pouver $(\mathrm{b})_0$, une extension finie du corps de base permet de se ramener au cas où Z est la réunion d'un nombre fini de points rationnels sur k, donc à celui où Z est un point rationnel sur k. On peut conclure en utilisant l'isomorphisme de Gysin énoncé en 3.8, et établi dans les sections suivantes, ou bien procéder par un calcul direct. Il résulte de la proposition A.10 de l'appendice que les espaces $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X)$ ne dépendent que de la dimension de X. Si l'on prend pour X un espace projectif, il suffit donc de montrer que, si $U = X \setminus Z$, les espaces $H^*_{\mathrm{rig}}(U)$ sont de dimension finie sur K. En utilisant le recouvrement standard de U par des espaces affines, et la suite exacte (1.2.2), on est ramené à montrer que la cohomologie rigide du produit d'un tore et d'un espace affine est de dimension finie, ce qui résulte d'un calcul sans difficulté.

La récurrence utilise ensuite de manière essentielle le théorème suivant, dû à A. J. de Jong :

3.4. THÉORÈME [19, th. 4.1]. — *Soient k un corps parfait, et X un k-schéma séparé de type fini, supposé intègre. Il existe alors un k-schéma projectif, lisse et connexe X', un ouvert $U \subset X'$, et un morphisme propre, surjectif, et génériquement étale $\phi : U \to X$.*

3.5. Montrons d'abord que $(\mathrm{b})_{n-1}$ entraîne $(\mathrm{a})_n$. Soit X un k-schéma lisse de dimension n. Quitte à faire une extension finie de k, on peut supposer X connexe, donc irréductible. En appliquant 3.4 au schéma déduit de X par extension des scalaires à la clôture algébrique de k, on voit que, quitte à faire à nouveau une extension finie de k, on peut trouver X', U et ϕ définis sur k et vérifiant les conclusions de 3.4. D'après 1.9, $H^*_{\mathrm{rig}}(X')$ s'identifie à $H^*_{\mathrm{cris}}(X') \otimes K$, et est donc de dimension finie sur K. Puisque ϕ est génériquement étale, on a $\dim(X') = n$. Grâce à la suite exacte (2.3.1), l'hypothèse $(\mathrm{b})_{n-1}$ implique que $H^*_{\mathrm{rig}}(U_1)$ est de dimension finie pour tout ouvert $U_1 \subset X'$. D'autre part, l'image par ϕ de l'ensemble des points où ϕ n'est pas étale est un fermé de X qui ne contient pas le point générique. Il existe donc un ouvert affine non vide $X_1 \subset X$ tel que le morphisme $U_1 = \phi^{-1}(X_1) \to X_1$ soit étale. Comme c'est un morphisme propre, il est fini. Or l'hypothèse $(\mathrm{b})_{n-1}$ montre encore que $H^*_{\mathrm{rig}}(X)$ est de dimension finie si et seulement s'il en est ainsi de $H^*_{\mathrm{rig}}(X_1)$. Comme, d'après la proposition qui suit, l'homomorphisme canonique $H^*_{\mathrm{rig}}(X_1) \to H^*_{\mathrm{rig}}(U_1)$ est injectif, l'assertion $(\mathrm{a})_n$ en résulte.

3.6. PROPOSITION. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme fini et plat entre deux k-schémas affines et lisses. L'homomorphisme canonique $f^* : H^*_{\mathrm{rig}}(X) \to H^*_{\mathrm{rig}}(Y)$ possède alors une rétraction $H^*_{\mathrm{rig}}(Y) \to H^*_{\mathrm{rig}}(X)$.*

Soient $A_0 = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $B_0 = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, et $\varphi : A_0 \to B_0$ l'homomorphisme correspondant à f. Il existe alors des $\mathcal{V}$-algèbres faiblement complètes $A^\dagger$, $B^\dagger$ et un homomorphisme $\varphi^\dagger$: $A^\dagger \to B^\dagger$ relevant φ [28, (2.4.4)]. D'après [22, th. 6.2], $B^\dagger$ est finie sur $A^\dagger$. Si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont les compétées de $A^\dagger$ et $B^\dagger$, l'homomorphisme canonique $\hat{A} \otimes_{A^\dagger} B^\dagger \to \hat{B}$ est donc un isomorphisme. Montrons que $B^\dagger$ est également plate sur $A^\dagger$. Comme $A^\dagger$ est nœthérien, et $\mathfrak{m}A^\dagger$ est contenu dans le radical de $A^\dagger$ [22, th. 1.6], $\hat{A}$ est fidèlement plat sur $A^\dagger$, de sorte qu'il suffit de prouver que $\hat{B}$ est plate sur $\hat{A}$. Cela résulte alors de ce que, pour tout i, $\hat{B}/\mathfrak{m}^i\hat{B}$ est plate sur $\hat{A}/\mathfrak{m}^i\hat{A}$ d'après le critère de platitude par fibres.

Il résulte alors de [22, th. 8.3] qu'il existe un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_{\varphi^\dagger} \; : \; \Omega^{\bullet}_{B^\dagger} \longrightarrow \Omega^{\bullet}_{A^\dagger},$$

tel que le composé avec le morphisme canonique $\Omega^\bullet_{A^\dagger} \to \Omega^\bullet_{B^\dagger}$ soit la multiplication par le rang n de $B^\dagger$ sur $A^\dagger$. On obtient alors une rétraction

$$\mathrm{Tr}_{\varphi^\dagger}/n \ : \ H^*_{\mathrm{MW}}(Y/K) \longrightarrow H^*_{\mathrm{MW}}(X/K)$$

de l'homomorphisme de fonctorialité f^*. Via le théorème de comparaison 1.10, l'énoncé en découle.

3.7. Montrons maintenant que les assertions $(\mathrm{b})_{n-1}$ et $(\mathrm{a})_n$ entraînent $(\mathrm{b})_n$. Soit $Z \hookrightarrow X$ une k-immersion fermée, où X est lisse, et $\dim(Z) \leq n$. Soit $\overline{Z}$ le schéma déduit de Z par passage à la clôture algébrique de k. Il existe une extension finie de k sur laquelle le sous-schéma réduit $\overline{Z}_{\mathrm{red}}$ est défini, et possède un ouvert de lissité contenant les points génériques de toutes les composantes irréductibles. Comme les espaces $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X)$ ne dépendent que de Z_{red}, on peut passer à cette extension finie, et remplacer ensuite Z par Z_{red}. Par hypothèse, il existe alors un fermé $T \subset Z$ tel que $\dim(T) < n$, et que $Z \smallsetminus T$ soit lisse. Si $X' = X \smallsetminus T$, $Z' = Z \smallsetminus T$, la suite exacte d'excision (2.5.1) et l'hypothèse $(\mathrm{b})_{n-1}$ ramènent à montrer la finitude de $H^*_{Z',\mathrm{rig}}(X')$, de sorte que l'on peut supposer que Z est lisse. La démonstration serait alors terminée (grâce à l'hypothèse $(\mathrm{a})_n$) si l'on disposait dans ce cas d'un isomorphisme de Gysin

$$H^*_{\mathrm{rig}}(Z) \xrightarrow{\ \sim\ } H^{*+2r}_{Z,\mathrm{rig}}(X),$$

où r est la codimension de Z dans X. Faute de savoir pour l'instant construire un tel isomorphisme en toute généralité, nous allons localiser davantage pour nous ramener à une situation relevable, où il est possible de le faire.

La décomposition (2.4.2) permet en effet de supposer de plus Z connexe. Utilisant encore la suite exacte d'excision, et l'isomorphisme de restriction (2.4.1), on voit alors que, si U est un ouvert de X tel que $Z \cap U \neq \emptyset$, on peut remplacer X par U et Z par $Z \cap U$. On peut ainsi supposer X affine, et Z défini dans X par une suite de sections $t_1, \ldots, t_r$ faisant partie d'un système de coordonnées locales. Posons $X = \operatorname{Spec} A$, $S = \operatorname{Spec} \mathcal{V}$. D'après le théorème d'Elkik [12, th. 6], il existe un S-schéma affine et lisse $X' = \operatorname{Spec} A'$ relevant X. Soient $t'_1, \ldots, t'_r \in A'$ relevant $t_1, \ldots, t_r$, et Z' le sous-schéma fermé de X' défini par $t'_1, \ldots, t'_r$. Comme Z' est lisse sur S aux points de Z, on peut trouver dans X' un ouvert affine U' tel que $Z \cap U'$ soit non vide, et $Z' \cap U'$ lisse sur S. Par excision, on est alors ramené au cas où il existe une immersion fermée $Z' \hookrightarrow X'$ entre deux S-schémas affines et lisses relevant l'immersion $Z \hookrightarrow X$.

Pour achever la démonstration de 3.1, il suffit alors de montrer qu'il existe sous ces hypothèses un isomorphisme de Gysin. Cela résulte du théorème suivant (avec $Y = Z$) :

3.8. THÉORÈME. — *Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k, de corps des fractions K, $Y' \hookrightarrow X'$ une immersion* *fermée de codimension r entre deux schémas quasi-projectifs et lisses sur $\mathcal{V}$. Si X, Y sont les réductions de X', Y' sur k, et Z un sous-schéma fermé de Y, il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(Y/K) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)[2r]. \tag{3.8.1}$$

La démonstration de ce résultat sera l'objet des deux sections suivantes.

3.9. *Remarques.* — (i) Grâce au théorème de de Jong, la méthode utilisée dans la démonstration de 3.1 permet également de démontrer la finitude de la cohomologie rigide à supports compacts $H^*_{\mathrm{c,rig}}(X)$ définie dans [3]. La démonstration est plus simple que pour la cohomologie sans supports, car on dispose dans ce cas des suites exactes longues

$$\dots \longrightarrow H^i_{\mathrm{c,rig}}(Z) \longrightarrow H^i_{\mathrm{c,rig}}(X) \longrightarrow H^i_{\mathrm{c,rig}}(U) \longrightarrow \dots$$

pour Z fermé dans X, $U = X \smallsetminus Z$. Il suffit alors de procéder par récurrence sur la dimension de X, ce qu'on fait comme dans la démonstration de $(\mathrm{a})_n$. Le lecteur pourra se reporter à [6] pour plus de détails.

(ii) Pour définir la cohomologie rigide, il n'est pas réellement nécessaire de supposer que la valuation de K soit discrète (cf. [5], [6]). Rappelons que le cas d'une valuation non discrète permet de comparer les espaces de cohomologie rigide avec ceux que fournit la théorie de Dwork, qui sont généralement construits sur $\mathbb{C}_p$ (voir [4]). La plupart des résultats de cet article peuvent être prouvés sans hypothèse sur la valuation de K, mais l'argument de compatibilité aux extensions finies du corps de base donné en 1.8 ne s'étend pas tel quel au cas d'une extension infinie. Bien qu'il ne fasse pas de doute que le théorème de comparaison avec la cohomologie cristalline doive s'étendre au cas d'une valuation quelconque, la démonstration donnée en 1.9 n'est donc pas suffisante pour le prouver. Par suite, le théorème 3.1 ne s'applique dans l'état actuel des choses qu'à la cohomologie rigide relative à un corps muni d'une valuation discrète. Cela devrait suffire pour la plupart des applications géométriques, mais nous espérons néanmoins revenir ultérieurement sur cette question.

(iii) L'hypothèse de quasi-projectivité faite dans l'énoncé de 3.8 peut être affaiblie, et sert simplement à assurer qu'il existe une immersion $X' \hookrightarrow P$, où P est lisse sur $\mathcal{V}$, et où l'adhérence de X' dans P est propre sur $\mathcal{V}$.

(iv) Il ne fait pas de doute que l'isomorphisme (3.8.1) ne dépende pas du choix des relèvements X' et Y' de X et Y, mais je ne l'ai pas vérifié en général.

3.10. Bien que la démonstration de 3.1 soit spécifique au cas de la cohomologie rigide à coefficients constants, on peut déduire facilement de cet énoncé des théorèmes de finitude pour certains espaces de cohomologie rigide à coefficients dans des isocristaux surconvergents qui s'interprètent comme facteurs directs d'espaces de cohomologie rigide à coefficients constants. Un exemple type de cette situation est fourni par les espaces qui interviennent dans la théorie des somme exponentielles. Soient $q = p^s$ une puissance de p, et $k = \mathbb{F}_q$; on suppose ici que K contient une racine de l'équation $X^{p-1} = -p$. On note t la coordonnée canonique sur le groupe additif $\mathbb{G}_a$ (resp. le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$). Pour tout ce qui concerne les isocristaux surconvergents et la construction de la cohomologie rigide à coefficients dans ceux-ci, qui généralise celle que nous avons donnée dans la première section, nous renvoyons le lecteur à [5] et [6].

Soit ψ un caractère additif de $\mathbb{F}_q$ à valeurs dans K. On sait associer de manière naturelle à ψ un élément $\pi_\psi \in \mathcal{V}$ [4, (1.3)]. Il définit un F-isocristal surconvergent $\mathcal{L}_\psi$ sur la droite affine $\mathbb{G}_{a,k}$, correspondant au fibré trivial sur $\mathbb{A}_K^{1\,\mathrm{an}}$ muni de la connexion ∇_ψ telle que $\nabla_\psi(1) = -\pi_\psi dt$ [4, (1.5)].

Soit d'autre part $\mu_{q-1} \subset k^*$ le groupe des racines $(q-1)$-ièmes de l'unité. Un caractère multiplicatif $\chi : \mu_{q-1} \to K^*$ de $\mathbb{F}_q$ s'écrit sous la forme $\chi = \omega^i$, où ω est le caractère de Teichmüller, et i un entier uniquement déterminé modulo $q-1$. On pose $a_\chi = i/q-1$, et on associe à χ le F^s-isocristal surconvergent $\mathcal{K}_\chi$ sur $\mathbb{G}_{m,k}$ correspondant au fibré trivial sur $\mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}}$ muni de la connexion ∇_χ telle que $\nabla_\chi(1) = a_\chi dt/t$.

Si X est un k-schéma lisse, muni de morphismes $f_i : X \to \mathbb{G}_{a,k}$, $i = 1,\ldots,a$, et $h_j : X \to \mathbb{G}_{m,K}$, $j = 1,\ldots,b$, et si ψ_i, $i = 1,\ldots,a$ (resp. χ_j, $j = 1,\ldots,b$) sont des caractères additifs (resp. multiplicatifs) de $\mathbb{F}_q$, on définit un F^s-isocristal surconvergent $\mathcal{E}$ sur X en posant

$$\mathcal{E} = \left(\bigotimes_{i=1}^{a} f_i^* \mathcal{L}_{\psi_i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{b} h_j^* \mathcal{K}_{\chi_j}\right),$$

où f_i^* et h_j^* désignent les foncteurs image inverse au sens des isocristaux surconvergents [5, (2.3.2) (iv)]. Rappelons que la formule des traces d'Etesse - Le Stum permet d'interpréter les sommes exponentielles $S_r(X, f_i, g_j, \psi_i^{-1}, \chi_j^{-1})$ au moyen de l'action de Frobenius sur les espaces de cohomologie rigide $H^i_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{E})$ [13, 6.5].

Pour $i = 1,\ldots,a$, soit Y_i l'image inverse par le morphisme $f_i : X \to \mathbb{G}_{a,k}$ du revêtement d'Artin-Schreier de $\mathbb{G}_{a,k}$ d'équation $z^q - z = t$, et, pour $j = 1,\ldots,b$, soit Z_j l'image inverse par le morphisme $g_j : X \to \mathbb{G}_{m,k}$ du revêtement de Kummer de $\mathbb{G}_{m,k}$ défini par l'élévation à la puissance $(q-1)$-ième. Notons $X' = Y_1 \times_X \cdots \times_X Y_i \times_X Z_1 \times_X \cdots \times_X Z_j$, et $u : X' \to X$ la projection; X' est un revêtement galoisien de X, de groupe $G = (\mathbb{F}_q)^a \times (\mathbb{F}_q^*)^b$. Considérons le caractère $\varphi = \psi_1 \cdots \psi_a \chi_1 \cdots \chi_b$ de G. Il résulte de [4, (1.6)] et de l'énoncé analogue dans le cas multiplicatif que, si $\overline{X} \hookrightarrow \hat{P}$ est un plongement d'une compactification de X dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X, la réalisation sur $\hat{P}$ de l'isocristal $\mathcal{E}$ s'identifie au facteur direct de l'image directe $u_{\mathrm{rig}\,*}(X'/\hat{P})$ sur lequel G agit par le caractère φ. Par suite, l'espace $H^i_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{E})$ s'identifie au sous-espace de $H^i_{\mathrm{rig}}(X'/K)$ sur lequel G agit par φ. Il résulte donc de 3.1 que les $H^i_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{E})$ sont de dimension finie sur K.

4. Un théorème de comparaison

La construction de l'isomorphisme de Gysin (3.8.1) utilisera un théorème de comparaison entre complexes de de Rham à singularités méromorphes et surconvergentes le long d'un diviseur lisse (théorème 4.2 ci-dessous), que nous démontrons dans cette section. On peut rapprocher cet énoncé du théorème de comparaison de Grothendieck [14] entre complexes de de Rham à singularités méromorphes et essentielles dans le cas complexe, et du théorème analogue de Kiehl [21] dans le cas rigide. On notera aussi que, lorsque le diviseur H introduit plus bas est vide, le théorème 4.2 redonne, dans le cas particulier où le fibré à connexion est trivial, le théorème de Baldassarri-Chiarellotto comparant cohomologie algébrique et cohomologie rigide [1]. La méthode employée ici est différente de celle de Baldassarri-Chiarellotto, et repose sur l'identification du complexe de de Rham à un foncteur $\mathbb{R}\mathcal{H}om$ calculé sur un faisceau d'opérateurs différentiels convenable.

4.1. On fixe un anneau de valuation discrète complet $\mathcal{V}$, d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k, et de corps des fractions K. Soient $\hat{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, de fibre spéciale P_0, H un diviseur de P_0, $\hat{U}$ le complémentaire de H dans $\hat{P}$, U_0 sa fibre spéciale, $j : \hat{U} \hookrightarrow \hat{P}$ (resp. $U_0 \hookrightarrow P_0$) l'immersion canonique.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{D}_{\hat{P}}$ le faisceau usuel des opérateurs différentiels sur $\hat{P}$, $\mathcal{D}_{\hat{P}}^{(m)}$ le faisceau des opérateurs différentiels de niveau $\leq m$ [8, (2.2.1)], et $\mathcal{D}_{\hat{P},n}^{(m)}$ le sous-faisceau des opérateurs d'ordre $\leq n$. Si $p^m > e/(p-1)$, où e est l'indice de ramification absolu de $\mathcal{V}$, on peut associer canoniquement à $\hat{P}$ et H un faisceau de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$-algèbres $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m)}(H)$, muni d'une action naturelle de $\mathcal{D}_{\hat{P}}^{(m)}$, compatible à sa structure de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$-algèbre. Sur un ouvert où H est défini par la réduction sur k d'une section h de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$, on pose $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m)}(H) = \hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}(h, p^{m+1})$, en notant pour tout entier r

$$\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}(h, r) := \mathcal{O}_{\hat{P}}\{T\}/(h^r T - p), \tag{4.1.1}$$

où T est une indéterminée, et $\mathcal{O}_{\hat{P}}\{T\}$ est l'algèbre des séries formelles restreintes à coefficients dans $\mathcal{O}_{\hat{P}}$. Grâce à l'action de $\mathcal{D}_{\hat{P}}^{(m)}$, l'algèbre $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}(h, p^{m+1})$ est indépendante à isomorphisme canonique près du choix de la section h, ce qui permet le recollement sur des ouverts variables [8, (4.2.4)]; de plus, l'homomorphisme $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}(h, p^{m+1}) \to j_*\mathcal{O}_{\hat{U}}$ qui envoie T sur $p/h^{p^{m+1}}$ est injectif [8, (4.3.3)]. Pour m variable, ces algèbres forment un système inductif, et on définit l'algèbre des fonctions à singularités surconvergentes le long de Z en posant

$$\mathcal{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H) = \varinjlim_{m} \hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m)}(H) \hookrightarrow j_*\mathcal{O}_{\hat{U}}.$$

Rappelons enfin que, si l'on pose $\mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H) = \mathcal{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H) \otimes \mathbb{Q}$ (plutôt que $\mathcal{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H)_{\mathbb{Q}}$), et si l'on note $j^\dagger$ le foncteur “germes de sections surconvergentes” au voisinage du tube $]U_0[_{\hat{P}}$ tel qu'il a été défini en 1.2, on dispose d'après [8, (4.3.2)] d'un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_* j^\dagger \mathcal{O}_{\hat{P}_K}.$$

Soit d'autre part $\hat{D} \hookrightarrow \hat{P}$ un diviseur plat sur $\mathcal{V}$, défini par un idéal localement principal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\hat{P}}$. Pour tout $\mathcal{O}_{\hat{P}}$-module $\mathcal{E}$, on pose

$$\mathcal{E}(*\hat{D}) = \varinjlim_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\hat{P}}}(\mathcal{I}^n, \mathcal{E}),$$

soit encore, au voisinage d'un point où $\hat{D}$ est défini par une section t de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$, $\mathcal{E}(*\hat{D}) = \mathcal{O}_{\hat{P}}[1/t] \otimes \mathcal{E}$.

4.2. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses de* 4.1, *on note D_0 la fibre spéciale de $\hat{D}$, H' le diviseur $H + D_0 \subset P_0$, et on suppose que $\hat{D}$ est lisse sur $\mathcal{V}$ aux points de $D_0 \cap U_0$. Le morphisme canonique*

$$\mathcal{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H)(*\hat{D}) \otimes_{\mathcal{O}_{\hat{P}}} \Omega^\bullet_{\hat{P},\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H') \otimes_{\mathcal{O}_{\hat{P}}} \Omega^\bullet_{\hat{P},\mathbb{Q}} \tag{4.2.1}$$

est alors un quasi-isomorphisme.

L'assertion étant locale sur $\hat{P}$, on peut supposer que $\hat{P}$ est affine et possède un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_d$ relativement à $\mathcal{V}$. D'autre part, supposons donnée une famille $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ d'ouverts principaux de P_0 recouvrant U_0, et posons $U_i = D(h_i)$, avec $h_i \in \Gamma(P_0, \mathcal{O}_{P_0})$. Pour toute suite $i_1 < \ldots < i_k$, notons $U_{i_1\ldots i_k} = U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}$, $j_{i_1\ldots i_k}$ l'inclusion de $U_{i_1\ldots i_k}$ dans P_0, et $H_{i_1\ldots i_k} = H + V(h_{i_1}\ldots h_{i_k})$. Pour tout faisceau abélien E sur la fibre générique $\hat{P}_K$ de P, on dispose d'après (1.2.2) d'une suite exacte de faisceaux abéliens sur $\hat{P}_K$:

$$0 \longrightarrow j^\dagger E \longrightarrow \prod_i j_i^\dagger E \longrightarrow \prod_{i_1<i_2} j_{i_1i_2}^\dagger E \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_{1\ldots n}^\dagger E \longrightarrow 0.$$

Or, pour $q \geq 1$, les faisceaux $R^q \mathrm{sp}_* j^\dagger_{i_1\ldots i_k} E$ sont nuls pour toute suite $i_1 < \ldots < i_k$, et tout $\mathcal{O}_{P_K}$-module cohérent E. En effet, si V est un ouvert affine de $\hat{P}$, et si, pour $\lambda < 1$, $\lambda \in \Gamma^*$, on note $j_\lambda : U_\lambda \hookrightarrow V_K$ l'inclusion de l'ouvert affinoïde $U_\lambda = \{\, x \in V_K \mid |hh_{i_1}\ldots h_{i_k}| \geq \lambda \,\}$, on a $j^\dagger_{i_1\ldots i_k} E = \varinjlim_{\lambda\to 1^-} j_{\lambda *} j_\lambda^* E$; comme V_K est quasi-compact et séparé, et que les V_λ sont affinoïdes, on a pour tout $q \geq 1$:

$$H^q(V_K, j^\dagger_{i_1\ldots i_k} E) = \varinjlim_{\lambda\to 1^-} H^q(V_K, j_{\lambda *} j_\lambda^* E) \simeq \varinjlim_{\lambda\to 1^-} H^q(V_\lambda, j_\lambda^* E) = 0.$$

En appliquant sp_* à la suite exacte obtenue pour $E = \mathcal{O}_{P_K}$, on obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H) \longrightarrow \prod_i \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H_i) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H_{1\ldots n}) \longrightarrow 0.$$

On voit ainsi que, pour prouver le théorème, il suffit de le prouver lorsqu'on remplace H par l'un des $H_{i_1\ldots i_k}$, $k \geq 1$.

On peut alors choisir le recouvrement (U_i) tel que, sur chacun des U_i, il existe des coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ pour lesquelles $D_0 \cap U_i$ est défini par l'équation t_1. Comme U_i est un ouvert principal de P_0, on peut supposer que t_1 se prolonge en une section de l'idéal de D_0 dans P_0, et les t_i en des sections de $\mathcal{O}_{P_0}$. Il est alors possible de relever t_1 en une section de l'idéal de $\hat{D}$ et les t_i en des sections de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$. Sur $\hat{U}_i = \hat{P} \cap U_i$, les sections ainsi obtenues, qu'on notera encore $t_1, \ldots, t_d$, sont des coordonnées locales, et t_1 est un générateur de l'idéal de $\hat{D} \cap U_i$ dans $\hat{U}_i$. Dans cette situation, le théorème résultera d'une présentation explicite des algèbres $\mathcal{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H)(*\hat{D})$ et $\mathcal{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H')$ sur des anneaux d'opérateurs différentiels convenables.

4.3. Soient $m \leq m'$ deux entiers. Rappelons que, si $\hat{P}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, et H un diviseur de sa fibre spéciale, l'action du faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\hat{P}}^{(m)}$ sur $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m')}(H)$ permet de munir $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m')}(H) \otimes_{\mathcal{O}_{\hat{P}}} \mathcal{D}_{\hat{P}}^{(m)}$ d'une structure canonique de faisceau d'anneaux [8, (2.3.5)]. Pour m, m' variables, on obtient ainsi un système inductif de faisceaux d'anneaux. Comme $\varinjlim_m \mathcal{D}_{\hat{P}}^{(m)} = \mathcal{D}_{\hat{P}}$, on obtient par passage à la limite une structure de faisceau d'anneaux sur

$$\mathcal{D}_{\hat{P}}({}^\dagger H) \ := \ \mathcal{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H) \otimes_{\mathcal{O}_{\hat{P}}} \mathcal{D}_{\hat{P}}.$$

Par complétion, on obtient également une structure de faisceau d'anneaux sur le produit tensoriel complété $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m')}(H) \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}_{\hat{P}}^{(m)}$. Par passage à la limite inductive, on obtient ainsi le faisceau d'anneaux

$$\mathcal{D}_{\hat{P}}^\dagger({}^\dagger H) \ := \ \varinjlim_{m} \hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m)}(H) \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}_{\hat{P}}^{(m)}.$$

Si on note $j : \hat{U} \hookrightarrow \hat{P}$ l'inclusion du complémentaire de H, on dispose d'après [8, (4.3.3) et (4.3.10)] des injections

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m)}(H) \otimes \mathcal{D}_{\hat{P}}^{(m)} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{\hat{P}}({}^\dagger H) & \hookrightarrow & j_*\mathcal{D}_{\hat{U}}, \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}^{(m)}(H) \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}_{\hat{P}}^{(m)} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{\hat{P}}^\dagger({}^\dagger H) & \hookrightarrow & j_*\mathcal{D}_{\hat{U}}^\dagger. \end{array} \tag{4.3.1}$$

Soient $x_1, \ldots, x_d$ des coordonnées locales sur $\hat{P}$, et $\partial_1, \ldots, \partial_d$ les dérivations correspondantes. Rappelons (cf. [8]) que $\mathcal{D}_{\hat{P}}$, le faisceau usuel des opérateurs différentiels, a une base sur $\mathcal{O}_{\hat{P}}$ formée des opérateurs $\underline{\partial}^{[\underline{k}]} := \underline{\partial}^{\underline{k}}/\underline{k}! \in \mathcal{D}_{\hat{P},\mathbb{Q}}$, pour $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$. De même, le faisceau $\mathcal{D}_{\hat{P}}^{(m)}$ a une base formée des opérateurs $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} := \underline{q}_{\underline{k}}^{(m)}!\,\underline{\partial}^{\underline{k}}/\underline{k}! \in \mathcal{D}_{\hat{P},\mathbb{Q}}$, où, pour tout entier k, on note $q_k^{(m)}$ le quotient de la division euclidienne de k par p^m. Lorsqu'aucune confusion n'en résulte, on utilise la notation $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$ au lieu de $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$.

Lorsqu'on est sous les hypothèses de la fin de la section précédente, on peut donner une description locale des sections de $\mathcal{D}_{\hat{P}}^\dagger({}^\dagger H)$ au moyen des coordonnées sur $\hat{U}$ (voir aussi la démonstration de [18, 1.6.4]) :

4.4. LEMME. — *Soient $\hat{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel affine, connexe, lisse et possédant un système de coordonnées locales $x_1, \dots, x_d$, H un diviseur de sa fibre spéciale, $\hat{U} = \hat{P} \setminus H$, $j : \hat{U} \hookrightarrow \hat{P}$. On suppose qu'il existe des sections $t_1, \dots, t_d \in \Gamma(\hat{P}, \mathcal{O}_{\hat{P}})$ dont la restriction à $\hat{U}$ soit un second système de coordonnées locales sur $\hat{U}$. On note $\partial_1, \dots, \partial_d$ les dérivations par rapport aux x_i, et $\partial'_1, \dots, \partial'_d$ les dérivations par rapport aux t_i, qu'on considère comme des sections de $j_* \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{U}} \supset \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{P}}$, pour un entier $m > \log_p(e/(p-1))$ fixé. Alors :*

(i) *Pour tout $\underline{k}$, il existe des sections $a^{(m)}_{\underline{k}, \underline{k}'} \in \Gamma(\hat{P}, \mathcal{O}_{\hat{P}})$, uniques, telles que*

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} = \sum_{\underline{k}' \leq \underline{k}} a^{(m)}_{\underline{k}, \underline{k}'} \underline{\partial}'^{\langle \underline{k}' \rangle_{(m)}} \tag{4.4.1}$$

dans $\Gamma(\hat{U}, \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{P}})$.

(ii) *Il existe un entier $m' \geq m + 1$ et, pour tout $\underline{k}'$, des sections $b^{(m)}_{\underline{k}', \underline{k}} \in \Gamma(\hat{P}, \hat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\hat{P}}(H))$, uniques, telles que*

$$p^d \underline{\partial}'^{\langle \underline{k}' \rangle_{(m)}} = \sum_{\underline{k} \leq \underline{k}'} b^{(m)}_{\underline{k}', \underline{k}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+1)}} \tag{4.4.2}$$

dans $\Gamma(\hat{U}, \mathcal{D}^{(m+1)}_{\hat{P}})$.

Les assertions d'unicité de (i) et (ii) résultent de ce que, pour tout m, $\Gamma(\hat{U}, \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{P}})$ est un module libre sur $\Gamma(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{P}})$, ayant pour base les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ ou les $\underline{\partial}'^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$, pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$.

Considérons le morphisme de schémas formels $u : \hat{P} \to \hat{\mathbb{A}}^d_{\mathcal{V}}$ défini par les sections t_i. Comme les t_i sont des coordonnées locales sur $\hat{U}$, le morphisme canonique $\mathcal{D}^{(m)}_{\hat{P}} \to u^* \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{\mathbb{A}}^d}$ est un isomorphisme sur $\hat{U}$. L'assertion (i) résulte alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\hat{U}, \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{P}}) \arrow[r, "\sim"] & \Gamma(\hat{U}, u^* \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{\mathbb{A}}^d}) \\ \Gamma(\hat{P}, \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{P}}) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \Gamma(\hat{P}, u^* \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{\mathbb{A}}^d}). \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

D'autre part, soient $\mathcal{C} = \mathrm{Coker}(\mathcal{D}^{(m+1)}_{\hat{P}, p^{m+1}} \to u^* \mathcal{D}^{(m+1)}_{\hat{\mathbb{A}}^d, p^{m+1}})$, $\mathcal{I} = \mathrm{Ann}(\mathcal{C})$. Comme $\mathcal{C}$ est un $\mathcal{O}_{\hat{P}}$-module cohérent, $\mathcal{I}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$. Puisque $\mathcal{C}$ est à support dans H, il en est de même de $\mathcal{O}_{\hat{P}} / \mathcal{I}$. Si $h \in \mathcal{O}_{\hat{P}}$ relève une équation locale de H sur un ouvert $\hat{V}$ de $\hat{P}$, il existe donc un entier n et une section $a \in \Gamma(\hat{V}, \mathcal{O}_{\hat{P}})$ tels que $h^{p^n} + pa \in \mathcal{I}$. A fortiori, $g = (h^{p^n} + pa)^p$ est dans $\mathcal{I}$, de sorte que, pour tout i et tout $k' \leq p^{m+1}$, on a $g \partial_i'^{\langle k' \rangle_{(m+1)}} \in \mathcal{D}^{(m+1)}_{\hat{V}}$. En reprenant les notations de (4.1.1), il existe dans l'algèbre $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{P}}(h^{p^n} + pa, p)$ une section T telle que $gT = p$. Comme $h^{p^n} + pa$ et h^{p^n} sont deux relèvements de la même section modulo p, il existe sur $\hat{V}$ des isomorphismes canoniques

$$\hat{\mathcal{B}}_{\hat{V}}(h^{p^n} + pa, p) \simeq \hat{\mathcal{B}}_{\hat{V}}(h^{p^n}, p) = \hat{\mathcal{B}}_{\hat{V}}(h, p^{n+1}) \simeq \hat{\mathcal{B}}^{(n)}_{\hat{P}}(H)_{|\hat{V}},$$

ce qui montre qu'il existe dans $\Gamma(\hat{V}, \hat{\mathcal{B}}^{(n)}_{\hat{P}}(H))$ une section T_h telle $gT_h = p$. Pour tout i et tout $k' \leq p^{m+1}$, on obtient alors $p \partial_i'^{\langle k' \rangle_{(m+1)}} \in \Gamma(\hat{V}, \hat{\mathcal{B}}^{(n)}_{\hat{P}}(H) \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\hat{P}})$.

Par quasi-compacité, on peut choisir n indépendant de $\hat{V}$. Soit $m' = \max(n, m+1)$. Pour $\underline{k}'$ quelconque, on écrit $\underline{k}' = p^{m+1} \underline{q} + \underline{r}$, avec $0 \leq r_i < p^{m+1}$ pour tout i ; l'opérateur

$\underline{\partial}_i'^{\langle k_i'\rangle_{(m+1)}}$ se met alors sous la forme

$$\partial_i'^{\langle k_i'\rangle_{(m+1)}} = u\partial_i'^{\langle r_i\rangle_{(m+1)}}(\partial_i'^{\langle p^{m+1}\rangle_{(m+1)}})^{q_i}$$

avec $u \in \mathbb{Z}_{(p)}$ (voir [8, (1.1.3) et (2.2.5)]), et on en déduit que, quel que soit $\underline{k}'$, on a

$$p^{|\underline{q}|+d}\underline{\partial}'^{\langle \underline{k}'\rangle_{(m+1)}} \in \widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P}}^{(m')}(H) \otimes \mathscr{D}_{\hat{P}}^{(m+1)}, \tag{4.4.3}$$

puisque $\widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P}}^{(m')}(H) \otimes \mathscr{D}_{\hat{P}}^{(m+1)}$ est un faisceau d'anneaux.

Rappelons maintenant que, si $n = \sum_i a_i p^i$ est l'écriture de n en base p, et $\sigma(n) = \sum a_i$, la valuation p-adique de $n!$ est donnée par

$$v_p(n!) = (n - \sigma(n))/(p-1).$$

Pour tout $\underline{k}'$, on peut encore écrire $\underline{k}' = p^m\underline{q}' + \underline{r}'$, avec $0 \leq r_i' < p^m$ pour tout i. L'homomorphisme canonique $\mathscr{D}_{\hat{P}}^{(m)} \to \mathscr{D}_{\hat{P}}^{(m+1)}$ envoie $\underline{\partial}'^{\langle \underline{k}'\rangle_{(m)}}$ sur $(\underline{q}'!/\underline{q}!)\underline{\partial}'^{\langle \underline{k}'\rangle_{(m+1)}}$. On déduit facilement de la formule précédente que $v_p(\underline{q}'!/\underline{q}!) = |\underline{q}|$, si bien que, d'après (4.4.3), on obtient

$$p^d\underline{\partial}'^{\langle \underline{k}'\rangle_{(m)}} \in \widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P}}^{(m')}(H) \otimes \mathscr{D}_{\hat{P}}^{(m+1)},$$

d'où l'assertion (ii).

4.5. LEMME. — *Sous les hypothèses de* 4.4, *soit* $\hat{V}$ *un ouvert affine de* $\hat{P}$. *On munit l'espace* $\Gamma(\hat{V}, j_*\mathscr{D}_{\hat{U},\mathbb{Q}}^{\dagger}) \subset \Gamma(\hat{V} \cap \hat{U}, \widehat{\mathscr{D}}_{\hat{P},\mathbb{Q}})$ *de la topologie induite par la topologie p-adique. Si* $Q \in \Gamma(\hat{V}, j_*\mathscr{D}_{\hat{U},\mathbb{Q}}^{\dagger})$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *L'opérateur* Q *appartient à* $\Gamma(\hat{V}, \mathscr{D}_{\hat{P},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^{\dagger}H))$.

(ii) *Il existe un entier* m, *et des sections* $b_{\underline{k}} \in \Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P},\mathbb{Q}}^{(m)}(H))$ *telles que*

$$Q = \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}}\underline{\partial}'^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}, \tag{4.5.1}$$

avec $b_{\underline{k}} \to 0$ *pour* $|\underline{k}| \to \infty$.

(iii) *Il existe un entier* m, *et des sections* $b_{\underline{k}}' \in \Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P},\mathbb{Q}}^{(m)}(H))$ *telles que*

$$Q = \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}}'\underline{\partial}'^{[\underline{k}]}, \tag{4.5.2}$$

avec $\|b_{\underline{k}}'\| < c\eta^{|\underline{k}|}$ *pour certaines constantes* c, $\eta < 1$, *la norme étant une norme de Banach quelconque sur l'algèbre affinoïde* $\Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P},\mathbb{Q}}^{(m)}(H))$.

Si ces conditions sont satisfaites, les sections $b_{\underline{k}}$ *et* $b_{\underline{k}}'$ *sont alors uniques.*

Si $Q \in \Gamma(\hat{V}, \mathscr{D}_{\hat{P},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^{\dagger}H))$, il existe un entier m tel que $Q \in \Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P}}^{(m)}(H) \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{D}}_{\hat{P},\mathbb{Q}}^{(m)})$. On peut donc écrire Q sous la forme $\sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}\underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle_{(m)}}$, où $a_{\underline{i}} \in \Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P},\mathbb{Q}}^{(m)}(H))$ tend vers 0 pour $|\underline{k}| \to \infty$. Appliquant (4.4.1), on en déduit (4.5.1), avec $b_{\underline{k}} = \sum_{\underline{i} \geq \underline{k}} a_{\underline{i}} a_{\underline{i},\underline{k}}^{(m)}$.

Inversement, supposons que Q vérifie (4.5.1). Grâce à la relation (4.4.2), on peut trouver $m' \geq m+1$ tel que l'on puisse écrire $Q = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}\underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle_{(m+1)}}$, où $a_{\underline{i}} \in \Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}_{\hat{P},\mathbb{Q}}^{(m')}(H))$ tend vers 0, en posant $a_{\underline{i}} = p^{-d}\sum_{\underline{k}\geq\underline{i}} b_{\underline{k}} b^{(m)}_{\underline{k},\underline{i}}$. Par suite, $Q \in \Gamma(\hat{V}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H))$.

Comme $\underline{\partial}'^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}} = \underline{q}_{\underline{k}}^{(m)}!\,\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$, (ii) entraîne (iii) d'après [8, (2.4.3)]. De même, sous les hypothèses de (iii), il existe m' tel que $b'_{\underline{k}} = \underline{q}_{\underline{k}}^{(m')}!\,b_{\underline{k}}$, avec $b_{\underline{k}} \to 0$ dans $\Gamma(\hat{V}, \hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\hat{P},\mathbb{Q}}(H))$. Quitte à augmenter m si nécessaire, la condition (ii) est donc vérifiée.

Enfin, l'unicité des sections $b_{\underline{k}}$ et $b'_{\underline{k}}$ est conséquence de ce que, sur $\hat{V} \cap \hat{U}$, $\hat{\mathscr{D}}_{\hat{P}}$ est le complété du $\mathcal{O}_{\hat{P}}$-module libre de base les $\underline{\partial}'^{[\underline{k}]}$, et de l'injectivité des homomorphismes $\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\hat{P}}(H) \to j_*\mathcal{O}_{\hat{P}}$.

4.6. LEMME. — *Sous les hypothèses de* 4.4, *posons* $t = t_1$, $\partial' = \partial'_1$ *et soient* $\hat{D} \hookrightarrow \hat{P}$ *le diviseur d'équation* t, D_0 *sa fibre spéciale,* $H' = H + D_0$. *On note* $\mathscr{D}'^{\dagger} \subset \mathscr{D}^{\dagger}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)$ (*resp.* $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'^{\dagger} \cap \mathscr{D}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)$) *le sous-faisceau d'anneaux formé des opérateurs différentiels de la forme* (4.5.2) *tels que* $b'_{\underline{k}} = 0$ *si* $k_i > 0$ *pour un* $i > 1$ (*resp. et d'ordre fini*).

(i) *L'homomorphisme* $\mathscr{D}'^{\dagger}$*-linéaire* (*resp.* $\mathscr{D}'$*-linéaire*) $\varphi : \mathscr{D}'^{\dagger} \to \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)$ (*resp.* $\varphi : \mathscr{D}' \to \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)$) *tel que* $\varphi(1) = 1$ *définit des résolutions*

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}'^{\dagger} \xrightarrow{\cdot\partial'} \mathscr{D}'^{\dagger} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H) \longrightarrow 0$$

(*resp.*
$$0 \longrightarrow \mathscr{D}' \xrightarrow{\cdot\partial'} \mathscr{D}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H) \longrightarrow 0).$$

(ii) *L'homomorphisme* $\mathscr{D}'^{\dagger}$*-linéaire* (*resp.* $\mathscr{D}'$*-linéaire*) $\psi : \mathscr{D}'^{\dagger} \to \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H')$ (*resp.* $\psi : \mathscr{D}' \to \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)(*D)$) *tel que* $\psi(1) = 1/t$ *définit des résolutions*

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}'^{\dagger} \xrightarrow{\cdot\partial' t} \mathscr{D}'^{\dagger} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H') \longrightarrow 0$$

(*resp.*
$$0 \longrightarrow \mathscr{D}' \xrightarrow{\cdot\partial' t} \mathscr{D}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)(*D) \longrightarrow 0).$$

La démonstration des assertions relatives à $\mathscr{D}'$ étant identique à celle du cas classique, nous donnons seulement celle des assertions relatives à $\mathscr{D}'^{\dagger}$. On notera qu'elles sont une variante avec singularités surconvergentes des propositions (3.2.1) et (4.2.2) de [7].

Pour vérifier que les multiplications par ∂' et t sont injectives sur $\mathscr{D}'^{\dagger}$, il suffit, grâce aux inclusions (4.3.1), de montrer qu'il en est ainsi sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\hat{U},\mathbb{Q}}$, donc sur chacun des $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\hat{U},\mathbb{Q}}$. Comme $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\hat{U}}$ est plat sur $\mathscr{D}^{(m)}_{\hat{U}}$ [8, (3.2.3)], et que ce dernier est un sous-faisceau du faisceau des opérateurs différentiels usuels $\mathscr{D}_{\hat{U}}$, qui est intègre, l'assertion est claire.

Soient $\hat{V}$ un ouvert affine de $\hat{P}$, et $P = \sum_k a_k \partial'^{[k]} \in \Gamma(\hat{V}, \mathscr{D}'^{\dagger})$. D'après 4.5, il existe un entier m tel que, pour tout k, a_k appartienne à $\Gamma(\hat{V}, \hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\hat{P},\mathbb{Q}}(H))$, et satisfasse une majoration de la forme $\|a_k\| < c\,\eta^{|k|}$. Pour que $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, il faut et suffit que $a_0 = 0$. Si l'on pose $Q = \sum_{k\geq 0}(a_{k+1}/(k+1))\partial'^{[k]}$, les coefficients $b_k = a_{k+1}/(k+1)$ sont dans $\Gamma(\hat{V}, \hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\hat{P},\mathbb{Q}}(H))$ et vérifient une majoration analogue. Par suite, Q est dans $\Gamma(\hat{V}, \mathscr{D}'^{\dagger})$ et est tel que $Q\partial' = P$, ce qui prouve (i).

Prouvons la surjectivité de ψ. Si h relève une équation locale de H sur $\hat{V}$, toute section f de $\mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H')$ sur $\hat{V}$ s'écrit sous la forme $\sum_k a_k/(ht)^{k+1}$, où $a_k \in \Gamma(\hat{V}, \mathcal{O}_{\hat{V},\mathbb{Q}})$ vérifie une majoration de la forme $\|a_k\| < c\,\eta^k$, avec $\eta < 1$. Posons $b_k = a_k/h^{k+1}$, et fixons m tel que $\eta p^{1/p^{m+1}} < 1$. On peut considérer b_k comme une section de $\Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\hat{P},\mathbb{Q}}(H))$, et, en posant $k+1 = p^{m+1}q - s$, avec $0 \leq s < p^{m+1}$, on peut écrire $b_k = (h^s a_k/p^q)(p/h^{p^{m+1}})^q$. En prenant la norme dans $\Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\hat{P},\mathbb{Q}}(H))$, on obtient alors $\|b_k\| \leq \|a_k\|\,|p|^{-q} < c'(\eta p^{1/p^{m+1}})^k$, où c' est une constante. D'après (4.5.2), l'opérateur $Q = \sum_k (-1)^k b_k \partial'^{[k]}$ appartient à $\mathscr{D}'^{\dagger}$, et il est tel que $Q\cdot(1/t) = f$.

Soit maintenant $P = \sum_k a_k \partial'^{[k]} \in \Gamma(\hat{V}, \mathscr{D}'^{\dagger})$ un opérateur tel que $\psi(P) = 0$. Soit m tel que, pour tout k, a_k appartienne à $\Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\hat{P},\mathbb{Q}}(H))$, et satisfasse une majoration de la forme $\|a_k\| < c\,\eta^{|k|}$. Notons $B = \Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\hat{P}}(H))$. Par hypothèse, $\sum_k (-1)^k a_k/t^{k+1} = 0$ dans $\Gamma(\hat{V}, \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H'))$. Il existe donc $m' \geq m$ tel que $\sum_k (-1)^k a_k/t^{k+1} = 0$ dans $\Gamma(\hat{V}, \widehat{\mathscr{B}}^{(m')}_{\hat{P},\mathbb{Q}}(H'))$, donc aussi dans $B\{1/t\}_{\mathbb{Q}}$. Pour tout $j \geq 0$, posons

$$b_j \;=\; (-1)^{j+1} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k a_k t^{j-k-1} \;\in\; B_{\mathbb{Q}}.$$

Comme $\hat{P}$ est lisse, B est réduit d'après [10, 7.3.2, cor. 10]. Par suite, il résulte du lemme (4.2.1) de [7] que les b_j satisfont une majoration de la forme $\|b_j\| < c'\eta'^{j}$, avec $\eta' < 1$. On peut donc définir un opérateur $Q \in \Gamma(\hat{V}, \mathscr{D}'^{\dagger})$ en posant $Q = \sum_j b_j \partial'^{[j]}$, et on obtient

$$Qt \;=\; \sum_j (b_j t + b_{j+1})\partial'^{[j]} \;=\; P.$$

Comme $b_0 = 0$, on peut comme plus haut écrire $Q = Q'\partial'$ dans $\Gamma(\hat{V}, \mathscr{D}'^{\dagger})$, d'où (ii).

4.7. Achevons maintenant la démonstration du théorème 4.2. Grâce au dévissage fait précédemment, on peut donc supposer qu'on est sous les hypothèses de 4.6. On dispose ainsi des sections $dt_1, \ldots, dt_d \in \Gamma(\hat{P}, \Omega^1_{\hat{P}})$, et celles-ci forment une base de $\mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H) \otimes \Omega^1_{\hat{P}}$: c'est en effet le cas sur $\hat{U}$, et, d'après [8, (4.3.10)], $j_*\mathscr{O}_{\hat{U},\mathbb{Q}}$ est fidèlement plat sur $\mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)$. Soient respectivement Ω' et Ω'' les sous-$\mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)$-modules libres de $\mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H) \otimes \Omega^1_{\hat{P}}$ ayant pour base dt_1 et $dt_2, \ldots, dt_d$. Les complexes source et but de (4.2.1) peuvent alors être vus comme les complexes simples associés aux deux bicomplexes de termes généraux

$$K^{i,j} \;=\; \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)(*\hat{D}) \otimes \wedge^i\Omega' \otimes \wedge^j\Omega'', \quad K^{\dagger\,i,j} \;=\; \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H') \otimes \wedge^i\Omega' \otimes \wedge^j\Omega'',$$

dont les différentielles sont respectivement données par $d' = \partial' \otimes dt_1$, et $d'' = \sum_{i\geq 2}\partial'_i \otimes dt_i$. Grâce aux suites spectrales correspondantes, on se ramène ainsi à montrer que le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)(*\hat{D}) & \xrightarrow{\partial'} & \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)(*\hat{D}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H') & \xrightarrow{\partial'} & \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H') \end{array} \tag{4.7.1}$$

est un quasi-isomorphisme du complexe de la ligne du haut vers celui de la ligne du bas. Notons $\mathscr{A} = \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)$, $\mathscr{B} = \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H)(*\hat{D})$, $\mathscr{B}^{\dagger} = \mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H')$. Les résolutions de $\mathscr{A}$ obtenues en 4.6 (i) montrent que ce morphisme s'écrit sous la forme

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \longrightarrow \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'^\dagger}(\mathscr{A},\mathscr{B}^\dagger). \tag{4.7.2}$$

Si $\mathscr{E}$ est un complexe borné de $\mathscr{D}'$-modules (resp. $\mathscr{D}'^\dagger$-modules) à gauche, notons $\mathbb{D}(\mathscr{E}) = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'}(\mathscr{E},\mathscr{D}')$ (resp. $\mathbb{D}^\dagger(\mathscr{E}) = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'^\dagger}(\mathscr{E},\mathscr{D}'^\dagger)$) le complexe de $\mathscr{D}'$-modules (resp. $\mathscr{D}'^\dagger$-modules) à droite dual. D'après 4.6, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont de dimension localement projective finie sur $\mathscr{D}'$ (resp. $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}^\dagger$ sur $\mathscr{D}'^\dagger$), de sorte qu'on dispose par bidualité locale d'isomorphismes

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'}(\mathbb{D}(\mathscr{B}),\mathbb{D}(\mathscr{A})),$$

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'^\dagger}(\mathscr{A},\mathscr{B}^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'^\dagger}(\mathbb{D}^\dagger(\mathscr{B}^\dagger),\mathbb{D}^\dagger(\mathscr{A})).$$

De plus, les résolutions de 4.6 montrent que les morphismes canoniques

$$\mathscr{D}'^\dagger \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}'} \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}, \qquad \mathscr{D}'^\dagger \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}'} \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}^\dagger$$

sont des isomorphismes. Il s'ensuit que $\mathbb{D}(\mathscr{A})$ se déduit de $\mathbb{D}^\dagger(\mathscr{A})$ par restriction des scalaires, tandis que le morphisme canonique $\mathbb{D}(\mathscr{B}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}'} \mathscr{D}'^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger(\mathscr{B}^\dagger)$ est un isomorphisme. Les isomorphismes précédents identifient alors le morphisme (4.7.2) à l'isomorphisme d'adjonction

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'}(\mathbb{D}(\mathscr{B}),\mathbb{D}(\mathscr{A})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}'^\dagger}(\mathbb{D}^\dagger(\mathscr{B}^\dagger),\mathbb{D}^\dagger(\mathscr{A})),$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. — L'énoncé 4.2 est valable plus généralement si l'on suppose seulement que $\hat{D} \cap U_0$ est un diviseur à croisements normaux relatifs sur $\mathscr{V}$: il suffit pour s'en convaincre de vérifier comme dans 4.6 que la présentation de $\mathscr{O}_{\hat{P}}({}^\dagger D_0)$ donnée en [7, (4.3.2)] lorsque $H = \emptyset$ reste valable sur le faisceau $\mathscr{D}'^\dagger$ considéré ici pour H quelconque.

4.8. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de* 4.6, *soit* $1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d$ *une suite d'indices. Alors le morphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H)(*\hat{D})[1/t_{i_2}\ldots t_{i_k}] \otimes_{\mathscr{O}_{\hat{P}}} \Omega^\bullet_{\hat{P},\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H')[1/t_{i_2}\ldots t_{i_k}] \otimes_{\mathscr{O}_{\hat{P}}} \Omega^\bullet_{\hat{P},\mathbb{Q}}$$

est un quasi-isomorphisme.

Comme en 4.7, on se ramène à montrer que le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H)(*\hat{D})[1/t_{i_2}\ldots t_{i_k}]_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\partial'} & \mathscr{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H)(*\hat{D})[1/t_{i_2}\ldots t_{i_k}]_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H')[1/t_{i_2}\ldots t_{i_k}]_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\partial'} & \mathscr{O}_{\hat{P}}({}^\dagger H')[1/t_{i_2}\ldots t_{i_k}]_{\mathbb{Q}} \end{array} \tag{4.8.1}$$

est un quasi-isomorphisme. Or la multiplication par $t_{i_2}\ldots t_{i_k}$ est injective sur $\mathscr{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H)$, car c'est le cas en restriction à $\hat{U}$ puisque $\hat{U}$ est lisse et connexe, et $j_*\mathcal{O}_{\hat{U},\mathbb{Q}}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H)$; par platitude, elle est encore injective sur $\mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H)(*\hat{D})$. De même, elle est injective sur $\mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^\dagger H')$. Comme $\partial'(1/t_{i_2}\dots t_{i_k}) = 0$, le diagramme (4.8.1) est limite inductive de diagrammes égaux à (4.7.1), avec pour flèches de transition la multiplication par $t_{i_2}\dots t_{i_k}$, d'où le corollaire.

5. Application à l'isomorphisme de Gysin

Nous donnons ici la démonstration du théorème 3.8. Supposons X' compactifié en $\overline{X}'$, et Z en $\overline{Z} \subset \overline{X}'$. Le principe de la construction consiste à partir de l'isomorphisme de Gysin $\Omega^\bullet_{Y'_K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Y'_K}(\Omega^\bullet_{X'_K})[2r]$ sur X'_K, à passer aux faisceaux analytiques associés, à appliquer le foncteur $j^\dagger$ des germes de sections surconvergentes au voisinage de $]X[$, ce qui donne un isomorphisme sur $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$, puis à appliquer les foncteurs $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}$ et $\mathbb{R}\Gamma(\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K, -)$. La source de l'isomorphisme obtenu calcule la cohomologie rigide de Y. Pour identifier son but à $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{rig},Z}(X/K)$, il faut alors montrer qu'après avoir pris le foncteur $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}$, le foncteur $\mathbb{R}\Gamma_{Y'_K}$ ne joue plus de rôle. Pour cela, nous utiliserons un plongement de X' dans un $\mathcal{V}$-schéma propre et lisse P, grâce auquel nous pourrons déduire cette propriété du théorème de comparaison 4.2.

Comme corollaire, nous obtiendrons aussi un analogue en cohomologie rigide du théorème de pureté cohomologique de [SGA 4, exposé XIX].

5.1. Si S^{an} est un espace analytique rigide sur K, si $T^{\mathrm{an}} \subset S^{\mathrm{an}}$ est un sous-espace analytique fermé, défini par un idéal cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{S^{\mathrm{an}}}$, et si $\mathcal{E} \in D^+(\mathcal{O}_{S^{\mathrm{an}}})$, nous noterons

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(T^{\mathrm{an}})}(\mathcal{E}) = \varinjlim_n \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S^{\mathrm{an}}}}(\mathcal{O}_{S^{\mathrm{an}}}/\mathcal{I}^n, \mathcal{E})$$

la cohomologie locale de $\mathcal{E}$ “à supports méromorphes” dans T^{an} (nous nous écartons ici de la notation $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[T^{\mathrm{an}}]}$ utilisée en analytique complexe pour éviter tout risque de confusion avec la cohomologie à support dans un tube). Si S^{an}, T^{an} sont les espaces analytiques associés à des variétés algébriques S, T sur K, et si $\mathcal{J}$ est l'idéal de T dans S, il résulte de la platitude de $\mathcal{O}_{S^{\mathrm{an}}}$ sur $\mathcal{O}_S$ et de la cohérence de $\mathcal{O}_S/\mathcal{J}^n$ qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_T(\mathcal{E})^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(T^{\mathrm{an}})}(\mathcal{E}^{\mathrm{an}})$$

pour tout $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{E}$, en notant $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ le faisceau analytique associé à un $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{F}$.

Lorsque S^{an} est lisse, et que $\mathcal{E} \in D^+(\mathcal{D}_{S^{\mathrm{an}}})$, le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(T^{\mathrm{an}})}(\mathcal{E})$ est de manière naturelle dans $D^+(\mathcal{D}_{S^{\mathrm{an}}})$. Par abus de notation, nous noterons $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(T^{\mathrm{an}})}(\mathcal{E}) \otimes \Omega^\bullet_{S^{\mathrm{an}}}$ le complexe de de Rham correspondant, obtenu en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_{S^{\mathrm{an}}}, -)$.

5.2. Soit $Y' \hookrightarrow X'$ une immersion fermée de codimension r entre deux $\mathcal{V}$-schémas lisses, de fibres génériques Y'_K, X'_K, de fibres spéciales Y, X, et soit Z un sous-schéma fermé de Y. Montrons d'abord comment la donnée de X' et Y' permet de construire le morphisme

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(Y/K) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)[2r]$$

considéré en (3.8.1).

Pour cela, considérons le morphisme de Gysin algébrique [2, VI (3.1.1)]

$$G_{Y'/X'} : \Omega^{\bullet}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{\bullet}_{X'}[r] \simeq \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Y'}(\Omega^{\bullet}_{X'})[2r].$$

Comme K est de caractéristique nulle, c'est un quasi-isomorphisme au-dessus de X'_K. On introduit alors les espaces analytiques X'^{an}_K et Y'^{an}_K associés à X'_K et Y'_K. En passant aux faisceaux analytiques associés sur X'^{an}_K (foncteur qui s'étend de manière naturelle aux opérateurs différentiels entre $\mathcal{O}_{X'_K}$-modules au sens de [EGA IV, § 16]), on obtient un morphisme de complexes

(5.2.1) $$G^{\mathrm{an}}_{Y'/X'} : \Omega^{\bullet}_{Y'^{\mathrm{an}}_K} \longrightarrow \mathcal{H}^r_{Y'_K}(\mathcal{O}_{X'_K})^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^{\bullet}_{X'^{\mathrm{an}}_K}[r].$$

5.3. LEMME. — *Le morphisme $G^{\mathrm{an}}_{Y'/X'}$ est un quasi-isomorphisme.*

On reprend la démonstration du cas algébrique. L'assertion étant locale pour la topologie de Zariski de X'_K, qui induit des recouvrements admissibles de X'^{an}_K, on peut supposer qu'il existe sur X' des coordonnées locales $t_1,\dots,t_d$, définissant des dérivations $\partial_1,\dots,\partial_d$, telles que $Y' = V(t_1,\dots,t_r)$. On dispose alors de l'identification

$$\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \simeq \mathcal{O}_{X'}[1/t_1\dots t_r]/\sum_{i=1}^{r}\mathcal{O}_{X'}[1/t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_r].$$

Elle permet de décrire $G_{Y'/X'}$ comme le morphisme de complexes qui associe à une section ω de $\Omega^{\bullet}_{Y'}$ la section $(\tilde{\omega}/t_1\dots t_r)\wedge dt_1\wedge\dots\wedge dt_r$ de $\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{\bullet+r}_{X'}$, où $\tilde{\omega}$ est une section quelconque de $\Omega^{\bullet}_{X'}$ relevant ω. Pour montrer que c'est un quasi-isomorphisme, on introduit les sous-modules Ω' et Ω'' de $\Omega^1_{X'}$ ayant respectivement pour bases $dt_1,\dots,dt_r$ et $dt_{r+1},\dots,dt_d$. Le complexe $\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{\bullet}_{X'}$ s'identifie alors au complexe simple associé au bicomplexe de terme général $\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{i,j} = \mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \wedge^i\Omega' \otimes \wedge^j\Omega''$, dont les deux différentielles seront notées $d' = \Sigma_1^r\, \partial_i \otimes dt_i$ et $d'' = \Sigma_{r+1}^d\, \partial_i \otimes dt_i$. De plus, le morphisme $G_{Y'/X'}$ peut être vu comme associé à un morphisme de bicomplexes $\Omega^{\bullet}_{Y'} \to \mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{\bullet\bullet}[r, 0]$, en plaçant $\Omega^j_{Y'}$ en bidegré $(0, j)$.

On filtre $\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'})$ en posant

$$\mathrm{Fil}_k\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) = \{\, a/t_1^{k_1}\dots t_r^{k_r} \mid a \in \mathcal{O}_{X'}, \Sigma k_i \le k \,\},$$

puis $\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{\bullet\bullet}$ en posant

$$\mathrm{Fil}_k(\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{i,j}) = \mathrm{Fil}_{k+i}(\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'})) \otimes \Omega^{i,j}.$$

On obtient ainsi une filtration croissante par des sous-bicomplexes, telle que $\mathrm{Fil}_k = 0$ pour $k < 0$. La différentielle induite par d' sur le gradué associé est alors $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire. On vérifie que, sur la fibre générique, le complexe $\mathrm{gr}_k(\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{\bullet,j})$ est acyclique pour tout j et tout $k \geq 1$, tandis que le morphisme $\Omega^j_{Y'} \to \mathrm{gr}_0(\mathcal{H}^r_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}) \otimes \Omega^{\bullet,j})[r]$ est un isomorphisme. Par suite, $G_{Y'/X'}$ est un quasi-isomorphisme au-dessus de X'_K. Ces propriétés passent aux faisceaux analytiques associés, et le lemme en résulte.

5.4. Pour achever la construction du morphisme (3.8.1), on considère ensuite le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Y'_K}(\mathcal{O}_{X'_K}) \to \mathcal{O}_{X'_K}$, qu'on peut voir comme un morphisme de la catégorie dérivée $D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X'_K})$. Comme le foncteur “faisceau analytique associé” s'étend en un foncteur de $D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X'_K})$ dans $D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X'^{\mathrm{an}}_K})$, on en déduit un morphisme canonique $\mathcal{H}^r_{Y'_K}(\mathcal{O}_{X'_K})^{\mathrm{an}} \to \mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}_K}[r]$ dans $D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X'^{\mathrm{an}}_K})$. On peut prendre le morphisme induit entre les complexes de de Rham correspondants, ce qui donne un morphisme de la catégorie dérivée des complexes de K-vectoriels sur X'^{an}_K

$$\mathcal{H}^r_{Y'_K}(\mathcal{O}_{X'_K})^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^\bullet_{X'^{\mathrm{an}}_K} \longrightarrow \Omega^\bullet_{X'^{an}_K}[r].$$

Par composition avec le morphisme $G^{\mathrm{an}}_{Y'/X'}$, on en déduit donc un morphisme

$$\Omega^\bullet_{Y'^{\mathrm{an}}_K} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{H}^r_{Y'_K}(\mathcal{O}_{X'_K})^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^\bullet_{X'^{\mathrm{an}}_K}[r] \longrightarrow \Omega^\bullet_{X'^{\mathrm{an}}_K}[2r]. \tag{5.4.1}$$

Soient $\overline{X}'$ une compactification de X' sur $\mathcal{V}$, $\overline{Y}'$ l'adhérence schématique de Y' dans $\overline{X}'$, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les fibres spéciales de $\overline{X}'$ et $\overline{Y}'$. Si $\hat{\overline{X}}'$ et $\hat{\overline{Y}}'$ sont les complétés formels de $\overline{X}'$ et $\overline{Y}'$, on a $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K = \hat{\overline{X}}'_K$, $\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K = \hat{\overline{Y}}'_K$, puisque $\hat{\overline{X}}'$ et $\hat{\overline{Y}}'$ sont propres sur $\mathcal{V}$. Notons j l'immersion donnée de X dans $\overline{X}$, et $j^\dagger$ le foncteur correspondant sur $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$. Comme X'^{an}_K est un voisinage strict de $]X[_{\hat{\overline{X}}'}$ dans $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$, on peut aussi considérer $j^\dagger$ comme un foncteur de la catégorie des faisceaux de K-vectoriels sur X'^{an}_K dans la catégorie des faisceaux de K-vectoriels sur $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$. De plus, $j^\dagger$ est un foncteur exact, de sorte qu'il s'étend aux catégories dérivées. Il est clair qu'on a alors les égalités

$$j^\dagger\Omega^\bullet_{Y'^{\mathrm{an}}_K} = j^\dagger\Omega^\bullet_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K}, \quad j^\dagger\Omega^\bullet_{X'^{\mathrm{an}}_K} = j^\dagger\Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K},$$

$$j^\dagger(\mathcal{H}^r_{Y'_K}(\mathcal{O}_{X'_K})^{\mathrm{an}}) = j^\dagger(\mathcal{H}^r_{\overline{Y}'_K}(\mathcal{O}_{\overline{X}'_K})^{\mathrm{an}}) \xleftarrow{\ \sim\ } j^\dagger(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\overline{Y}'_K}(\mathcal{O}_{\overline{X}'_K})^{\mathrm{an}})[r] \simeq j^\dagger(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(\overline{Y}'_K)}(\mathcal{O}_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}))[r].$$

On déduit donc de (5.4.1) un morphisme

$$j^\dagger\Omega^\bullet_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K} \xrightarrow{\ \sim\ } j^\dagger(\mathcal{H}^r_{\overline{Y}'_K}(\mathcal{O}_{\overline{X}'_K})^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}[r]) \longrightarrow j^\dagger\Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}[2r].$$

Si $\overline{Z}$ est l'adhérence de Z dans $\overline{Y}$, on peut ensuite appliquer sur $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$ le foncteur exact $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}$, puis le foncteur image directe par spécialisation, si bien que l'on obtient un morphisme de la catégorie dérivée des faisceaux de K-vectoriels sur $\hat{\overline{X}}'$:

(5.4.2)

$$\mathbb{R}\mathrm{sp}_*\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}j^\dagger\Omega^\bullet_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{sp}_*\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}j^\dagger(\mathcal{H}^r_{\overline{Y}'_K}(\mathcal{O}_{\overline{X}'_K})^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}[r]) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{sp}_*\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}j^\dagger\Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}[2r].$$

Par définition, on a $\mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) = \mathbb{R}\Gamma(\hat{\overline{X}}', \mathbb{R}\,\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, j^\dagger \Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K})$. Notons j_Y l'immersion ouverte de Y dans $\overline{Y}$, $j_Y^\dagger$ le foncteur correspondant sur $\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K$, i l'immersion fermée de $\hat{\overline{Y}}'$ dans $\hat{\overline{X}}'$. Pour tout faisceau abélien E sur $\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K$, on a un isomorphisme canonique $i_{K*} j_Y^\dagger E \simeq j^\dagger i_{K*} E$: en effet, si $W \subset \overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$ est un ouvert affinoïde, et si V (resp. V') parcourt l'ensemble des voisinages stricts de $]X[_{\hat{\overline{X}}'}$ dans $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$ (resp. de $]Y[_{\hat{\overline{Y}}'}$ dans $\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K$), on a

$$\begin{aligned}\Gamma(W, j^\dagger i_{K*} E) &= \varinjlim_V \Gamma(W \cap V, i_{K*} E) = \varinjlim_V \Gamma(W \cap \overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K \cap V, E)\\ &\simeq \varinjlim_{V'} \Gamma(W \cap \overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K \cap V', E) = \Gamma(W, i_{K*} j_Y^\dagger E),\end{aligned}$$

grâce à la quasi-compacité de W et à [5, (1.2.2)]. On vérifie de même que $i_{K*} \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} E \simeq \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, i_{K*} E$, le foncteur $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}$ étant pris respectivement sur $\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K$ et sur $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$. Il en résulte qu'on a aussi un isomorphisme canonique $\mathbb{R}\Gamma_{Z,\mathrm{rig}}(Y/K) \simeq \mathbb{R}\Gamma(\hat{\overline{X}}', \mathbb{R}\,\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, j^\dagger \Omega^\bullet_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K})$. En appliquant le foncteur $\mathbb{R}\Gamma(\hat{\overline{X}}', -)$ à (5.4.2), on obtient alors le morphisme (3.8.1) cherché.

Remarquons que ce morphisme ne dépend pas du choix de la compactification $\overline{X}'$ choisie pour X'. En effet, la méthode du plongement diagonal permet de se ramener à comparer les morphismes (3.8.1) obtenus pour deux compactifications $\overline{X}'_1$ et $\overline{X}'_2$ telles qu'il existe un morphisme $\overline{X}'_1 \to \overline{X}'_2$ prolongeant l'identité de X'. Leurs fibres spéciales fournissent alors deux compactifications $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$ de X. Comme les deux morphismes proviennent d'un même morphisme sur X'^{an}_K par image directe via $X'^{\mathrm{an}}_K \hookrightarrow \overline{X}'^{\mathrm{an}}_{i,K}$, spécialisation et passage aux sections globales, il est alors clair qu'ils se correspondent via les identifications de 1.7.

Le morphisme ainsi obtenu sera noté $G^{\mathrm{rig}}_{Y'/X',Z}$. Il satisfait la propriété de transitivité suivante : si $X' \hookrightarrow U'$ est une immersion fermée de X' dans un $\mathcal{V}$-schéma lisse U', alors

$$G^{\mathrm{rig}}_{X'/U',Z} \circ G^{\mathrm{rig}}_{Y'/X',Z} = G^{\mathrm{rig}}_{Y'/U',Z}. \tag{5.4.3}$$

Celle-ci se déduit en effet facilement de la formule de transitivité usuelle [2, VI, prop. 4.2.1] en passant aux faisceaux analytiques associés, puis en appliquant les foncteurs $j^\dagger$, $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}$ et $\mathbb{R}\Gamma(\overline{U}'^{\mathrm{an}}_K, -)$, où $\overline{U}'$ est une compactification de U' sur $\mathcal{V}$.

Montrons maintenant que, sous les hypothèses de 3.8, le morphisme $G^{\mathrm{rig}}_{Y'/X',Z}$ est un isomorphisme. L'hypothèse de quasi-projectivité faite sur X' permet de trouver une immersion $X' \hookrightarrow P$ dans un espace projectif sur $\mathcal{V}$. On peut alors prendre pour $\overline{X}'$ et $\overline{Y}'$ les adhérences schématiques de X' et Y' dans P, et la formule de transitivité précédente ramène à prouver l'assertion pour les couples (Y', P) et (X', P). Celle-ci résulte alors de la proposition 5.5 qui suit, en l'appliquant au complété formel $\hat{P}$ de P et aux sous-schémas formels $\hat{T} = \hat{\overline{X}}'$ et $\hat{T} = \hat{\overline{Y}}'$.

5.5. PROPOSITION. — *Soient $\hat{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, de fibre spéciale P_0, $H \subset P_0$ un sous-schéma fermé, $j : U_0 = P_0 \setminus H \hookrightarrow P_0$ l'immersion ouverte correspondante, $\hat{T} \subset \hat{P}$ un sous-schéma formel fermé, lisse aux points de U_0, de fibre spéciale T_0, $\overline{Z} \subset T_0$ un* *sous-schéma fermé. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_*\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\,j^\dagger(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(\hat{T}_K)}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K})\otimes\Omega^\bullet_{\hat{P}_K}) \longrightarrow \mathbb{R}\,\mathrm{sp}_*\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\,j^\dagger\Omega^\bullet_{\hat{P}_K}$$

est un isomorphisme.

L'énoncé est local sur $\hat{P}$, qu'on suppose donc affine. Si on écrit H comme intersection de diviseurs principaux H_i, le recouvrement de U_0 par les ouverts $U_0 \setminus H_i$ fournit une suite exacte (1.2.2) reliant les foncteurs $j^\dagger$ correspondants, grâce à laquelle on est ramené à prouver la proposition lorsque H est un diviseur principal. Le même argument montre aussi qu'on peut supposer que $T_0 \cap U_0$ est défini dans U_0 par une suite de sections $\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_s$ de $\mathcal{O}_{U_0}$ faisant partie d'un système de coordonnées locales $\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_d$ sur U_0.

Observons alors que, si $\hat{T}'$ est un autre sous-schéma formel fermé de $\hat{P}$ dont la restriction à U_0 coïncide avec celle de $\hat{T}$, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$j^\dagger(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(\hat{T}'_K)}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K})\otimes\Omega^\bullet_{\hat{P}_K}) \xrightarrow{\ \sim\ } j^\dagger(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(\hat{T}_K)}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K})\otimes\Omega^\bullet_{\hat{P}_K}).$$

En effet, on se ramène aussitôt au cas où $\hat{T}' \subset \hat{T}$. Soient alors $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}'$ les idéaux de $\hat{T}$ et $\hat{T}'$ dans $\hat{P}$. Comme, d'après 1.2 (vi), $j^\dagger$ commute aux limites inductives filtrantes, il suffit de vérifier que, pour tout n et tout i, l'homomorphisme canonique

$$j^\dagger\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}/\mathcal{I}'^n,\mathcal{O}_{\hat{P}_K})\otimes\Omega^\bullet_{\hat{P}_K} \longrightarrow j^\dagger\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}/\mathcal{I}^n,\mathcal{O}_{\hat{P}_K})\otimes\Omega^\bullet_{\hat{P}_K}$$

est un isomorphisme. Or le noyau et le conoyau de l'homomorphisme

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}/\mathcal{I}'^n,\mathcal{O}_{\hat{P}_K}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}/\mathcal{I}^n,\mathcal{O}_{\hat{P}_K})$$

sont des $\mathcal{O}_{\hat{P}_K}$-modules cohérents, dont les supports sont contenus dans $]H[$. Le complémentaire de ces supports est alors un voisinage strict de $]U_0[_{\hat{P}}$, d'où l'assertion.

Comme H est principal, on peut prolonger les coordonnées locales $\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_s$ qui définissent $T_0 \cap U_0$ dans U_0 en des sections de l'idéal de T_0 dans P_0, et les coordonnées locales $\bar{t}_{s+1},\dots,\bar{t}_d$ en des sections de $\mathcal{O}_{P_0}$. On relève alors $\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_s$ en des sections $t_1,\dots,t_s$ de $\mathcal{I}$, et $\bar{t}_{s+1},\dots,\bar{t}_d$ en des sections $t_{s+1},\dots,t_d$ de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$. Sur $\hat{U} = \hat{P} \setminus H$, $t_1,\dots,t_d$ sont des coordonnées locales, et $t_1,\dots,t_s$ sont des générateurs de l'idéal $\mathcal{I}$ de $\hat{T}$; de plus, la remarque précédente permet de supposer que $t_1,\dots,t_s$ sont en fait des générateurs de $\mathcal{I}$ sur $\hat{P}$ tout entier.

Pour tout $k \leq s$, et toute suite d'indices $i_1 < \ldots < i_k$, soient $\hat{T}_{i_1\ldots i_k} = V(t_{i_1}\ldots t_{i_k}) \subset \hat{P}$, $\mathcal{I}_{i_1\ldots i_k} = (t_{i_1}\ldots t_{i_k}) \subset \mathcal{O}_{\hat{P}_K}$, et notons

$$\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*\hat{T}_{i_1\ldots i_k}) = \varinjlim_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\hat{P}_K}}(\mathcal{I}^n_{i_1\ldots i_k},\mathcal{O}_{\hat{P}_K}) = \mathcal{O}_{\hat{P}_K}[1/t_{i_1}\ldots t_{i_k}].$$

On dispose d'une suite exacte de pro-objets (voir par exemple [17, II (4.1)])

$$0 \longrightarrow \text{"}\varprojlim_n\text{"}\,\mathcal{I}^n_{1\ldots s} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \prod_{i=1}^{s}\text{"}\varprojlim_n\text{"}\,\mathcal{I}^n_i \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{P}_K} \longrightarrow \text{"}\varprojlim_n\text{"}\,\mathcal{O}_{\hat{P}_K}/\mathcal{I}^n \longrightarrow 0,$$

qui constitue une résolution de "$\varprojlim_n$" $\mathcal{O}_{\hat{P}_K}/\mathcal{I}^n$ à termes acycliques pour $\varinjlim_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\hat{P}_K}}(-, \mathcal{O}_{\hat{P}_K})$. Il s'ensuit que le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(\hat{T}_K)}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K}$ est représenté par le bicomplexe

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet_{\hat{P}_K} \longrightarrow \prod_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*\hat{T}_i) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*\hat{T}_{1\ldots s}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K} \longrightarrow 0,$$

et le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{(\hat{T}_K)}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K} \to \Omega^\bullet_{\hat{P}_K}$ par la projection de ce bicomplexe sur le terme initial. Pour prouver l'énoncé, il suffit par conséquent de montrer que, pour tout $k \geq 1$, et toute suite d'indices $i_1 < \ldots < i_k$, on a

$$\text{(5.5.1)} \qquad \mathbb{R}\,\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, j^\dagger(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K}) = 0.$$

Soit $g_1, \ldots, g_r$ une suite de sections de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$ relevant des générateurs $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_r$ de l'idéal de $\overline{Z}$ dans P_0. Comme $\overline{Z}$ est contenu dans T_0, on peut supposer que la suite des g_α est choisie de telle sorte que l'un des g_α soit égal à l'un des t_{i_β}, par exemple $g_1 = t_{i_1}$. Pour toute suite $\alpha_1 < \ldots < \alpha_h$, notons $U'_{\alpha_1\ldots\alpha_h}$ l'ouvert $D(\bar{g}_{\alpha_1} \ldots \bar{g}_{\alpha_h})$, et $j'_{\alpha_1\ldots\alpha_h} : U'_{\alpha_1\ldots\alpha_h} \hookrightarrow P_0$ l'immersion correspondante. Si E est un faisceau abélien sur $\hat{P}_K$, on dispose alors de la résolution de $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}E$ fournie par la suite exacte (1.2.3)

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}E \longrightarrow E \longrightarrow \prod_\alpha j'^\dagger_\alpha E \longrightarrow \ldots \longrightarrow j'^\dagger_{1\ldots r}E \longrightarrow 0.$$

Comme les modules $\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^n_{\hat{P}_K}$ sont limites inductives filtrantes de $\mathcal{O}_{\hat{P}_K}$-modules cohérents, et que les foncteurs de la forme $j^\dagger$ commutent à ces limites inductives, on voit comme dans la démonstration de 4.2 que, lorsqu'on applique cette résolution à l'un des modules $E = j^\dagger(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^n_{\hat{P}_K})$, la résolution obtenue est à termes acycliques pour $\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_*$. Si on note $U''_{\alpha_1\ldots\alpha_h} = U'_{\alpha_1\ldots\alpha_h} \cap U_0$, et $j''_{\alpha_1\ldots\alpha_h} : U''_{\alpha_1\ldots\alpha_h} \hookrightarrow P_0$, on voit ainsi que le complexe $\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, j^\dagger(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K})$ est représenté par le complexe simple associé au bicomplexe

$$0 \longrightarrow \mathrm{sp}_* j^\dagger(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K}) \longrightarrow \prod_\alpha \mathrm{sp}_* j''^\dagger_\alpha(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K}) \longrightarrow \ldots .$$

Ce bicomplexe peut lui-même être vu comme associé à un tricomplexe, en décomposant la différentielle δ de la résolution (1.2.3) en somme de la différentielle δ' correspondant à l'indice 1 et de la différentielle δ'' correspondant aux indices $2, \ldots, r$. Cela permet de considérer le complexe $\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\, j^\dagger(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K})$ comme le complexe simple associé au morphisme de bicomplexes donné en bidegré (h, n) par

$$\prod_{1<\alpha_1<\ldots<\alpha_h} \mathrm{sp}_* j''^\dagger_{\alpha_1\ldots\alpha_h}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^n_{\hat{P}_K}) \xrightarrow{\delta'} \prod_{1<\alpha_1<\ldots<\alpha_h} \mathrm{sp}_* j''^\dagger_{1\alpha_1\ldots\alpha_h}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^n_{\hat{P}_K}).$$

Pour prouver (5.5.1), il suffit alors de prouver que, pour toute suite $1 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_h$, le morphisme

$$\text{(5.5.2)} \qquad \mathrm{sp}_* j''^\dagger_{\alpha_1\ldots\alpha_h}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K}) \longrightarrow \mathrm{sp}_* j''^\dagger_{1\alpha_1\ldots\alpha_h}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^\bullet_{\hat{P}_K})$$

est un quasi-isomorphisme.

Considérons les diviseurs de P_0 définis par

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_h} = H + V(\bar{g}_{\alpha_1}\cdots\bar{g}_{\alpha_h}), \qquad H'_{\alpha_1\ldots\alpha_h} = H_{\alpha_1\ldots\alpha_h} + V(\bar{g}_1).$$

On a alors des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{sp}_* \, j''^{\dagger}_{\alpha_1\ldots\alpha_h}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}) \simeq \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H_{\alpha_1\ldots\alpha_h}), \qquad \mathrm{sp}_* \, j''^{\dagger}_{1\alpha_1\ldots\alpha_h}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}) \simeq \mathcal{O}_{\hat{P},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}H'_{\alpha_1\ldots\alpha_h}).$$

Posons $\hat{D} = V(t_{i_1}) \subset \hat{P}$. Comme l'image inverse par spécialisation d'un ouvert affine de $\hat{P}$ est un ouvert affinoïde de $\hat{P}_K$, le foncteur sp_* commute aux limites inductives filtrantes. On peut donc écrire, avec les notations de 4.1,

$$\mathrm{sp}_* \, j''^{\dagger}_{\alpha_1\ldots\alpha_h}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^{\bullet}_{\hat{P}_K}) \simeq \mathcal{O}_{\hat{P}}({}^{\dagger}H_{\alpha_1\ldots\alpha_h})(*\hat{D})[1/t_{i_2\ldots i_h}] \otimes \Omega^{\bullet}_{\hat{P},\mathbb{Q}},$$

$$\mathrm{sp}_* \, j''^{\dagger}_{1\alpha_1\ldots\alpha_h}(\mathcal{O}_{\hat{P}_K}(*T_{i_1\ldots i_k}) \otimes \Omega^{\bullet}_{\hat{P}_K}) \simeq \mathcal{O}_{\hat{P}}({}^{\dagger}H'_{\alpha_1\ldots\alpha_h})[1/t_{i_2\ldots i_h}] \otimes \Omega^{\bullet}_{\hat{P},\mathbb{Q}},$$

en observant que t_{i_1} est inversible dans $\mathcal{O}_{\hat{P}}({}^{\dagger}H'_{\alpha_1\ldots\alpha_h})$ puisque $t_{i_1} = g_1$. Comme t_{i_1} fait partie d'un système de coordonnées locales sur $\hat{U}$, $\hat{D}$ est lisse sur $\mathcal{V}$ aux points de $\hat{U}$, et le fait que (5.5.2) soit un isomorphisme résulte du corollaire 4.8 du théorème de comparaison 4.2.

Cet énoncé fournit aussi une variante locale de l'isomorphisme de Gysin (3.8.1) :

5.6. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.8, *soient $X' \hookrightarrow P$ une immersion dans un $\mathcal{V}$-schéma propre et lisse, $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$ des sous-schémas fermés de P dans lesquels X' et Y' soient ouverts, $\overline{X}$, $\overline{Y}$ leurs fibres spéciales, $j_X : X \hookrightarrow \overline{X}$, $j_Y : Y \hookrightarrow \overline{Y}$, $\overline{Z} \subset \overline{Y}$ un sous-schéma fermé tel que $\overline{Z} \cap Y = Z$. On note $\hat{\overline{X}}'$ le complété formel de $\overline{X}'$,* $\mathrm{sp} : \overline{X}'^{\mathrm{an}}_K = \hat{\overline{X}}'_K \to \hat{\overline{X}}'$ *le morphisme de spécialisation. Alors le morphisme* (5.4.2)

$$\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]\overline{Z}[} \, j^{\dagger}_Y \Omega^{\bullet}_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K} \longrightarrow \mathbb{R}\,\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]\overline{Z}[} \, j^{\dagger}_X \Omega^{\bullet}_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}[2r]$$

est un isomorphisme dans $D^{\mathrm{b}}(\hat{\overline{X}}', K)$.

Soient U un ouvert de P tel que X' soit fermé dans U, $j : U_0 \hookrightarrow P_0$ l'immmersion ouverte correspondante entre les fibres spéciales, $i : \overline{X}' \hookrightarrow P$ l'immersion fermée donnée. Rappelons que, comme on l'a vu en 5.4, le foncteur i_{K*} commute aux foncteurs $j^{\dagger}$ et $\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]\overline{Z}[}$ sur $\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K$ et P^{an}_K ; cela permet de calculer sur P^{an}_K et $\hat{P}$. Soit s la codimension de X' dans P. La transitivité du morphisme de Gysin entre complexes de de Rham algébriques fournit un diagramme commutatif sur P^{an}_K

$$\begin{tikzcd}
j^{\dagger}\Omega^{\bullet}_{Y'^{\mathrm{an}}_K} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & j^{\dagger}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Y'_K}(\mathcal{O}_{X'_K})^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^{\bullet}_{X'^{\mathrm{an}}_K}[2r]) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & j^{\dagger}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Y'_K}(\mathcal{O}_{U_K})^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^{\bullet}_{U^{\mathrm{an}}_K}[2r+2s]) \arrow[d] \\
 & j^{\dagger}\Omega^{\bullet}_{X'^{\mathrm{an}}_K}[2r] \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & j^{\dagger}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{X'_K}(\mathcal{O}_{U_K})^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^{\bullet}_{U^{\mathrm{an}}_K}[2r+2s]) \arrow[d] \\
 & & j^{\dagger}\Omega^{\bullet}_{U^{\mathrm{an}}_K}[2r+2s].
\end{tikzcd}$$

Dans la première ligne, la flèche de droite se déduit du morphisme de Gysin algébrique $\Omega^{\bullet}_{X'_K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{X'_K}(\mathcal{O}_{U_K}) \otimes \Omega^{\bullet}_{U_K}[2s]$ en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Y'_K}$, en passant aux faisceaux analytiques associés, et en appliquant le foncteur $j^{\dagger}$, vu comme associant un faisceau sur P_K^{an} à un faisceau sur U_K^{an}; qu'on obtienne encore un quasi-isomorphisme après passage aux faisceaux analytiques se voit comme en 5.3. Comme en 5.4, on peut dans ce diagramme remplacer respectivement U, X' et Y' par P, $\overline{X}'$ et $\overline{Y}'$. Si on applique ensuite le foncteur $\mathbb{R}\mathrm{sp}_* \circ \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]\overline{Z}[}$, la lissité de P sur $\mathcal{V}$ entraîne d'après 5.5 que, dans la colonne de droite, la flèche du bas et la flèche composée deviennent des isomorphismes. Par suite, toutes les flèches du diagramme obtenu sont des isomorphismes, d'où le corollaire.

Remarque. — Si l'on prend $\overline{Z} = \overline{Y}$, le corollaire fournit un isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{sp}_* j^{\dagger}\Omega^{\bullet}_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]\overline{Y}[} j^{\dagger}\Omega^{\bullet}_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K}[2r]$$

dans $D^{\mathrm{b}}(\overline{X}, K)$. On peut voir cet isomorphisme comme l'analogue en cohomologie rigide du théorème de pureté cohomologique en cohomologie étale [SGA 4, XIX, th. 3.2].

5.7. COROLLAIRE. — *Soient X un k-schéma lisse, et $Z \subset X$ un sous-schéma intègre, dont toutes les composantes irréductibles sont de codimension $\geq d$ dans X. Alors*:

(i) *Pour tout $i < 2d$, on a $H^i_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) = 0$.*

(ii) *La dimension sur K de l'espace $H^{2d}_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$ est égale au nombre de composantes irréductibles géométriques de codimension d de Z.*

Grâce à 1.8, il suffit de prouver les deux assertions lorsque K est le corps des fractions d'un anneau de Cohen de k, et on peut pour cela faire une extension finie de k. On procède par récurrence sur $\dim(Z)$. Si $\dim(Z) = 0$, on peut grâce à 2.4 supposer que Z est à support ponctuel et X affine. Quitte à faire une extension finie de k, on peut de plus supposer que Z est égal à $\mathrm{Spec}(k)$, et l'énoncé résulte alors de 3.8.

Dans le cas général, on peut d'abord faire une extension finie de k assurant que Z_{red} est absolument réduit, et remplacer Z par Z_{red}. De même, on peut supposer que toutes les composantes irréductibles de Z sont absolument irréductibles. Comme la suite exacte d'excision (2.5.1) permet de retirer de X un sous-ensemble fermé de codimension $> d$, on peut ensuite se ramener au cas où Z est lisse, puis, grâce à 2.4, au cas où X est affine. Enfin, comme en 3.7, on se réduit au cas où l'immersion fermée $Z \hookrightarrow X$ se relève en une immersion fermée $Z' \hookrightarrow X'$ entre deux $\mathcal{V}$-schémas affines et lisses. L'isomorphisme de Gysin (3.8.1) entraîne alors l'assertion (i), et ramène la seconde à l'assertion analogue pour $H^0_{\mathrm{rig}}(Z/K)$, prouvée en [6, (3.2.8)].

Appendice, par A. J. de Jong

A.1. It was remarked by the author of this appendix that a proof of the implication $(\mathrm{b})_{n-1}$ and $(\mathrm{a})_n \Rightarrow (\mathrm{b})_n$ in 3.7 can be given without proving the Gysin isomorphism of Theorem 3.8. Instead, one uses a little bit more geometry to reduce the assertion to a computation working on the tubes themselves. It is the purpose of this appendix to explain how this can be done.

A.2. We consider pairs (X, Z), where X is smooth over k, and $Z \subset X$ is a closed subscheme smooth of pure dimension n over k. The arguments given in the first paragraph of section 3.7 show that it suffices to prove $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$ is finite for such pairs (X, Z). In addition similar arguments, using $(\mathrm{b})_{n-1}$, give the following assertions :

(i) If $Z = Z_1 \amalg Z_2 \amalg \ldots \amalg Z_r$, then it suffices to prove 3.1 for the pairs $(X, Z_1), \ldots, (X, Z_r)$.

(ii) If $X' \subset X$ is open, $Z' = Z \cap X'$ and $\dim(Z \setminus Z') < n$, then 3.1 for (X, Z) is equivalent to 3.1 for (X, Z').

(iii) If $\varphi : X' \to X$ is finite and flat and $Z' = \varphi^{-1}(Z)$, then 3.1 for (X', Z') implies 3.1 for (X, Z).

(iv) We may replace k by a finite extension of k, whilst trying to prove 3.1 for a pair (X,Z). In particular, we can make geometric constructions on the algebraic closure of k, choose a finite extension k' of k on which they are defined, and it suffices to prove 3.1 for the pair (X', Z') deduced from (X, Z) by base change from k to k'.

A remark on the proof of (iii). We may by (ii) shrink X to get it affine. We use 3.6 and 2.4, and note that the retraction of 3.6 is compatible with taking (affine) open subsets.

A.3. We will argue by induction on $\dim X$. The case $\dim X = \dim Z = n$ is assertion $(\mathrm{a})_n$. Thus we may assume that $\dim X > \dim Z$. Further, using (i) and (ii) above we may always assume that both X and Z are geometrically irreducible. Finally, we may assume that $\dim X \geq 2$, since the case $\dim X = 1$, $\dim Z = 0$ is known by [23].

A.4. We may assume there exists a divisor D in X, with $Z \subset D$, and such that D is smooth over k. Indeed, we may (for the moment) assume that X is affine and the ideal of Z in X is generated by $f_1, \ldots, f_c$, where c is the codimension of Z in X. We take $D = V(f_1) \subset X$; it is smooth along Z. If it is not smooth, we remove $\mathrm{Sing}(D)$ from X.

A.5. (Compare [SGA 4, exposé XI] for the arguments that follow.) We may assume there is a normal projective variety $\overline{X}$ over k such that $X \subset \overline{X}$. Enlarging X if necessary, we may assume that $\overline{X} \setminus X$ has codimension at least 2 in $\overline{X}$. Remark that this may involve enlarging Z and D, but we may still assume both Z and D to be smooth. Let us take a projective embedding $\overline{X} \hookrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}^N$, given by a high power of a very ample line bundle on $\overline{X}$. By a Bertini theorem, we may choose a linear subspace $L_0 \subset \mathbb{P}$ such that $C := L_0 \cap \overline{X}$ is an irreducible smooth projective curve, $C \subset X$, C intersects D transversally and C meets Z. (To do this we might have to extend k a little bit.) The curve C has genus at least 2. Let G be the Grassmanian parametrizing linear subspaces of $\mathbb{P}$ of dimension equal to $\dim L_0$. Choose a general linear subspace $L_1 \subset L_0$ of dimension equal to $\dim L_0 - 1$. Let $W \subset G$ be the set of $L \in G$ such that $L_1 \subset L$. Then $L_0 \in W$ and $W \simeq \mathbb{P}^{\dim X - 1}$. Consider the incidence variety $T = \{(L, x) \mid L \in W,\ x \in \overline{X},\ x \in L\}$. The morphism $q : T \to \overline{X}$ blows up in a finite number of points of X not on D, hence it suffices to prove 3.1 for the pair $(q^{-1}(X),$ $q^{-1}(Z))$. The morphism $p : T \to W$ has the fibre C over the point $L_0 \in W$. It follows (compare [19, 2.8]) that there is an open neighbourhood $U \subset W$ of L_0 such that $p^{-1}(U) \subset q^{-1}(X)$, $p^{-1}(U) \to U$ is a family of smooth curves, the morphism $q^{-1}(D) \cap p^{-1}(U) \to U$ is finite étale, and $q^{-1}(Z) \cap p^{-1}(U)$ is not empty. Therefore we need only prove 3.1 for pairs as described below.

A.6. Here we have X, D, Z, and a smooth projective morphism $f : X \to Y$ of relative dimension 1 such that $f|_D : D \to Y$ is finite étale. The fibres of f have genus at least 2. Let $Y' \to Y$ be a finite étale Galois covering such that the covering $D \to Y$ splits over Y'. Thus the divisor $D \times_Y Y'$ in $X' := X \times_Y Y'$ is a union of sections. By (iii) above it suffices to prove 3.1 for the pair (X', Z'). Using (i), we see that we are reduced to cases where $D = \sigma(Y)$ is the image of a section $\sigma : Y \to X$. This means that there is a closed subscheme $Z_1 \subset Y$ such that $Z = \sigma(Z_1)$.

Let $\ell \geq 3$ be a prime number not equal to p. We may assume that there is an abelian level ℓ structure α on the family of curves X over Y. Indeed, to find such a level structure we need only to do a finite étale base change $Y' \to Y$, but this is allowed in view of (iii).

A.7. Let ${}_\ell M_{g,1}$ be the fine moduli scheme over $\mathbb{Z}$ parametrizing 1-pointed smooth projective curves of genus $g = g(C)$ with level ℓ-structure. Consider the period morphism $Y \to {}_\ell M_{g,1}$ corresponding to (X, σ, α) over Y. I claim that we can find (after shrinking Y) a smooth algebraic lift of Y over W such that this period morphism extends. We may, using (ii), take out any closed subset of Y which does not contain Z_1. Thus we may assume Y affine and lift it in some way to Y' affine and smooth over W using Elkik's theorem. Look at the equations of Y seen as a closed subvariety of $Y \times {}_\ell M_{g,1}$ via the graph morphism $\Gamma : Y \to Y \times {}_\ell M_{g,1}$. We can find an affine open $U \subset Y \times {}_\ell M_{g,1}$ such that $\Gamma(Z_1) \cap U$ is not empty and such that $\Gamma(Y) \cap U$ is given by exactly $3g - 3$ equations $f_i = 0$ with $f_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. (Use that ${}_\ell M_{g,1}$ is smooth.) We can lift U to an affine subvariety U' of $Y' \times {}_\ell M_{g,1}$, perhaps after shrinking U a little. We lift the elements f_i to elements $f_i' \in \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'})$. Let Y'' be the zero set in U' of these elements. Then $Y'' \otimes_W k$ is equal to an open subvariety of

$\Gamma(Y)$ having a nonempty intersection with $\Gamma(Z_1)$. Thus we are reduced to the case where there is an algebraic lift $(Y', X', f', \sigma')/W$ of the system $(Y, X, f, \sigma)/k$.

A.8. Take a closed point $y \in Z_1$ and choose a finite morphism $\varphi_y : X_y \to \mathbb{P}^1_{\kappa(y)}$ which is étale at $\sigma(y) \in X_y$. We may choose φ_y to be given by two sections $s_{1,y}$ and $s_{2,y}$ of the line bundle $\mathcal{O}_{X_y}(\sigma(y))^{\otimes N}$ for some large N. We can lift $s_{i,y}$ to sections s_i of the line bundle $\mathcal{O}_{X'}(\sigma'(Y'))^{\otimes N}$ over X'. The common zero locus of these sections maps to a closed subset of Y' not containing the point y. Thus s_1, s_2 will define a morphism $\varphi : X' \to \mathbb{P}^1 \times Y'$, at least after shrinking Y' a bit (such shrinking is allowed as long as we have $y \in Y'$ for example). Similar arguments show that, after shrinking Y', φ is a finite morphism and étale along $\sigma'(Y') \subset X'$. In addition, after changing coordinates on $\mathbb{P}^1 \times Y'$, we may assume that $\varphi \circ \sigma'$ is equal to the section ∞ of $\mathbb{P}^1_{Y'}$.

We now want to show that φ defines a canonical isomorphism

$$H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) \simeq H^*_{\infty\times Z_1,\mathrm{rig}}(\mathbb{P}^1\times Y/K).$$

This will result from a general invariance property proved in A.10.

A.9. We consider the following situation : X is a k-scheme of finite type, $Z \subset X$ is a closed subscheme, $U = X \setminus Z$, $j : U \hookrightarrow X$ is the given immersion, and $X \hookrightarrow \hat{P}$ is a closed immersion into a p-adic formal W-scheme. Let I be a filtering ordered set, and let $\{V_\eta\}_{\eta\in I}$ be a decreasing family of strict neighbourhoods of $]U[_{\hat{P}}$ in $]X[_{\hat{P}}$ such that, for any affinoid subspace $W \subset\,]X[_{\hat{P}}$, the intersections $W \cap V_\eta$ are cofinal among the intersections $W \cap V$, where V runs among all strict neighbourhoods of $]U[_{\hat{P}}$ in $]X[_{\hat{P}}$. An example of such a family is the following : recall that, for $\eta \in \sqrt{|K^*|}$, with $\eta < 1$, close to 1, the closed tube $[Z]_{\hat{P},\eta}$ of radius η is the open subset of $\hat{P}_K$ defined locally by the conditions $|f_i(x)| \leq \eta$, where the f_i's are liftings on $\hat{P}$ of local equations for Z in the special fiber P_0 of $\hat{P}$; then, the open subsets $V_\eta = \,]X[_{\hat{P}} \setminus [Z]_{\hat{P},\eta}$ satisfy the previous conditions [5, (1.2.2)].

For any $\eta \in I$, we denote by $j_\eta : V_\eta \hookrightarrow\,]X[_{\hat{P}}$ the given immersion. If E is an abelian sheaf on $]X[_{\hat{P}}$, we define

$$\underline{\Gamma}_{]Z[,\eta}(E) = \mathrm{Ker}\,(E \longrightarrow j_{\eta *}\, j_\eta^* E).$$

Thanks to our hypothesis on the family $\{V_\eta\}$, we have canonical isomorphisms

$$\text{(A.9.1)} \qquad \varinjlim_{\eta} j_{\eta *}\, j_\eta^* E \xrightarrow{\ \sim\ } j^\dagger E, \quad \varinjlim_{\eta} \underline{\Gamma}_{]Z[,\eta}(E) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}(E).$$

For some $\eta \in I$, let $i : U' \subset\,]X[_{\hat{P}}$ be the inclusion of an open subset such that (V_η, U') is an admissible covering of $]X[_{\hat{P}}$. It follows from the definition that, for any abelian sheaf E, the canonical morphism $\underline{\Gamma}_{]Z[,\eta}(E) \to i_* i^* \underline{\Gamma}_{]Z[,\eta}(E)$ is an isomorphism. Checking separately on V_η and U', we also see that the sheaves $R^q i_* i^* \underline{\Gamma}_{]Z[,\eta}(E)$ vanish for $q \geq 1$. We thus get a canonical isomorphism

(A.9.2) $$\underline{\Gamma}_{]Z[,\eta}(E) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}i_* i^* \underline{\Gamma}_{]Z[,\eta}(E).$$

A.10. PROPOSITION. — *Let*

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[r, hook, "j_2"] \arrow[d] & \overline{X}_2 \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d, "v"] & \hat{P}_2 \arrow[d, "u"] \\ Z \arrow[r, hook] \arrow[ur] & X_1 \arrow[r, hook, "j_1"] & \overline{X}_1 \arrow[r, hook, "i_1"] & \hat{P}_1 \end{tikzcd}$$

be a commutative diagram with the following properties : j_1 and j_2 are open immersions over k, i_1 and i_2 are closed immersions into formal W-schemes, v is proper, Z is a closed subscheme of X_1 over which v has a section, u is étale in a neighbourhood of Z, and u induces a quasi-compact morphism $u_K :]\overline{X}_2[_{\hat{P}_2} \to]\overline{X}_1[_{\hat{P}_1}$. Let $\overline{Z}_1 \subset \overline{X}_1$, $\overline{Z}_2 \subset \overline{X}_2$ be the scheme theoretic closures of Z in $\overline{X}_1$ and $\overline{X}_2$. There exists a canonical isomorphism on $]\overline{X}_1[_{\hat{P}_1}$

$$\mathbb{R}u_{K*}(\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_2[} \circ j_2^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}_2[}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1[} \circ j_1^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}_1[}.$$

For $\lambda \in \sqrt{|K^*|}$, $\lambda < 1$, close to 1, let $U_\lambda =]\overline{X}_1[_{\hat{P}_1} \setminus [\overline{X}_1 \setminus X_1]_{\hat{P}_1,\lambda}$, $U'_\lambda = u_K^{-1}(U_\lambda) \subset]\overline{X}_2[_{\hat{P}_2}$. Thanks to (A.9.1), we may use the family $\{U_\lambda\}$ of strict neighbourhoods of $]\overline{X}_1 \setminus X_1[_{\hat{P}_1}$ to compute $j_1^\dagger$. Note that, as shown in the proof of 2.4 (i), we do not change the functor $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_2[} \circ j_2^\dagger$ if we replace X_2 by another open subset of $\overline{X}_2$ in which Z_2 is closed. Therefore, we may assume that $X_2 = v^{-1}(X_1)$, hence we may also use the family $\{U'_\lambda\}$ to compute $j_2^\dagger$. For $\eta, \mu \in \sqrt{|K^*|}$, $\eta, \mu < 1$, close to 1, let $W_\eta = [\overline{Z}_1]_{\hat{P}_1,\eta}$, $V_\eta =]\overline{X}_1[_{\hat{P}_1} \setminus W_\eta$, $W_{\eta,\mu} = [\overline{Z}_2]_{\hat{P}_2,\mu} \cap u_K^{-1}([\overline{Z}_1]_{\hat{P}_1,\eta})$, $V_{\eta,\mu} =]\overline{X}_2[_{\hat{P}_2} \setminus W_{\eta,\mu}$. Again, (A.9.1) holds for the family $\{V_\eta\}$ (resp. $\{V_{\eta,\mu}\}$) of strict neighbourhoods of $]\overline{X}_1 \setminus \overline{Z}_1[_{\hat{P}_1}$ (resp. $]\overline{X}_2 \setminus \overline{Z}_2[_{\hat{P}_2}$), so we may use it to compute $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1[}$ (resp. $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_2[}$).

As u_K is quasi-compact, $R^q u_{K*}$ commutes with direct limits for all q, and it suffices to prove that, for all $\eta \in \sqrt{|K^*|}$, $\eta < 1$, there exists $\mu_0 \in \sqrt{|K^*|}$, $\mu_0 < 1$, such that for all $\mu \geq \mu_0$ in $\sqrt{|K^*|}$, $\mu < 1$, all k and all $q \geq 1$, we have

$$R^q u_{K*}(\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_2[,\eta,\mu} \circ j_2^\dagger \Omega^k_{]\overline{X}_2[}) = 0,$$

and compatible isomorphisms

$$u_{K*}(\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_2[,\eta,\mu} \circ j_2^\dagger \Omega^k_{]\overline{X}_2[}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1[,\eta} \circ j_1^\dagger \Omega^k_{]\overline{X}_1[}.$$

Because u is étale around Z, and $\overline{Z}_2 \to \overline{Z}_1$ is proper, it follows from [5, (1.3.5)] that u_K induces an isomorphism between strict neighbourhoods of $]Z[_{\hat{P}_2}$ and $]Z[_{\hat{P}_1}$ in $]\overline{Z}_2[_{\hat{P}_2}$ and $]\overline{Z}_1[_{\hat{P}_1}$. More precisely, if we fix $\eta \in \sqrt{|K^*|}$, $\eta < 1$, then there exists $\mu_0 \in \sqrt{|K^*|}$, $\mu_0 < 1$, such that, for any $\mu \in \sqrt{|K^*|}$, with $\mu_0 \leq \mu < 1$, the morphism

$$W_{\eta,\mu} \cap U'_\lambda \longrightarrow W_\eta \cap U_\lambda$$

is an isomorphism for all $\lambda \in \sqrt{|K^*|}$ close enough to 1 [5, (1.3.5.1)]. We fix such a μ, and we choose $\eta', \mu' \in \sqrt{|K^*|}$ such that $\eta < \eta' < 1$, $\mu < \mu' < 1$, and such that $W_{\eta',\mu'} \cap U'_\lambda \xrightarrow{\sim} W_{\eta'} \cap U_\lambda$ for λ close to 1. We observe that the open subsets $(V_{\eta,\mu}, W_{\eta',\mu'})$ define an admissible covering of $]\overline{X}_2[_{\hat{P}_2}$; similarly, $(V_{\eta,}, W_{\eta'})$ is an admissible covering of $]\overline{X}_1[_{\hat{P}_1}$. Thanks to (A.9.2), it is therefore sufficient to prove the above assertions for the restriction $u_K : W_{\eta',\mu'} \to W_{\eta'}$. For λ close to 1, u_K induces isomorphisms $W_{\eta',\mu'} \cap U'_\lambda \xrightarrow{\sim} W_{\eta'} \cap U_\lambda$ and $W_{\eta,\mu} \cap U'_\lambda \xrightarrow{\sim} W_\eta \cap U_\lambda$. So it finally suffices to prove that, if $j_\lambda : W_{\eta'} \cap U_\lambda \hookrightarrow W_{\eta'}$ is the natural inclusion, the canonical morphism

$$\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1[,\eta} \circ j_1^\dagger \Omega^k_{]\overline{X}_1[} \longrightarrow \mathbb{R}j_{\lambda *} j_\lambda^* (\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1[,\eta} \circ j_1^\dagger \Omega^k_{]\overline{X}_1[})$$

is an isomorphism, and similarly on $W_{\eta',\mu'}$. If we choose λ' such that $\lambda < \lambda' < 1$, the subsets $(W_{\eta'} \cap U_\lambda, W_{\eta'} \cap [\overline{X}_1 \setminus X_1]_{\hat{P}_1,\lambda'})$ give an admissible covering of $W_{\eta'}$, and our last claim follows from the fact that the restriction of $j_1^\dagger \Omega^k_{]\overline{X}_1[}$ to $[\overline{X}_1 \setminus X_1]_{\hat{P}_1,\lambda'}$ is 0.

A.11. Let $\overline{Y}'$ be a compactification of Y', and $\overline{X}'$ a compactification of X' such that the morphism φ extends as a morphism $\bar{\varphi} : \overline{X}' \to \mathbb{P}^1 \times \overline{Y}'$. We apply the previous proposition to the formal completions $\hat{P}_2$ and $\hat{P}_1$ of $\overline{X}'$ and $\mathbb{P}^1 \times \overline{Y}'$, to their reductions $\overline{X}_2 = \overline{X}$ and $\overline{X}_1 = \mathbb{P}^1 \times \overline{Y}$, with open subschemes X and $\mathbb{P}^1 \times Y$, and to the closed subscheme $\infty \times Z_1 \subset \mathbb{P}^1 \times Y$. Taking sections on $P^{\mathrm{an}}_{2,K}$ yields an isomorphism

$$H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) \simeq H^*_{\infty\times Z_1,\mathrm{rig}}(\mathbb{P}^1 \times Y/K),$$

so that our problem is reduced to the case $X = \mathbb{P}^1 \times Y$, $Z = \infty \times Z_1$.

We may now assume that $X' = \mathbb{P}^1 \times Y'$, $\overline{X}' = \mathbb{P}^1 \times \overline{Y}'$, $\overline{Z} = \infty \times \overline{Z}_1$. We denote by $p : \overline{X}' \to \overline{Y}'$ the projection morphism, and by $p^{\mathrm{an}} : \overline{X}'^{\mathrm{an}}_K \to \overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K$ the corresponding morphism between the associated rigid spaces. For $\alpha, \beta \in \sqrt{|K^*|}$, $\alpha < 1$, $\beta < 1$, let $U_\alpha = \overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K \setminus]\overline{Y} \setminus Y[_\alpha$, $U'_\alpha = \mathbb{P}^1 \times U_\alpha$, $V_\beta = \overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K \setminus]\overline{Z}_1[_\beta$, $V'_\beta = \mathbb{P}^1 \times \mathrm{V}_\beta$. Thanks to (A.9.1), we may use the system of strict neighbourhoods $\{U_\alpha\}$ (resp. $\{U'_\alpha\}$, $\{V_\beta\}$, $\{V'_\beta\}$) of $]Y[$ (resp. $]X[$, $]\overline{Y} \setminus \overline{Z}_1[$, $]\mathbb{P}^1 \times (\overline{Y} \setminus \overline{Z}_1)[$) to compute the functor $j_Y^\dagger$ (resp. $j_X^\dagger$, $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1[}$, $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\mathbb{P}^1\times\overline{Z}_1[}$). Since p is proper, the morphism p^{an} is quasi-compact, hence the functors $R^q p^{\mathrm{an}}_*$ commute with direct limits. Therefore, we have $\mathbb{R}p^{\mathrm{an}}_* \circ j_X^\dagger = j_Y^\dagger \circ \mathbb{R}p^{\mathrm{an}}_*$ and similar for $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\mathbb{P}^1\times\overline{Z}_1[}$ and $\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}_1[}$. Let x be the standard coordinate on $\mathbb{P}^1$. Put

$$W_\eta = \{ v \in \mathbb{P}^1 \mid \eta \geq |x(v)| \}, \quad W'_\eta = W_\eta \times \overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K, \quad j_\eta : W'_\eta \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K,$$

for $\eta > 1$, $\eta \in \sqrt{|K^*|}$. Note that $]\overline{Z}[=]\infty \times \overline{Z}_1[=]\mathbb{P}^1 \times \overline{Z}_1[\cap]\infty \times \overline{Y}[$. As $]\infty \times \overline{Y}[=]\infty[\times \overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K$, this implies that

$$\underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[} j_X^\dagger \Omega^\bullet_{\overline{X}'^{\mathrm{an}}_K} \simeq j^\dagger_{\mathbb{P}^1\times Y} \underline{\Gamma}^\dagger_{]\mathbb{P}^1\times\overline{Z}_1[}\big(\Omega^\bullet_{\mathbb{P}^1\times\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K} \to \varinjlim_{\eta\to 1} j_{\eta *}\Omega^\bullet_{W'_\eta}\big).$$

We are done if we show that

$$\mathbb{R}p^{\mathrm{an}}_*\big(\Omega^\bullet_{\mathbb{P}^1\times\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K} \to \varinjlim_{\eta\to 1} j_{\eta *}\Omega^\bullet_{W'_\eta}\big) \simeq \Omega^\bullet_{\overline{Y}'^{\mathrm{an}}_K}[-2].$$

Indeed, by the commutation relations between $j^\dagger$ and $\mathbb{R}p_*$ above, this would show that

$$H^*_{\infty\times Z_1,\mathrm{rig}}(\mathbb{P}^1\times Y/K) \;\simeq\; H^{*+2}_{Z_1,\mathrm{rig}}(Y/K),$$

and we would conclude by our induction hypothesis (see A.3).

It is well known that $\mathbb{R}p_*^{\mathrm{an}}$ of the de Rham complex on $\mathbb{P}^1 \times \overline{Y}{}'^{\mathrm{an}}_K$ equals the complex $\Omega^\bullet_{\overline{Y}{}'^{\mathrm{an}}_K} \oplus \Omega^\bullet_{\overline{Y}{}'^{\mathrm{an}}_K}[-2]$. Here the first part comes from $p_*^{\mathrm{an}}\Omega^\bullet_{\mathbb{P}^1\times\overline{Y}{}'^{\mathrm{an}}_K} \simeq \Omega^\bullet_{\overline{Y}{}'^{\mathrm{an}}_K}$. Moreover the terms $R^i p_*^{\mathrm{an}} j_{\eta,*}\Omega^j_{W'_\eta}$ are zero for $i > 0$, as the morphism $W'_\eta \to \overline{Y}{}'^{\mathrm{an}}_K$ is Stein. Hence also the limit of these terms. Therefore, it suffices to show that the map

$$\Omega^\bullet_{\overline{Y}{}'^{\mathrm{an}}_K} \longrightarrow p_*^{\mathrm{an}}\big(\varinjlim_{\eta\to 1} j_{\eta,*}\Omega^\bullet_{V_\eta}\big)$$

is an isomorphism. By considering the usual filtration on the de Rham complex this reduces to a statement on the relative de Rham complex. This statement amounts to the assertion that if ω is a relative 1-form on some V_η, then $\omega = dg$ for some function g defined on $V_{\eta'}$ with some possibly smaller η'. This can be seen by explicitely integrating ω.

Bibliographie

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer-Verlag (1972-73).

[1] F. Baldassarri, B. Chiarellotto, *Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients*, in *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry*, ed. by V. Cristante, W. Messing, Perspectives in Math. **15**, Academic Press (1994).

[2] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p* > 0, Lecture Notes in Math. **407**, Springer-Verlag (1974).

[3] P. Berthelot, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p*, Journées d'analyse *p*-adique (1982), in *Introduction aux cohomologies p-adiques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23**, p. 7-32 (1986).

[4] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles*, in *Cohomologie p-adique*, Astérisque **119-120**, p. 17-49 (1984).

[5] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Première partie (version provisoire 1991), Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[6] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, en préparation.

[7] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathscr{D}$-modules*, Proc. Conf. *p-adic Analysis* (Trento 1989), Lecture Notes in Math. **1454**, p. 78-124, Springer-Verlag (1990).

[8] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Scient. École Norm. Sup. **29**, p. 185-272 (1996).

[9] P. Berthelot, A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes **21**, Princeton University Press (1978).

[10] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Grundlehren des math. Wissenschaften **261**, Springer-Verlag (1984).

[11] G. Christol, Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III*,

preprint (1995).

[12] R. Elkik, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Scient. École Norm. Sup. **6**, p. 553-604 (1973).

[13] J.-Y. Etesse, B. Le Stum, *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I. Interprétation cohomologique*, Math. Annalen **296**, p. 557-576 (1993).

[14] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES **29**, p. 95-103 (1966).

[15] A. Grothendieck, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes* (IHES, Décembre 1966), notes by J. Coates and O. Jussila, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland (1968).

[16] L. Gruson, M. Raynaud, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. **13**, p. 1-89 (1971).

[17] R. Hartshorne, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S. **45**, p. 5-99 (1976).

[18] C. Huyghe, *Construction et étude de la transformation de Fourier des $\mathscr{D}$-modules arithmétiques*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes (1995).

[19] A.J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, preprint 916, University Utrecht (1995), à paraître aux Publ. Math. IHES.

[20] R. Kiehl, *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Invent. Math. **2**, p. 256-273 (1967).

[21] R. Kiehl, *Die de Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper*, Publ. Math. IHES **33**, p. 5-20 (1967).

[22] P. Monsky, G. Washnitzer, *Formal cohomology : I*, Annals of Math. **88**, p. 181-217 (1968).

[23] P. Monsky, *Formal cohomology : II. The cohomology sequence of a pair*, Annals of Math. **88**, p. 218-238 (1968).

[24] P. Monsky, *Formal cohomology : III. Fixed point theorems*, Annals of Math. **93**, p. 315-343 (1971).

[25] P. Monsky, *One dimensional formal cohomology*, Actes du Congrès International de Nice (1970), t. **1**, p. 451-456, Gauthier-Villars (1971).

[26] P. Monsky, *Finiteness of de Rham cohomology*, Amer. Journal of Math. **94**, p.237-245 (1972).

[27] Nagata, *Embedding of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. **2**, p. 1-10 (1962).

[28] M. van der Put, *The cohomology of Monsky-Washnitzer*, in *Introduction aux cohomologies p-adiques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 23, p. 7-32 (1986).

[29] M. Raynaud, *Géométrie analytique rigide, d'après Tate, Kiehl, …*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **39/40**, p. 319-327 (1974).