$\mathscr{D}$-modules arithmétiques II.

Descente par Frobenius

Pierre BERTHELOT [*]
(IRMAR, Université de Rennes)

Introduction 2

1. $\mathscr{D}$-modules à droite 7

1.1. Interprétation infinitésimale des $\mathscr{D}$-modules à droite ... 8
1.2. Action par l'opérateur adjoint ... 16
1.3. Isomorphismes de transposition ... 23

2. Théorèmes de descente 27

2.1. Foncteur image inverse ... 28
2.2. Élévation du niveau par Frobenius ... 33
2.3. Descente par Frobenius ... 42
2.4. Cas des $\mathscr{D}$-modules à droite ... 52
2.5. Un foncteur quasi-inverse ... 55
2.6. Relation avec la descente de Cartier ... 61

3. Théorèmes de commutation à l'action de Frobenius 63

3.1. Extension de l'anneau d'opérateurs ... 64
3.2. Changement de base et image inverse extraordinaire ... 66
3.3. Produits tensoriels interne et externe ... 70
3.4. Image directe ... 72
3.5. Foncteur dual ... 76

4. F-$\mathscr{D}^\dagger$-modules 77

4.1. Descente des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathcal{X}}$-modules ... 77
4.2. Descente des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$-modules ... 82
4.3. Action de Frobenius sur la cohomologie de de Rham ... 86
4.4. Dimension homologique ... 89
4.5. Descente des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules ... 94
4.6. Relations avec les F-isocristaux ... 102

Appendice : Filtration m-PD-adique 110

Bibliographie 116

[*] Pendant la préparation de cet article, l'auteur a bénéficié du soutien du programme TMR de la Communauté Européenne, dans le cadre du réseau *Arithmetic Algebraic Geometry*.

Introduction

Dans cet article, nous poursuivons l'étude de la théorie des $\mathscr{D}$-modules sur des bases « arithmétiques » (en caractéristique p, en inégale caractéristique, ...), commencée dans [5]. Notre objectif est ici d'analyser certaines propriétés spécifiques aux $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-schémas, ou aux schémas formels sur une base p-adique, liées à l'action de Frobenius.

Pour un schéma X propre et lisse sur un corps parfait k de caractéristique p, une différence essentielle entre la cohomologie cristalline et la cohomologie ℓ-adique pour $\ell \neq p$ se situe au niveau de l'action de Frobenius : sur les groupes $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell)$, c'est un isomorphisme, alors que c'est seulement une isogénie sur les groupes $H^i_{\text{cris}}(X/W(k), \mathcal{O}_{X/W})$. Bien sûr, ce comportement particulier n'est pas un défaut, mais est au contraire à la base de nombreuses applications spécifiques à la cohomologie cristalline, et est en réalité l'une des propriétés qui en font tout l'intérêt.

Nous examinons ici une propriété de même nature, au niveau des catégories de coefficients : alors que l'image inverse par le morphisme de Frobenius est une équivalence de la catégorie des faisceaux étales sur X avec elle-même [SGA 4, VIII, 1.1], il n'en est pas de même pour la catégorie des cristaux. Le premier résultat qui met en évidence ce type de phénomène est probablement le théorème classique de Cartier ([14], [15]) sur la descente par Frobenius des $\mathcal{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle : si S est un schéma de caractéristique p, X un S-schéma lisse, $F : X \to X'$ le morphisme de Frobenius de X relativement à S, l'image inverse $\mathscr{E} = F^*\mathscr{E}'$ d'un $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathscr{E}'$ est munie d'une connexion intégrable canonique, qui est à p-courbure nulle, et le foncteur F^* établit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$-modules et celle des $\mathcal{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle [29, th. 5.1].

Lorsque $\mathscr{E}'$ est lui-même muni d'une connexion intégrable ∇', l'image inverse de ∇' par F n'est autre que la connexion canonique à p-courbure nulle de $\mathscr{E}$. On pourrait donc avoir l'impression que toute information relative à ∇' a été perdue en prenant l'image inverse par F. Une conséquence des résultats de cet article est qu'il n'en est rien. Pour garder trace de la connexion ∇', il faut utiliser la famille de faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{(m)}_X$ construite dans [5]. Rappelons que le faisceau $\mathscr{D}^{(0)}_X$ est engendré librement sur $\mathcal{O}_X$ par les dérivations, que la donnée d'une structure de $\mathscr{D}^{(0)}_X$-module à gauche sur un $\mathcal{O}_X$-module équivaut à celle d'une connexion intégrable, et que les faisceaux $\mathscr{D}^{(m)}_X$ forment un système inductif dont la limite est le faisceau $\mathscr{D}_X$ des opérateurs différentiels usuels [EGA IV, (16.8.1)]. Dans la présente situation, nous montrerons que la structure de $\mathscr{D}^{(0)}_{X'}$-module à gauche de $\mathscr{E}'$ permet de munir $F^*\mathscr{E}'$ d'une structure naturelle de $\mathscr{D}^{(1)}_X$-module à gauche, et notre théorème de descente 2.3.6 entraînera que le foncteur F^* induit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}^{(0)}_{X'}$-modules à gauche et celle des $\mathscr{D}^{(1)}_X$-modules à gauche. C'est cet énoncé qu'on peut considérer comme l'analogue cristallin (de caractéristique p) du théorème d'invariance par F^* du topos étale.

Le théorème de descente par Frobenius 2.3.6, qui est au cœur de cet article, se situe dans un contexte plus général qui permet de remonter de la caractéristique p à une situation d'inégales caractéristiques. Nous nous plaçons en effet sur un schéma S annulé par une puissance de p, sur lequel est donné un idéal $\mathfrak{a}$ contenant p et muni d'une structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m. Si X est un S-schéma lisse, de réduction X_0 sur $S_0 = V(\mathfrak{a})$, et si $F : X \to X'$ est un morphisme de S-schémas lisses relevant une puissance $F^s_{X_0/S_0}$ du morphisme de Frobenius relatif, nous montrons d'abord que, pour tout $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $\mathcal{E}'$, $F^*\mathcal{E}'$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-module à gauche, puis que le foncteur F^* induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche et $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-modules à gauche. La démonstration procède par réduction au théorème de descente fidèlement plate pour le morphisme F, grâce à l'interprétation des structures de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche en termes de stratifications [5].

Nous donnons ensuite en 2.5.6 une construction d'un foncteur quasi-inverse à F^* qui se révèle d'une grand utilité. Pour cela, nous établissons pour les $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à droite un théorème de descente analogue au précédent, en considérant le foncteur $F^\flat$ défini par $F^\flat\mathcal{M} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$, introduit par Grothendieck et Hartshorne pour la théorie de la dualité pour les $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents [27]. Nous utilisons ici une interprétation infinitésimale de la structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à droite en termes de « costratifications » (*cf.* 1.1.3), qui constitue l'analogue pour les modules à droite de la notion de stratification pour les modules à gauche. Cette interprétation est développée dans la première partie de l'article ; en caractéristique nulle, elle est probablement connue des spécialistes, mais elle ne semble pas figurer dans la littérature. Sur un schéma de base quelconque, elle permet de munir le faisceau ω_X des différentielles de degré maximum sur X d'une structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite, grâce à la théorie du foncteur image inverse extraordinaire $f^!$ pour les $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents développée dans [27]. Le théorème 1.2.3 montre que la structure ainsi définie de manière intrinsèque s'explicite en coordonnées locales par la formule usuelle de l'action par l'opérateur adjoint.

Rappelons que, pour $m \geq 1$, les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_X$ ne sont pas engendrés par les dérivations, de sorte que munir un $\mathcal{O}_X$-module d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module est en général plus délicat qu'en caractéristique nulle ; le recours à l'interprétation en termes de stratifications et costratifications est alors souvent la manière naturelle de procéder. C'est donc aussi de cette manière que nous définissons dans la première partie des structures de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules (à droite ou à gauche selon les cas) sur les produits tensoriels et les modules d'homomorphismes. A l'aide de la structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite construite sur ω_X, on en déduit le procédé habituel de passage des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à gauche aux $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à droite, et réciproquement, par tensorisation avec ω_X ou ω_X^{-1}.

Après avoir établi les théorèmes de descente dans la deuxième partie, nous consacrons la troisième partie de cet article à montrer la compatibilité du foncteur F^* aux opérations cohomologiques de base de la théorie des $\mathcal{D}_X$-modules, généralisées ici aux $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules. Les conventions et notations que nous employons sont celles de Bernstein et Borel [12]. Si les cas de l'image inverse $f^!$ et du produit tensoriel externe résultent facilement des propriétés de fonctorialité de F^*, celui de l'image directe f_+ est plus intéressant, et constitue une application du théorème de descente par Frobenius (*cf.* 3.4.4). Il en est de même pour le cas du foncteur de dualité locale, dû à Virrion, pour lequel nous renvoyons à [42]. Une autre propriété importante établie ici est la commutation de F^* aux extensions du faisceau d'opérateurs différentiels au moyen des homomorphismes $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m')}$, pour $m' \geq m$, qui servira dans la dernière partie pour redescendre les F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules. Toutes ces compatibilités sont essentielles pour assurer la permanence de l'action de Frobenius à travers toutes les opérations cohomologiques ; elles entraîneront que tout $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module d'origine géométrique est muni d'une structure naturelle de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module [7].

Signalons aussi que les différents résultats mentionnés ici sont en fait établis sous des hypothèses un peu plus générales :

a) Lorsque l'on suppose que la PD-structure donnée sur $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotente, il n'est pas nécéssaire de disposer d'un relèvement F de Frobenius globalement sur X pour définir le foncteur F^* et établir ses propriétés. On peut en effet utiliser la technique cristalline standard pour recoller au moyen d'une stratification les images inverses définies par des relèvements locaux de Frobenius.

b) Nous avons systématiquement utilisé des faisceaux d'opérateurs différentiels déduits des faisceaux $\mathscr{D}_X^{(m)}$ par extension des coefficients à une $\mathscr{O}_X$-algèbre sur laquelle $\mathscr{D}_X^{(m)}$ opère. Rappelons qu'une des motivations pour l'introduction de cette généralité supplémentaire — qui n'offre pas d'autre difficulté que l'alourdissement des énoncés qui en résulte — est de pouvoir obtenir des résultats sur les algèbres de fonctions à singularités surconvergentes, et sur les modules sur ces algèbres, par réduction modulo p^n et passages à la limite. Le lecteur trouvera dans [6] un exemple de l'utilisation de ces techniques, pour prouver le théorème de cohérence sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ d'un tel faisceau d'algèbres.

Soient $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, d'indice de ramification e, de corps résiduel parfait k, et m un entier tel que $p^m(p-1) \geq e$. Le début de la dernière partie est consacré à étendre par passage à la limite les théorèmes de descente au cas des faisceaux d'opérateurs différentiels complétés $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ sur un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse $\mathscr{X}$, puis au faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$ limite inductive de ceux-ci lorsque $m \to \infty$. En particulier, le foncteur F^* induit une équivalence de la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents avec elle-même. Il apparaît ainsi que, lorsqu'on tensorise par $\mathbb{Q}$ et qu'on passe à la limite pour $m \to \infty$, on retrouve des propriétés d'invariance topologique analogues à celles des faisceaux étales. Pour ne pas allonger exagérément le présent article, nous n'y avons par contre pas inclu l'extension au cas des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules, ni à celui des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules, des théorèmes de compatibilité de F^* aux opérations cohomologiques montrés dans la troisième partie : en effet, la définition de ces opérations pose alors des problèmes assez délicats liés aux complétions, que nous traiterons dans [7].

Observons ici que, lorsqu'on tensorise par $\mathbb{Q}$, les théorèmes de descente obtenus sont liés à différents résultats connus. Ainsi, compte tenu des relations entre $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents et isocristaux convergents explicitées dans [3] et [5], le dernier énoncé peut être vu comme une extension à des coefficients plus généraux, mais ici sur un schéma lisse et pour le morphisme de Frobenius, du théorème d'invariance topologique de la catégorie des isocristaux convergents prouvé par Ogus [36, 4.10]. De même, via le dictionnaire qu'on peut établir entre action de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ sur un fibré à connexion intégrable et rayon de convergence sur le disque générique des solutions des systèmes différentiels p-adiques (voir notamment la thèse de Garnier [23]), les théorèmes de descente établis ici apparaissent dans le cas formel comme une généralisation des résultats de Dwork et Christol sur l'existence de structures de Frobenius faibles sur les systèmes complètement solubles dans le disque générique (voir par exemple [22], [16], [17], [18]). Rappelons que c'est précisément ce type de structures qu'utilisent Christol et Mebkhout pour définir les exposants des systèmes différentiels p-adiques [19]. A cet égard, on notera que les formules obtenues par Garnier ([24], [25]), pour expliciter le théorème de descente par Frobenius pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules et les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche, permettent de préciser les liens entre les méthodes algébro-géométriques employées ici et celles de l'analyse p-adique.

Les théorèmes de descente par Frobenius sont un des outils essentiels dont on dispose dans la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules, et seront très utilisés dans les articles qui suivront ([7], [8]). Nous en donnons déjà ici plusieurs applications importantes. Mentionnons en particulier les suivantes :

(i) Supposons que l'automorphisme de Frobenius de k se relève en un automorphisme σ de $\mathscr{V}$. Soit alors $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ un relèvement du morphisme de Frobenius absolu de la fibre spéciale X de $\mathscr{X}$ (si $e < p^m(p-1)$, cette hypothèse d'existence de F globalement sur $\mathscr{X}$ est inutile, grâce à la méthode évoquée en a) plus haut). Pour tout $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E}$, le morphisme de fonctorialité

$$H^*_{\mathrm{dR}}(\mathscr{X},\mathscr{E}) \longrightarrow H^*_{\mathrm{dR}}(\mathscr{X},F^*\mathscr{E})$$

est alors un isomorphisme (th. 4.3.5). On notera que, pour $m = 0$ et $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, on retrouve ainsi, comme conséquence très simple des théorèmes de descente, le fait que l'action de Frobenius sur la cohomologie cristalline de X est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{Q}$ [9, th. 1.3.1].

(ii) Le théorème de descente permet de ramener le calcul de la dimension homologique des anneaux $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ à celui de $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$, qu'on peut traiter par les techniques de filtration habituelles. Nous montrons ainsi que chacun des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ est de dimension $2d+1$, où d est la dimension relative de $\mathscr{X}$ sur $\mathscr{V}$, et nous bornons respectivement celles de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ par $2d$ et $2d+1$ (voir 4.4.4 à 4.4.7). Rappelons que l'on conjecture que ces dernières sont en fait égales à d. Un résultat de ce type avait été annoncé, prématurément semble-t-il, par Mebkhout et Narvaez [33] (voir [5, 2.2.7]).

Notant encore F^* l'image inverse par le morphisme de Frobenius absolu, nous introduisons dans la section 4.5 la notion de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module, qui consiste en la donnée d'un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E}$ et d'un isomorphisme $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$. Cette notion peut être considérée comme généralisant les notions de F-isocristal convergent et surconvergent sur X, ainsi que nous l'expliquons dans la section 4.6. Le résultat principal établi ici, grâce au théorème de descente 2.3.6, est que tout F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent se descend canoniquement avec son isomorphisme sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Une conséquence remarquable de ce théorème de descente est que la catégorie des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents est une catégorie nœthérienne, alors que l'analyse de l'action de F sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ montre que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ n'est pas un faisceau d'anneaux nœthériens (*cf.* 4.2.3). Signalons aussi que ce résultat de descente pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules est à la base de la construction de la variété caractéristique que nous donnerons dans [8], et de la caractérisation homologique de l'holonomie pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules obtenue par Virrion [42].

Enfin, nous revenons dans un appendice sur la construction de la filtration m-PD-adique, définie par un idéal I muni d'une structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m. En effet, l'une des conditions imposées dans [5] s'avère trop contraignante, et ne fournit pas la propriété de nilpotence voulue pour $m \geq 1$ lorsque $p = 2$. La définition adoptée ici vérifie les bonnes propriétés de nilpotence, et n'induit aucune modification dans les cas où cette filtration était employée dans [5]; en particulier, elle ne modifie pas les voisinages à puissances divisées nilpotentes de niveau m dans le cas d'une immersion fermée entre schémas lisses, donc laisse inchangés les faisceaux de parties principales, et les faisceaux d'opérateurs différentiels qu'on en déduit.

Conventions générales

0.1.1. Dans tout l'article, on désigne par p un nombre premier fixé, et par $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à l'idéal premier (p).

0.1.2. Sauf mention expresse du contraire, les modules considérés sur un faisceau d'anneaux non commutatifs $\mathscr{D}$ seront des modules à gauche, les résultats énoncés restant valables en échangeant droite et gauche. Si $\mathcal{O} \to \mathscr{D}$ est un homomorphisme d'anneaux, nous considérerons en général $\mathscr{D}$ comme $\mathcal{O}$-module grâce à la multiplication à gauche. Si $*$ est l'un des symboles Ø, $+$, $-$, ou b, $D^*(\mathscr{D})$ désigne comme d'habitude la catégorie dérivée des complexes de $\mathscr{D}$-modules à gauche vérifiant les conditions correspondantes d'annulation des faisceaux de cohomologie. Lorsqu'il y aura lieu de distinguer explicitement entre droite et gauche, nous utiliserons des notations telles que $D({}^{\mathrm{g}}\mathscr{D})$ ou $D(\mathscr{D}^{\mathrm{d}})$. Nous noterons $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D})$) la sous-catégorie pleine de $D^-(\mathscr{D})$ dont les objets sont les complexes à cohomologie cohérente (resp. parfaits à cohomologie bornée [SGA 6]). Si X est un schéma, et $\mathscr{D}$ un faisceau d'anneaux sur X muni d'un homomorphisme $\mathcal{O}_X \to \mathscr{D}$, nous désignerons par $D^*_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D})$ la sous-catégorie pleine de $D^*(\mathscr{D})$ formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont $\mathcal{O}_X$-quasi-cohérents.

0.1.3. Soient A, B deux anneaux. Nous adopterons la terminologie suivante pour désigner les bimodules :

a) Nous dirons que E est un (A, B)-bimodule si E est muni de deux structures compatibles de A-module à gauche et de B-module à droite. Un morphisme de (A, B)-bimodules $f : E \to F$ est un morphisme linéaire à la fois pour les structures de A-module à gauche et pour les structures de B-module à droite. Lorsque $A = B$, nous dirons simplement que E est un A-bimodule (resp. f un morphisme de A-bimodules).

b) Nous dirons que E est un (A, B)-bimodule à gauche (resp. à droite) si E est muni de deux structures compatibles de A-module à gauche et de B-module à gauche (resp. de A-module à droite et de B-module à droite). Lorsque $A = B$, nous dirons simplement que E est un A-bimodule à gauche (resp. à droite). On définit comme précédemment les morphismes de bimodules à gauche, ou de bimodules à droite.

0.1.4. Nous reprendrons les définitions de [5, 1.1.2] concernant les coefficients binômiaux modifiés : rappelons que, si m est un entier fixé, et si $k = k' + k''$, où $k = p^m q + r$, $k' = p^m q' + r'$, $k'' = p^m q'' + r''$, avec $0 \leq r, r', r'' \leq p^m - 1$, on pose

$$\left\{ {k \atop k'} \right\}_{(m)} := \frac{q!}{q'!\,q''!}, \qquad \left\langle {k \atop k'} \right\rangle_{(m)} := \binom{k}{k'} \left\{ {k \atop k'} \right\}_{(m)}^{-1}.$$

Nous étendrons ces notations en posant, pour $m = +\infty$,

$$\left\{ {k \atop k'} \right\}_{(\infty)} := 1, \qquad \left\langle {k \atop k'} \right\rangle_{(\infty)} := \binom{k}{k'}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'en résultera, nous omettrons de noter l'indice m.

1. $\mathscr{D}$-modules à droite

Soient $X \to S$ un morphisme lisse entre deux schémas, $\mathscr{I}$ l'idéal de la diagonale dans $X \times_S X$, $t_1, \ldots, t_d$ des coordonnées locales au voisinage d'un point $x \in X$, $\partial_1, \ldots, \partial_d$ les dérivations correspondantes. Passons brièvement en revue les différents faisceaux d'opérateurs différentiels dont on dispose sur X (relativement à S) :

(i) Sans hypothèse sur S, le faisceau $\mathscr{D}_X$ des opérateurs différentiels usuels est défini à partir des algèbres $\mathscr{P}_X^n = \mathcal{O}_{X \times X} / \mathscr{I}^{n+1}$ des voisinages infinitésimaux de la diagonale de X dans $X \times_S X$, en posant

$$\mathscr{D}_X = \bigcup_{n \geq 0} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}_X^n, \mathcal{O}_X) ;$$

au voisinage de x, il possède une base sur $\mathcal{O}_X$ formée d'opérateurs notés $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$, tels que $\underline{k}!\, \underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \underline{\partial}^{\underline{k}}$ [EGA, IV (16.8.4)] ;

(ii) Toujours sans hypothèses sur S, le faisceau $\mathscr{D}_X^{(0)}$ des opérateurs différentiels de niveau 0 (appelés “PD-différentiels” dans [1, II, 2.1.3]) est défini de manière similaire par

$$\mathscr{D}_X^{(0)} = \bigcup_{n \geq 0} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}_{X,(0)}^n, \mathcal{O}_X),$$

où $\mathscr{P}_{X,(0)}^n = \mathscr{P}_{X,(0)} / \mathscr{I}^{[n+1]}$ est l'algèbre du n-ième voisinage infinitésimal à puissances divisées de la diagonale ; il a pour base au voisinage de x les puissances usuelles $\underline{\partial}^{\underline{k}}$ des dérivations ∂_i.

(iii) Si l'on suppose maintenant que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma, on dispose pour tout $m \in \mathbb{N}$ du faisceau $\mathcal{D}_X^{(m)}$ des opérateurs différentiels de niveau m [5, 2.2.1], obtenu en remplaçant les enveloppes à puissances divisées précédentes par les enveloppes à puissances divisées partielles $\mathcal{P}^n_{X,(m)} = \mathcal{P}_{X,(m)}/\overline{\mathcal{I}}^{\{n+1\}}$ définies en [5, 2.1.2] :

$$\mathcal{D}_X^{(m)} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X) ;$$

au voisinage de x, ce faisceau possède une base d'opérateurs notés $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$, ou simplement $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$, tels que $(\underline{k}!/\underline{q}!)\,\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = \underline{\partial}^{\underline{k}}$, où $\underline{q}$ est le quotient de la division euclidienne de $\underline{k}$ par p^m.

Les résultats de ce chapitre s'appliqueront à chacun des ces faisceaux. Pour unifier les notations, il est commode d'adjoindre $\mathcal{D}_X$ (resp. $\mathcal{P}^n_X$) à la famille des anneaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ (resp. $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$) en posant $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{D}_X^{(\infty)} = \mathcal{D}_X$ et $\mathcal{P}^n_{X,(\infty)} = \mathcal{P}^n_X$. Lorsque nous fixerons $m \in \overline{\mathbb{N}}$, il sera toujours sous-entendu que, si $m \neq 0, \infty$, on suppose que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma ; lorsque $m = 0$ ou $m = \infty$, on pourra prendre pour S un $\mathbb{Z}$-schéma quelconque. Rappelons que, pour $m \leq m' \in \overline{\mathbb{N}}$, il existe un homomorphisme canonique $\mathcal{D}_X^{(m)} \to \mathcal{D}_X^{(m')}$, et que $\varinjlim_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_X^{(\infty)}$. Nous emploierons également la notation $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $m \in \overline{\mathbb{N}}$. Nous commencerons par introduire la notion de costratification, qui fournit pour les $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à droite une description analogue à celle que donne la notion de stratification pour les $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche. Cette description nous servira ensuite pour montrer que, sur une base quelconque, le module ω_X des différentielles de degré maximum possède une structure naturelle de $\mathcal{D}_X$-module, fournie par la théorie du foncteur image inverse extraordinaire $f^!$ pour les $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. En coordonnées locales, elle correspond à l'action habituelle par l'opérateur adjoint. Comme en caractéristique 0, elle permet de transformer un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche en $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite, et réciproquement. Nous expliciterons enfin les isomorphismes de transposition qui permettent d'échanger les structures de $\mathcal{O}_X$-module utilisées sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$ lorsqu'on effectue certains produits tensoriels avec un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module.

1.1. Interprétation infinitésimale des $\mathcal{D}$-modules à droite

Lorsque S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma, et $m \geq 1$, $\mathcal{D}_X^{(m)}$ n'est pas engendré par les dérivations, mais par les opérateurs $\partial_i^{\langle p^j \rangle}$ pour $j \leq m$, et il ne suffit donc pas en général de se donner l'action des dérivations pour munir un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module. Dans le cas des modules à gauche, la notion de m-PD-stratification introduite en [5, 2.3.1] fournit une interprétation infinitésimale de ce type de structure, qu'il sera souvent nécessaire d'utiliser pour définir une action de $\mathcal{D}_X^{(m)}$: une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche sur $\mathcal{E}$ est déterminée par la donnée d'une famille compatible d'isomorphismes entre les images inverses $p_i^*\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$ sur les voisinages infinitésimaux à puissances divisées de niveau m de la diagonale dans $X \times_S X$. On montre ici qu'il existe une description analogue pour la donnée d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite, en remplaçant les images inverses ordinaires $p_i^*\mathscr{E}$ par les images inverses extraordinaires $p_i^!\mathscr{E}$ construites par Grothendieck et Hartshorne pour les complexes quasi-cohérents de $\mathscr{O}_X$-modules [27]. On en déduit l'existence des structures habituelles (voir par exemple [35, 2.4] ou [11, 1.3.1]) sur les produits tensoriels et modules d'homomorphismes sur $\mathscr{O}_X$ de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules, complétant ainsi ce qui était établi dans [5, 2.3.3] dans le cas des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche.

1.1.1. Rappelons d'abord quelques résultats de [27] concernant le foncteur image inverse extraordinaire dans le cas des morphismes finis.

a) Soit $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un homomorphisme de faisceaux d'anneaux. Le foncteur φ_* de restriction des scalaires de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{A}$ possède un adjoint à droite, associant à un $\mathscr{A}$-module $\mathscr{M}$ le $\mathscr{B}$-module $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{M})$: pour tout $\mathscr{B}$-module $\mathscr{N}$, l'évaluation en $1 \in \mathscr{B}$ fournit un isomorphisme canonique d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{N}, \mathscr{M}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathscr{N}, \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{M})).$$

Nous noterons $\varphi^\flat : D^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{B})$ le foncteur dérivé droit correspondant, qui est défini par $\varphi^\flat\mathscr{M} = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{M})$ pour $\mathscr{M} \in D^+(\mathscr{A})$. Si $\psi : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ est un deuxième homomorphisme, il existe un isomorphisme naturel de foncteurs $(\psi \circ \varphi)^\flat \simeq \psi^\flat \circ \varphi^\flat$, car d'une part on dispose d'un tel isomorphisme entre les foncteurs non dérivés, d'autre part $\varphi^\flat$ transforme les $\mathscr{A}$-modules injectifs en $\mathscr{B}$-modules injectifs.

b) Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini entre deux schémas. Suivant [27, III, §6], nous noterons alors $f^\flat : D^+(Y) \to D^+(X)$ le foncteur défini par

$$f^\flat\mathscr{M} = \bar{f}^*\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(f_*\mathscr{O}_X, \mathscr{M}),$$

où $\bar{f}$ désigne le morphisme (plat) d'espaces annelés $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, f_*\mathscr{O}_X)$. Si de plus f est un homéomorphisme (resp. un homéomorphisme fini localement libre), on a donc simplement $f^\flat\mathscr{M} = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(f_*\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$ (resp. $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(f_*\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$), et cette notation est compatible avec la précédente. Lorsque X et Y sont localement nœthériens, le foncteur $f^\flat$ envoie $D^+_{\mathrm{qc}}(Y)$ (resp. $D^+_{\mathrm{coh}}(Y)$) dans $D^+_{\mathrm{qc}}(X)$ (resp. $D^+_{\mathrm{coh}}(X)$).

c) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux morphismes finis, et si $\mathscr{M} \in D^+(\mathscr{O}_Z)$, on dispose d'un isomorphisme fonctoriel

$$(g \circ f)^\flat(\mathscr{M}) \simeq f^\flat(g^\flat(\mathscr{M})) \tag{1.1.1.1}$$

dans les deux cas suivants :

(i) Si X, Y et Z sont localement nœthériens, et si $\mathscr{M} \in D^+_{\mathrm{qc}}(Z)$, d'après [27, II, 6.2];

(ii) Si f et g sont des homéomorphismes, car les foncteurs $\bar{f}^*$ et $\bar{g}^*$ sont alors les foncteurs identité, et on est ramené à la situation de a).

1.1.2. Fixons maintenant quelques notations. Dans ce qui suit, on suppose donnés un entier $m \in \overline{\mathbb{N}}$, et un morphisme lisse $X \to S$ de dimension relative d. Pour $0 \leq i \leq r$, on note $p_i : X^{r+1}_{/S} \to X$ les projections. Chacune d'entre elle munit les enveloppes à puissances divisées $\mathscr{P}^n_{X,(m)}(r)$ [5, 2.1.2] d'une structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre ; si nécessaire, nous emploierons la notation $p_{i*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}(r)$ pour préciser la structure utilisée, et nous adopterons une convention analogue pour les produits tensoriels de tels faisceaux. Pour $0 \leq i < j \leq 2$, nous noterons $p_{ij} : X \times_S X \times_S X \to X \times_S X$ la projection correspondant aux indices i, j.

Si $t_1, \ldots, t_d$ sont des coordonnées locales sur un ouvert de X, nous poserons comme d'habitude $\tau_i = p_1^*(t_i) - p_0^*(t_i) \in \mathcal{O}_{X\times X}$, et nous noterons $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} = \tau_1^{\{k_1\}} \ldots \tau_d^{\{k_d\}}$ les puissances divisées partielles de niveau m des τ_i dans $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ [5, 1.3.5]. Rappelons que, pour $|\underline{k}| \leq n$, ces sections forment une base de $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ [5, 2.1.2], et que, par définition, les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}$ en sont la base duale dans $\mathscr{D}^{(m)}_{X,n} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X)$.

On note d'autre part

$$\delta^{n,n'}_{(m)} \; : \; \mathscr{P}^{n+n'}_{X,(m)} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}$$

le m-PD-morphisme canonique défini en [5, 2.1.3], et $q_i^{n,n'}$ les morphismes composés :

$$\begin{aligned} q_0^{n,n'} \; &: \; \mathscr{P}^{n+n'}_{X,(m)} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X,(m)} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}, \\ q_1^{n,n'} \; &: \; \mathscr{P}^{n+n'}_{X,(m)} \longrightarrow \mathscr{P}^{n'}_{X,(m)} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}. \end{aligned}$$

1.1.3. *Définition.* — Sous les hypothèses de 1.1.1, soit $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module. Une *m-PD-costratification* (ou simplement une *costratification* si $m = \infty$, ou si aucune confusion n'en résulte) sur $\mathscr{M}$ relativement à S est la donnée d'une famille d'isomorphismes $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$-linéaires

$$\varepsilon_n \; : \; p_0^\flat\mathscr{M} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\;\sim\;} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}, \mathscr{M}) = p_1^\flat\mathscr{M},$$

telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}}$;

(ii) Si $\Delta^n_{X,(m)} = \mathrm{Spec}\,\mathscr{P}^n_{X,(m)}$, et si $i_{n',n} : \Delta^n_{X,(m)} \hookrightarrow \Delta^{n'}_{X,(m)}$ est l'immersion canonique, alors $\varepsilon_n = i^\flat_{n',n}(\varepsilon_{n'})$ pour $n \leq n'$ (on dira que les ε_n forment une famille *compatible* d'isomorphismes) ;

(iii) Pour tous n, n', le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}(\mathscr{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}), \mathscr{M}) \arrow[rr, "\delta^{n,n'\flat}_{(m)}(\varepsilon_{n+n'})", "\sim"'] \arrow[dr, "q_0^{n,n'\flat}(\varepsilon_{n+n'})"', "\sim"] & & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{2*}(\mathscr{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}), \mathscr{M}) \\ & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}(\mathscr{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}), \mathscr{M}) \arrow[ur, "\sim", "q_1^{n,n'\flat}(\varepsilon_{n+n'})"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1.3.1}$$

est commutatif.

On vérifie facilement que cette dernière condition est équivalente à la condition de cocycle suivante : pour tout n, le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}(2),\mathscr{M}) \arrow[rr, "p_{02}^{\flat}(\varepsilon_n)", "\sim"'] \arrow[dr, "p_{01}^{\flat}(\varepsilon_n)"', "\sim"] & & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{2*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}(2),\mathscr{M}) \\
& \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}(2),\mathscr{M}) \arrow[ur, "\sim", "p_{12}^{\flat}(\varepsilon_n)"'] &
\end{tikzcd}
\tag{1.1.3.2}
$$

est commutatif.

Comme d'habitude, un homomorphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire entre deux $\mathcal{O}_X$-modules munis de m-PD-costratifications sera dit *horizontal* s'il induit des morphismes commutant aux ε_n pour tout n.

L'énoncé suivant montre que la notion de costratification est bien l'analogue pour les $\mathscr{D}$-modules à droite de la notion de stratification pour les $\mathscr{D}$-modules à gauche.

1.1.4. PROPOSITION. — *Soient $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module, et $m \in \overline{\mathbb{N}}$. Il y a équivalence entre les données suivantes :*

a) *Une structure de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à droite sur $\mathscr{M}$ prolongeant sa structure de $\mathcal{O}_X$-module ;*

b) *Une famille compatible d'homomorphismes*

$$\mu_n \;:\; \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)},\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{M},$$

$\mathcal{O}_X$-linéaires pour la structure de $\mathcal{O}_X$-module définie par la multiplication à droite sur $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$, telle que $\mu_0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}}$, et que, pour tous n, n', on ait un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^{n'}_{X,(m)},\mathscr{M}) \arrow[r, "\mu_{n'}"] & \mathscr{M} \\
\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}(\mathscr{P}^n_{X,(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}),\mathscr{M}) \arrow[u, "\tilde{\mu}_n"] \arrow[r, "\delta^{n,n'}_{(m)}"] & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^{n+n'}_{X,(m)},\mathscr{M}), \arrow[u, "\mu_{n+n'}"']
\end{tikzcd}
\tag{1.1.4.1}
$$

où $\tilde{\mu}_n$ est l'homomorphisme $\mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}$-linéaire correspondant par adjonction au morphisme composé

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}(\mathscr{P}^n_{X,(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}),\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)},\mathscr{M}) \xrightarrow{\mu_n} \mathscr{M}$$

(qui est $\mathcal{O}_X$-linéaire pour la structure définie par p_1 sur $\mathscr{P}^n_{X,(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}$) ;

c) *Une m-PD-costratification (ε_n) sur $\mathscr{M}$.*

De plus, un homomorphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire entre deux $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules à droite est $\mathscr{D}^{(m)}_X$-linéaire si et seulement s'il commute aux homomorphismes μ_n (resp. aux isomorphismes ε_n).

Comme $p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ est localement libre de rang fini sur $\mathcal{O}_X$, on peut écrire

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)},\mathscr{M}) \simeq \mathscr{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)},\mathcal{O}_X) = \mathscr{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{D}^{(m)}_{X,n}.$$

La donnée des applications μ_n s'interprète donc comme la donnée d'une famille compatible d'accouplements $\mathscr{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{D}^{(m)}_{X,n}\to\mathscr{M}$, donc comme une action à droite de $\mathscr{D}^{(m)}_X$, et on vérifie que la commutativité des diagrammes (1.1.4.1) équivaut à la condition d'associativité de cette action, donc au fait que les μ_n définissent une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite.

D'autre part, la donnée d'une famille (μ_n) d'homomorphismes $\mathcal{O}_X$-linéaires pour la multiplication à droite sur $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ correspond par adjonction à la donnée d'une famille d'homomorphismes $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$-linéaires

$$\varepsilon_n \,:\, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}).$$

Il est alors facile de s'assurer que la commutativité de (1.1.4.1) équivaut par adjonction à celle de (1.1.3.1). Comme la commutativité de (1.1.3.1) pour tous n, n' équivaut à celle de (1.1.3.2) pour tout n, les ε_n sont automatiquement des isomorphismes. En effet, on dispose de l'homomorphisme $\pi : \mathcal{P}^n_{X,(m)}(2) \to \mathcal{P}^n_{X,(m)}$ correspondant à l'immersion $X^2 \hookrightarrow X^3$ donnée par $(x, y) \longmapsto (x, y, x)$, et, en appliquant $\pi^\flat$ à la relation (1.1.3.2), on voit que ε_n admet pour inverse l'homomorphisme $\sigma^\flat \varepsilon_n$ qu'on en déduit par l'automorphisme de symétrie $\sigma : \mathcal{P}^n_{X,(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}^n_{X,(m)}$. Par suite, la donnée des μ_n est bien équivalente à celle d'une m-PD-costratification.

L'assertion relative aux homomorphismes se voit de la même manière.

1.1.5. COROLLAIRE. — *Supposons S localement nœthérien. Alors la donnée d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite sur un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$, prolongeant sa structure de $\mathcal{O}_X$-module, équivaut à celle d'une famille compatible d'isomorphismes $\varepsilon_n : p_0^!\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} p_1^!\mathcal{M}$ sur les $\Delta^n_{X,(m)}$, telle que $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$, et que $p_{1,2}^!(\varepsilon_n) \circ p_{0,1}^!(\varepsilon_n) = p_{0,2}^!(\varepsilon_n)$ sur les $\Delta^n_{X,(m)}(2)$.*

En effet, les morphismes p_i et $p_{i,j}$ sont finis et plats. D'après la théorie du foncteur image inverse extraordinaire [27, III, 8.7], on a alors

$$p_i^!\mathcal{M} \;=\; p_i^\flat\mathcal{M} \;=\; \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}).$$

De même, $p_{i,j}^! = p_{i,j}^\flat$, de sorte que les données du corollaire constituent exactement une m-PD-costratification.

1.1.6. LEMME. — *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite, et (ε_n) la costratification qui lui correspond d'après 1.1.4. Si $t_1, \ldots, t_d$ sont des coordonnées locales sur un ouvert de X, et si $(\tilde{\underline{\partial}}^{\langle \underline{k}\rangle})$ constitue la base duale de $(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}})$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X)$, on a pour tout $x \in \mathcal{M}$ et tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$*

$$\varepsilon_n(x \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}) \;=\; \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} \left\{ \frac{\underline{k}}{\underline{h}} \right\} \tilde{\underline{\partial}}^{\langle \underline{h}\rangle} \otimes x\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \tag{1.1.6.1}$$

avec les identifications

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}) \;\simeq\; \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X) \;=\; \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X,n}, \tag{1.1.6.2}$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}) \;\simeq\; \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}. \tag{1.1.6.3}$$

En particulier, on a

$$\varepsilon_n(x \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle})(1) = x\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}. \tag{1.1.6.4}$$

D'après 1.1.4, ε_n est l'unique morphisme $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$-linéaire tel que le composé

$$\mu_n : \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\varepsilon_n} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} \mathscr{M},$$

où ev_1 est le morphisme d'évaluation en 1, corresponde par l'identification (1.1.6.2) à l'action de $\mathscr{D}^{(m)}_{X,n}$. Si $\delta_{\underline{k},x} \in \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}, \mathscr{M})$ correspond à $x \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$, on a $\mu_n(\delta_{\underline{k},x}) = x\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$. D'autre part, il résulte des relations entre puissances divisées partielles [5, 1.3.6] que, pour tout $\underline{h}$, on a

$$\underline{\tau}^{\{\underline{h}\}}\delta_{\underline{k},x} = \left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\delta_{\underline{k}-\underline{h},x}. \tag{1.1.6.5}$$

Si l'on pose

$$\varepsilon_n(\delta_{\underline{k},x}) = \sum_{\underline{h}} \tilde{\underline{\partial}}^{\langle \underline{h} \rangle} \otimes x_{\underline{h}},$$

on a donc pour tout $\underline{h}$

$$\begin{aligned} x_{\underline{h}} &= \varepsilon_n(\delta_{\underline{k},x})(\underline{\tau}^{\{\underline{h}\}}) = (\underline{\tau}^{\{\underline{h}\}}\varepsilon_n(\delta_{\underline{k},x}))(1) = \varepsilon_n(\underline{\tau}^{\{\underline{h}\}}\delta_{\underline{k},x})(1) \\ &= \mu_n(\underline{\tau}^{\{\underline{h}\}}\delta_{\underline{k},x})) = \left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\} x\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle}. \end{aligned}$$

Cela fournit en particulier la relation (1.1.6.4).

Remarque. — L'isomorphisme inverse de ε_n est alors fourni par

$$\varepsilon_n^{-1}(\tilde{\underline{\partial}}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes x) = \sum_{\underline{h} \le \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\} x\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}. \tag{1.1.6.6}$$

1.1.7. PROPOSITION. — *Soient $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à gauche, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules à droite.*

(i) *Il existe sur $\mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{M})$) une unique structure de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à droite telle que, pour tout système de coordonnées locales sur un ouvert $U \subset X$, et tous $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $x \in \Gamma(U, \mathscr{E})$, $y \in \Gamma(U, \mathscr{M})$, $\varphi : \mathscr{E}|_U \to \mathscr{M}|_U$, on ait*

$$(y \otimes x)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = \sum_{\underline{h} \le \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\} y\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}x, \tag{1.1.7.1}$$

$$(\varphi\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle})(x) = \sum_{\underline{h} \le \underline{k}} \left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\} \varphi(\underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}x)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle}. \tag{1.1.7.2}$$

(ii) *Il existe sur $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{N}, \mathscr{M})$ une unique structure de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à gauche telle que, pour tout système de coordonnées locales sur un ouvert $U \subset X$, et tous $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $z \in \Gamma(U, \mathscr{N})$, $\psi : \mathscr{N}|_U \to \mathscr{M}|_U$, on ait*

$$(1.1.7.3) \qquad (\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\psi)(z) = \sum_{\underline{h}\leq\underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \psi(z\underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle})\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}.$$

On utilise l'interprétation des structures de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules en termes de stratifications et costratifications donnée en [5, 2.3.2] et en 1.1.4.

Notons $\mathscr{P}_X^n$ pour $\mathscr{P}_{X,(m)}^n$. Comme $\mathscr{P}_X^n$ est localement libre de rang fini, on dispose pour $i = 0, 1$ des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{M}) \otimes_{\mathscr{P}_X^n} (\mathscr{P}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E}) &\xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{M}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E}). \end{aligned}$$

Si $(\varepsilon_n^{\mathscr{E}})$ (resp. $(\varepsilon_n^{\mathscr{M}})$) est la m-PD-stratification (resp. costratification) de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{M}$), cette identification permet de munir $\mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E}$ d'une m-PD-costratification en posant $\varepsilon_n^{\mathscr{M}\otimes\mathscr{E}} = \varepsilon_n^{\mathscr{M}} \otimes (\varepsilon_n^{\mathscr{E}})^{-1}$. En coordonnées locales, on déduit alors de (1.1.6.4) la relation

$$(y \otimes x)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} = \varepsilon_n^{\mathscr{M}\otimes\mathscr{E}}(y \otimes x \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle})(1).$$

Compte tenu de [5, (2.3.2.3)], on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{\mathscr{M}\otimes\mathscr{E}}(y \otimes x \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}) &= \varepsilon_n^{\mathscr{M}}(y \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}) \otimes_{\mathscr{P}_X^n} (\varepsilon_n^{\mathscr{E}})^{-1}(x \otimes 1) \\ &= \Big(\sum_{\underline{h}\leq\underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\tilde{\partial}}^{\langle \underline{h}\rangle} \otimes y\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}\Big) \otimes_{\mathscr{P}_X^n} \Big(\sum_{\underline{i}} (-1)^{|\underline{i}|}\, \underline{\tau}^{\{\underline{i}\}} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle} x\Big). \end{aligned}$$

Comme $\underline{\tau}^{\{\underline{i}\}}\, \underline{\tilde{\partial}}^{\langle \underline{h}\rangle} = \left\{ \begin{matrix} \underline{h} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\tilde{\partial}}^{\langle \underline{h}-\underline{i}\rangle}$, et que $\underline{\tilde{\partial}}^{\langle \underline{h}-\underline{i}\rangle}(1) = 0$ pour $\underline{i} \neq \underline{h}$, la formule (1.1.7.1) en résulte.

Grâce aux isomorphismes d'adjonction

$$\begin{aligned} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{M})) &\xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} p_{i*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{M}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{P}_X^n}(\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} p_{i*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{M})), \end{aligned}$$

on peut munir $\mathscr{H} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{M})$ d'une m-PD-costratification en posant $\varepsilon_n^{\mathscr{H}} = \mathscr{H}om(\varepsilon_n^{\mathscr{E}}, \varepsilon_n^{\mathscr{M}})$. Pour l'expliciter en coordonnées locales, fixons $\varphi \in \mathscr{H}$, et, comme en 1.1.6, notons $\delta_{\underline{k},\varphi} \in \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{H})$ l'homomorphisme tel que $\delta_{\underline{k},\varphi}(\underline{\tau}^{\{\underline{i}\}}) = \delta_{\underline{i},\underline{k}}\,\varphi$, où $\delta_{\underline{i},\underline{k}}$ est le symbole de Kronecker. Par les isomorphismes d'adjonction, il lui correspond l'homomorphisme $\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} p_{0*}\mathscr{P}_X^n \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}_X^n, \mathscr{M})$ défini par

$$x \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{i}\}} \longmapsto \Big(\underline{\tau}^{\{\underline{j}\}} \longmapsto \left\{ \begin{matrix} \underline{i}+\underline{j} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \delta_{\underline{i}+\underline{j},\underline{k}}\,\varphi(x)\Big) = \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \varphi(x) \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}\rangle}.$$

En appliquant $\varepsilon_n^{\mathscr{H}}$ à ce dernier, on obtient alors l'homomorphisme

$$\underline{\tau}^{\{\underline{i}\}} \otimes x \longmapsto \sum_{\underline{0}\leq\underline{h}\leq\underline{k}-\underline{i}}\ \sum_{\underline{0}\leq\underline{j}\leq\underline{k}-\underline{i}-\underline{h}} \left\{ \begin{matrix} \underline{i}+\underline{h} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i}+\underline{h} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{k}-\underline{i}-\underline{h} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\} \underline{\tilde{\partial}}^{\langle \underline{k}-\underline{i}-\underline{h}-\underline{j}\rangle} \otimes \varphi(\underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle} x)\underline{\partial}^{\langle \underline{j}\rangle}.$$

L'homomorphisme $p_{1*}\mathscr{P}_X^n \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{M})$ qui lui correspond via les isomorphismes d'adjonction est défini par la valeur en 1 du terme de droite, qui est le coefficient correspondant à $\underline{j} = \underline{k} - \underline{i} - \underline{h}$. D'après (1.1.5.4), $(\varphi\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle})(x) = (\varepsilon_n^{\mathscr{H}}(\delta_{\underline{k},\varphi})(1))(x)$, de sorte que

$(\varphi\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle})(x)$ est le coefficient obtenu en prenant de plus $\underline{i}=\underline{0}$ dans la formule précédente, ce qui donne la relation (1.1.7.2).

Sous les hypothèses de (ii), on dispose par fonctorialité et extension des scalaires des homomorphismes canoniques

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{N},\mathscr{M})\otimes_{\mathcal{O}_X}p_{i*}\mathscr{P}^n_X \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{P}^n_X}(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}^n_X,\mathscr{N}),\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}^n_X,\mathscr{M})).$$

Ceux-ci sont des isomorphismes, car, par composition avec les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\mathscr{H}om_{\mathscr{P}^n_X}(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}^n_X,\mathscr{N}),\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}^n_X,\mathscr{M})) &\xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{i*}\mathscr{P}^n_X,\mathscr{N}),\mathscr{M})\\ &\xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{N},p_{i*}\mathscr{P}^n_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{M})\\ &\xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{N},\mathscr{M})\otimes_{\mathcal{O}_X}p_{i*}\mathscr{P}^n_X\end{aligned}$$

(où le second isomorphisme repose sur l'isomorphisme de bidualité pour $p_{i*}\mathscr{P}^n_X$), on obtient l'identité. Grâce à ces identifications, on peut donc munir $\mathscr{K}=\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{N},\mathscr{M})$ d'une m-PD-stratification en posant $\varepsilon^{\mathscr{K}}_n=\mathscr{H}om(\varepsilon^{\mathscr{N}}_n,(\varepsilon^{\mathscr{M}}_n)^{-1})$.

Pour l'expliciter en coordonnées locales, on remarque d'abord grâce à (1.1.6.5) que, si $i=0$ et $\psi_{\underline{k}}\in\mathscr{K}$, l'image de $\psi_{\underline{k}}\otimes\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ par l'identification précédente est le morphisme $\Psi_{\underline{k}}$ défini par

$$z\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{i}\rangle}\longmapsto \left\{\begin{smallmatrix}\underline{i}\\ \underline{k}\end{smallmatrix}\right\}\psi_{\underline{k}}(z)\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{i}-\underline{k}\rangle}.$$

Pour tout morphisme $\mathscr{P}^n_X$-linéaire $\Psi:\mathscr{N}\otimes_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_X)^{\check{}}\to\mathscr{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_X)^{\check{}}$, il existe donc une unique famille d'homomorphismes $\mathcal{O}_X$-linéaires $\psi_{\underline{k}}:\mathscr{N}\to\mathscr{M}$ telle que $\Psi=\sum_{\underline{k}}\Psi_{\underline{k}}$, où $\Psi_{\underline{k}}$ est défini comme plus haut. On applique cette remarque au morphisme $\Psi=\varepsilon^{\mathscr{K}}_n(1\otimes\psi)$ $\in\mathscr{K}\otimes_{\mathcal{O}_X}p_{0*}\mathscr{P}^n_X$, correspondant à

$$\Psi' = (\varepsilon^{\mathscr{M}}_n)^{-1}\circ(\mathrm{Id}_{(p_{1*}\mathscr{P}^n_X)^{\check{}}}\otimes\psi)\circ\varepsilon^{\mathscr{N}}_n : \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_X,\mathscr{N})\longrightarrow\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_X,\mathscr{M}).$$

On peut écrire $\Psi=\sum_{\underline{k}}\psi_{\underline{k}}\otimes\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$, avec $\psi_{\underline{k}}=\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle}\psi\in\mathscr{K}$. Pour calculer les $\psi_{\underline{k}}$, on considère une section de la forme $z\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{i}\rangle}\in\mathscr{N}\otimes_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_X)^{\check{}}\simeq\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_X,\mathscr{N})$. Compte tenu de (1.1.6.6) et (1.1.6.1), son image par Ψ' est donnée par

$$\begin{aligned}\Psi'(z\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{i}\rangle}) &= \sum_{\underline{h}\le\underline{i}}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{i}\\ \underline{h}\end{smallmatrix}\right\}\Big(\sum_{\underline{h}\le\underline{k}\le\underline{i}}(-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{i}-\underline{h}\\ \underline{i}-\underline{k}\end{smallmatrix}\right\}\psi(z\underline{\partial}^{\langle\underline{h}\rangle})\,\underline{\partial}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{i}-\underline{k}\rangle}\Big)\\ &= \sum_{\underline{k}\le\underline{i}}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{i}\\ \underline{k}\end{smallmatrix}\right\}\Big(\sum_{\underline{h}\le\underline{k}}(-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{smallmatrix}\right\}\psi(z\underline{\partial}^{\langle\underline{h}\rangle})\underline{\partial}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}\Big)\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{i}-\underline{k}\rangle}.\end{aligned}$$

On vérifie aisément que les applications

$$z\longmapsto\sum_{\underline{h}\le\underline{k}}(-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{smallmatrix}\right\}\psi(z\underline{\partial}^{\langle\underline{h}\rangle})\underline{\partial}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}$$

sont bien des morphismes $\mathcal{O}_X$-linéaires ; d'après ce qui précède, cela entraîne que ce sont les morphismes $\psi_{\underline{k}}=\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle}\psi$, d'où (1.1.7.3).

1.1.8. Soit $\mathscr{B}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative. Rappelons qu'une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche sur $\mathscr{B}$ est dite compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre si elle induit cette dernière, et si les isomorphismes $\varepsilon_n^{\mathscr{B}} : \mathscr{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{B} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^n_{X,(m)}$ définissant la m-PD-stratification correspondante sur $\mathscr{B}$ sont des isomorphismes de $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$-algèbres ; il est équivalent de demander que l'action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ sur $\mathscr{B}$ vérifie la formule de Leibnitz [5, 2.3.4]. On peut alors munir $\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ d'une structure de faisceau d'anneaux telle que les applications naturelles $\mathscr{B} \to \mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ et $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ soient des homomorphismes d'anneaux, et la donnée d'une structure de $(\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)})$-module à gauche sur un $\mathscr{B}$-module $\mathscr{E}$, prolongeant sa structure de $\mathscr{B}$-module, est équivalente à la donnée d'une m-PD-stratification $(\varepsilon_n^{\mathscr{E}})$ sur $\mathscr{E}$ telle que les isomorphismes $\varepsilon_n^{\mathscr{E}}$ soient semi-linéaires par rapport aux $\varepsilon_n^{\mathscr{B}}$ [5, 2.3.5].

Ce dernier résultat s'étend aux $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite de la manière suivante. On observe d'abord que, si $\mathscr{A}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative, et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{B}$-module, alors $\mathscr{B}$ opère par fonctorialité sur $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{A}, \mathscr{M})$, de manière $\mathcal{O}_X$-linéaire, de sorte que $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ est muni d'une structure canonique de $(\mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{B})$-module. On applique alors cette remarque à $\mathscr{A} = p_{i*}\mathscr{P}^n_{X,(m)}$. Lorsque la structure de $\mathscr{B}$-module de $\mathscr{M}$ est induite par une structure de $(\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)})$-module à droite, ce qui fait a fortiori de $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite, la m-PD-costratification $\varepsilon_n^{\mathscr{M}}$ correspondante est semi-linéaire par rapport à $(\varepsilon_n^{\mathscr{B}})^{-1}$: par un calcul direct en coordonnées locales, on le déduit de la formule de Leibnitz. Réciproquement, si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{B}$-module muni d'une m-PD-costratification $\varepsilon_n^{\mathscr{M}}$ semi-linéaire par rapport à $(\varepsilon_n^{\mathscr{B}})^{-1}$, il possède une unique structure de $(\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)})$-module à droite correspondant à cette costratification. En effet, il est muni d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite par 1.1.4. Comme $\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ est engendré comme anneau par $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}_X^{(m)}$, $\mathscr{M}$ possède au plus une structure de $(\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)})$-module à droite prolongeant l'action de ces anneaux, de sorte que, pour vérifier son existence, il suffit de le faire par un calcul en coordonnées locales, et cela résulte encore de la formule de Leibnitz.

1.2. Action par l'opérateur adjoint

Sur un schéma X lisse sur un corps de caractéristique 0, il est classique que le faisceau ω_X des formes différentielles de degré maximum est muni d'une structure canonique de $\mathscr{D}_X$-module à droite. Grâce à la théorie du foncteur image inverse extraordinaire $f^!$ pour les $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents, et à l'interprétation d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module à droite en termes de costratification donnée dans la section précédente, nous montrons ici qu'une telle structure existe sur ω_X sans hypothèse de caractéristique, pour tout morphisme lisse $X \to S$. En explicitant les isomorphismes de [27], nous montrons ensuite que cette structure, construite de manière intrinsèque, est comme d'habitude donnée en coordonnées locales par l'action de $\mathscr{D}_X$ par l'opérateur adjoint.

Comme on dispose d'homomorphismes canoniques $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X$, il suffit dans cette section d'étudier l'action du faisceau $\mathscr{D}_X$ des opérateurs différentiels usuels.

1.2.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse de dimension relative d entre deux schémas. On suppose dans un premier temps que S est localement nœthérien, ce qui permet d'utiliser les résultats de [27]. On munit alors le faisceau $\omega_X = \Omega^d_{X/S}$ d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module à droite de la manière suivante.

On note $\Delta^n_X = \mathrm{Spec}\, \mathscr{P}^n_X$ le voisinage infinitésimal d'ordre n de X plongé diagonalement dans $X \times_S X$, $p_i : \Delta^n_X \to X$ les projections. Comme f est lisse, la construction du foncteur $f^!$ pour les complexes à cohomologie quasi-cohérente [27, III, th. 8.7] montre que $\omega_X = f^!(\mathcal{O}_S[-d])$. Comme $f \circ p_0 = f \circ p_1$, on en déduit un isomorphisme canonique

$$(1.2.1.1) \qquad \varepsilon_n \;:\; p_0^\flat\, \omega_X \;=\; p_0^!\, \omega_X \;\simeq\; p_0^! f^!(\mathcal{O}_S[-d]) \;\simeq\; p_1^! f^!(\mathcal{O}_S[-d]) \;\simeq\; p_1^!\, \omega_X \;=\; p_1^\flat\, \omega_X.$$

La transitivité du foncteur $f^!$ par rapport à f entraîne que, pour n variable, les ε_n forment une famille compatible d'isomorphismes, avec $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}$, et qu'ils satisfont la condition de cocycle de 1.1.5. Par conséquent, ils munissent ω_X d'une structure canonique de $\mathscr{D}_X$-module à droite.

1.2.2. Soit $U \subset X$ un ouvert sur lequel il existe un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ relativement à S. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut définir comme en caractéristique nulle *l'adjoint* d'un opérateur différentiel $P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \in \Gamma(U, \mathscr{D}^{(m)}_X)$ en posant

$$(1.2.2.1) \qquad {}^{\mathrm{t}}P \;=\; \sum_{\underline{k}} \;(-1)^{|\underline{k}|}\, \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}\, a_{\underline{k}}.$$

On vérifie immédiatement que, pour tous $P, Q \in \Gamma(U, \mathscr{D}^{(m)}_X)$, on a ${}^{\mathrm{t}}(PQ) \;=\; {}^{\mathrm{t}}Q\, {}^{\mathrm{t}}P$. On obtient ainsi une anti-involution de l'anneau $\mathscr{D}^{(m)}_X$, qui dépend du choix des coordonnées t_i (il en existe néanmoins une généralisation intrinsèque, *cf.* 1.3.4).

1.2.3. THÉORÈME. — *Soient S un schéma localement nœthérien, $f : X \to S$ un morphisme lisse de dimension relative d, $\omega_X = \Omega^d_{X/S}$, $U \subset X$ un ouvert possédant un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, et $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Alors, pour la structure de $\mathscr{D}_X$-module à droite sur ω_X définie en* 1.2.1, *on a*

$$(1.2.3.1) \qquad (a\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d) \cdot P \;=\; ({}^{\mathrm{t}}P \cdot a)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d$$

pour tout $P \in \Gamma(U, \mathscr{D}_X)$.

Par associativité, on se ramène à vérifier la relation :

$$(1.2.3.2) \qquad \forall\; \underline{k} \neq \underline{0}, \quad (dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d)\underline{\partial}^{[\underline{k}]} \;=\; 0.$$

Soient $Y = X \times_S X$, $q_0, q_1 : Y \to X$ les projections, $t'_i = q_0^*(t_i)$, $t''_i = q_1^*(t_i)$, $\tau_i = t''_i - t'_i$. Comme plus haut, on note $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ (resp. $\underline{\tilde{\partial}}^{[\underline{k}]}$) la base duale de la base des $\underline{\tau}^{\underline{k}}$ dans $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathscr{P}^n_X, \mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathscr{P}^n_X, \mathcal{O}_X)$). En posant $\omega = dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d$, il suffit d'après (1.1.6.1) de prouver que, si ε_n est l'isomorphisme défini par (1.2.1.1), on a pour tout n, et tout $\underline{k}$ tel que $|\underline{k}| \leq n$, (1.2.3.3) $$\varepsilon_n(\omega \otimes \underline{\partial}^{[\underline{k}]}) = \underline{\tilde{\partial}}^{[\underline{k}]} \otimes \omega.$$

Comme les p_j sont finis et plats, on a $p_j^! \omega_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{j*}\mathcal{P}_X^n, \omega_X)$. Soit $X_n \subset Y$ le sous-schéma fermé défini par l'idéal $\mathcal{I} = (\tau_1^{n+1}, \ldots, \tau_d^{n+1})$. Pour prouver les relations (1.2.3.3), les surjections $\mathcal{P}_X^{dn} \to \mathcal{O}_{X_n} \to \mathcal{P}_X^n$ permettent de remplacer le système projectif des $\mathcal{P}_X^n$ par celui des $\mathcal{O}_{X_n}$, qui sont encore finis et plats sur $\mathcal{O}_X$.

Soit alors $\underline{n} = (n, \ldots, n)$. On vérifie immédiatement que, pour tout $\underline{k}$, $\underline{\tau}^{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{n}]} = \underline{\partial}^{[\underline{n}-\underline{k}]}$ (resp. $\underline{\tau}^{\underline{k}} \underline{\tilde{\partial}}^{[\underline{n}]} = \underline{\tilde{\partial}}^{[\underline{n}-\underline{k}]}$), de sorte que $p_0^! \omega_X$ (resp. $p_1^! \omega_X$) est un $\mathcal{O}_{X_n}$-module libre de rang 1, de base $\omega \otimes \underline{\partial}^{[\underline{n}]}$ (resp. $\underline{\tilde{\partial}}^{[\underline{n}]} \otimes \omega$). Par linéarité, il suffit donc de prouver (1.2.3.3) pour $\underline{k} = \underline{n}$.

La démonstration[1] de cette relation est l'objet des sections qui suivent.

1.2.4. Notons également p_j les projections de X_n sur X, et ε_n les isomorphismes induits par les isomorphismes (1.2.1.1) sur les X_n. On peut aussi les décrire de la manière suivante : si $u : X_n \hookrightarrow Y$ est l'immersion canonique, ε_n est égal à l'isomorphisme composé

(1.2.4.1) $$p_0^! \,\omega_X \simeq u^! q_0^! \,\omega_X \simeq u^! \omega_Y[d] \simeq u^! q_1^! \,\omega_X \simeq p_1^! \,\omega_X,$$

avec $p_j^! \omega_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{j*}\mathcal{O}_{X_n}, \omega_X) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{j*}\mathcal{O}_{X_n}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X$.

D'autre part, les formes différentielles $\omega' = q_0^* \omega$ et $\omega'' = q_1^* \omega$ forment respectivement des bases de $q_0^* \omega_X \simeq \omega_{Y,1/X}$, et $q_1^* \omega_X \simeq \omega_{Y,0/X}$, en notant $\omega_{Y,j/X}$ le faisceau des formes différentielles de degré maximum relatif à q_j. Comme les q_j sont lisses, on a, avec les notations de [27, III 2],

$$q_j^! \,\omega_X = q_j^\sharp \,\omega_X = q_j^* \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y,j/X}[d],$$

et, d'après [27, III 2.2], les isomorphismes $q_j^! \,\omega_X[-d] \simeq \omega_Y$ sont les isomorphismes

(1.2.4.2) $$q_j^* \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y,j/X} \xrightarrow{\ \sim\ } \omega_Y$$

envoyant respectivement $\omega' \otimes \omega''$ et $\omega'' \otimes \omega'$ sur $\omega' \wedge \omega''$ et $\omega'' \wedge \omega' = (-1)^d \omega' \wedge \omega''$. Les isomorphismes $u^! q_j^! \,\omega_X \simeq u^! \omega_Y[d]$ se déduisent par décalage et fonctorialité des isomorphismes (1.2.4.2). Comme $\mathcal{I}$ est un idéal régulier, les $\mathcal{H}^q(u^! \mathcal{E}[d])$ sont nuls pour tout $\mathcal{O}_Y$-module plat $\mathcal{E}$ et tout $q \neq 0$, et $\mathcal{H}^0(u^! \mathcal{E}[d])$ peut être calculé au moyen de l'isomorphisme local fondamental [27, III 7.2]

---

[1] Dans cette démonstration, nous suivons les définitions de [27] concernant les foncteurs $f^\sharp$ et $f^\flat$, et les isomorphismes reliant ces foncteurs. Dans un preprint récent [20], Conrad signale que, avec ces définitions, les relations de transitivité du type de [27, III, 1.6 et 8.6] relatives aux composés de 3 morphismes nécessitent dans certains cas l'introduction de signes correcteurs, et il propose d'autres conventions de signe pour y remédier (différentes de celles de l'appendice de [21]). Les modifications qu'il introduit ne dépendent que de la dimension relative des morphismes considérés lorsqu'ils sont lisses, ou de leur codimension lorsqu'il s'agit d'immersions régulières. En particulier, ce sont les mêmes modifications qui interviendraient dans le calcul qui suit de l'isomorphisme $p_0^! \,\omega_X \simeq u^! \omega_Y[d]$ et dans celui, totalement symétrique, de l'isomorphisme $p_1^! \,\omega_X \simeq u^! \omega_Y[d]$. Par suite, bien que leur adoption amènerait à modifier les signes de certaines des formules intermédiaires utilisées en 1.2.4 et 1.2.5, ces changements de signe se compenseraient dans le calcul de l'isomorphisme composé $p_0^! \,\omega_X \simeq p_1^! \,\omega_X$, et n'affecteraient pas la formule (1.2.3.1). C'est pourquoi, pour la commodité des références, nous avons conservé ici les conventions de [27].

$$\mathcal{H}^0(u^!\mathcal{E}[d]) = \mathcal{E}xt^d_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{X_n}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\overset{d}{\wedge}\, \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^{\check{}}.$$

Si on note θ_i la classe de τ_i^{n+1} dans $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, les isomorphismes $u^! q_j^! \ \omega_X \simeq u^! \omega_Y[d]$ s'identifient donc aux isomorphismes

$$q_j^* \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y,j/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\overset{d}{\wedge}\, \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^{\check{}} \xrightarrow{\ \sim\ } \omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\overset{d}{\wedge}\, \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^{\check{}}$$

envoyant respectivement $\omega' \otimes \omega'' \otimes (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_d)^{\check{}}$ et $(-1)^d \omega'' \otimes \omega' \otimes (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_d)^{\check{}}$ sur $(\omega' \wedge \omega'') \otimes (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_d)^{\check{}}$. Pour prouver 1.2.3, il suffit donc de vérifier que les isomorphismes $p_j^! \ \omega_X \simeq u^! q_j^! \ \omega_X$ sont respectivement donnés par

(1.2.4.3) $$\omega \otimes \underline{\partial}^{[\underline{n}]} \longmapsto \omega' \otimes \omega'' \otimes (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_d)^{\check{}},$$

(1.2.4.4) $$\underline{\tilde{\partial}}^{[\underline{n}]} \otimes \omega \longmapsto (-1)^d \omega'' \otimes \omega' \otimes (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_d)^{\check{}}.$$

1.2.5. L'isomorphisme $p_j^! \ \omega_X \simeq u^! q_j^! \ \omega_X$ est l'isomorphisme résidu [27, II 8.2] :

$$p_j^\flat \ \omega_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{j*}\mathcal{O}_{X_n}, \omega_X) \xrightarrow{\ \sim\ } u^\flat q_j^\sharp \ \omega_X \simeq q_j^* \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y,j/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\overset{d}{\wedge}\, \mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^{\check{}}.$$

Rappelons sa construction, pour $j = 0$. On considère le diagramme commutatif

(1.2.5.1) $$\begin{array}{ccccc} Y'_0 & \hookrightarrow & X^3 & \xrightarrow{q_{02}} & Y \\ {\scriptstyle q'_0}\downarrow\uparrow{\scriptstyle v_0} & & {\scriptstyle q_{01}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle s_0} & // & \downarrow{\scriptstyle q_0} \\ X_n & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{q_0} & X, \end{array}$$

où les carrés sont cartésiens. Les morphismes q_{01} et q_{02} sont les projections sur les facteurs correspondant aux indices, et la section s_0 est définie par les $\tau''_i = 1 \otimes \tau_i$. On a $p_0 = q_0 \circ u$, et on note h_0 le morphisme composé $Y'_0 \to Y$, qui est donc fini et plat. Par construction, l'isomorphisme résidu est le composé des trois isomorphismes

$$p_0^\flat \ \omega_X \simeq v_0^\flat q_0'^\sharp p_0^\flat \ \omega_X \simeq v_0^\flat h_0^\flat q_0^\sharp \omega_X \simeq u^\flat q_0^\sharp \omega_X,$$

qui s'explicitent comme suit.

a) Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de v_0. L'isomorphisme $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{O}_{X_n} \otimes \Omega^1_{Y'_0/X_n}$ défini par la dérivation relativement à X_n induit une trivialisation $\mathcal{O}_{X_n} \xrightarrow{\ \sim\ } v_0^* \omega_{Y'_0/X_n} \otimes (\wedge^d \mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{\check{}}$. Pour tout $\mathcal{O}_{X_n}$-module plat $\mathcal{E}$, l'isomorphisme

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E} \otimes v_0^* \omega_{Y'_0/X_n} \otimes (\overset{d}{\wedge}\, \mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{\check{}} \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(\mathcal{O}_{X_n}, q_0'^*\mathcal{E} \otimes \omega_{Y'_0/X_n}[d]) = v_0^\flat q_0'^\sharp \mathcal{E}$$

est obtenu en composant cette trivialisation avec l'isomorphisme local fondamental. Si on note encore τ''_i la classe de τ''_i dans $\mathcal{J}$, cet isomorphisme envoie donc une section e de $\mathcal{E}$ sur $e \otimes (d\tau''_1 \wedge \ldots \wedge d\tau''_d) \otimes (\tau''_1 \wedge \ldots \wedge \tau''_d)^{\check{}}$. Comme $d\tau''_i = d(h_0^* t''_i)$, l'image de $\omega \otimes \underline{\partial}^{[\underline{n}]}$ dans $v_0^\flat q_0'^\sharp p_0^\flat \ \omega_X$ est donc la section

(1.2.5.2) $$(\omega \otimes \underline{\partial}^{[\underline{n}]}) \otimes (d(h_0^* t''_1) \wedge \ldots \wedge d(h_0^* t''_d)) \otimes (\tau''_1 \wedge \ldots \wedge \tau''_d)^{\check{}}.$$

b) L'isomorphisme

$$q_0'^\sharp p_0^\flat \ \omega_X[-d] = q_0'^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X_n}, \omega_X) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'_0}} \omega_{Y'_0/X_n}$$

$$\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{Y'_0}, q_0^*\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y,0/X}) = h_0^\flat q_0^\sharp \omega_X[-d]$$

résulte des isomorphismes de commutation aux changements de base du dual sur $\mathcal{O}_X$ d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini, et du module des différentielles relatives. Par conséquent, l'isomorphisme $v_0^\flat q_0'^\sharp p_0^\flat\, \omega_X \simeq v_0^\flat h_0^\flat q_0^\sharp \omega_X$, qui s'en déduit par décalage et fonctorialité, envoie la section (1.2.5.2) sur

$$(1.2.5.3) \qquad (\omega' \otimes \omega'' \otimes q_0^*(\underline{\partial}^{[\underline{n}]})) \otimes (\tau_1'' \wedge \ldots \wedge \tau_d'')^\vee.$$

c) L'isomorphisme $v_0^\flat h_0^\flat q_0^\sharp \omega_X \simeq u^\flat q_0^\sharp \omega_X$ est défini par l'isomorphisme de transitivité $v_0^\flat h_0^\flat \simeq u^\flat$ pour le composé de deux morphismes finis. Si l'on choisit une résolution injective $\mathcal{I}^\bullet$ de $q_0^\sharp \omega_X$, c'est l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(\mathcal{O}_{X_n}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{Y'_0}, \mathcal{I}^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{X_n}, \mathcal{I}^\bullet).$$

On peut également le décrire en utilisant des résolutions localement libres de type fini de $\mathcal{O}_{X_n}$ sur $\mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_{Y'_0}$: si $\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{L}'^\bullet$ sont de telles résolutions, et si $\varphi : \mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{L}'^\bullet$ est un morphisme semi-linéaire par rapport à $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_{Y'_0}$, induisant l'identité sur $\mathcal{O}_{X_n}$, cet isomorphisme s'identifie au quasi-isomorphisme

$$\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(\mathcal{L}'^\bullet, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{Y'_0}, \mathcal{I}^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}'^\bullet, \mathcal{I}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{I}^\bullet).$$

Comme $\mathcal{O}_{Y'}$ est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_Y$, ce dernier s'identifie encore au quasi-isomorphisme

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(\mathcal{L}'^\bullet, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{Y'_0}, q_0^*\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y,0/X}))[d] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}'^\bullet, q_0^*\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y,0/X})[d]$$

$$(1.2.5.4) \qquad \longrightarrow \mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}^\bullet, q_0^*\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y,0/X})[d].$$

Prenons pour $\mathcal{L}^\bullet$ le complexe de Koszul de la suite $\tau_1^{n+1}, \ldots, \tau_d^{n+1}$ sur $\mathcal{O}_Y$, et pour $\mathcal{L}'^\bullet$ celui de la suite $\tau_1'', \ldots, \tau_d''$ sur $\mathcal{O}_{Y'_0}$. On remarque alors que $h_0^*(\tau_i) = \tau_i' + \tau_i''$, en notant τ_i' l'image dans $\mathcal{O}_{Y'_0}$ de la section $\tau_i \otimes 1$ de $\mathcal{O}_{X^3}$. Comme on a $\tau_i' = q_0'^*(\tau_i)$, et que $\tau_i^{n+1} = 0$ dans $\mathcal{O}_{X_n}$, on peut écrire dans $\mathcal{O}_{Y'_0}$

$$h_0^*(\tau_i^{n+1}) = (\tau_i' + \tau_i'')^{n+1} - \tau_i'^{n+1} = \tau_i''\Big(\sum_{k=0}^{n} h_0^*(\tau_i)^{n-k}\tau_i'^k\Big).$$

Posons $a_i = \sum_{k=0}^n h_0^*(\tau_i)^{n-k}\tau_i'^k$. On définit de la manière suivante un morphisme de complexes $\varphi : \mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{L}'^\bullet$ induisant l'identité sur $\mathcal{O}_{X_n}$: si l'on écrit $\mathcal{L}^\bullet$ (resp. $\mathcal{L}'^\bullet$) comme produit tensoriel des complexes $\mathcal{L}_i^\bullet : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y$ (resp. $\mathcal{L}_i'^\bullet : \mathcal{O}_{Y'_0} \to \mathcal{O}_{Y'_0}$), placés en degrés $[-1, 0]$, et ayant pour différentielle la multiplication par τ_i^{n+1} (resp. τ_i''), φ est le produit tensoriel des morphismes φ_i donnés par h_0^* en degré 0, et par $a_i h_0^*$ en degré -1. Soit $e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$ (resp. $e_1' \wedge \ldots \wedge e_d'$ la base canonique de $\mathcal{L}^{-d}$ (resp. $\mathcal{L}'^{-d}$). Dans l'isomorphisme (1.2.5.4), le premier isomorphisme est induit par l'évaluation en $1 \in \mathcal{O}_{Y'_0}$. Si ψ est l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y'_0}$-linéaire qui envoie $e_1' \wedge \ldots \wedge e_d'$ sur $\omega' \otimes \omega'' \otimes q_0^*(\underline{\partial}^{[\underline{n}]})$, son image est donc l'homomorphisme $\mathcal{O}_Y$-linéaire qui prend la valeur $\omega' \otimes \omega''$ sur $\underline{\tau}'^{\underline{k}} \otimes (e_1' \wedge \ldots \wedge e_d')$ lorsque $\underline{k} = \underline{n}$, et 0 lorsque $\underline{k} \neq \underline{n}$. Comme $\varphi(e_1 \wedge \ldots \wedge e_d) = (a_1 \ldots a_d)\, e_1' \wedge \ldots \wedge e_d'$, et que le coefficient de $\underline{\tau}'^{\underline{n}}$ dans $a_1 \ldots a_d$ est égal à 1, l'image de ψ par (1.2.5.4) est donc l'homomorphisme

$\mathcal{O}_Y$-linéaire qui envoie $e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$ sur $\omega' \otimes \omega''$. Or l'isomorphisme local fondamental relatif à l'immersion u (resp. v_0) envoie par construction la classe de $\omega' \otimes \omega'' \otimes (e_1 \wedge \ldots \wedge e_d)^{\check{}}$ sur $\omega' \otimes \omega'' \otimes (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_d)^{\check{}}$ (resp. la classe de $(\omega' \otimes \omega'' \otimes q_0^*(\underline{\partial}^{[\underline{n}]})) \otimes (e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_d)^{\check{}}$ sur $(\omega' \otimes \omega'' \otimes q_0^*(\underline{\partial}^{[\underline{n}]})) \otimes (\tau''_1 \wedge \ldots \wedge \tau''_d)^{\check{}})$, ce qui achève d'établir la formule (1.2.4.3).

On explicite de la même manière l'isomorphisme $p_1^!\omega_X \simeq u^!q_1^!\omega_X$, en utilisant le diagramme cartésien

(1.2.5.5)
$$\begin{tikzcd} Y'_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right, "q'_1"'] & X^3 \arrow[r, "q_{0\,2}"] \arrow[d, shift right, "q_{1\,2}"'] & Y \arrow[d, "q_1"] \\ X_n \arrow[r, hook, "u"] \arrow[u, hook, shift right, "v_1"'] & Y \arrow[r, "q_1"] \arrow[u, hook, shift right, "s_1"'] \arrow[ur, equal] & X, \end{tikzcd}$$

dans lequel la section s_1 est maintenant définie par les $\tau'_i = \tau_i \otimes 1$. Soit h_1 le morphisme composé $Y'_1 \to Y$. Dans le calcul de l'isomorphisme $p_1^\flat\,\omega_X \simeq v_1^\flat\, q_1'^{\sharp}\, p_1^\flat\,\omega_X$ analogue à celui fait en a) plus haut, on observe que $d\tau'_i = -d(t_i \otimes 1 \otimes 1) = -d(h_1^* t'_i)$. Il en résulte que $\underline{\tilde{\partial}}^{[\underline{n}]} \otimes \omega$ a pour image $(-1)^d(\underline{\tilde{\partial}}^{[\underline{n}]} \otimes \omega) \otimes (d(h_1^*t'_1) \wedge \ldots \wedge d(h_1^*t'_d)) \otimes (\tau'_1 \wedge \ldots \wedge \tau'_d)^{\check{}}$. Le reste du calcul s'effectue comme dans le cas précédent. La formule (1.2.4.4) en découle, achevant ainsi la démonstration du théorème 1.2.3.

1.2.6. COROLLAIRE. — *Pour tout morphisme lisse $X \to S$, il existe sur ω_X une unique structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite prolongeant sa structure de $\mathcal{O}_X$-module, et telle que, pour tout système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ sur un ouvert U de X, toute section $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, et tout opérateur $P \in \Gamma(U, \mathcal{D}_X)$, on ait*

(1.2.6.1)
$$(a\,dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d)P \;=\; ({}^{\mathrm{t}}P\cdot a)\,dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d.$$

Comme la condition de l'énoncé caractérise de manière unique la structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite de ω_X, il suffit de faire la construction localement sur X. On peut donc supposer X et S affines. D'autre part, si $S' \to S$ est un morphisme de schémas, et si $X' = S' \times_S X$, une structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite sur ω_X vérifiant la condition de l'énoncé définit par extension des scalaires une structure de $\mathcal{D}_{X'}$-module à droite sur $\omega_{X'}$, vérifiant (1.2.6.1) pour tout système de coordonnées locales provenant de X : cela résulte de ce que $\mathcal{O}_S$ est dans le centre de $\mathcal{D}_X$, et $\mathcal{D}_{X'} \simeq \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{D}_X$. Or le théorème 1.2.3 montre qu'une telle structure existe lorsque S est nœthérien, et qu'elle commute aux changements de base $S' \to S$, où S' est nœthérien. Le corollaire en résulte par l'argument usuel de passage à la limite.

1.2.7. La structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite sur ω_X que fournit le théorème 1.2.3 permet d'étendre sans hypothèse de caractéristique la méthode usuelle pour transformer un $\mathcal{D}_X$-module à gauche en $\mathcal{D}_X$-module à droite, et réciproquement : il s'agit de donner un sens intrinsèque global à l'action par l'opérateur adjoint. Soit donc $m \in \overline{\mathbb{N}}$:

a) Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche, alors $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ possède d'après 1.1.7 une structure canonique de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite, définie en coordonnées locales par (1.1.7.1). En notant $\omega = dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d$ la base locale de ω_X définie par des coordonnées $t_1, \ldots, t_d$, et en identifiant $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ au moyen de cette base, il résulte de (1.1.7.1) et (1.2.3.2) que la structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite de $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ s'identifie à celle qu'on définit sur $\mathcal{E}$ par

$$(P, x) \longmapsto {}^{\mathrm{t}}P \cdot x.$$

Nous dirons souvent que la structure ainsi définie sur $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ est la *structure tordue* de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite.

b) Si $\mathcal{M}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite, alors $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathcal{M})$ possède d'après 1.1.7 une structure canonique de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche, définie en coordonnées locales par (1.1.7.3). Localement, on peut encore identifier $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ et $\mathcal{M}$ grâce à la base duale $\omega^{\check{}}$ de ω_X^{-1}, et cette structure correspond alors à celle qu'on définit sur $\mathcal{M}$ par

$$(P, x) \longmapsto x \cdot {}^{\mathrm{t}}P.$$

Nous dirons encore que la structure obtenue sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ est la *structure tordue* de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche.

c) De ces description locales résulte que les isomorphismes canoniques

$$\omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E},$$

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

sont $\mathscr{D}_X^{(m)}$-linéaires, de sorte qu'on obtient des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche et la catégorie des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite.

Soient $\mathcal{B}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative, munie d'une action à gauche de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ compatible avec sa structure d'algèbre, et $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ le faisceau d'opérateurs différentiels associé (*cf.* 1.1.8). Les constructions précédentes s'étendent alors aux $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$-modules. En effet, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche, les isomorphismes $\varepsilon_n^{\mathcal{E}}$ formant la m-PD-stratification de $\mathcal{E}$ sont semi-linéaires par rapport aux isomorphismes $\varepsilon_n^{\mathcal{B}}$ définissant celle de $\mathcal{B}$. La costratification de $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ étant donnée par $\varepsilon_n^{\omega \otimes \mathcal{E}} = \varepsilon_n^{\omega} \otimes (\varepsilon_n^{\mathcal{E}})^{-1}$, il s'ensuit que $\varepsilon_n^{\omega \otimes \mathcal{E}}$ est semi-linéaire par rapport à $(\varepsilon_n^{\mathcal{B}})^{-1}$, donc que $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite. On voit de même que, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ est un $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche, et que les isomorphismes de c) sont $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$-linéaires.

Supposons maintenant que $m \in \mathbb{N}$. Par passage de gauche à droite, on peut alors étendre aux $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite les conditions de nilpotence introduites dans [5, 2.3.7] :

1.2.8. PROPOSITION. — *Soit $X \to S$ un morphisme lisse, tel que p soit nilpotent sur S.*

(i) *Il existe un entier N tel que, pour tout ouvert $U \subset X$, tout système de coordonnées relatives $t_1, \ldots, t_d$ sur U, et toute section $\omega \in \Gamma(U, \omega_X)$, on ait $\omega \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = 0$ pour $|\underline{k}| \geq N$.*

(ii) *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i possédant un système de coordonnées relatives tel que, si on note $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$ les opérateurs différentiels correspondants, il existe pour toute section e de $\mathscr{M}$ sur un ouvert de U_i un entier N tel que $e\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = 0$ pour $|\underline{k}| \geq N$.*

b) *La condition d'annulation précédente est valable pour tout ouvert $U \subset X$, tout système de coordonnées locales sur U, et toute section de $\mathscr{M}$ sur U.*

c) *Le $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ est quasi-nilpotent.*

L'assertion (i) résulte de ce que la structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module de ω_X est induite par sa structure de $\mathscr{D}_X$-module, et de ce que $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = \underline{q}!\, \underline{\partial}^{[\underline{k}]}$, où $\underline{q}$ est défini par $\underline{k} = p^m \underline{q} + \underline{r}$, avec $0 \leq r_i < p^m$ pour tout i. Compte tenu de [5, 2.3.7], l'assertion (ii) en résulte grâce aux formules (1.1.7.1) et (1.1.7.3).

Définition. — Nous dirons qu'un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite est *quasi-nilpotent* s'il vérifie les conditions de la proposition, et *nilpotent* si l'entier N peut être choisi indépendant de e. Cette dernière condition est indépendante du système de coordonnées locales considéré : pour le vérifier, on peut se ramener par suites exactes au cas où $\mathscr{M}$ est annulé par p, soit encore au cas où S est de caractéristique p; d'après [5, 2.2.7], les opérateurs $\partial_i^{\langle p^{m+1} \rangle}$ engendrent alors un idéal bilatère $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}_X^{(m)}$, indépendant du système de coordonnées choisi, et la condition de nilpotence équivaut à dire que $\mathscr{M}$ est annulé par une puissance de $\mathscr{K}$.

1.3. Isomorphismes de transposition

Par multiplication à droite ou à gauche, l'anneau $\mathscr{D}_X^{(m)}$ est muni d'une structure naturelle de bimodule sur lui-même. Les sections qui précèdent montrent que, par tensorisation avec un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche ou à droite, on peut obtenir selon les cas une nouvelle structure de bimodule sur le produit tensoriel. Il est parfois nécessaire de pouvoir échanger les structures ainsi obtenues, et nous explicitons ici les isomorphismes qui permettent de telles transformations. En particulier, nous donnons une forme intrinsèque de l'automorphisme de passage à l'adjoint, qui intervient souvent dans la construction des morphismes canoniques de la théorie des $\mathscr{D}$-modules. Curieusement, ce point semble quelque peu négligé par certains auteurs, ce qui donne parfois lieu à des constructions incomplètes ou incorrectes.

1.3.1. PROPOSITION. — *Soient $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche, et $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E}$, $\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ les faisceaux obtenus en prenant respectivement le produit tensoriel pour la multiplication à droite et à gauche sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Ces faisceaux sont tous deux munis d'une structure canonique de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-bimodule, et il existe un unique isomorphisme de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-bimodules*

$$\gamma_{\mathscr{E}} : \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$$

tel que $\gamma_{\mathcal{E}}(1 \otimes e) = e \otimes 1$ *pour toute section* e *de* $\mathcal{E}$. *En coordonnées locales, on a alors*

$$\gamma_{\mathcal{E}}(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes e) = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle} e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}. \tag{1.3.1.1}$$

L'isomorphisme $\gamma_{\mathcal{E}}$ sera appelé *isomorphisme de transposition* relatif à $\mathcal{E}$.

La structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche de $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ provient de la multiplication à gauche sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$, et sa structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite est la structure produit tensoriel définie par 1.1.7 à partir de la multiplication à droite sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$. De même, la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est donnée par la multiplication à droite sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$, et sa structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche est la structure produit tensoriel définie en [5, 2.3.3] à partir de la multiplication à gauche sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Que ces structures soient compatibles résulte de la fonctorialité des structures produit tensoriel.

Grâce la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, il existe un unique morphisme de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche $\gamma_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ envoyant une section de la forme $P \otimes e$, $P \in \mathcal{D}_X^{(m)}$, $e \in \mathcal{E}$, sur $P(e \otimes 1)$. Comme $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ sont des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-bimodules, on est ramené, pour vérifier la $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéarité à droite de $\gamma_{\mathcal{E}}$, à montrer que, pour tout $Q \in \mathcal{D}_X^{(m)}$, on a $\gamma_{\mathcal{E}}((1 \otimes e)Q) = \gamma_{\mathcal{E}}(1 \otimes e)Q$. On peut supposer qu'on dispose d'un système de coordonnées locales sur X, et il suffit alors de le faire d'une part dans le cas où $Q = a \in \mathcal{O}_X$, ce qui est clair, d'autre part lorsque Q est de la forme $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$. On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathcal{E}}((1 \otimes e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}) &= \gamma_{\mathcal{E}}\Big(\sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle} e\Big) = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} (\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle} e \otimes 1) \\
&= \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \Big(\sum_{\underline{i} \leq \underline{h}} \left\{ \begin{matrix} \underline{h} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{h}-\underline{i} \rangle} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle} e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle} \Big) \\
&= \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \Big(\sum_{\underline{i} \leq \underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{h} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \left\langle \begin{matrix} \underline{k}-\underline{i} \\ \underline{h}-\underline{i} \end{matrix} \right\rangle \Big) \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle} \\
&= e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle},
\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de 0.1.4 et des relations classiques entre coefficients binômiaux.

En sens inverse, on définit un morphisme $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \to \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ en envoyant une section de la forme $e \otimes P$ sur $(1 \otimes e)P$, et on vérifie de même les linéarités nécessaires. Compte tenu de celles-ci, il est clair que ces deux morphismes sont réciproques l'un de l'autre, et qu'ils sont caractérisés par la relation $\gamma_{\mathcal{E}}(1 \otimes e) = e \otimes 1$. La formule (1.3.1.1) résulte immédiatement de la $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéarité à gauche de $\gamma_{\mathcal{E}}$.

1.3.2. Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche. On dispose alors d'une structure d'anneau canonique sur $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, telle que les morphismes $\mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ et $\mathcal{D}_X^{(m)} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ donnés respectivement par $b \longmapsto b \otimes 1$ et $P \longmapsto 1 \otimes P$ soient des morphismes d'anneaux, que $(b \otimes 1)(1 \otimes P) = b \otimes P$, et que, en coordonnées locales, le produit $(1 \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle})(b \otimes 1)$ soit donné par la formule de Leibnitz [5, 2.3.5]. D'autre part, la proposition précédente fournit un isomorphisme de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-bimodules

$$\gamma_{\mathscr{B}} \,:\, \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{B} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)},$$

de sorte qu'on obtient par transport de structure une structure d'anneau sur $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{B}$. Elle s'explicite comme suit :

a) Par construction, $\gamma_{\mathscr{B}}(1 \otimes b) = b \otimes 1$. Il en résulte que le morphisme $\mathscr{B} \to \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{B}$ donné par $b \longmapsto 1 \otimes b$ est un morphisme d'anneaux.

b) De même, $\gamma_{\mathscr{B}}(P \otimes 1) = P(1 \otimes 1)$. Comme l'action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ sur $\mathscr{B}$ est compatible avec son action sur $\mathcal{O}_X$, on voit qu'en coordonnées locales on a $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \cdot 1_{\mathscr{B}} = 0$ pour tout $\underline{k} \neq \underline{0}$. Il en résulte que $P(1 \otimes 1) = 1 \otimes P$, de sorte que le morphisme $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{B}$ donné par $P \longmapsto P \otimes 1$ est un morphisme d'anneaux.

c) Comme $\gamma_{\mathscr{B}}$ est par construction un isomorphisme d'anneaux, on a $(1 \otimes b)(P \otimes 1) = \gamma_{\mathscr{B}}^{-1}(b \otimes P)$. D'après la construction de $\gamma_{\mathscr{B}}^{-1}$, on obtient, pour $P = \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$:

$$(1 \otimes b)(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes 1) \;=\; \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} b.$$

d) Puisque $\gamma_{\mathscr{B}}((P \otimes 1)(1 \otimes b)) = \gamma_{\mathscr{B}}(P \otimes 1)\gamma_{\mathscr{B}}(1 \otimes b) = (1 \otimes P)(b \otimes 1)$, il résulte de la formule de Leibnitz et de la définition de $\gamma_{\mathscr{B}}$ que $\gamma_{\mathscr{B}}((P \otimes 1)(1 \otimes b)) = \gamma_{\mathscr{B}}(P \otimes b)$, si bien que que $(P \otimes 1)(1 \otimes b) = P \otimes b$.

Nous identifierons systématiquement $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{B}$ et $\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ au moyen de l'isomorphisme $\gamma_{\mathscr{B}}$. Lorsque l'anneau $\mathscr{B}$ sera fixé, et qu'aucune confusion n'en résultera, nous emploierons la notation

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} \;:=\; \mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)} \;\simeq\; \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{B}.$$

Pour tout $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-module à gauche $\mathcal{E}$, on voit facilement que l'isomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}} \,:\, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{B}} \mathcal{E} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{E} \otimes_{\mathscr{B}} \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$$

défini par

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{B}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathscr{B}} \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$$

est un isomorphisme de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-bimodules.

1.3.3. PROPOSITION (*cf.* [37, 2.4.2] ou [38, 1.7]). — *Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite, et $\mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ le faisceau obtenu en prenant le produit tensoriel pour la multiplication à gauche sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Ce faisceau est muni d'une structure canonique de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-bimodule à droite, et il existe une unique involution*

$$\delta_{\mathscr{M}} \,:\, \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$$

échangeant les deux structures de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite de $\mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$, et telle que $\delta_{\mathscr{M}}(x \otimes 1) = x \otimes 1$ pour toute section x de $\mathscr{M}$. En coordonnées locales, on a alors

(1.3.3.1) $$\delta_{\mathcal{M}}(e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}) = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} e \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}.$$

Comme en 1.3.1, l'isomorphisme $\delta_{\mathcal{M}}$ sera appelé *isomorphisme de transposition* relatif à $\mathcal{M}$.

L'une des structures de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à droite de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est fournie par la multiplication à droite sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$, et l'autre est la structure produit tensoriel définie par 1.1.7 à partir de la multiplication à gauche sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$; nous les appelerons respectivement structure droite et structure gauche. La fonctorialité de la structure produit tensoriel entraîne encore que ces deux structures munissent $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ d'une structure de bimodule à droite.

Comme l'application canonique $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire pour la structure gauche de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, elle se factorise de manière unique par un morphisme $\delta_{\mathcal{M}}$: $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ qui soit $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéaire pour la structure droite sur la source et la structure gauche sur le but. On vérifie que $\delta_{\mathcal{M}}$ est aussi $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéaire pour la structure gauche sur la source et la structure droite sur le but par un calcul en coordonnées locales analogue à celui qui a été fait en 1.3.1. Il s'ensuit que $\delta_{\mathcal{M}} \circ \delta_{\mathcal{M}} = \mathrm{Id}$, d'où l'énoncé.

Remarques. — (i) L'isomorphisme de transposition $\delta_{\mathcal{M}}$ peut aussi être décrit de la manière suivante. La costratification $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ fournit des isomorphismes $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$-linéaires

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}).$$

D'autre part, l'involution σ échangeant les deux facteurs de $X \times_S X$ définit un isomorphisme σ^*-semi-linéaire

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}).$$

Par passage à la limite inductive pour n variable, on obtient donc ainsi un isomorphisme

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}.$$

Pour vérifier qu'il est bien égal à $\delta_{\mathcal{M}}$, il suffit de le faire par un calcul en coordonnées locales. On reprend alors les notations de 1.1.6. Comme $\sigma^*(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}) = (-1)^{|\underline{k}|}\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$, on a $\sigma^*(\underline{\widetilde{\partial}}^{\langle \underline{k} \rangle}) = (-1)^{|\underline{k}|}\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$, et l'assertion résulte de (1.1.6.1) et (1.3.3.1).

(ii) Sous les hypothèses de 1.3.2, soit $\mathcal{M}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à droite. On vérifie encore que l'involution

$$\delta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \overset{\delta_{\mathcal{M}}}{\xrightarrow{\ \sim\ }} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)},$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-linéaire à droite.

1.3.4. En appliquant ce qui précède au cas où $\mathcal{M} = \omega_X$, on obtient une forme intrinsèque de l'automorphisme de passage à l'opérateur adjoint, qui s'exprime classiquement en coordonnées locales comme une anti-involution d'anneau $\mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{D}_X^{(m)}$ dépendant du choix des coordonnées (*cf.* 1.2.2). En effet, la structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite de ω_X définit grâce à 1.3.3 une involution canonique que nous noterons

(1.3.4.1) $$\delta_X \,:\, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)},$$

échangeant les deux structures de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite. En tensorisant par ω_X^{-1} à droite sur la source et à gauche sur le but, on obtient un isomorphisme canonique de $(\mathscr{D}_X^{(m)}, \mathscr{D}_X^{(m)})$-bimodules

(1.3.4.2) $$\alpha_X \,:\, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{D}_X^{(m)}.$$

Enfin, en tensorisant ce dernier par ω_X^{-1} à gauche sur la source et à droite sur le but, on obtient une involution canonique

(1.3.4.3) $$\beta_X \,:\, \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$$

échangeant les deux structures de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche.

Sur un ouvert $U \subset X$ muni de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, on peut identifier ω_X à $\mathcal{O}_X$ grâce à la base $dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d$, et ω_X^{-1} à $\mathcal{O}_X$ grâce à la base duale. La source et le but des isomorphismes α_X, β_X et δ_X s'identifient alors à $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Avec ces identifications, il résulte alors de (1.2.3.2) et (1.3.3.1) que ces isomorphismes associent à un opérateur $P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$ l'opérateur $\sum_{\underline{k}} (-1)^{|\underline{k}|} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} a_{\underline{k}} = {}^{t}P$. Ces isomorphismes fournissent donc une expression globale, indépendante des coordonnées, de l'isomorphisme de passage à l'adjoint. Ils seront encore appelés *isomorphismes de transposition*.

2. Théorèmes de descente

Ce chapitre est consacré à la démonstration des théorèmes de descente par un relèvement du morphisme de Frobenius, et à la construction d'un foncteur quasi-inverse à F^*. Nous donnerons d'abord la définition générale du foncteur f^* pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche, en mettant en évidence sa nature cristalline. Nous montrerons ensuite que, dans le cas d'un relèvement $F : X \to X'$ de la puissance s-ième du morphisme de Frobenius relatif, il se produit un phénomène d'élévation du niveau : l'image inverse $F^*\mathscr{E}'$ d'un $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-module est munie d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-module. Le théorème de descente pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche, que nous établirons ensuite, s'énonce alors en disant que, vu comme foncteur de la catégorie des $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-modules vers celle des $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-modules, le foncteur F^* est une équivalence de catégories. Après avoir donné un résultat analogue pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite, nous montrerons que le $(\mathscr{D}_{X'}^{(m)}, \mathscr{D}_X^{(m+s)})$-bimodule $F^\flat\mathscr{D}_X^{(m)}$ permet de construire un foncteur quasi-inverse de F^*. Enfin, nous préciserons le lien entre le théorème de descente pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche, et le théorème de Cartier sur la descente des $\mathcal{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à

p-courbure nulle.

2.1. Foncteur image inverse

Pour la commodité des références, nous donnons d'abord ici la définition générale du foncteur image inverse pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche, ainsi que quelques propriétés de base de ce foncteur. En particulier, nous mettons en évidence sa nature cristalline, ainsi que celle de la catégorie des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche elle-même.

Dans cette section, m désigne un élément de $\overline{\mathbb{N}}$; lorsque $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose comme d'habitude que les schémas considérés sont des $\mathbb{Z}_{(p)}$-schémas.

2.1.1. Considérons un diagramme commutatif de morphismes de schémas de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ S \arrow[r] & T \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

dans lequel X, Y et Z sont respectivement lisses sur S, T et U. Soient d'autre part $\Delta^n_{X,(m)}$, $\Delta^n_{Y,(m)}$, $\Delta^n_{Z,(m)}$ les voisinages infinitésimaux à puissances divisées de niveau m et d'ordre n de X, Y, Z dans $X\times_S X$, $Y\times_T Y$, $Z\times_U Z$. Par fonctorialité (*cf.* [5, 2.1.4]), on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Delta^n_{X,(m)} \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, shift right, "p_0"'] \arrow[d, shift left, "p_1"] & \Delta^n_{Y,(m)} \arrow[r, "g\times g"] \arrow[d, shift right, "q_0"'] \arrow[d, shift left, "q_1"] & \Delta^n_{Z,(m)} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \tag{2.1.1.1}$$

où les flèches verticales sont les projections naturelles.

On notera pour simplifier $\mathscr{D}_X^{(m)}$, $\mathscr{D}_Y^{(m)}$ et $\mathscr{D}_Z^{(m)}$ pour $\mathscr{D}_{X/S}^{(m)}$, $\mathscr{D}_{Y/T}^{(m)}$ et $\mathscr{D}_{Z/U}^{(m)}$. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module, la donnée d'une structure de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à gauche sur $\mathscr{F}$ prolongeant sa structure de $\mathcal{O}_Y$-module équivaut à celle d'une m-PD-stratification, c'est à dire d'une famille compatible d'isomorphismes $\eta_n : q_1^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} q_0^*\mathscr{F}$ vérifiant la condition de cocycle [5, 2.3.2]. Le diagramme (2.1.1.1), ainsi que le diagramme analogue formé avec les produits triples, entraîne que $f^*\mathscr{F}$ est alors muni de la m-PD-stratification image inverse, définie par les $\varepsilon_n = (f\times f)^*(\eta_n)$. On obtient donc ainsi une structure canonique de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche sur $f^*\mathscr{F}$. De plus, si $\mathscr{F}'$ est un second $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à gauche, un morphisme $\mathcal{O}_Y$-linéaire $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ est $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-linéaire si et seulement s'il est compatible aux m-PD-stratifications. On voit ainsi que le foncteur f^* s'étend de manière naturelle en un foncteur, que nous noterons encore f^*, de la catégorie des $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-modules à gauche dans celle des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche.

La commutativité du diagramme (2.1.1.1) entraîne alors que, pour tout $\mathscr{D}_Z^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{G}$, l'isomorphisme de transitivité $(f^* \circ g^*)(\mathscr{G}) \simeq (g \circ f)^*(\mathscr{G})$ est $\mathscr{D}_X^{(m)}$-linéaire.

2.1.2. PROPOSITION. — *Supposons que p soit localement nilpotent sur T, et que $\mathscr{F}$ soit un $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à gauche quasi-nilpotent* [5, 2.3.7]. *Alors $f^*\mathscr{F}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche quasi-nilpotent.*

Soient $\Delta_{X,(m)}$ et $\Delta_{Y,(m)}$ les voisinages infinitésimaux à puissances divisées de niveau m (sans condition de nilpotence) de X et Y dans $X \times_S X$ et $Y \times_T Y$. Notons encore p_i, q_i leurs projections sur X et Y. Pour tout n, on dispose du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n_{X,(m)} & \xrightarrow{f \times f} & \Delta^n_{Y,(m)} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta_{X,(m)} & \xrightarrow{f \times f} & \Delta_{Y,(m)} \end{array},$$

et, d'après [5, 2.3.7], $\mathscr{F}$ (resp. $f^*\mathscr{F}$) est un $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à gauche (resp. $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche) quasi-nilpotent si et seulement si les isomorphismes η_n (resp. ε_n) définissant la m-PD-stratification de $\mathscr{F}$ (resp. $f^*\mathscr{F}$) sont induits par un isomorphisme $\eta : q_1^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} q_0^*\mathscr{F}$ (resp. $\varepsilon : p_1^* f^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} p_0^* f^*\mathscr{F}$) vérifiant la condition de cocycle. L'énoncé en résulte aussitôt.

2.1.3. Comme en caractéristique 0, la structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module de $f^*\mathscr{F}$ peut également être décrite en utilisant un bimodule canonique. En effet, si l'on pose

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y} = f^*\mathscr{D}_Y^{(m)},$$

$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y}$ est muni d'une structure naturelle de $(\mathscr{D}_X^{(m)}, f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)})$-bimodule : sa structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche se déduit de celle de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$ par 2.1.1, et sa structure de $f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à droite est définie par fonctorialité (ce qui entraîne que ces deux structures commutent). On dispose alors de l'isomorphisme d'associativité

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)}} f^{-1}\mathscr{F} = (\mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)}) \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)}} f^{-1}\mathscr{F} \simeq \mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{F} = f^*\mathscr{F},$$

dont on vérifie aisément la $\mathscr{D}_X^{(m)}$-linéarité.

Le bimodule $\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y}$ est muni d'un homomorphisme naturel

$$\mathscr{D}_X^{(m)} \longrightarrow \mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y} = f^*\mathscr{D}_Y^{(m)}, \tag{2.1.3.1}$$

qui est obtenu à partir des homomorphismes de fonctorialité

$$f^*\mathscr{P}^n_{Y,(m)} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X,(m)}$$

par dualité et passage à la limite inductive. En observant que les homomorphismes $\delta^{n,n'}_{(m)} : \mathscr{P}^{n+n'}_{X,(m)} \to \mathscr{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}$ utilisés pour définir la multiplication sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ [5, 2.1.3] commutent aux homomorphismes de fonctorialité, on voit que l'homomorphisme (2.1.3.1) est $\mathscr{D}_X^{(m)}$-linéaire à gauche. Il est par ailleurs facile de voir qu'il envoie la section $1 \in \mathscr{D}_X^{(m)}$

sur la section $1 \otimes 1$ de $f^*\mathscr{D}_Y^{(m)}$.

2.1.4. Soient $\mathscr{B}_Y$ une $\mathscr{O}_Y$-algèbre commutative munie d'une action compatible de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$, $(\eta_n : q_1^*\mathscr{B}_Y \xrightarrow{\sim} q_0^*\mathscr{B}_Y)_n$ la m-PD-stratification correspondante. Les η_n sont des isomorphismes d'algèbres, de sorte qu'il en est de même de leurs images inverses par les morphismes $\Delta^n_{X,(m)} \to \Delta^n_{Y,(m)}$. Il en résulte que l'action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ sur $\mathscr{B}_X := f^*\mathscr{B}_Y$ est compatible à sa structure de $\mathscr{O}_X$-algèbre.

Nous noterons alors $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} = \mathscr{B}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{D}_Y^{(m)}$, $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} = \mathscr{B}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$. En utilisant [5, 2.3.5 (ii)], on voit de même que, si $\mathscr{F}$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-module à gauche, $f^*\mathscr{F}$ est muni d'une structure naturelle de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-module à gauche. En particulier, si l'on pose $\widetilde{\mathscr{D}}_{X\to Y}^{(m)} := f^*\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$, la structure naturelle de $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-bimodule de $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$ fournit une structure canonique de $(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}, f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)})$-bimodule sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X\to Y}^{(m)}$.

2.1.5. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 2.1.1, *soient* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha) \subset \mathscr{O}_S$ *un m-PD-idéal quasi-cohérent, S_0 le sous-schéma fermé de S défini par $\mathfrak{a}$, X_0 la réduction de X sur S_0, $f, f' : X \to Y$ deux T-morphismes ayant la même restriction $f_0 : X_0 \to Y$ à X_0. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à gauche. On suppose vérifiée l'une des deux conditions suivantes* :

a) *Le m-PD-idéal $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent* (*cf.* A.3);

b) *p est localement nilpotent sur T, et le $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module $\mathscr{F}$ est quasi-nilpotent.*

Il existe alors un isomorphisme $\mathscr{D}_X^{(m)}$-linéaire canonique

$$\tau_{f,f'} : f'^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{F},$$

tel que $\tau_{f,f} = \mathrm{Id}$, *et que, si $f'' : X \to Y$ est un troisième morphisme de restriction f_0 à X_0, on ait $\tau_{f,f''} = \tau_{f,f'} \circ \tau_{f',f''}$.*

Par platitude, la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$ s'étend à X, et munit donc l'idéal $\mathfrak{a}\mathscr{O}_X$ de X_0 dans X d'une m-PD-structure. La propriété universelle des voisinages à puissances divisées entraîne que le morphisme $(f, f') : X \to Y^2$ se factorise par un unique PD-morphisme $g : X \to \Delta_{Y,(m)}$ tel que $f = q_0 \circ g$, $f' = q_1 \circ g$. Si la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotente, il en est de même par platitude de celle de $\mathfrak{a}\mathscr{O}_X$, de sorte que g se factorise par $\Delta^r_{Y,(m)}$ pour r assez grand. Dans ce cas, on pose $\tau_{f,f'} = g^*(\eta_r)$, où η_r est l'isomorphisme fourni par la m-PD-stratification de $\mathscr{F}$; l'isomorphisme $\tau_{f,f'}$ ne dépend pas du choix de r. Sous les hypothèses de b), $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module quasi-nilpotent, et la m-PD-stratification (η_n) est induite par un isomorphisme $\eta : q_1^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} q_0^*\mathscr{F}$ sur $\Delta_{Y,(m)}$; on pose alors $\tau_{f,f'} = g^*(\eta)$. Il est clair que ces définitions sont compatibles, et on obtient ainsi un isomorphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire $f'^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{F}$, qui satisfait les conditions de transitivité voulues grâce à la condition de cocycle.

Il reste à voir que $\tau_{f,f'}$ est $\mathscr{D}_X^{(m)}$-linéaire. Il revient au même de montrer que $\tau_{f,f'}$ est horizontal pour les m-PD-stratifications (ε_n) et (ε'_n) de $\mathscr{E} := f^*\mathscr{F}$ et $\mathscr{E}' := f'^*\mathscr{F}$, soit encore que, pour tout n, le diagramme

$$
(2.1.5.1)\qquad
\begin{tikzcd}
p_1^*\mathscr{E}' \arrow[r, "p_1^*(\tau_{f,f'})", "\sim"'] \arrow[d, "\varepsilon'_n"', "\wr"] & p_1^*\mathscr{E} \arrow[d, "\varepsilon_n", "\wr"'] \\
p_0^*\mathscr{E}' \arrow[r, "\sim", "p_0^*(\tau_{f,f'})"'] & p_0^*\mathscr{E}
\end{tikzcd}
$$

est commutatif sur $\Delta^n_{X,(m)}$. Fixons l'entier n. D'après [5, 1.5.3], la m-PD-structure canonique de l'idéal de X dans $\Delta^n_{X,(m)}$ est compatible à celle de $\mathfrak{a}$, de sorte que l'idéal de X_0 dans $\Delta^n_{X,(m)}$ est aussi canoniquement muni d'une m-PD-structure. De plus, celle-ci est nilpotente lorsque celle de $\mathfrak{a}$ l'est, d'après A.9. Le morphisme $\Delta^n_{X,(m)} \to X^2 \to Y^2 \times Y^2$ défini par $(f{\times}f,\ f'{\times}f')$ se factorise donc par un morphisme $h : \Delta^n_{X,(m)} \to \Delta_{Y,(m)}(3)$; lorsque $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, h se factorise de plus par $\Delta^s_{Y,(m)}(3)$ pour un entier s assez grand, qu'on peut choisir au moins égal à $\max(n, r)$. Supposons d'abord qu'on soit dans ce dernier cas. Pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i < j$, soit $q_{i,j} : \Delta^s_{Y,(m)}(3) \to \Delta^s_{Y,(m)}$ le morphisme induit par la projection sur les facteurs d'indices i et j. On obtient alors

$$p_0^*(\tau_{f,f'}) \;=\; p_0^*(g^*(\eta_s)) \;=\; h^*(q_{0,2}^*(\eta_s)),$$

et, de même, $p_1^*(\tau_{f,f'}) \;=\; h^*(q_{1,3}^*(\eta_s))$. D'autre part, on a par définition

$$\varepsilon_n \;=\; (f\times f)^*(\eta_s) \;=\; h^*(q_{0,1}^*(\eta_s)),$$

et, de même, $\varepsilon'_n = h^*(q_{2,3}^*(\eta_s))$. Il suffit donc de s'assurer que $q_{0,1}^*(\eta_s) \circ q_{1,3}^*(\eta_s) = q_{0,2}^*(\eta_s) \circ q_{2,3}^*(\eta_s)$, ce qui résulte de ce que les deux membres sont égaux à $q_{0,3}^*(\eta_s)$ d'après la condition de cocycle. Si l'on se place sous les hypothèses de b), l'isomorphisme η vérifie lui-même la condition de cocycle, et le raisonnement est le même, en se plaçant sur $\Delta_{Y,(m)}(3)$ au lieu de $\Delta^s_{Y,(m)}(3)$.

Remarque. — Si $\mathscr{B}_Y$ est une $\mathcal{O}_Y$-algèbre munie d'une action compatible de $\mathscr{D}^{(m)}_Y$, et si l'on pose $\mathscr{B}_X = f^*\mathscr{B}_Y$, $\mathscr{B}'_X = f'^*\mathscr{B}_Y$, l'isomorphisme $\tau^{\mathscr{B}}_{f,f'} : \mathscr{B}'_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_X$ est un isomorphisme $\mathscr{D}^{(m)}_X$-linéaire de $\mathcal{O}_X$-algèbres, puisque les η_r sont des isomorphismes de $\mathscr{P}^r_{Y,(m)}$-algèbres. Par suite, $\tau^{\mathscr{B}}_{f,f'}$ s'étend en un isomorphisme d'anneaux $\tau^{\widetilde{\mathscr{D}}}_{f,f'} : \mathscr{B}'_X \otimes \mathscr{D}^{(m)}_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{D}^{(m)}_X$.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{B}_Y \otimes \mathscr{D}^{(m)}_Y$-module, l'isomorphisme $\tau^{\mathscr{F}}_{f,f'} : f'^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{F}$ est alors semi-linéaire par rapport à $\tau^{\widetilde{\mathscr{D}}}_{f,f'}$.

2.1.6. L'énoncé qui précède permet alors d'étendre la construction du foncteur image inverse pour les $\mathscr{D}^{(m)}_Y$-modules au cas d'un morphisme non nécessairement relevable.

a) Supposons d'abord comme dans l'énoncé précédent que S est muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}_S, \mathfrak{b}_S, \alpha_S)$, qu'on suppose m-PD-nilpotent. Soient $S_0 \subset S$ le sous-schéma fermé défini par $\mathfrak{a}_S$, X un S-schémas lisse, de réduction X_0, Y un T-schéma lisse, et $f_0 : X_0 \to Y$ un T-morphisme. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{D}^{(m)}_Y$-module à gauche. Tout point $x \in X$ possède un voisinage U sur lequel il existe un prolongement $f : U \to Y$ de la restriction de f_0 à $X_0 \cap U$. D'après 2.1.5, le $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à gauche $f^*\mathscr{F}$ ne dépend pas, à isomorphisme $\mathscr{D}^{(m)}_X$-linéaire canonique près, du choix fait pour f. Grâce à la relation de transitivité pour les isomorphismes $\tau_{f,f'}$, on peut alors recoller les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules définis localement par le choix d'un prolongement de f_0, et obtenir ainsi à partir de la donnée de $\mathscr{F}$ et de f_0 un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche canonique. Avec un abus de notation évident, nous le noterons $f_0^*\mathscr{F}$; lorsque f_0 se prolonge en f, on a donc par construction une identification canonique $f_0^*\mathscr{F} \simeq f^*\mathscr{F}$.

En particulier, supposons donné un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}_T, \mathfrak{b}_T, \alpha_T)$, tel que $S \to T$ soit un m-PD-morphisme. Soient $T_0 \subset T$ le sous-schéma fermé défini par $\mathfrak{a}_T$, Y_0 la réduction de Y sur T_0, et $f_0 : X_0 \to Y_0$ un T_0-morphisme. La construction précédente s'applique au morphisme (encore noté f_0) $X_0 \to Y$ défini par f_0. Si Z est un U-schéma lisse, et si $g_0 : Y_0 \to Z$ est un S_0-morphisme, on dispose encore pour tout $\mathscr{D}_Z^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{G}$ d'un isomorphisme canonique $\mathscr{D}_X^{(m)}$-linéaire

$$f_0^*(g_0^*\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} (g_0 \circ f_0)^*\mathscr{G}.$$

Cette construction s'applique en particulier au $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{D}_Y^{(m)}$. Comme l'action à droite de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$ est $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-linéaire à gauche, elle est compatible aux isomorphismes de recollement, si bien que $f_0^*\mathscr{D}_Y^{(m)}$ est encore de manière naturelle un $(\mathscr{D}_X^{(m)}, f_0^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)})$-bimodule. On conservera la notation

$$\mathscr{D}_{X\to Y}^{(m)} = f_0^*\mathscr{D}_Y^{(m)},$$

et, pour tout $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{F}$, on a encore un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche

$$\mathscr{D}_{X\to Y}^{(m)} \otimes_{f_0^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)}} f_0^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f_0^*\mathscr{F}.$$

Si $\mathscr{B}_Y$ est une $\mathcal{O}_Y$-algèbre munie d'une action compatible de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$, il résulte de la remarque de 2.1.5 que $\mathscr{B}_X = f_0^*\mathscr{B}_Y$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre, munie d'une action compatible de $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Le faisceau d'opérateurs différentiels $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} = \mathscr{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ est donc bien défini, et, si l'on étend la construction précédente en posant

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{X\to Y}^{(m)} = f_0^*\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)},$$

$\widetilde{\mathscr{D}}_{X\to Y}^{(m)}$ est de manière naturelle un $(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}, f_0^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)})$-bimodule.

b) Si on ne suppose plus $\mathfrak{a}_S$ m-PD-nilpotent, mais qu'on suppose par contre p localement nilpotent sur T, la construction précédente garde un sens pour $\mathscr{F}$ lorsque $\mathscr{F}$ est quasi-nilpotent, et permet de construire le foncteur f_0^* sur la sous-catégorie pleine des $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-modules quasi-nilpotents. On prendra garde néanmoins que $\mathscr{D}_Y^{(m)}$ lui-même n'est pas un $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module quasi-nilpotent, de sorte que la construction du bimodule $\mathscr{D}_{X\to Y}^{(m)}$ n'a de sens que si $\mathfrak{a}_S$ est m-PD-nilpotent, ou si l'on se donne un relèvement $f : X \to Y$ de f_0; dans ce cas, elle dépend en général de ce relèvement.

En considérant le cas où $S = T$, et où X et Y sont deux relèvements de X_0 sur S, on déduit formellement de ces constructions le corollaire suivant, qui précise les conditions sous lesquelles la catégorie des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche ne dépend que de X_0:

2.1.7. COROLLAIRE. — *Soient* $(\mathfrak{a}_S, \mathfrak{b}_S, \alpha_S) \subset \mathcal{O}_S$ *un m-PD-idéal quasi-cohérent,* S_0 *le sous-schéma fermé de* S *défini par* $\mathfrak{a}$, X_0 *la réduction de* X *sur* S_0.

(i) *Si* $\mathfrak{a}_S$ *est m-PD-nilpotent, la catégorie des* $\mathscr{D}_X^{(m)}$*-modules à gauche ne dépend, à équivalence canonique près, que de* $(X_0, S, \mathfrak{a}_S, \mathfrak{b}_S, \alpha_S)$, *et est fonctorielle par rapport à ces données.*

(ii) *Sans hypothèses de nilpotence sur* $\mathfrak{a}_S$, *les conclusions de* (i) *restent valables si* p *est localement nilpotent sur* S, *et si l'on se limite à la sous-catégorie pleine des* $\mathscr{D}_X^{(m)}$*-modules à gauche quasi-nilpotents.*

2.2. Élévation du niveau par Frobenius

Nous étudions maintenant plus spécifiquement le foncteur image inverse associé à un S-morphisme $F : X \to X'$ dans le cas où F est un relèvement de la puissance s-ième du morphisme de Frobenius relatif. Nous montrons qu'il existe alors sur l'image inverse d'un $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche une action naturelle du faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$ induisant par restriction des scalaires l'action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ construite en 2.1.1.

Pour mettre en évidence ses propriétés de fonctorialité, nous serons en fait amenés à construire cette action dans une situation plus générale, où F est un relèvement d'un morphisme de schémas se factorisant par une puissance du Frobenius relatif.

2.2.1. Soient $m \geq 0$ un entier, S, T deux schémas munis de m-PD-idéaux quasi-cohérents $(\mathfrak{a}_S, \mathfrak{b}_S, \alpha_S)$ et $(\mathfrak{a}_T, \mathfrak{b}_T, \alpha_T)$, $S \to T$ un m-PD-morphisme. On suppose vérifiées les conditions suivantes (qui impliquent les conditions analogues sur S) :

(i) p est nilpotent sur T;

(ii) $p \in \mathfrak{a}_T$.

On note $\mathfrak{b}'_S$ le sous-PD-idéal $\mathfrak{b}_S + p\mathcal{O}_S \subset \mathfrak{a}_S$, muni des puissances divisées β_S prolongeant α_S et les puissances divisées canoniques de (p) ; on définit de même le sous-PD-idéal $\mathfrak{b}'_T \subset \mathfrak{a}_T$.

Soit S_0 le sous-schéma fermé de S défini par $\mathfrak{a}_S$, qui est donc de caractéristique p; si X est un S-schéma, on note X_0 sa réduction sur S_0. Pour tout $s \geq 0$, on désigne par $X_0^{(s)}$ le S_0-schéma déduit de X_0 par le s-ième itéré du Frobenius absolu de S_0, de sorte que le s-ième itéré du Frobenius absolu de X_0 définit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "F^s_{X_0/S_0}"] \arrow[dr] & X_0^{(s)} \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\ & S_0 \arrow[r, "F^s_{S_0}"] & S_0, \end{tikzcd}$$

dans lequel le carré est cartésien. Si Y_0 est un T_0-schéma, on définit de façon analogue le T_0-schéma $Y_0^{(s)}$ et le T_0-morphisme $F^s_{Y_0/T_0} : Y_0 \to Y_0^{(s)}$.

Dans ce qui suit, on suppose donnés :

a) Un S_0-schéma lisse X_0, un T_0-schéma lisse Y_0, de dimension relative d sur T_0, et un T_0-morphisme $f_0 : X_0 \to Y_0$;

b) Un S-schéma lisse X relevant X_0 ;

c) Un entier $s \geq 0$, et un T-schéma lisse Y' relevant $Y_0^{(s)}$;

d) Un T-morphisme $F : X \to Y'$ relevant le T_0-morphisme $F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0 = f_0^{(s)} \circ F^s_{X_0/S_0}$, où $f_0^{(s)} : X_0^{(s)} \to Y_0^{(s)}$ est déduit de f_0 par fonctorialité.

Soit $\nu \geq 1$ un entier. Nous noterons $X^{\nu+1} = X^{\nu+1}_{/S}$, $Y'^{\,\nu+1} = Y'^{\,\nu+1}_{/T}$, $F_\nu : X^{\nu+1} \to Y'^{\,\nu+1}$ le morphisme induit par F, $\mathcal{I}_\nu$ (resp. $\mathcal{I}'_\nu$) l'idéal de la diagonale dans $X^{\nu+1}$ (resp. $Y'^{\,\nu+1}$), et $(\mathcal{P}_{X,(m+s)}(\nu), \overline{\mathcal{I}}_\nu, \widetilde{\mathcal{I}}_\nu)$ (resp. $(\mathcal{P}_{Y',(m)}(\nu), \overline{\mathcal{I}}'_\nu, \widetilde{\mathcal{I}}'_\nu)$) l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau $m + s$ (resp. m) de $\mathcal{I}_\nu$ (resp. $\mathcal{I}'_\nu$). Pour $\nu = 1$, nous omettrons en général de préciser ν dans les notations.

2.2.2. Proposition. — (i) *Sous les hypothèses précédentes, l'homomorphisme F_ν^* induit un unique PD-morphisme*

$$\Phi_\nu^* \ : \ F_\nu^{-1}\mathcal{P}_{Y',(m)}(\nu) \longrightarrow \mathcal{P}_{X,(m+s)}(\nu)$$

envoyant $F_\nu^{-1}\widetilde{\mathcal{I}}'_\nu$ dans $\widetilde{\mathcal{I}}_\nu + \mathfrak{b}_S\overline{\mathcal{I}}_\nu$.

(ii) *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\Phi_\nu^*(F_\nu^{-1}\overline{\mathcal{I}}'^{\{n\}_{(m)}}_\nu) \ \subset \ \overline{\mathcal{I}}_\nu^{\{n\}_{(m+s)}}.$$

Rappelons que, d'après [5, 1.5.3], les puissances divisées de $\widetilde{\mathcal{I}}_\nu$ sont automatiquement compatibles avec celles de $\mathfrak{b}'_S$. En particulier, on dispose ainsi d'une PD-structure canonique sur l'idéal $\widetilde{\mathcal{I}}_\nu + \mathfrak{b}_S\overline{\mathcal{I}}_\nu$, ce qui donne un sens à l'assertion (i).

L'énoncé est local sur X, de sorte qu'on peut supposer que X et Y' sont affines, et qu'il existe des coordonnées locales $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d$ sur Y_0. Soient $t'_1, \ldots, t'_d$ des sections de $\mathcal{O}_{Y'}$ relevant les sections $1 \otimes \bar{t}_i$ de $\mathcal{O}_{Y_0^{(s)}}$. Les sections $t'_1, \ldots, t'_d$ sont alors des coordonnées locales sur Y'. Soient d'autre part $x_1, \ldots, x_d$ des sections de $\mathcal{O}_X$ relevant les sections $f_0^*(\bar{t}_i)$ de $\mathcal{O}_{X_0}$. Posons $\tau'_i = 1 \otimes t'_i - t'_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{Y'^2}$, $\xi_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{X^2}$.

Puisque F est un relèvement de $F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0$, il existe des sections $a_i \in \mathfrak{a}_S\mathcal{O}_X$ telles que

$$F^*(t'_i) \ = \ x_i^{p^s} + a_i, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

On en déduit les relations

$$\begin{aligned} F_1^*(\tau'_i) \ &= \ 1 \otimes x_i^{p^s} - x_i^{p^s} \otimes 1 + 1 \otimes a_i - a_i \otimes 1 \\ &= \ (x_i \otimes 1 + \xi_i)^{p^s} - x_i^{p^s} \otimes 1 + 1 \otimes a_i - a_i \otimes 1 \\ &= \ \xi_i^{p^s} + \sum_{k=1}^{p^s-1} \binom{p^s}{k} x_i^{p^s-k}\xi_i^k + 1 \otimes a_i - a_i \otimes 1. \end{aligned}$$

Comme $p \in \mathfrak{a}_S$ et $\xi_i \in \mathcal{I}$, et que d'autre part $a_i \in \mathfrak{a}_S\mathcal{O}_X$, on voit que $F_1^*(\tau'_i)$ est de la forme

$$F_1^*(\tau_i') \;=\; \xi_i^{p^s} + \zeta_i, \tag{2.2.2.1}$$

avec $\zeta_i \in \mathfrak{a}_S\mathscr{I}$. On obtient alors

$$F_1^*(\tau_i'^{p^m}) \;=\; \xi_i^{p^{m+s}} + \zeta_i^{p^m} + p\,\eta_i,$$

avec $\eta_i \in \mathfrak{a}_S\mathscr{I}^{p^m}$, puisque $\xi_i \in \mathscr{I}$ et $\zeta_i \in \mathfrak{a}_S\mathscr{I}$. Comme $p\mathfrak{a}_S \subset \mathfrak{b}_S$, puisque $\mathfrak{b}_S$ définit une m-PD-structure sur $\mathfrak{a}_S$, on voit que $p\,\eta_i \in \mathfrak{b}_S\mathscr{I}^{p^m}$. D'autre part, on a aussi $\zeta_i^{p^m} \in \mathfrak{b}_S\mathscr{I}^{p^m}$, car $\zeta_i \in \mathfrak{a}_S\mathscr{I}$ et $\mathfrak{a}_S^{(p^m)} + p\,\mathfrak{a}_S \subset \mathfrak{b}_S$. On obtient donc finalement une relation de la forme

$$F_1^*(\tau_i'^{p^m}) \;=\; \xi_i^{p^{m+s}} + \sigma_i, \tag{2.2.2.2}$$

avec $\sigma_i \in \mathfrak{b}_S\mathscr{I}^{p^m}$.

Pour $j = 0,\ldots,\nu$, soit q_j' la projection d'indice j de $Y'^{\,\nu+1}$ sur Y'. L'idéal $\mathscr{I}_\nu'$ est engendré par les sections

$$\tau_{i,j}' \;=\; q_j'^{\,*}(t_i') - q_{j-1}'^{\,*}(t_i') \;=\; 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes\tau_i'\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1, \quad i=1,\ldots,d, \quad j=1,\ldots,\nu.$$

Le calcul précédent montre que l'homomorphisme composé $F_\nu^{-1}\mathcal{O}_{Y'^{\nu+1}} \to \mathcal{O}_{X^{\nu+1}} \to \mathscr{P}_{X,(m+s)}(\nu)$ envoie les sections $\tau_{i,j}'^{p^m}$ dans le PD-idéal $\widetilde{\mathscr{I}}_\nu + \mathfrak{b}_S\overline{\mathscr{I}}_\nu$. Comme $\mathscr{P}_{Y',(m)}(\nu)$ est par construction l'enveloppe à puissances divisées usuelle de l'idéal engendré par les $\tau_{i,j}'^{p^m}$ [6, 1.4.1], il existe un unique PD-morphisme $\Phi_\nu^*\;:\;F_\nu^{-1}\mathscr{P}_{Y',(m)}(\nu) \to \mathscr{P}_{X,(m+s)}(\nu)$ factorisant F_ν^*.

D'après [5, 1.5.3] et la remarque de A.5, l'idéal $\overline{\mathscr{I}}_\nu'^{\{n\}_{(m)}}$ est engendré en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$-module par les sections $\prod_{i,j}\tau_{i,j}'^{\{n_{i,j}\}_{(m)}}$, avec $\sum n_{i,j} \geq n$. Pour prouver (ii), il suffit donc de montrer que, pour tout n, $\Phi^*(\tau_i'^{\{n\}_{(m)}}) \in \overline{\mathscr{I}}^{\{n\}_{(m+s)}}$. Posons $n = p^m q + r$, avec $0 \leq r < p^m$. Par définition, $\tau_i'^{\{n\}_{(m)}} = \tau_i'^{r}(\tau_i'^{p^m})^{[q]}$. Les relations (2.2.2.1) et (2.2.2.2) donnent donc

$$\begin{aligned}\Phi^*(\tau_i'^{\{n\}_{(m)}}) \;&=\; \Phi^*(\tau_i'^{r})\Phi^*(\tau_i'^{p^m})^{[q]} \;=\; (\xi_i^{p^s}+\zeta_i)^r(\xi_i^{p^{m+s}}+\sigma_i)^{[q]}\\ &=\; (\xi_i^{p^s}+\zeta_i)^r \sum_{q'+q''=q}(\xi_i^{p^{m+s}})^{[q']}\sigma_i^{[q'']}.\end{aligned}$$

Comme $\xi_i \in \mathscr{I}$ et $\zeta_i \in \mathfrak{a}_S\mathscr{I}$, le terme $(\xi_i^{p^s}+\zeta_i)^r$ est dans $\overline{\mathscr{I}}^r \subset \overline{\mathscr{I}}^{\{r\}_{(m+s)}}$. D'autre part, le terme $(\xi_i^{p^{m+s}})^{[q']} = \xi_i^{\{p^{m+s}q'\}_{(m+s)}}$ est dans $\overline{\mathscr{I}}^{\{p^{m+s}q'\}_{(m+s)}} \subset \overline{\mathscr{I}}^{\{p^m q'\}_{(m+s)}}$. Enfin, puisque $\sigma_i \in \mathfrak{b}_S\mathscr{I}^{p^m}$, le terme $\sigma_i^{[q'']}$ appartient à $\mathfrak{b}_S^{[q'']}\overline{\mathscr{I}}^{p^m q''} \subset \overline{\mathscr{I}}^{\{p^m q''\}_{(m+s)}}$. L'assertion (ii) en résulte.

Nous noterons $\Phi_\nu : \Delta_{X,(m+s)}(\nu) \to \Delta_{Y',(m)}(\nu)$ (resp. $\Phi : \Delta_{X,(m+s)} \to \Delta_{Y',(m)}$) le morphisme défini par Φ_ν^* (resp. Φ^*), ainsi que les morphismes induits par passage aux voisinages infinitésimaux.

2.2.3. PROPOSITION. — *On suppose vérifiées les hypothèses de* 2.2.1.

(i) *Pour tout $\mathscr{D}_{Y'}^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{F}'$, $F^*\mathscr{F}'$ est muni fonctoriellement d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-module à gauche induisant la structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module définie en* 2.1.1.

(ii) *Si $\mathscr{F}'$ est un $\mathscr{D}_{Y'}^{(m)}$-module à gauche quasi-nilpotent, $F^*\mathscr{F}'$ est un $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-module à gauche quasi-nilpotent.*

(iii) *Soient $(U, \mathfrak{a}_U, \mathfrak{b}_U, \alpha_U)$ un troisième schéma muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent vérifiant les hypothèses de* 2.2.1, *U_0 le sous-schéma fermé de U définie par $\mathfrak{a}_U$, Z_0 un U_0-schéma lisse, $T \to U$ un m-PD-morphisme, $g_0 : Y_0 \to Z_0$ un U_0-morphisme, s' un entier, Z'' un U-schéma lisse relevant $Z_0^{(s+s')}$, et $G : Y' \to Z''$ un U-morphisme relevant $F^{s'}_{Z_0^{(s)}/U_0} \circ g_0^{(s)} = g_0^{(s+s')} \circ F^{s'}_{Y_0^{(s)}/T_0}$. Alors, pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_{Z''}$-module à gauche $\mathscr{G}''$, l'isomorphisme de transitivité $F^* \circ G^*\mathscr{G}'' \simeq (G \circ F)^*\mathscr{G}''$ est $\mathscr{D}^{(m+s+s')}_X$-linéaire.*

Le morphisme Φ construit en 2.2.2 fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Delta^n_{X,(m+s)} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Phi"] & \Delta_{X,(m+s)} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\Phi"] & X \arrow[d, "F"] \\ \Delta^n_{Y',(m)} \arrow[r, hook] & \Delta_{Y',(m)} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Y'. \end{tikzcd}$$

L'image inverse par Φ de la m-PD-stratification (ε'_n) de $\mathscr{F}'$ munit donc $F^*\mathscr{F}'$ d'une $(m+s)$-PD-stratification, donc d'une structure de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-module à gauche. Si l'on suppose de plus que $\mathscr{F}'$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{Y'}$-module à gauche quasi-nilpotent, (ε'_n) est induite par un isomorphisme ε' sur $\Delta_{Y',(m)}$. La $(m+s)$-PD-stratification de $F^*\mathscr{F}'$ est alors induite par l'image inverse de ε' sur $\Delta_{X,(m+s)}$, de sorte que $F^*\mathscr{F}'$ est un $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-module quasi-nilpotent.

L'assertion (iii) résulte de ce que, si Φ^* et Ψ^* sont les factorisations relatives à F et G, alors, par unicité, $\Phi^* \circ \Psi^*$ est la factorisation relative à $F^* \circ G^* = (G \circ F)^*$.

Remarque. — Il est clair que, si la structure de $\mathscr{D}^{(m)}_{Y'}$-module de $\mathscr{F}'$ est induite par une structure de $\mathscr{D}^{(m')}_{Y'}$-module pour un entier $m' \geq m$, la structure de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-module de $F^*\mathscr{F}'$ est induite par la structure correspondante de $\mathscr{D}^{(m'+s)}_X$-module.

Lorsque S est de caractéristique p, et que F est simplement la puissance s-ième $F^s_{X/S}$ du morphisme de Frobenius relatif de X, il est facile d'expliciter la structure de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-module de $F^*\mathscr{F}'$:

2.2.4. Proposition. — *Sous les hypothèses de* 2.2.1, *supposons de plus que $S = T$, $X = Y$, que $\mathfrak{a}_S = 0$ et que $F = F^s_{X/S}$. Soient $X' = X^{(s)}$, et soient $t_1, \ldots, t_d$ des coordonnées locales sur X, $t'_1, \ldots, t'_d$ les coordonnées correspondantes sur X', $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$, $\tau'_i = 1 \otimes t'_i - t'_i \otimes 1$, $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+s)}}$ et $\underline{\partial}'^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ les opérateurs différentiels correspondants. Alors :*

(i) *L'homomorphisme $\Phi^* : \mathscr{P}_{X',(m)} \to \mathscr{P}_{X,(m+s)}$ défini en* 2.2.2 *vérifie*

$$\Phi^*(\underline{\tau}'^{\{\underline{k}\}_{(m)}}) = \underline{\tau}^{\{p^s \underline{k}\}_{(m+s)}} \tag{2.2.4.1}$$

pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$. En particulier, on a alors pour tout n et tout $\nu \geq 0$

$$\Phi^*_\nu(\overline{\mathscr{I}}'^{\{n\}_{(m)}}_\nu) \subset \overline{\mathscr{I}}^{\{p^s n\}_{(m+s)}}_\nu. \tag{2.2.4.2}$$

(ii) *Si $\mathscr{E}'$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche, la structure de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-module à gauche de*

$F^*\mathscr{E}'$ est caractérisée par les relations

$$\partial^{\langle \underline{k}\rangle_{(m+s)}}(1\otimes e') = \begin{cases} 1\otimes \underline{\partial}'^{\langle \underline{k}/p^s\rangle_{(m)}} e' & si\ p^s \mid \underline{k}, \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{2.2.4.3}$$

Comme $S = S_0$ est de caractéristique p, et que F est le morphisme de Frobenius relatif de X, on a $F^*(t_i') = t_i^{p^s}$, et $F_1^*(\tau_i') = \tau_i^{p^s}$. Si, pour tout i, on pose $k_i = p^m q_i + r_i$, avec $0 \le r_i < p^m$, on a alors

$$\Phi^*(\tau_i'^{\{k_i\}_{(m)}}) = \Phi^*(\tau_i'^{r_i}(\tau_i'^{p^m})^{[q_i]}) = \tau_i^{p^s r_i}(\tau_i^{p^{m+s}})^{[q_i]} = \tau_i^{\{p^s k_i\}_{(m+s)}},$$

d'où l'assertion (i).

Si (ε_n') est la m-PD-stratification de $\mathscr{E}'$, et (ε_n) celle de $F^*\mathscr{E}'$, on a pour toute section e' de $\mathscr{E}'$

$$\varepsilon_n'(1\otimes e') = \sum_{\underline{k}} \underline{\partial}'^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} e' \otimes \underline{\tau}'^{\{\underline{k}\}_{(m)}},$$

et, en posant $e = 1\otimes e'$,

$$\varepsilon_n(1\otimes e) = \sum_{\underline{k}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m+s)}} e \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}_{(m+s)}}.$$

Comme $1\otimes e = \Phi^*(1\otimes e')$, et que $\varepsilon_n = \Phi^*(\varepsilon_n')$ par construction, on voit que la formule (2.2.4.1) entraîne la formule (2.2.4.3).

2.2.5. Proposition. — *Soient $F, F' : X \to Y'$ deux morphismes vérifiant les hypothèses de* 2.2.1. *Supposons de plus que l'une des conditions suivantes soit vérifiée* :

a) *L'idéal $\mathfrak{a}_S$ est m-PD-nilpotent*;

b) *$\mathscr{F}'$ est un $\mathscr{D}_{Y'}^{(m)}$-module à gauche quasi-nilpotent.*

Alors l'isomorphisme $\tau_{F,F'} : F'^*\mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{F}'$ défini en 2.1.5 *est $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-linéaire.*

Comme en 2.1.5, on va vérifier que $\tau_{F,F'}$ est horizontal. Reprenons les notations de 2.2.1 et 2.2.2, et soit $h = (F\times F, F'\times F') : X^2 \to Y'^4$. Montrons au préalable que l'homomorphisme composé

$$h^{-1}\mathscr{O}_{Y'^4} \xrightarrow{h^*} \mathscr{O}_{X^2} \longrightarrow \mathscr{P}_{X,(m+s)}(1)$$

se factorise par un unique PD-morphisme encore noté $h^* : h^{-1}\mathscr{P}_{Y',(m)}(3) \to \mathscr{P}_{X,(m+s)}(1)$, envoyant $\widetilde{\mathscr{I}}_3'$ dans $\widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}_S\mathscr{P}_{X,(m+s)}(1)$. C'est une assertion locale sur X, ce qui permet de se placer à nouveau dans les conditions de la démonstration de 2.2.2. On pose donc

$$F^*(t_i') = x_i^{p^s} + a_i, \qquad F'^*(t_i') = x_i^{p^s} + b_i,$$

avec $a_i, b_i \in \mathfrak{a}_S\mathscr{O}_X$. Reprenant le calcul fait en 2.2.2, on voit d'abord que

$$(F\times F')^*(\tau_i') = \xi_i^{p^s} + \zeta_i',$$

avec $\zeta'_i \in \mathfrak{a}_S \mathcal{O}_{X^2}$. Comme $\mathfrak{a}_S^{(p^m)} + p\,\mathfrak{a}_S \subset \mathfrak{b}_S$, on voit ensuite que

$$(F \times F')^*(\tau_i'^{p^m}) \ = \ \xi_i^{p^{m+s}} + \sigma'_i,$$

avec $\sigma'_i \in \mathfrak{b}_S \mathcal{O}_{X^2}$. L'idéal $\widetilde{\mathcal{I}}'_3$ est engendré par les sections $\tau'_{i,1}$, $\tau'_{i,2}$, $\tau'_{i,3}$, de sorte que $\mathcal{P}_{Y',(m)}(3)$ est la PD-enveloppe (compatible aux puissances divisées de (p)) de l'idéal engendré par les sections $\tau_{i,1}'^{p^m}$, $\tau_{i,2}'^{p^m}$, $\tau_{i,3}'^{p^m}$. Or on a $h^*(\tau'_{i,1}) = h^*(\tau'_{i,3}) = 0$, tandis que $h^*(\tau_{i,2}'^{p^m}) = \xi_i^{p^{m+s}} + \sigma'_i$, section dont l'image dans $\mathcal{P}_{X,(m+s)}$ appartient au PD-idéal $\widetilde{\mathcal{I}} + \mathfrak{b}_S \mathcal{P}_{X,(m+s)}(1)$. La factorisation annoncée en résulte.

Supposons d'abord que $\mathcal{F}'$ soit un $\mathcal{D}_{Y'}^{(m)}$-module à gauche quasi-nilpotent. Sa m-PD-stratification (ε'_n) est alors induite par un isomorphisme

$$\varepsilon' \ : \ \mathcal{P}_{Y',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{P}_{Y',(m)}$$

vérifiant la condition de cocycle, et $\tau_{F,F'}$ est l'image inverse de ε' par le morphisme $X \to \Delta_{Y',(m)}$ factorisant $F \times F'$. Pour vérifier que $\tau_{F,F'}$ est horizontal, il faut prouver la commutativité du carré analogue à (2.1.5.1) sur les $\Delta^n_{X,(m+s)}$, et cela résulte comme en 2.1.5 de la condition de cocycle pour ε', grâce l'homomorphisme

$$\mathcal{P}_{Y',(m)}(3) \longrightarrow \mathcal{P}_{X,(m+s)}(1) \longrightarrow \mathcal{P}^n_{X,(m+s)}(1) \tag{2.2.5.1}$$

défini par h^*.

Supposons maintenant que $\mathfrak{a}_S$ soit m-PD-nilpotent. Par l'argument de 2.1.5, l'horizontalité de $\tau_{F,F'}$ résultera encore de la condition de cocycle pour les ε'_n si l'on montre que, pour n' assez grand, l'homomorphisme (2.2.5.1) se factorise par $\mathcal{P}^{n'}_{Y',(m)}(3)$. Il suffit pour cela de montrer que, pour n fixé, $(F \times F')^*(\tau_i'^{\{n'\}_{(m)}}) \in \overline{\mathcal{I}}^{\{n\}_{(m+s)}}$ pour n' assez grand. Soit $n' = p^m q' + r'$ un entier, avec $0 \leq r < p^m$. En notant encore $(F \times F')^*$ l'homomorphisme induit entre les enveloppes à puissances divisées, la relation $(F \times F')^*(\tau'_i) = \xi_i^{p^s} + \zeta'_i$, où $\zeta'_i \in \mathfrak{a}_S \mathcal{O}_{X^2}$, entraîne alors

$$\begin{aligned}(F \times F')^*(\tau_i'^{\{n'\}_{(m)}}) \ &= \ (\xi_i^{p^s} + \zeta'_i)^{r'}((\xi_i^{p^s} + \zeta'_i)^{p^m})^{[q']} \\ &= \ (\xi_i^{p^s} + \zeta'_i)^{r'}(\xi_i^{p^{m+s}} + \zeta_i'^{p^m} + p\eta'_i)^{[q']},\end{aligned}$$

avec $\eta'_i \in \mathfrak{a}_S \mathcal{O}_{X^2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}(F \times F')^*(\tau_i'^{\{n'\}_{(m)}}) \ &= \ (\xi_i^{p^s} + \zeta'_i)^{r'} \sum_{q'_1+q'_2+q'_3=q'} (\xi_i^{p^{m+s}})^{[q'_1]}(\zeta_i'^{p^m})^{[q'_2]}(p\eta'_i)^{[q'_3]} \\ &= \ (\xi_i^{p^s} + \zeta'_i)^{r'} \sum_{q'_1+q'_2+q'_3=q'} \xi_i^{\{p^{m+s}q'_1\}_{(m+s)}}\, \zeta_i'^{\{p^m q'_2\}_{(m)}}\, p^{[q'_3]}\, \eta_i'^{q'_3}.\end{aligned}$$

Comme p est nilpotent sur S, $\mathfrak{a}_S$ est un nilidéal, et $\eta_i'^{q'_3} = 0$ si q'_3 est assez grand. D'autre part, $\mathcal{P}_{X,(m+s)}$ est plat sur S, de sorte que, d'après A.5 (ii), $\zeta_i'^{\{p^m q'_2\}_{(m)}} \in \mathfrak{a}_S^{\{p^m q'_2\}_{(m)}} \mathcal{O}_{X^2}$. L'hypothèse de PD-nilpotence sur $\mathfrak{a}_S$ entraîne donc que $\zeta_i'^{\{p^m q'_2\}_{(m)}} = 0$ si q'_2 est assez grand. L'assertion en résulte.

2.2.6. COROLLAIRE. — *Soient s un entier, $S \to T$ un m-PD-morphisme de schémas* *munis de m-PD-idéaux quasi-cohérents vérifiant les hypothèses de* 2.2.1, X_0 *(resp.* Y_0*) un* S_0*-schéma (resp.* T_0*-schéma) lisse,* $f_0 : X_0 \to Y_0$ *un* T_0*-morphisme,* X *(resp.* Y'*) un S-schéma (resp. T-schéma) lisse relevant* X_0 *(resp.* $Y_0^{(s)}$*).*

(i) *Si* $\mathfrak{a}_S$ *est m-PD-nilpotent, le foncteur* $(F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0)^* = (f_0^{(s)} \circ F^s_{X_0/S_0})^*$ *défini en* 2.1.6 *se factorise canoniquement en un foncteur de la catégorie des* $\mathscr{D}^{(m)}_{Y'}$*-modules à gauche dans celle des* $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$*-modules à gauche, suivi de la restriction des scalaires de* $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$ *à* $\mathscr{D}^{(m)}_X$*.*

(ii) *Sans hypothèse de nilpotence sur* $\mathfrak{a}_S$*, le foncteur* $(F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0)^*$ *se factorise canoniquement en un foncteur de la catégorie des* $\mathscr{D}^{(m)}_{Y'}$*-modules à gauche quasi-nilpotents dans celle des* $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$*-modules à gauche quasi-nilpotents, suivi de la restriction des scalaires de* $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$ *à* $\mathscr{D}^{(m)}_X$*.*

(iii) *Si, comme en* 2.2.3, *on suppose donnés un second m-PD-morphisme* $T \to U$*, un* U_0*-morphisme* $g_0 : Y_0 \to Z_0$*, où* Z_0 *est lisse sur* U_0*, et un relèvement lisse* Z'' *de* $Z_0^{(s+s')}$*, et si l'on suppose de plus remplie l'une des deux conditions suivantes :*

a) *Les m-PD-idéaux* $\mathfrak{a}_S$ *et* $\mathfrak{a}_T$ *sont m-PD-nilpotents,*

b) *On se restreint à la sous-catégorie des* $\mathscr{D}^{(m)}_{Z''}$*-modules quasi-nilpotents,*

alors l'isomorphisme canonique de foncteurs sur la catégorie des $\mathscr{D}^{(m)}_{Z''}$*-modules à gauche*

$$(F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0)^* \circ (F^{s'}_{Z_0^{(s)}/U_0} \circ g_0^{(s)})^* \xrightarrow{\ \sim\ } (F^{s+s'}_{Z_0/U_0} \circ g_0 \circ f_0)^*$$

(*cf.* 2.1.6) *est* $\mathscr{D}^{(m+s+s')}_X$*-linéaire pour les structures induites respectivement en* (i) *et* (ii).

Sous chacune des deux hypothèses considérées, le foncteur $(F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0)^*$ est construit en recollant les foncteurs F^* définis localement par le choix d'un relèvement F de $F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0$ grâce aux isomorphismes $\tau_{F,F'}$. Comme ceux-ci sont $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-linéaires d'après ce qui précède, ces foncteurs se recollent en un foncteur à valeurs dans la catégorie des $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules à gauche. La dernière assertion est alors conséquence de 2.2.3 (iii).

On remarquera qu'on peut en particulier appliquer l'assertion (iii) aux factorisations données $F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0 = f_0^{(s)} \circ F^s_{X_0/S_0}$, de sorte que, dans chacun des deux cas, on dispose d'isomorphismes canoniques de foncteurs à valeurs dans la catégorie des $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules à gauche

$$(F^s_{Y_0/T_0} \circ f_0)^* \simeq f_0^* \circ F^{s\,*}_{Y_0/S_0} \simeq F^{s\,*}_{X_0/S_0} \circ f_0^{(s)\,*}. \tag{2.2.6.1}$$

En particulier, nous noterons encore $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ le foncteur de la catégorie des $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche dans la catégorie des $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules à gauche construit sous les hypothèses de (i) ou de (ii).

2.2.7. Sous les hypothèses de 2.2.1, soit $\mathscr{B}_{Y'}$ une $\mathcal{O}_{Y'}$-algèbre munie d'une action compatible de $\mathscr{D}^{(m)}_{Y'}$. Comme cette compatibilité est caractérisée par le fait que les isomorphismes définissant la m-PD-stratification de $\mathscr{B}_{Y'}$ sont des isomorphismes d'algèbres, et que la $(m+s)$-PD-stratification de $\mathscr{B}_X := F^*\mathscr{B}_{Y'}$ s'en déduit par image inverse par les morphismes $\Phi : \Delta^n_{X,(m+s)} \to \Delta^n_{Y',(m)}$, la structure de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-module obtenue sur $\mathscr{B}_X$ est alors compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre. Pour la même raison, si F et $F' : X \to Y'$ sont deux relèvements de $F^s_{Y_0/S_0} \circ f_0$, et si l'une des conditions a) ou b) de 2.1.5 est vérifiée, l'isomorphisme $\tau_{F,F'} : F'^*\mathcal{B}_{X'} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{B}_{X'}$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres.

De la même manière, si $\mathcal{F}'$ est un $(\mathcal{B}_{Y'} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{Y'})$-module, alors $F^*\mathcal{F}'$ est muni d'une structure naturelle de $(\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{D}^{(m+s)}_X)$-module; si F et $F' : X \to Y'$ vérifient les hypothèses de 2.2.1, et si l'une des conditions a) ou b) de 2.2.5 est vérifiée, alors l'isomorphisme $\tau_{F,F'} : F'^*\mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{F}'$ est $(\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{D}^{(m+s)}_X)$-linéaire.

Lorsqu'on est sous les hypothèses de 2.2.5, le corollaire 2.2.6 permet de définir globalement une action canonique de $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$ sur l'image inverse $(F^s_{Y_0/S_0} \circ f_0)^*\mathcal{B}_{Y'}$. Cette action étant compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre, on obtient encore un faisceau d'anneaux $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{D}^{(m+s)}_X$, bien défini même si on ne dispose pas d'un relèvement du Frobenius sur X tout entier. De même, on obtient un foncteur $(F^s_{Y_0/S_0} \circ f_0)^*$ de la catégorie des $(\mathcal{B}_{X'} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{X'})$-modules (resp. quasi-nilpotents sous l'hypothèse b)) dans la catégorie des $(\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{D}^{(m+s)}_X)$-modules (resp. quasi-nilpotents).

2.2.8. *Exemples.* — Nous donnons ici deux exemples importants de $\mathcal{O}_X$-algèbres pour lesquelles l'élévation par F^* du niveau de l'action des opérateurs différentiels apparaît naturellement.

(i) Soient $Y \subset X_0$ un sous-schéma fermé, et $\mathcal{P}_{X,(m),\alpha}(\mathcal{J})$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m de l'idéal $\mathcal{J}$ de Y dans X, compatibles au m-PD-idéal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ de $\mathcal{O}_S$. Notons $Y' \subset X^{(s)}_0$ le sous-schéma fermé déduit de Y par changement de base, $\mathcal{J}'$ son idéal dans X', $Y'' \subset X_0$ son image inverse par $F^s_{X_0/S_0}$, dont l'idéal dans X est l'idéal $\mathcal{J}^{(p^s)} + \mathfrak{a}\mathcal{O}_X$ engendré par $\mathfrak{a}$ et par les puissances p^s-ièmes des sections de $\mathcal{J}$. Comme $F : X \to X'$ est un morphisme plat, l'homomorphisme canonique $F^*\mathcal{P}_{X',(m),\alpha}(\mathcal{J}') \to \mathcal{P}_{X,(m),\alpha}(\mathcal{J}^{(p^s)} + \mathfrak{a}\mathcal{O}_X) = \mathcal{P}_{X,(m),\alpha}(\mathcal{J}^{(p^s)})$ est un isomorphisme (la dernière égalité résultant de la compatiblité des PD-structures à celle de $\mathfrak{a}$). Par construction, $\mathcal{P}_{X,(m),\alpha}(\mathcal{J}^{(p^s)})$ est l'enveloppe à puissances divisées usuelle de l'idéal $(\mathcal{J}^{(p^s)})^{(p^m)}$ engendré par les puissances p^m-ièmes des sections de $\mathcal{J}^{(p^s)}$, avec compatibilité aux puissances divisées de $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + p\mathcal{O}_S$. Elle est donc égale à l'enveloppe à puissance divisées usuelle de l'idéal $\mathcal{J}^{(p^{m+s})}$ avec même condition de compatibilité. On obtient donc finalement un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_X$-algèbres

$$F^*\mathcal{P}_{X',(m),\alpha}(\mathcal{J}') \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{P}_{X,(m+s),\alpha}(\mathcal{J}). \tag{2.2.8.1}$$

D'après [5, 2.3.4 (ii)] (qu'on généralise aisément au cas où l'on se fixe un m-PD-idéal de compatibilité $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ dans $\mathcal{O}_S$), la $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathcal{P}_{X,(m),\alpha}(\mathcal{J})$ est canoniquement munie d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module. Grâce à 2.2.3, la source et le but de (2.2.8.1) sont donc tous deux munis d'une structure de $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-module. Il est alors facile de vérifier que cet isomorphisme est $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-linéaire. En effet, la structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module de $\mathcal{P}_{X,(m),\alpha}(\mathcal{J})$ est définie par la m-PD-stratification qu'on obtient en montrant que, si $(\overline{\mathcal{I}}, \widetilde{\mathcal{I}})$ est le m-PD-idéal canonique de $\Delta^n_{X,(m)}$, et β la PD-structure de $\widetilde{\mathcal{I}} + \mathfrak{b}_1\mathcal{P}^n_{X,(m)}$, les homomorphismes canoniques $p_i^*\mathcal{P}_{X,(m),\alpha}(\mathcal{J}) \to \mathcal{P}_{\Delta^n_X,(m),\beta}(p_i^*\mathcal{J} + \overline{\mathcal{I}})$ sont des isomorphismes. L'assertion est donc conséquence de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{P}_{X,(m),\alpha}(\mathscr{I}^{(p^s)}) \; = \mathscr{P}_{X,(m+s),\alpha}(\mathscr{I}) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{\Delta^n_X,(m+s),\beta}(p_i^*\mathscr{I} + \overline{\mathscr{I}}) \\
{\scriptstyle F^*}\Big\uparrow & & \Big\uparrow \Phi^* \\
\mathscr{P}_{X',(m),\alpha}(\mathscr{I}') & \longrightarrow & \mathscr{P}_{\Delta^n_{X'},(m),\beta'}(p_i^*\mathscr{I}' + \overline{\mathscr{I}}')
\end{array}$$

associés aux deux projections de $\Delta^n_{X,(m)}$ sur X, qui résulte de la fonctorialité des enveloppes à puissances divisées usuelles sous-jacentes à ces enveloppes à puissances divisées partielles.

(ii) Supposons que $\mathfrak{a}$ soit m-PD-nilpotent, et soit $Z \subset X_0$ un diviseur. Notons $Z' \subset X_0^{(s)}$ l'image inverse de Z ; comme son image inverse dans X est le diviseur p^sZ, et que X est fidèlement plat sur $X_0^{(s)}$, Z' est un diviseur de $X_0^{(s)}$. Soient $f \in \mathcal{O}_X$ une section relevant une équation locale f_0 de Z, $f' \in \mathcal{O}_{X'}$ un relèvement de l'image inverse de f_0 dans $\mathcal{O}_{X_0^{(s)}}$. Rappelons que, pour tout entier r tel que $p^{m+1} \mid r$, on peut associer canoniquement à Z une $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathscr{B}_X(Z, r)$ munie d'une action compatible de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ [5, 4.2.3] : localement, $\mathscr{B}_X(Z, r) = \mathcal{O}_X[T]/(f^rT - p)$, et l'action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ est définie par une m-PD-stratification dont on trouvera la construction dans [5, 4.2.1]; on montre ensuite que les algèbres ainsi obtenues peuvent être recollées. Il résulte de cette construction que les algèbres $\mathscr{B}_X(Z, r)$ vérifient les deux propriétés suivantes :

a) Si a est un entier, $\mathscr{B}_X(aZ, r) = \mathscr{B}_X(Z, ar)$ en tant que $\mathcal{O}_X$-algèbres munies d'une action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$;

b) Si $T \to S$ est un m-PD-morphisme, Y un T-schéma lisse, $u : Y \to X$ un S-morphisme tel que $Z_Y = Y_0 \times_{X_0} Z$ soit un diviseur de Y_0, alors $u^*(\mathscr{B}_X(Z, r)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_Y(Z_Y, r)$ en tant que $\mathcal{O}_Y$-algèbres munies d'une action de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$.

Appliquées à $F : X \to X'$ et au diviseur $Z' \subset X_0^{(s)}$, ces propriétés fournissent des isomorphismes $\mathscr{D}_X^{(m)}$-linéaires

(2.2.8.2) $$F^*\mathscr{B}_{X'}(Z', r) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_X(p^sZ, r) = \mathscr{B}_X(Z, p^sr).$$

La proposition 2.2.3 fournit sur $F^*\mathscr{B}_{X'}(Z', r)$ une structure de $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-module, et d'autre part $\mathscr{B}_X(Z, p^sr)$ possède également une structure de $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-module puisque $p^{m+s+1} \mid p^sr$. Il y a alors lieu de vérifier la linéarité de cet isomorphisme par rapport à $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$:

2.2.9. PROPOSITION. — *L'isomorphisme* (2.2.8.2) *est* $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$*-linéaire.*

Pour le vérifier, on montre qu'il commute aux $(m+s)$-PD-stratifications des deux membres. C'est une propriété locale, ce qui permet d'expliciter ces algèbres sous la forme $\mathscr{B}_{X'}(Z', r) = \mathcal{O}_{X'}[T']/(f'^rT' - p)$, $\mathscr{B}_X(Z, p^sr) = \mathcal{O}_X[T]/(f^{p^sr}T - p)$. On a d'autre part $F^*(f') = f^{p^s} + h$, avec $h \in \mathfrak{a}\mathcal{O}_X$. L'isomorphisme (2.2.8.2) est alors celui qui relie les deux constructions de $\mathscr{B}_X(p^sZ, r)$ fournies par les deux relèvements f^{p^s} et $F^*(f')$ d'une équation locale de p^sZ dans X. D'après [5, 4.2.2 et 4.2.3], c'est l'isomorphisme

$$\varepsilon_h : \mathcal{O}_X[T']/(F^*(f')^rT' - p) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X[T]/(f^{p^sr}T - p)$$

tel que

$$\varepsilon_h(T') \;=\; T(1 + T\varphi_r^{(m)}(f^{p^s}, F^*(f')))^{-1},$$

où $\varphi_r^{(m)}(t_1,\, t_2) \in \mathbb{Z}_{(p)}[t_1]\langle t_2 - t_1\rangle_{(m)}$ est le polynôme à puissances divisées défini par la relation

$$t_2^r - t_1^r \;=\; p\,\varphi_r^{(m)}(t_1,\, t_2).$$

D'autre part, si l'on note T_1, T_2 les images inverses de T par les deux projections $\Delta^n_{X,(m+s)} \to X, f_1, f_2$ celles de f, la $(m+s)$-PD-stratification (ε_n) de $\mathscr{B}_X(Z,\, p^s r)$ est donnée par

$$\varepsilon_n^{(m+s)}(T_2) \;=\; T_1(1 + T_1\,\varphi_{p^s r}^{(m+s)}(f_1, f_2))^{-1},$$

tandis que celle de $F^*\mathscr{B}_{X'}(Z',\, r)$ est l'image inverse par $\Phi : \Delta^n_{X,(m+s)} \to \Delta^n_{X',(m)}$ de la m-PD-stratification donnée de même par

$$\varepsilon_n'^{(m)}(T_2') \;=\; T_1'(1 + T_1'\,\varphi_r^{(m)}(f_1', f_2'))^{-1}.$$

Vérifier que ε_h est horizontal revient alors à montrer dans $\mathscr{P}^n_{X,(m+s)}$ la relation

$$\varphi_{p^s r}^{(m+s)}(f_1, f_2) + \varphi_r^{(m)}(f_2^{p^s},\, (F\times F)^*(f_2')) \;=\; \varphi_r^{(m)}(f_1^{p^s},\, (F\times F)^*(f_1')) + \Phi^*(\varphi_r^{(m)}(f_1', f_2')).$$

Pour prouver celle-ci, on utilise la remarque évidente suivante : si $(I,\, J,\, \gamma)$ est un $(m+s)$-PD-idéal d'un anneau A, et si $I^{(p^s)} \subset I$ est l'idéal engendré par les puissances p^s-ièmes des éléments de I, alors $(J,\, \gamma)$ munit l'idéal $I^{(p^s)} + J$ d'une m-PD-structure. Pour tout couple $(a_1,\, a_2)$ d'éléments de A tels que $a_1 \equiv a_2 \bmod I$, on peut donc évaluer $\varphi_r^{(m)}(a_1^{p^s},\, a_2^{p^s})$. On a alors l'égalité

$$\varphi_{p^s r}^{(m+s)}(a_1, a_2) \;=\; \varphi_r^{(m)}(a_1^{p^s},\; a_2^{p^s}).$$

En effet, il suffit de la vérifier dans le cas universel où $A = \mathbb{Z}_{(p)}[t_1]\langle t_2 - t_1\rangle_{(m+s)}$ et $a_i = t_i$. Comme A est alors sans p-torsion, il suffit même de la vérifier dans $A_{\mathbb{Q}}$, et on a alors

$$\varphi_{p^s r}^{(m+s)}(t_1, t_2) \;=\; \frac{1}{p}(t_2^{p^s r} - t_1^{p^s r}) \;=\; \frac{1}{p}((t_2^{p^s})^r - (t_1^{p^s})^r) \;=\; \varphi_r^{(m)}(t_1^{p^s},\; t_2^{p^s}).$$

D'autre part, si $\mathscr{I}$ est le $(m+s)$-PD-idéal canonique de $\mathscr{P}^n_{X,(m+s)}$, et $\widetilde{\mathscr{I}}$ son PD-idéal, la section $(F\times F)^*(f_2' - f_1')$ appartient à l'idéal $\mathscr{I}^{(p^s)} + \mathfrak{a}\mathscr{P}^n$, et le PD-idéal $\widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}\mathscr{P}^n$ munit ce dernier d'une m-PD-structure. La relation à vérifier peut ainsi s'écrire

$$\varphi_r^{(m)}(f_1^{p^s}, f_2^{p^s}) + \varphi_r^{(m)}(f_2^{p^s},\, (F\times F)^*(f_2')) \;=\;$$
$$\varphi_r^{(m)}(f_1^{p^s},\, (F\times F)^*(f_1')) + \varphi_r^{(m)}((F\times F)^*(f_1'),\, (F\times F)^*(f_2')),$$

et elle résulte de [5, (4.2.1.3)].

2.3. Descente par Frobenius

Nous revenons maintenant au cas particulier où F est un relèvement de la puissance s-ième du morphisme de Frobenius relatif, et nous établissons ici le résultat central de cet article, montrant que le foncteur image inverse par Frobenius F^* construit en 2.2.3 est alors une équivalence de catégories.

2.3.1. Reprenant les notations de 2.2.1, on suppose donc donnés deux entiers $m, s \geq 0$, un schéma S muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, un S-schéma lisse X de réduction X_0 sur $S_0 = V(\mathfrak{a})$, et on suppose toujours vérifiées les conditions suivantes :

(i) p est nilpotent sur S ;

(ii) $p \in \mathfrak{a}$.

On note $\mathfrak{b}_1$ l'idéal $\mathfrak{b} + p\mathcal{O}_S$, muni des puissances divisées prolongeant α et les puissances divisées canoniques de $p\mathcal{O}_S$.

Soient X' un S-schéma lisse relevant $X_0^{(s)}$, et $F : X \to X'$ un S-morphisme relevant le morphisme de Frobenius relatif $F^s_{X_0/S_0} : X_0 \to X_0^{(s)}$. Il résulte du critère de platitude par fibres [EGA IV, (11.3.10)] que F est un morphisme plat. D'autre part, $\mathfrak{a}$ est un nilidéal puisqu'il est muni d'une m-PD-structure, et que p est nilpotent sur S. Par réduction au cas où S est nœthérien, donc $\mathfrak{a}$ nilpotent, il en résulte que F est un morphisme fini, et que $\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-module de présentation finie. Par conséquent, $\mathcal{O}_X$ est une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre localement libre, de rang p^{ds} si X est de dimension relative d sur S.

On suppose donnée de plus une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre $\mathscr{B}_{X'}$ munie d'une action à gauche de $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$, compatible à sa structure d'algèbre. On pose $\mathscr{B}_X = F^*\mathscr{B}_{X'}$, et on munit $\mathscr{B}_X$ de l'action de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$ définie plus haut, qui est alors compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre. Comme précédemment, on note $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'} = \mathscr{B}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{D}^{(m)}_{X'}$, $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X = \mathscr{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}^{(m+s)}_X$ les faisceaux d'anneaux correspondants.

Donnons d'abord quelques lemmes.

2.3.2. LEMME. — *Soit $\nu \geq 0$ un entier. Le carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{X,(m+s)}(\nu) & \longrightarrow & X^{\nu+1} \\ {\scriptstyle \Phi_\nu}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F_\nu} \\ \Delta_{X',(m)}(\nu) & \longrightarrow & X'^{\,\nu+1} \end{array} \tag{2.3.2.1}$$

est cartésien.

D'après [5, 1.5.3], les PD-enveloppes $\mathscr{P}_{(m)}(\mathscr{I}'_\nu)$ et $\mathscr{P}_{(m+s)}(\mathscr{I}_\nu)$ vérifient automatiquement la condition de compatibilité à la m-PD-structure α de $\mathfrak{a}$. Comme F_ν est un morphisme plat, l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_{X^{\nu+1}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'^{\nu+1}}} \mathscr{P}_{(m),\alpha}(\mathscr{I}'_\nu) \longrightarrow \mathscr{P}_{(m),\alpha}(\mathscr{I}'_\nu\mathcal{O}_{X^{\nu+1}})$$

est un isomorphisme. Or, par construction (*cf.* [5, 1.4.1]), $\mathscr{P}_{(m),\alpha}(\mathscr{I}'_\nu\,\mathcal{O}_{X^{\nu+1}})$ est l'enveloppe à puissances divisées usuelle de l'idéal $\mathscr{I}''_\nu = \mathscr{I}'^{(p^m)}_\nu\mathcal{O}_{X^{\nu+1}} + \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{X^{\nu+1}}$, avec compatibilité aux puissances divisées de $\mathfrak{b}_1$. Pour $1 \leq j \leq \nu$, on note $q_j : X^{\nu+1} \to X^2$ la projection sur les facteurs d'indices $j-1$ et j. Soient $t_1, \dots, t_d$ des coordonnées locales sur un ouvert de X, de réduction $\bar{t}_i$ dans $\mathcal{O}_{X_0}$, $t'_1, \dots, t'_d$ des coordonnées locales sur X' relevant les $1 \otimes \bar{t}_i \in \mathcal{O}_{X_0^{(s)}}$, et posons $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$, $\tau'_i = 1 \otimes t'_i - t'_i \otimes 1$. En reprenant les calculs de la démonstration de 2.2.2, on déduit de (2.2.2.2) que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}''_\nu &= (q_j^* F_1^*(\tau_i'^{p^m}))_{\substack{1 \le i \le d \\ 1 \le j \le \nu}} + \mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X^{\nu+1}} \\ &= (q_j^*(\tau_i^{p^{m+s}} + \sigma_i))_{\substack{1 \le i \le d \\ 1 \le j \le \nu}} + \mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X^{\nu+1}}, \end{aligned}$$

avec $\sigma_i \in \mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X^2}$; on obtient donc

$$\mathcal{I}''_\nu = (q_j^*(\tau_i^{p^{m+s}}))_{\substack{1 \le i \le d \\ 1 \le j \le \nu}} + \mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X^{\nu+1}}.$$

Par conséquent, l'enveloppe à puissances divisées compatibles à celles de $\mathfrak{b}_1$ de $\mathcal{I}''_\nu$ n'est autre que $\mathcal{P}_{(m+s),\alpha}(\mathcal{I}_\nu)$, d'où le lemme.

2.3.3. LEMME. — *Soient $\nu \ge 0$ un entier, $X(\nu) = X \times_{X'} \dots \times_{X'} X$ le produit fibré de $\nu+1$ copies de X au-dessus de X', $\mathcal{K}_\nu$ l'idéal de l'immersion diagonale de X dans $X(\nu)$. Alors l'idéal $\mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X(\nu)} \cap \mathcal{K}_\nu$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X(\nu)}$, et munit $\mathcal{K}_\nu$ d'une $(m+s)$-PD-structure canonique, compatible à α et PD-nilpotente.*

Pour tout ν, $X(\nu)$ est plat sur S, de sorte que les puissances divisées de $\mathfrak{b}_1$ s'étendent à $X(\nu)$. Observons alors que la platitude sur $\mathcal{O}_S$ de $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X(\nu)}/\mathcal{K}_\nu$ entraîne que $\mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X(\nu)} \cap \mathcal{K}_\nu = \mathfrak{b}_1 \mathcal{K}_\nu$, qui est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X(\nu)}$. Il est clair que $p\mathcal{K}_\nu \subset \mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X(\nu)} \cap \mathcal{K}_\nu$. Pour vérifier que $\mathcal{K}_\nu^{(p^{m+s})} \subset \mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X(\nu)} \cap \mathcal{K}_\nu$, et que la $(m+s)$-PD-structure obtenue est PD-nilpotente, on peut supposer que X est un schéma affine sur lequel on dispose de coordonnées locales. Avec les notations de 2.3.2, la relation (2.2.2.2) entraîne que, dans $\mathcal{O}_{X(1)}$, on a

$$\tau_i^{p^{m+s}} = -\sigma_i,$$

avec $\sigma_i \in \mathfrak{b}\mathcal{K}_1^{p^m} \subset \mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X(1)} \cap \mathcal{K}_1$. Par conséquent, $\mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_{X(\nu)} \cap \mathcal{K}_\nu$ munit $\mathcal{K}_\nu$ d'une $(m+s)$-PD-structure, compatible à α par construction. D'autre part $\mathfrak{b}_1$ est un nilidéal de $\mathcal{O}_S$, puisque c'est un PD-idéal dans un schéma sur lequel p est nilpotent. Les images des τ_i dans $\mathcal{O}_{X(1)}$ sont donc nilpotentes, et $\mathcal{K}_1$ est un idéal nilpotent. Puisque $\tau_i^{p^{m+s}} \in \mathfrak{b}\mathcal{K}_1^{p^m}$, il en résulte par additivité et homogénéité que $\tau_i^{\{k\}} = 0$ pour k assez grand. Avec les notations de A.2, il s'ensuit de même que l'idéal $\mathcal{K}_{\nu,n}$ est nul si n est assez grand. Comme p est nilpotent sur S, $\mathcal{K}_\nu$ est $(m+s)$-PD-nilpotent d'après A.6.

2.3.4. LEMME. — *Soit $\Phi_\nu^* : F_\nu^{-1}\mathcal{P}_{X',(m)}(\nu) \to \mathcal{P}_{X,(m+s)}(\nu)$ la factorisation naturelle de F_ν^* construite en 2.2.2. Pour tout $n \ge 0$, il existe un entier $n' \ge n$ (ne dépendant pour S fixé que de n, m, s, ν et de la dimension relative d de X sur S) tel que*

$$\bar{\mathcal{I}}_\nu^{\{n'\}_{(m+s)}} \subset \Phi_\nu^*(\bar{\mathcal{I}}_\nu'^{\{n\}_{(m)}})\mathcal{P}_{X,(m+s)}(\nu).$$

L'assertion étant locale, on peut supposer qu'il existe des coordonnées locales sur X, et reprendre les notations de 2.3.2. Fixons d'abord un entier n' arbitraire, et posons $n' = p^{m+s}q' + r'$, avec $0 \le r' < p^{m+s}$. La relation (2.2.2.2) donne alors

$$\begin{aligned} \tau_i^{\{n'\}_{(m+s)}} &= \tau_i^{r'}(\tau_i^{p^{m+s}})^{[q']} = \tau_i^{r'}(F_1^*(\tau_i'^{p^m}) - \sigma_i)^{[q']} \\ &= \tau_i^{r'} \sum_{q'' \le q'} \Phi^*((\tau_i'^{p^m})^{[q'-q'']})(-\sigma_i)^{[q'']}, \end{aligned} \qquad (2.3.4.1)$$

avec $\sigma_i \in \mathfrak{b}\mathscr{I}^{p^m}$. Comme p est nilpotent, l'idéal de type fini $\mathscr{I}$ engendre un idéal nilpotent dans $\mathscr{P}_{X,(m+s)}$. Soit N tel que $\mathscr{I}^{Np^m}\mathscr{P}_{X,(m+s)} = 0$. Puisque $\sigma_i^{[q'']} \in \mathfrak{b}^{[q'']}\mathscr{I}^{q''p^m}\mathscr{P}_{X,(m+s)}$, on obtient donc $\sigma_i^{[q'']} = 0$ pour $q'' \ge N$.

Pour n donné, avec $n = p^m q + r$, $0 \le r < p^m$, posons alors $n' = dvp^{m+s}(q+N)$. Si une section $\prod_{i,j} \tau_{i,j}^{\{n'_{i,j}\}_{(m)}}$ appartient à $\mathscr{I}^{\{n'\}_{(m+s)}}$, il existe i, j tels que $n'_{i,j} \ge p^{m+s}(q+N)$. En posant $n'_{i,j} = p^{m+s}q'_{i,j} + r'_{i,j}$, avec $0 \le r'_{i,j} < p^{m+s}$, on a donc $q'_{i,j} \ge q + N$, et les seuls termes non nuls du second membre de l'égalité (2.3.4.1) pour $\tau_i^{\{n'_{i,j}\}_{(m+s)}}$ sont tels que $q'_{i,j} - q'' \ge q+1$. Comme les $(\tau_i'^{p^m})^{[q'_{i,j}-q'']} = \tau_i'^{\{p^m(q'_{i,j}-q'')\}_{(m)}}$ appartiennent alors à $\mathscr{I}'^{\{n\}_{(m)}}$, on en déduit l'inclusion voulue.

2.3.5. LEMME. — *Soient $n \ge 0$ un entier, $\Delta = \Delta_{X,(m+s)}$, $\Delta' = \Delta_{X',(m)}$, $\Delta'^n = \Delta^n_{X',(m)}$, et $\Delta^n = \Delta'^n \times_{\Delta'} \Delta$.*

(i) *La $(m+s)$-PD-structure de l'idéal $\overline{\mathscr{I}}$ passe au quotient, et munit l'idéal de l'immersion $X \hookrightarrow \Delta^n$ d'une $(m+s)$-PD-structure PD-nilpotente, compatible à α.*

(ii) *L'idéal $\mathscr{J}$ de l'immersion diagonale $X \hookrightarrow \Delta \times_{\Delta'} \Delta$ (resp. l'idéal $\mathscr{J}_n$ de l'immersion $X \hookrightarrow \Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n$) est muni naturellement d'une $(m+s)$-PD-structure (resp. d'une $(m+s)$-PD-structure PD-nilpotente) compatible à α, telle que les deux projections $\Delta \times_{\Delta'} \Delta \to \Delta$ (resp. $\Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n \to \Delta^n$) soient des $(m+s)$-PD-morphismes.*

Pour prouver la première assertion, il faut montrer que, si $\widetilde{\mathscr{I}}$ est le sous-PD-idéal canonique de $\overline{\mathscr{I}}$, $\widetilde{\mathscr{I}} \cap (\overline{\mathscr{I}}'^{\{n+1\}}\mathscr{P}_{X,(m+s)})$ est un sous-PD-idéal de $\widetilde{\mathscr{I}}$. Comme $\widetilde{\mathscr{I}}$ est un sous-PD-idéal de $\widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)}$, il suffit de montrer que $(\widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)}) \cap (\overline{\mathscr{I}}'^{\{n+1\}}\mathscr{P}_{X,(m+s)})$ est un sous-PD-idéal de $\widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)}$. C'est une assertion locale sur X, de sorte qu'on peut supposer qu'on dispose de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$. Par construction (*cf.* [5, 1.4.1]), $\widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)}$ est l'idéal de $\mathscr{P}_{X,(m+s)}$ engendré par $\mathfrak{b}_1$ et par les sections $(\tau_i^{p^{m+s}})^{[k]}$ pour $i = 1, \ldots, d$, et $k \ge 1$. D'après (2.2.2.2), $\tau_i^{p^{m+s}} = (F \times F)^*(\tau_i'^{p^m}) - \sigma_i$, avec $\sigma_i \in \mathfrak{b}\mathscr{O}_{X^2}$. Or Φ^* est un PD-morphisme de $(\mathscr{P}_{X',(m)}, \widetilde{\mathscr{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X',(m)})$ dans $(\mathscr{P}_{X,(m+s)}, \widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)})$. Par additivité, il en résulte que, pour tout $k \ge 1$, $(\tau_i^{p^{m+s}})^{[k]} \equiv \Phi^*(\tau_i'^{p^m})^{[k]} \bmod \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)}$, donc que $\widetilde{\mathscr{I}} \subset \widetilde{\mathscr{I}}'\mathscr{P}_{X,(m+s)} + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)}$. Comme Φ^* est un PD-morphisme, on voit donc que

$$\widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)} = (\widetilde{\mathscr{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X',(m)})\mathscr{P}_{X,(m+s)}. \qquad (2.3.5.1)$$

Comme, d'après 2.3.2, $\mathscr{P}_{X,(m+s)}$ est plat sur $\mathscr{P}_{X',(m)}$, on en déduit que

$$(\widetilde{\mathscr{I}} + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X,(m+s)}) \cap (\overline{\mathscr{I}}'^{\{n+1\}}\mathscr{P}_{X,(m+s)}) = ((\widetilde{\mathscr{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathscr{P}_{X',(m)}) \cap \overline{\mathscr{I}}'^{\{n+1\}})\mathscr{P}_{X,(m+s)}.$$

Or, d'après A.1 (iii), $(\widetilde{\mathcal{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathcal{P}_{X',(m)}) \cap \overline{\mathcal{I}}'^{\{n+1\}}$ est un sous-PD-idéal de $\widetilde{\mathcal{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathcal{P}_{X',(m)}$, d'où la première partie de l'assertion (i). La $(m+s)$-PD-structure quotient ainsi obtenue est alors PD-nilpotente grâce à 2.3.4 et A.6 (ii). Elle est compatible à α par construction, compte tenu de ce que, grâce à la platitude de X sur S, $\mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta^n} \cap \overline{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta^n} = \mathfrak{b}_1(\overline{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta^n})$, et est donc un sous-PD-idéal de $\overline{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta^n}$

Montrons maintenant l'assertion (ii) pour l'immersion $X \hookrightarrow \Delta \times_{\Delta'} \Delta$. Si $\mathcal{K}' = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} \to \mathcal{O}_\Delta)$, on a $\mathcal{J} = \overline{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} + \mathcal{K}'$. On dispose alors des PD-structures suivantes :

a) Sur $\mathcal{K}'$, l'idéal $\mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} \cap \mathcal{K}'$ définit une $(m+s)$-PD-structure PD-nilpotente. En effet, Δ est plat sur S d'après [5, 1.5.3 (iii)], et il en est de même de $\Delta \times_{\Delta'} \Delta$ grâce à 2.3.2. Par suite, $\mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} \cap \mathcal{K}' = \mathfrak{b}_1\mathcal{K}'$, et $\mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} \cap \mathcal{K}'$ est donc un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$. Le fait que $\mathcal{K}'^{(p^{m+s})} \subset \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} \cap \mathcal{K}'$ se voit comme dans la démonstration de 2.3.3 : si on se place sur un ouvert où l'on dispose de coordonnées locales, le lemme 2.3.2 entraîne que $\mathcal{O}_\Delta$ est libre sur $\mathcal{O}_{\Delta'}$ avec pour base les monômes par rapport aux sections $t_i \otimes 1$ et $1 \otimes t_i$, de degré $< p^s$ en chacune des $2d$ variables; par suite, les images des sections $\tau_{i,j}$ de $\mathcal{O}_{X^4}$ définies en posant

$$\tau_{i,0} = (1\otimes 1)\otimes(t_i\otimes 1) - (t_i\otimes 1)\otimes(1\otimes 1), \quad \tau_{i,1} = (1\otimes 1)\otimes(1\otimes t_i) - (1\otimes t_i)\otimes(1\otimes 1);$$

engendrent $\mathcal{K}'$; dans $\mathcal{O}_{X^4}$, on a encore une relation de la forme

$$\tau_{i,j}^{p^{m+s}} = F_3^*(\tau_{i,j}'^{\,p^m}) - \sigma_{i,j},$$

avec $j = 0, 1$, et $\sigma_{i,j} \in \mathfrak{b}(\mathcal{K}'')^{p^m}$, où $\mathcal{K}''$ est l'idéal de l'immersion diagonale $X^2 \hookrightarrow X^2 \times X^2$; on conclut alors comme en 2.3.3.

b) Sur $\overline{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$, on dispose de la $(m+s)$-PD-structure déduite par platitude de celle de $\overline{\mathcal{I}}$. Comme, dans $\mathcal{O}_\Delta$, les puissances divisées de $\widetilde{\mathcal{I}}$ sont compatibles à celles de $\mathfrak{b}_1$, il en est de même par platitude pour les PD-idéaux engendrés par $\widetilde{\mathcal{I}}$ et $\mathfrak{b}_1$ dans $\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$. Par conséquent, l'idéal $\widetilde{\mathcal{J}} = \widetilde{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} + \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} \cap \mathcal{K}'$ est muni d'une PD-structure prolongeant ces deux PD-structures, ce qui munit $\mathcal{J} = \overline{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} + \mathcal{K}'$ d'une $(m+s)$-PD-structure, compatible à α comme en (i).

La $(m+s)$-PD-structure ainsi construite utilise la décomposition $\mathcal{J} = \overline{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} + \mathcal{K}'$ fournie par la projection de $\Delta \times \Delta$ sur le premier facteur Δ. Cette projection est alors un $(m+s)$-PD-morphisme par construction. Pour s'assurer que la projection sur le second facteur Δ est aussi un $(m+s)$-PD-morphisme, il suffit de vérifier que cette structure coïncide avec celle qu'on construit de la même façon en utilisant la deuxième projection. Or le PD-idéal $\widetilde{\mathcal{J}}$ définissant cette $(m+s)$-PD-structure est muni de la PD-structure induite par celle de $\widetilde{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} + \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$, et ce dernier est égal à $\widetilde{\mathcal{I}}'\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} + \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$ d'après (2.3.5.1), muni de la PD-structure définie par platitude par $\widetilde{\mathcal{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathcal{P}_{X',(m)}$. Il est donc indépendant de la projection choisie. Il suffit alors de prouver que, en tant qu'idéal, $\widetilde{\mathcal{J}} = \mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}\widetilde{\mathcal{I}} + \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} \cap \mathcal{K}'$. Soient $\tau_i \otimes 1$ et $1 \otimes \tau_i$ les images inverses de τ_i dans $\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$ par les deux projections. On a alors

$$1 \otimes \tau_i = \tau_i \otimes 1 + (\tau_{i,1} - \tau_{i,0}),$$

d'où

$$1 \otimes \tau_i^{p^{m+s}} \equiv \tau_i^{p^{m+s}} \otimes 1 + \tau_{i,1}^{p^{m+s}} - \tau_{i,0}^{p^{m+s}} \quad \mathrm{mod}\, p\mathcal{K}';$$

comme $\tau_{i,j}^{p^{m+s}} \in \mathfrak{b}\mathcal{K}'$ d'après ce qui précède, l'assertion en résulte.

Pour en déduire l'assertion (ii) pour l'idéal $\mathcal{J}_n$, on procède comme dans la preuve de (i). Il faut montrer que l'intersection du sous-PD-idéal canonique $\widetilde{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{J}$ avec $\overline{\mathcal{I}}'^{\{n+1\}}\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$ est un sous-PD-idéal de $\widetilde{\mathcal{J}}$. On peut pour cela remplacer $\widetilde{\mathcal{J}}$ par $\widetilde{\mathcal{J}} + \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$. D'après ce qu'on a vu dans la preuve de (i), $\widetilde{\mathcal{J}} + \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta} = (\widetilde{\mathcal{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathcal{P}_{X',(m)})\mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}$, et on est de nouveau ramené par platitude au fait que $(\widetilde{\mathcal{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathcal{P}_{X',(m)}) \cap \overline{\mathcal{I}}'^{\{n+1\}}$ est un sous-PD-idéal de $\widetilde{\mathcal{I}}' + \mathfrak{b}_1\mathcal{P}_{X',(m)}$. D'après A.7 (ii), la $(m+s)$-PD-structure ainsi obtenue sur $\mathcal{J}_n$ est PD-nilpotente, puisque celles de $\mathcal{K}'$ et de $\overline{\mathcal{I}}\mathcal{O}_{\Delta^n}$ le sont, compte tenu de (i). Sa compatibilité à α résulte encore de sa construction et de l'argument de platitude utilisé en (i).

2.3.6. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses de* 2.3.1, *le foncteur* F^* *est une équivalence entre la catégorie des* $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$*-modules à gauche (resp. quasi-cohérents) et celle des* $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)}$*-modules à gauche (resp. quasi-cohérents).*

On observera qu'il n'est donc pas nécessaire de se limiter dans cet énoncé au cas des modules quasi-cohérents.

L'énoncé étant local sur X, il suffit de le démontrer lorsque X est affine et muni de coordonnées locales. Dans ce cas, $\mathcal{O}_{X^{\nu+1}}$ est libre de rang fini sur $\mathcal{O}_{X'^{\nu+1}}$ pour tout ν, et il en est de même des $\mathcal{O}_{X(\nu)}$ sur $\mathcal{O}_X$ pour chacun des homomorphismes correspondant à l'une des projections.

Il est clair que le foncteur F^* est fidèle. Prouvons qu'il est pleinement fidèle. Grâce à 2.3.3, on observe d'abord que, si $\nu \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $X(\nu) \to X_{/S}^{\nu+1}$ se factorise par un morphisme $X(\nu) \to \Delta^r_{X,(m+s)}(\nu)$ pour r assez grand, et cette factorisation commute aux morphismes de projection. En particulier, il existe un entier r et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
X \times_{X'} X & \xrightarrow{\ u\ } & \Delta^r_{X,(m+s)} & \xrightarrow{\ \Phi\ } & \Delta^r_{X',(m)} \\
p_0 \downarrow\downarrow p_1 & & p_0 \downarrow\downarrow p_1 & & p_0' \downarrow\downarrow p_1' \\
X & = & X & \xrightarrow{\ F\ } & X'.
\end{array}$$

Dans ce diagramme, le morphisme composé $\Phi \circ u$ se factorise par l'immersion diagonale $X' \hookrightarrow \Delta^r_{X',(m)}$. En effet, $\Phi \circ u$ est défini par le PD-morphisme

$$\mathcal{P}^r_{X',(m)}(\mathcal{I}') = \mathcal{P}_{X',\beta}(\mathcal{I}'^{(p^m)} + \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_{X'^2})/\overline{\mathcal{I}}'^{\{r+1\}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X\times_{X'}X}$$

factorisant $F \times F$, morphisme qui s'annule sur les τ_i', donc sur le PD-idéal engendré par les $\tau_i'^{p^m}$, et par conséquent sur le m-PD-idéal canonique $\overline{\mathcal{I}}'$ de $\mathcal{P}^r_{X',(m)}(\mathcal{I}')$. Soient alors $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, (ε_n') sa m-PD-stratification, $\mathcal{E} = F^*\mathcal{E}'$ muni de la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)}$-module à gauche qu'on obtient grâce à 2.2.3, (ε_n) la $(m+s)$-PD-stratification correspondante. Comme $\varepsilon_r = \Phi^*(\varepsilon_r')$, l'isomorphisme $\varepsilon = u^*(\varepsilon_r) : p_1^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} p_0^*(\mathcal{E})$ déduit de

ε_r s'identifie, via l'égalité $\mathscr{E} = F^*\mathscr{E}'$, à l'image inverse par le morphisme $X \times_{X'} X \to X'$ de l'identité de $\mathscr{E}'$, c'est à dire à la donnée de descente canonique de X à X' dont est muni $\mathscr{E}$ par construction.

Soient alors $\mathscr{E}'$, $\mathscr{G}'$ deux $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche, $\mathscr{E} = F^*\mathscr{E}'$, $\mathscr{G} = F^*\mathscr{G}'$, $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{G}$ un homomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-linéaire. Alors φ commute aux $(m+s)$-PD-stratifications ε_r et η_r de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$, et, en prenant l'image inverse par u, il s'ensuit que φ commute aux données de descente canoniques de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$. Soient $U \subset X$ un ouvert, $A' = \Gamma(U, \mathscr{O}_{X'})$, $B' = \Gamma(U, \mathscr{B}_{X'})$, $A = \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$, $B = \Gamma(U, \mathscr{B}_X)$, $E' = \Gamma(U, \mathscr{E}')$, $E = \Gamma(U, \mathscr{E})$, $G' = \Gamma(U, \mathscr{G}')$, $G = \Gamma(U, \mathscr{G})$. Alors A est libre de rang fini sur A', l'homomorphisme $A \otimes_{A'} B' \to B$ est un isomorphisme, de même que les morphismes $A \otimes_{A'} E' \to B \otimes_{B'} E' \to E$ (resp. G', G). Par descente fidèlement plate, il existe un unique homomorphisme B'-linéaire $\psi_U : E' \to G'$ induisant $\Gamma(U, \varphi) : E \to G$ par extension des scalaires de B' à B. Lorsque U varie, les homomorphismes ψ_U sont compatibles aux homomorphismes de restriction, de sorte qu'on obtient un morphisme de faisceaux de $\mathscr{B}_{X'}$-modules $\psi : \mathscr{E}' \to \mathscr{G}'$ tel que $F^*(\psi) = \varphi$.

Pour vérifier que ψ est $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire, il suffit de montrer que ψ commute aux m-PD-stratifications (ε'_n) et (η'_n) de $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{G}'$. Fixons n, et, comme en 2.3.5, posons $\Delta = \Delta_{X,(m+s)}$, $\Delta' = \Delta_{X',(m)}$, $\Delta'^n = \Delta^n_{X',(m)}$, et $\Delta^n = \Delta'^n \times_{\Delta'} \Delta$. Alors le morphisme $\Phi : \Delta^n \to \Delta'^n$ est fini et libre d'après 2.3.2, de sorte qu'il suffit de montrer cette commutation après image inverse par Φ. D'après 2.3.4, Δ^n est contenu dans $\Delta^k_{X,(m+s)}$ pour k assez grand. Comme les $(m+s)$-PD-stratifications (ε_n) et (η_n) de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$ sont par définition les images inverses par Φ des m-PD-stratifications (ε'_n) et (η'_n), les images inverses de ε'_n et η'_n sur Δ^n sont les restrictions à Δ^n de ε_k et η_k. Elles commutent alors avec $p_1^*(\varphi)$ et $p_0^*(\varphi)$ puisque φ est $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-linéaire, et par conséquent ε'_n et η'_n commutent avec $p_1'^*(\psi)$ et $p_0'^*(\psi)$, d'où la $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-linéarité de ψ.

Montrons maintenant que F^* est essentiellement surjectif. Soient $\mathscr{E}$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-module à gauche, et (ε_n) sa m-PD-stratification. La condition de cocycle, jointe à l'existence du morphisme $X(2) \to \Delta^r_{X,(m+s)}(2)$ pour r assez grand, montre que l'image inverse ε de ε_r sur $X(1)$ est une donnée de descente sur $\mathscr{E}$ relativement à X', indépendante du choix de r. Soient $U \subset X$ un ouvert, et reprenons les notations précédentes. On a alors $\Gamma(U, p_0^*\mathscr{E}) = E \otimes_{A'} A$, $\Gamma(U, p_1^*\mathscr{E}) = A \otimes_{A'} E$, et ε induit une donnée de descente sur le A-module E relativement à A'. Par descente fidèlement plate, il existe donc un unique A'-module E' tel que E, muni de ε, soit isomorphe à $A \otimes_{A'} E'$, muni de sa donnée de descente canonique. De plus, la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-module à gauche de $\mathscr{E}$ assure que ε est semi-linéaire par rapport à la donnée de descente canonique de $\mathscr{B}_X$. Sur E, la multiplication par les éléments de B' est donc compatible à ε, ce qui fournit une structure de B'-module sur E' définissant la structure de B-module de E par extension des scalaires.

Pour U variable, on peut associer à chaque $E = \Gamma(U, \mathscr{E})$ un $\Gamma(U, \mathscr{B}_{X'})$-module E' grâce à la construction précédente. Par fonctorialité, les $\Gamma(U, \mathscr{B}_{X'})$-modules ainsi obtenus forment un préfaisceau de $\mathscr{B}_X$-modules. Soient (U_i) un recouvrement ouvert de U, $U_{ij} = U_i \cap U_j$, E'_i (resp. E'_{ij}) le $\Gamma(U_i, \mathscr{B}_{X'})$-module (resp. $\Gamma(U_{ij}, \mathscr{B}_{X'})$-module) associé à $E_i = \Gamma(U_i, \mathscr{E})$ (resp. $E_{ij} = \Gamma(U_{ij}, \mathscr{E})$). Comme $A \otimes_{A'} \Gamma(V, \mathscr{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(V, \mathscr{O}_X)$ pour tout ouvert $V \subset U$, l'exactitude de la suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \prod_i E_i \longrightarrow \prod_{i,j} E_{ij}$$

entraîne par fidèle platitude celle de la suite de A'-modules

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow \prod_i E'_i \longrightarrow \prod_{i,j} E'_{ij}.$$

Par conséquent, pour U variable, on obtient un faisceau de $\mathscr{B}_{X'}$-modules $\mathscr{E}'$ tel que le $\mathscr{B}_X$-module $\mathscr{E}$, muni de la donnée de descente de X à X' induite par la $(m+s)$-PD-stratification, soit isomorphe au $\mathscr{B}_X$-module $F^*\mathscr{E}'$, muni de sa donnée de descente canonique. Il est clair que, si $\mathscr{E}$ est quasi-cohérent, alors $\mathscr{E}'$ est aussi quasi-cohérent.

Il faut alors montrer que $\mathscr{E}'$ est muni d'une structure naturelle de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module induisant, via l'isomorphisme $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}'$ et 2.2.3, la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-module de $\mathscr{E}$. Reprenant les notations précédentes, nous allons pour cela montrer que la $(m+s)$-PD-stratification de $\mathscr{E}$ se redescend en une m-PD-stratification sur $\mathscr{E}'$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Quitte à augmenter r, on peut supposer que Δ^n est contenu dans $\Delta^r_{X,(m+s)}$. Par suite, la $(m+s)$-PD-stratification de $\mathscr{E}$ induit un isomorphisme $\tilde{\varepsilon}_n : p_1^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} p_0^*\mathscr{E}$ entre les images inverses de $\mathscr{E}$ sur Δ^n par les deux projections. Comme $\tilde{\varepsilon}_n$ s'écrit encore

$$\tilde{\varepsilon}_n \;:\; \Phi^* p_1'^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\;\sim\;} \Phi^* p_0'^*\mathscr{E}',$$

on voit que, si l'on montre que $\tilde{\varepsilon}_n$ est compatible aux données de descente de Δ^n à Δ'^n dont on dispose sur $p_1^*\mathscr{E}$ et $p_0^*\mathscr{E}$ grâce aux isomorphismes $p_i^*\mathscr{E} \simeq \Phi^* p_i'^*\mathscr{E}'$, l'argument de descente fidèlement plate utilisé plus haut fournira un unique isomorphisme ε'_n : $p_1'^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} p_0'^*\mathscr{E}'$ tel que $\Phi^*(\varepsilon'_n) = \tilde{\varepsilon}_n$. De plus, on voit encore par descente fidèlement plate que cet isomorphisme sera automatiquement semi-linéaire par rapport à la m-PD-stratification de $\mathscr{B}_{X'}$, puisque les ε_r le sont par rapport à celle de $\mathscr{B}_X$. Il suffira alors de montrer que les ε'_n forment une m-PD-stratification pour obtenir ainsi une structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module sur $\mathscr{E}'$ induisant par F^* la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-module donnée sur $\mathscr{E}$.

Soient $\pi_{0,1}$ et $\pi_{2,3} : \Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n \to \Delta^n$ les deux projections, et ρ_0, ρ_1 les données de descente canoniques sur $p_1^*\mathscr{E}$ et $p_0^*\mathscr{E}$. Il s'agit donc de prouver que le carré

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{2,3}^*(p_1^*\mathscr{E}) & \xrightarrow[\sim]{\rho_1} & \pi_{0,1}^*(p_1^*\mathscr{E}) \\
{\scriptstyle \pi_{2,3}^*(\tilde{\varepsilon}_n)}\downarrow\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle \pi_{0,1}^*(\tilde{\varepsilon}_n)} \\
\pi_{2,3}^*(p_0^*\mathscr{E}) & \xrightarrow[\sim]{\rho_0} & \pi_{0,1}^*(p_0^*\mathscr{E})
\end{array}$$

est commutatif. Considérons alors le morphisme naturel $\Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n \to X^4$ induit par le produit de deux copies du morphisme $\Delta^n \to X^2$. Ce morphisme commute aux immersions diagonales de X dans $\Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n$ et dans X^4. Or, d'après 2.3.5, l'idéal $\mathscr{I}_n$ de l'immersion $X \hookrightarrow \Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n$ est muni naturellement d'une $(m+s)$-PD-structure PD-nilpotente. Si r' est assez grand, le morphisme $\Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n \to X^4$ se factorise donc à travers un morphisme $v : \Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n \to \Delta^{r'}_{X,(m+s)}(3)$; quitte à augmenter r, on peut supposer que $r' = r$. Notons $q_{i,j} : X^4 \to X^2$ la projection sur les facteurs d'indices i, j, ainsi que les morphismes induits entre les enveloppes à puissances divisées, et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Delta'^n \arrow[d, "p'_0"'] & \Delta^n \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[d, "p_0"] & \Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n \arrow[l, shift right, "\pi_{0,1}"'] \arrow[l, shift left, "\pi_{2,3}"] \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_0 \times p_0"] & \Delta^r_{X,(m+s)}(3) \arrow[r] \arrow[d, "q_{0,2}"] & X^4 \arrow[d, "q_{0,2}"] \\
X' & X \arrow[l, "F"'] & X \times_{X'} X \arrow[l, shift right, "p_0"'] \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, "u"] & \Delta^r_{X,(m+s)}(1) \arrow[r] & X^2.
\end{tikzcd}$$

Par définition, la donnée de descente $\rho_0 : \pi^*_{2,3}(p_0^*\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \pi^*_{0,1}(p_0^*\mathscr{E})$ est l'image inverse par $p_0 \times p_0$ de la donnée de descente ε de $\mathscr{E}$, soit encore $(p_0 \times p_0)^* u^*(\varepsilon_r) = v^* q^*_{0,2}(\varepsilon_r)$. De même, on a $\rho_1 = v^* q^*_{1,3}(\varepsilon_r)$. D'autre part, $\pi^*_{2,3}(\tilde{\varepsilon}_n) : \pi^*_{2,3} p_1^* \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \pi^*_{2,3} p_0^* \mathscr{E}$ est l'image inverse de ε_r par le morphisme $\Delta^n \times_{\Delta'^n} \Delta^n \to \Delta^n \to \Delta^r_{X,(m+s)}(1)$ induit par $\pi_{2,3}$, qui est égal à $q_{2,3} \circ v$. De même, $\pi^*_{0,1}(\tilde{\varepsilon}_n) = v^* q^*_{0,1}(\varepsilon_r)$. En appliquant v^*, la commutativité étudiée résulte donc de l'égalité

$$q^*_{0,2}(\varepsilon_r) \circ q^*_{2,3}(\varepsilon_r) = q^*_{0,1}(\varepsilon_r) \circ q^*_{1,3}(\varepsilon_r),$$

elle même conséquence de la condition de cocycle pour (ε_r).

L'unicité des isomorphismes ε'_n redescendant les $\tilde{\varepsilon}_n$ entraîne que, pour n variable, ils forment un système compatible d'isomorphismes. Pour s'assurer qu'ils vérifient la condition de cocycle, il suffit de montrer que cette condition est satisfaite après extension fidèlement plate de $\Delta^n_{X',(m)}(2)$. Pour cela, on peut utiliser le diagramme (2.3.2.1) pour $\nu = 2$: puisqu'il est cartésien, la projection $\Delta^n_{X',(m)}(2) \times_{\Delta_{X',(m)}(2)} \Delta_{X,(m+s)}(2) \to \Delta^n_{X',(m)}(2)$ est fidèlement plate. Or, d'après 2.3.4, $\Delta^n_{X',(m)}(2) \times_{\Delta_{X',(m)}(2)} \Delta_{X,(m+s)}(2)$ est contenu dans $\Delta^k_{X,(m+s)}(2)$ pour k assez grand. Par suite, la condition de cocycle pour ε_k sur $\Delta^k_{X,(m+s)}(2)$ entraîne la condition de cocycle pour $\tilde{\varepsilon}_n$ sur $\Delta^n_{X',(m)}(2) \times_{\Delta_{X',(m)}(2)} \Delta_{X,(m+s)}(2)$, donc ε'_n vérifie la condition de cocycle sur $\Delta^n_{X',(m)}(2)$. Comme la condition de cocycle entraîne que ε'_0 est l'identité, les ε'_n forment bien une m-PD-stratification sur $\mathscr{E}'$, et le munissent donc d'une structure de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche, telle que l'isomorphisme $F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$ soit $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-linéaire. On obtient ainsi la surjectivité essentielle de F^*, ce qui achève la démonstration.

2.3.7. COROLLAIRE. — *Soient $s \in \mathbb{N}$, X_0 un S_0-schéma lisse, X et X' deux S-schémas lisses relevant respectivement X_0 et $X_0^{(s)}$, $\mathscr{B}_{X'}$ une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre munie d'une action à gauche de $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ compatible à sa structure de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre.*

(i) *Supposons que $\mathfrak{a}$ soit m-PD-nilpotent, et soit $\mathscr{B}_X = F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathscr{B}_{X'}$, où $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ est le foncteur défini en* 2.2.6 (i). *Alors $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ est une équivalence entre la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche et celle des $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-modules à gauche.*

(ii) *Supposons que $\mathscr{B}_{X'}$ soit quasi-nilpotente en tant que $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche, et soit $\mathscr{B}_X = F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathscr{B}_{X'}$, où $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ est le foncteur défini en* 2.2.6 (ii). *Alors $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ est une équivalence entre la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche quasi-nilpotents et celle des $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-modules à gauche quasi-nilpotents.*

Ces deux assertions sont locales. Cela permet de supposer X et X' affines, de sorte qu'il existe un S-morphisme $F : X \to X'$ relevant $F^s_{X_0/S_0}$. La première assertion est alors par construction ramenée au théorème 2.3.6.

D'autre part, nous avons vu en 2.2.3 (ii) que, si $\mathscr{E}'$ est quasi-nilpotent, alors $F^*\mathscr{E}'$ est quasi-nilpotent. Il reste donc à vérifier que, réciproquement, $\mathscr{E}'$ est quasi-nilpotent si $F^*\mathscr{E}'$ l'est. La quasi-nilpotence de $\mathscr{E} = F^*\mathscr{E}'$ se traduit par l'existence sur $\Delta_{X,(m+s)}$ d'un isomorphisme $\varepsilon : p_1^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} p_0^*\mathscr{E}$ induisant les isomorphismes ε_n de la $(m+s)$-PD-stratification. Comme $\Delta_{X,(m+s)}$ est fidèlement plat sur $\Delta_{X',(m)}$ d'après 2.3.2, et que, pour $i = 0, 1$, $p_i^*\mathscr{E} = \Phi^* p_i'^*\mathscr{E}'$, il suffit encore de montrer que ε est compatible aux données de descente canoniques de $p_1^*\mathscr{E}$ et $p_0^*\mathscr{E}$ pour le redescendre en un isomorphisme $\varepsilon' : p_1'^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} p_0'^*\mathscr{E}'$ qui induise la m-PD-stratification de $\mathscr{E}'$, donc pour montrer que $\mathscr{E}'$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche quasi-nilpotent. Pour vérifier cette compatibilité, il suffit alors de procéder comme pour la vérification de la compatibilité analogue dans la démonstration de 2.3.6, en utilisant la $(m+s)$-PD-structure canonique sur l'idéal de l'immersion $X \hookrightarrow \Delta_{X,(m+s)} \times_{\Delta_{X',(m)}} \Delta_{X,(m+s)}$ dont l'existence est assurée par le lemme 2.3.5 (ii).

Notons enfin que le théorème de descente par Frobenius entraîne formellement le théorème de comparaison suivant au niveau cohomologique :

2.3.8. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de* 2.3.1, *soient* $\mathscr{E}' \in D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$, $\mathscr{F}' \in D(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$, $\mathscr{E} = F^*\mathscr{E}' \in D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)})$, $\mathscr{F} = F^*\mathscr{F}' \in D(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)})$.

(i) *Le foncteur F^* définit des isomorphismes*

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathscr{F}', \mathscr{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}}(\mathscr{F}, \mathscr{E}), \tag{2.3.8.1}$$

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathscr{F}', \mathscr{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}}(\mathscr{F}, \mathscr{E}). \tag{2.3.8.2}$$

(ii) *Si $m = 0$, F^* définit des isomorphismes*

$$\Omega^\bullet_{X'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^{(s)}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{E}), \tag{2.3.8.3}$$

$$\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X', \mathscr{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_X^{(s)}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{E}). \tag{2.3.8.4}$$

De plus, si $\mathfrak{a}$ *est m-PD-nilpotent, ces énoncés restent vrais pour le foncteur* $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$.

Comme F^* est une équivalence de catégories, il transforme les résolutions injectives sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ en résolutions injectives sur $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$. L'assertion (i) résulte alors de la pleine fidélité de F^* appliquée à une résolution injective de $\mathscr{E}'$. Pour en déduire (ii), il suffit d'observer que $\mathscr{O}_X = F^*\mathscr{O}_{X'}$, et d'utiliser sur $\mathscr{D}_{X'}^{(0)}$ le classique complexe de Spencer de $\mathscr{O}_{X'}$

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_{X'}^{(0)} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \wedge^d \mathscr{T}_{X'} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathscr{D}_{X'}^{(0)} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{T}_{X'} \longrightarrow \mathscr{D}_{X'}^{(0)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X'} \longrightarrow 0,$$

qui, pour $m = 0$, est une résolution de $\mathscr{O}_{X'}$ (voir 4.3.1 plus bas). On obtient ainsi une résolution gauche de $\mathscr{O}_{X'}$ localement libre de rang fini sur $\mathscr{D}_{X'}^{(0)}$, d'où l'isomorphisme usuel

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{X'}^{(0)}}(\mathscr{O}_{X'}, \mathscr{E}') \simeq \Omega^\bullet_{X'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{E}' \tag{2.3.8.5}$$

grâce auquel (ii) résulte de (i).

Lorsque $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, le foncteur $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ est bien défini, et les arguments précédents restent valables en remplaçant F^* par $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$.

Remarque. — On observera que, pour $m \geq 1$, le complexe de Spencer de $\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$ reste bien défini, mais n'est plus une résolution de $\mathcal{O}_X$ en général. Sous les hypothèses de la partie (ii) du corollaire, on peut considérer $\mathcal{E}$ comme un complexe de $\mathcal{D}_X^{(0)}$-modules par restriction des scalaires, et l'homomorphisme induit par fonctorialité par F sur la cohomologie de de Rham se factorise alors en

$$\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X', \mathcal{E}') \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X'}^{(0)}}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{E}') \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X^{(s)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X^{(0)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}) \simeq \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X, \mathcal{E})$$

(le lecteur trouvera en 4.3.5 la démonstration d'un énoncé analogue).

2.4. Cas des $\mathcal{D}$-modules à droite

Pour construire un foncteur quasi-inverse du foncteur F^* étudié dans la section 2.3, nous aurons besoin d'analogues des résultats précédents pour les modules à droite.

On conserve donc ici les hypothèses de 2.3.1. Comme $\mathcal{O}_X$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{X'}$, on dispose du foncteur exact $F^\flat$ de la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$-modules dans celle des $\mathcal{O}_X$-modules, défini pour tout $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{M}'$ par

$$F^\flat \mathcal{M}' = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}') = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}').$$

La proposition qui suit est la contrepartie, pour les $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à droite, de la proposition 2.2.3 pour les $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche.

2.4.1. PROPOSITION. — *Pour tout $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite $\mathcal{M}'$, $F^\flat\mathcal{M}'$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-module à droite. Si $s' \in \mathbb{N}$, et si $F' : X' \to X''$ est un relèvement de $F^{s'}_{X_0^{(s)}/S_0}$, l'isomorphisme de transitivité $F^\flat \circ F'^\flat \simeq (F' \circ F)^\flat$ est $\mathcal{D}_X^{(m+s+s')}$-linéaire.*

Pour n fixé, soit $\Phi : \Delta^n_{X,(m+s)} \to \Delta^n_{X',(m)}$ la factorisation de $F \times F$ construite en 2.2.2. Appliquant $\Phi^\flat$ aux isomorphismes $p_0'^\flat\mathcal{M}' \xrightarrow{\sim} p_1'^\flat\mathcal{M}'$ fournis par la m-PD-costratification de $\mathcal{M}'$, on obtient une $(m+s)$-costratification sur $F^\flat\mathcal{M}'$, donc une structure de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-module à droite sur $F^\flat\mathcal{M}'$. La seconde assertion est claire grâce à la transitivité de cette construction.

2.4.2. LEMME. — *Soient S un schéma, $F : X \to X'$ un morphisme fini localement libre entre deux S-schémas lisses. Il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{D}_X$-linéaire*

$$\mu_X : \omega_X \xrightarrow{\sim} F^\flat \omega_{X'}. \tag{2.4.2.1}$$

Soient $f : X \to S$, $f' : X' \to S$, et supposons d'abord S localement nœthérien. On a alors $\omega_X = f^!\mathcal{O}_S[-d]$, où d est la dimension relative de X sur S, et $\omega_{X'} = f'^!\mathcal{O}_S[-d]$.

Comme F est fini, on a $F^! = F^\flat$, de sorte que l'isomorphisme de transitivité $f^! \simeq F^! \circ f'^!$ fournit un isomorphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire μ_X. Pour montrer que μ_X est $\mathscr{D}_X$-linéaire, il suffit de vérifier qu'il commute aux costratifications. Or, si $\Phi : \Delta^n_X \to \Delta^n_{X'}$ est le morphisme induit par $F \times F$, et si $p_i : \Delta^n_X \to X$, $p'_i : \Delta^n_{X'} \to X'$ sont les projections, la costratification de ω_X est par définition donnée par les isomorphismes $p_0^! \, \omega_X \simeq p_0^! f^! \mathcal{O}_S[-d] \simeq p_1^! f^! \mathcal{O}_S[-d] \simeq p_1^! \, \omega_X$ résultant des propriétés de transitivité de l'image inverse extraordinaire, et celle de $F^\flat \omega_{X'}$ est l'image inverse des isomorphismes analogues par Φ. L'assertion résulte alors formellement de ces propriétés de transitivité.

Comme F est un morphisme fini localement libre, on vérifie sans difficulté en suivant la méthode de [27, III] que le foncteur $F^\flat$ et l'isomorphisme μ_X commutent aux changements de base $S' \to S$, où S' est localement nœthérien. On peut alors déduire le cas général du cas localement nœthérien par les arguments de passage à la limite habituels.

Grâce à l'énoncé qui suit, les propriétés du foncteur $F^\flat$ pour les $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules à droite se ramènent à celles du foncteur F^* pour les $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche.

2.4.3. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 2.2.1, *il existe pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules à droite*

$$\mu_{\mathscr{E}'} : \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{E}'). \tag{2.4.3.1}$$

Nous utiliserons la remarque qui suit. Pour $i = 0, 1$, notons $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ l'un des homomorphismes d'anneaux :

$$F^* : \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_X, \quad p_i^* : \mathcal{O}_X \to \mathscr{P}^n_{X,(m+s)}, \quad p_i'^* : \mathcal{O}_{X'} \to \mathscr{P}^n_{X',(m)}, \quad \Phi^* : \mathscr{P}^n_{X',(m)} \to \mathscr{P}^n_{X,(m+s)}.$$

Dans les trois premiers cas, on a $\varphi^\flat \mathscr{M}' := \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{M}') = \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{M}')$ pour tout $\mathscr{A}$-module $\mathscr{M}$, puisque φ est fini localement libre. De plus, pour tout $\mathscr{A}$-module $\mathscr{E}$, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{M}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{E}). \tag{2.4.3.2}$$

Grâce à la relation de transitivité (1.1.1.1), ces propriétés sont encore vraies dans le dernier cas si $\mathscr{M}$ est de la forme $p_i'^\flat \mathscr{N}$, où $\mathscr{N}$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-module quelconque, et $\mathscr{E}$ de la forme $p_i'^* \mathscr{F}$, où $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-module quelconque.

Partant de l'isomorphisme $\omega_X \simeq F^\flat \omega_{X'}$ donné par le lemme précédent, on définit d'abord l'isomorphisme (2.4.3.1) comme étant le composé $\mu_{\mathscr{E}'}$ des isomorphismes $\mathcal{O}_X$-linéaires

$$\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathscr{E}' \simeq \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{E}' \simeq \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \omega_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{E}').$$

Pour montrer que $\mu_{\mathscr{E}'}$ est $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-linéaire, il suffit de vérifier qu'il est compatible aux costratifications des deux termes, c'est à dire que, pour tout n, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p_0^\flat(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}') & \xrightarrow{\ \sim\ } & p_1^\flat(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}') \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ p_0^\flat(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}')) & \xrightarrow{\ \sim\ } & p_1^\flat(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}')) \end{array} \tag{2.4.3.3}$$

est commutatif. Pour $i = 0, 1$, considérons la suite d'isomorphismes

$$p_i^\flat(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } p_i^\flat(\omega_X) \otimes_{\mathcal{P}^n_X} p_i^*(F^*\mathcal{E}') \tag{2.4.3.4}$$

$$\xrightarrow{\ \sim\ } p_i^\flat(F^\flat\omega_{X'}) \otimes_{\mathcal{P}^n_X} p_i^*(F^*\mathcal{E}') \tag{2.4.3.5}$$

$$\xrightarrow{\ \sim\ } \Phi^\flat(p_i'^\flat\omega_{X'}) \otimes_{\mathcal{P}^n_X} \Phi^*(p_i'^*\mathcal{E}') \tag{2.4.3.6}$$

$$\xrightarrow{\ \sim\ } \Phi^\flat(p_i'^\flat\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{P}^n_{X'}} p_i'^*\mathcal{E}') \tag{2.4.3.7}$$

$$\xrightarrow{\ \sim\ } p_i^\flat(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}')). \tag{2.4.3.8}$$

Grâce aux propriétés de fonctorialité et de transitivité de l'isomorphisme (2.4.3.2), on vérifie facilement que le composé est égal à $p_i^\flat(\mu_{\mathcal{E}'})$. Par définition de la costratification sur le produit tensoriel (*cf.* 1.1.7 (i)), les isomorphismes (2.4.3.4) identifient la ligne supérieure de (2.4.3.3) à l'isomorphisme

$$p_0^\flat(\omega_X) \otimes_{\mathcal{P}^n_X} p_0^*F^*(\mathcal{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } p_1^\flat(\omega_X) \otimes_{\mathcal{P}^n_X} p_1^*F^*(\mathcal{E}')$$

défini par le produit tensoriel de la costratification de ω_X et de la stratification de $F^*\mathcal{E}'$. Compte tenu de la définition de celle-ci, et de ce que l'isomorphisme $\omega_X \xrightarrow{\sim} F^\flat\omega_{X'}$ est $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-linéaire, on obtient en appliquant (2.4.3.5) et (2.4.3.6) le produit des images inverses par $\Phi^\flat$ et Φ^* de la costratification η_ω de $\omega_{X'}$ et de la stratification $\varepsilon_{\mathcal{E}'}$ de $\mathcal{E}'$. Utilisant la compatiblité des isomorphismes (2.4.3.2) à l'image inverse par $\Phi^\flat$, on voit que (2.4.3.7) identifie ce produit à l'image inverse par $\Phi^\flat$ de la costratification produit de η_ω et $\varepsilon_{\mathcal{E}'}$. Comme, par définition, celle-ci s'identifie via (2.4.3.8) à la costratification de $F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}')$, qui est la ligne inférieure de (2.4.3.3), la commutativité de ce diagramme en résulte.

2.4.4. COROLLAIRE. — *Pour tout $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite $\mathcal{M}'$, il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-modules à gauche*

$$\nu_{\mathcal{M}'} : F^*(\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}) \xrightarrow{\ \sim\ } F^\flat(\mathcal{M}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}. \tag{2.4.4.1}$$

Il suffit en effet d'appliquer le résultat qui précède à $\mathcal{E}' = \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}$, puis de tensoriser l'isomorphisme obtenu par ω_X^{-1}.

2.4.5. *Remarques.* — (i) Soit $\mathcal{B}_{X'}$ une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre munie d'une action à gauche de $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$, compatible avec sa structure d'algèbre, et soit $\mathcal{B}_X$ la $\mathcal{O}_X$-algèbre, munie d'une action compatible de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$, qu'on en déduit d'après 2.2.7. Notons $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)} = \mathcal{B}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)} = \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+s)}$. D'après 1.1.8, la donnée d'une structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite sur un

$\mathcal{B}_{X'}$-module $\mathcal{M}'$ équivaut à celle d'une m-PD-costratification $(\varepsilon_n^{\mathcal{M}'})$, telle que les $\varepsilon_n^{\mathcal{M}'}$ soient semi-linéaires par rapport aux $\varepsilon_n^{\mathcal{B}\,-1}$. Si $\mathcal{M}'$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite, les images inverses $\Phi^\flat(\varepsilon_n^{\mathcal{M}'})$ sont alors semi-linéaires par rapport aux $\Phi^*(\varepsilon_n^{\mathcal{B}\,-1}) = \Phi^*(\varepsilon_n^{\mathcal{B}})^{-1}$, de sorte que $F^\flat\mathcal{M}'$ est muni d'une structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)}$-module à droite.

Si $\mathcal{E}'$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, $\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}'$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite d'après 1.2.7. D'autre part, il est facile de voir sur sa construction que $\mu_{\mathcal{E}'}$ est un isomorphisme $\mathcal{B}_X$-linéaire. Comme il est par ailleurs $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-linéaire, il est donc $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)}$-linéaire. On voit de même que, si $\mathcal{M}'$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite, l'isomorphisme $\nu_{\mathcal{M}'}$ est $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)}$-linéaire.

(ii) Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes soit satisfaite :

a) L'idéal $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent ;

b) Le $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite $\mathcal{M}'$ est quasi-nilpotent (*cf.* 1.2.8).

Alors le $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-module à droite $F^\flat\mathcal{M}'$ est indépendant, à isomorphisme canonique près, du choix du relèvement du Frobenius F : on peut soit le vérifier directement en utilisant la méthode de 2.2.5, soit le déduire de 2.2.5 grâce à 2.4.4 et 2.4.3. Si on ne dispose plus d'un relèvement global du Frobenius, on peut alors procéder comme en 2.2.6, et recoller les $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-modules à droite $F^\flat\mathcal{M}'$ définis localement par le choix de relèvements locaux du Frobenius. On définit ainsi un foncteur $F^{s\,\flat}_{X_0/S_0}$ sur la catégorie de tous les $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à droite sous l'hypothèse a), et sur la sous-catégorie des $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à droite quasi-nilpotents sous l'hypothèse b). On vérifie aisément que l'on obtient encore par recollement des isomorphismes canoniques

$$\mu_{\mathcal{E}'} \;:\; \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathcal{E}' \xrightarrow{\;\sim\;} F^{s\,\flat}_{X_0/S_0}(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}'), \tag{2.4.5.1}$$

$$\nu_{\mathcal{M}'} \;:\; F^{s\,*}_{X_0/S_0}(\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}) \xrightarrow{\;\sim\;} F^{s\,\flat}_{X_0/S_0}(\mathcal{M}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, \tag{2.4.5.2}$$

pour tout $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche $\mathcal{E}'$ et tout $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite $\mathcal{M}'$.

Lorsque l'hypothèse a) (resp. l'hypothèse b) pour $\mathcal{B}_{X'}$ et $\mathcal{M}'$) est satisfaite, on peut encore définir par recollement le foncteur $F^{s\,\flat}_{X_0/S_0}$ de la catégorie des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules à droite (resp. quasi-nilpotents) dans celle des $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)}$-modules à droite (resp. quasi-nilpotents), et les isomorphismes précédents sont alors des isomorphismes de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)}$-modules.

2.4.6. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de* 2.3.1, *le foncteur* $F^\flat$ *est une équivalence entre la catégorie des* $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-*modules à droite* (*resp. quasi-cohérents*) *et celle des* $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m+s)}$-*modules à droite* (*resp. quasi-cohérents*).

C'est une conséquence immédiate de 1.2.7, 2.4.5 (i), et 2.3.6.

2.5. Un foncteur quasi-inverse

En restant encore sous les hypothèses de 2.3.1, nous complétons maintenant les théorèmes de descente 2.3.6 et 2.4.6 en construisant des foncteurs quasi-inverses pour les foncteurs F^* et $F^\flat$. Pour cela, nous expliciterons d'abord comment ces théorèmes s'appliquent à $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$ vu comme $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-bimodule, puis nous montrerons qu'un foncteur quasi-inverse est donné par une variante de la définition usuelle du foncteur image directe F_+.

Ces résultats montrent également que les conditions de finitude telles que projectivité locale, cohérence et platitude sur $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$ et $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$ se correspondent dans l'équivalence donnée par F^* (resp. $F^\flat$).

2.5.1. Reprenons les hypothèses de 2.3.1, et considérons $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ comme un bimodule sur lui-même. En utilisant sa structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, donc la structure de $\mathscr{O}_{X'}$-module définie par la multiplication à gauche, on peut former $F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$, qui est muni d'une structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-module à gauche grâce à 2.2.3. On obtient donc ainsi sur

$$F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} = \mathscr{O}_X \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$$

une structure naturelle de $(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}, \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$-bimodule. S'il y a un risque de confusion, nous préciserons par la notation $F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ l'utilisation de la structure gauche de $\mathscr{O}_{X'}$-module sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$.

D'autre part, on peut utiliser la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$, donc la structure de $\mathscr{O}_{X'}$-module définie par la multiplication à droite, pour former $F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$. On obtient alors de même une structure naturelle de $(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)})$-bimodule sur

$$F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{O}_X, \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}) \simeq \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \check{\mathscr{O}}_X,$$

en posant $\check{\mathscr{O}}_X = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_{X'})$. S'il y a un risque de confusion, nous préciserons par la notation $F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ l'utilisation de la structure droite de $\mathscr{O}_{X'}$-module sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$.

Enfin, on peut appliquer successivement les deux constructions F_{g}^* et $F_{\mathrm{d}}^\flat$. On obtient alors deux $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-bimodules $F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ et $F_{\mathrm{d}}^\flat F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$, isomorphes par un isomorphisme bi-$\mathscr{B}_X$-linéaire

$$F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \simeq \mathscr{O}_X \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \check{\mathscr{O}}_X \simeq F_{\mathrm{d}}^\flat F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}. \tag{2.5.1.1}$$

Cet isomorphisme est en fait un isomorphisme de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-bimodules : par exemple, on peut vérifier sa linéarité à gauche en montrant qu'il est compatible aux $(m+s)$-PD-stratifications ; pour cela, il suffit d'appliquer à la m-PD-stratification canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ la fonctorialité de l'isomorphisme

$$\Phi^*(F_{\mathrm{d}}^\flat(\mathscr{F})) \xrightarrow{\ \sim\ } F_{\mathrm{d}}^\flat(\Phi^*(\mathscr{F}))$$

lorsque $\mathscr{F}$ varie dans la catégorie des $(\mathscr{P}_{X',(m)}^n, \mathscr{O}_{X'})$-bimodules. La linéarité à droite se voit de la même manière.

L'énoncé qui suit montre alors comment l'action de Frobenius permet de reconstruire le bimodule $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$ à partir du bimodule $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$.

2.5.2. Proposition. — *Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme* *canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-bimodules*

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}. \tag{2.5.2.1}$$

D'après 2.3.2, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{X^2}$-linéaire

$$\mathcal{O}_{X^2} \otimes_{\mathcal{O}_{X'^2}} \mathscr{P}_{X',(m)} \longrightarrow \mathscr{P}_{X,(m+s)} \tag{2.5.2.2}$$

induit par Φ est un isomorphisme. D'autre part, on vérifie immédiatement en coordonnées locales que l'homomorphisme naturel

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{P}_{X',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X^2} \otimes_{\mathcal{O}_{X'^2}} \mathscr{P}_{X',(m)}$$

est un isomorphisme bi-$\mathcal{O}_X$-linéaire. D'après 2.2.2 (ii), l'isomorphisme composé se factorise en un morphisme de systèmes projectifs

$$\text{“}\varprojlim_n\text{”}\, \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{P}^n_{X',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \text{“}\varprojlim_n\text{”}\, \mathscr{P}^n_{X,(m+s)},$$

qui induit un isomorphisme de pro-objets grâce à 2.3.4.

En prenant le dual $\mathcal{O}_X$-linéaire pour la structure gauche, et en passant à la limite inductive, on trouve donc des isomorphismes de $\mathcal{O}_X$-bimodules

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_X^{(m+s)} &\xrightarrow{\ \sim\ } \varinjlim_n \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{P}^n_{X',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)\\
&\xleftarrow{\ \sim\ } \varinjlim_n \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathscr{P}^n_{X',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)\\
&\xleftarrow{\ \sim\ } \varinjlim_n F^*\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathscr{P}^n_{X',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X'})
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on dispose pour tout n d'un homomorphisme canonique $(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_X)$-linéaire

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathscr{P}^n_{X',(m)}, \mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X'}) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathscr{P}^n_{X',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X'}),$$

associant à un couple de morphismes $\mathcal{O}_{X'}$-linéaires $u : \mathscr{P}^n_{X',(m)} \to \mathcal{O}_{X'}$, $v : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X'}$ le morphisme composé

$$\mathscr{P}^n_{X',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes v} \mathscr{P}^n_{X',(m)} \xrightarrow{\ u\ } \mathcal{O}_{X'}.$$

En prenant des coordonnées locales sur X, on voit qu'on obtient ainsi un isomorphisme

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X',n} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \check{\mathcal{O}_X} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathscr{P}^n_{X',(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X'}).$$

En passant à la limite et en appliquant F^*, on obtient par composition l'isomorphisme (2.5.2.1), dans le cas où $\mathscr{B}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}$.

On vérifie sans difficulté que cet isomorphisme est un isomorphisme de $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$-bimodules en utilisant la compatibilité de l'isomorphisme (2.5.2.2) et de l'isomorphisme analogue

$$\mathcal{O}_{X^3} \otimes_{\mathcal{O}_{X'^3}} \mathscr{P}_{X',(m)}(2) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{P}_{X,(m+s)}(2)$$

avec les homomorphismes $\delta^{n,n'}_{(m)}$ et $\delta^{n,n'}_{(m+s)}$ utilisés pour définir les structures d'anneaux de $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ et $\mathscr{D}^{(m+s)}_{X}$. Enfin, l'isomorphisme (2.5.2.1) relatif à $\mathscr{B}_{X'}$ se déduit du précédent par tensorisation à gauche par $\mathscr{B}_X$, compte tenu de l'isomorphisme naturel

$$\mathscr{B}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} F^*F^\flat\mathscr{D}^{(m)}_{X'} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*F^\flat(\mathscr{B}_{X'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{D}^{(m)}_{X'}).$$

Remarque. — A partir des homomorphismes canoniques

$$\mathscr{O}_X \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{P}_{X',(m)} \longrightarrow \mathscr{P}_{X,(m+s)},$$

on obtient de même par passage aux quotients et dualité l'homomorphisme canonique

$$\mathscr{D}^{(m+s)}_X \longrightarrow F^*\mathscr{D}^{(m)}_{X'}, \tag{2.5.2.3}$$

factorisation $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-linéaire de l'homomorphisme de fonctorialité (2.1.3.1).

2.5.3. COROLLAIRE. — (i) *Les $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-modules $F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$ et $F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$ sont localement projectifs de type fini* (*respectivement à gauche et à droite*).

(ii) *Un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$* (*resp. à droite $\mathscr{M}'$*) *est localement projectif de type fini si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$* (*resp. $F^\flat\mathscr{M}'$*) *est localement projectif de type fini sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$.*

(iii) *Si $\mathscr{B}_{X'}$ est une $\mathscr{O}_{X'}$-algèbre quasi-cohérente à sections nœthériennes sur les ouverts affines, un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$* (*resp. à droite $\mathscr{M}'$*) *est cohérent si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$* (*resp. $F^\flat\mathscr{M}'$*) *est un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-module cohérent.*

En effet, $\mathscr{O}_X$ est localement libre de rang fini sur $\mathscr{O}_{X'}$, et l'homomorphisme $\mathscr{O}_{X'} \to \mathscr{O}_X$ est localement scindé. Il en est donc de même de l'homomorphisme dual $\mathscr{O}_X^\vee \to \mathscr{O}_{X'}$, et l'homomorphisme naturel (2.5.2.3)

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X \simeq F^*(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{O}_X^\vee) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'},$$

est localement scindé sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$, puisqu'il s'en déduit par tensorisation avec $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$ et application de F^*. Par suite, $F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$ est localement projectif de type fini comme $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-module à gauche. De même, l'homomorphisme

$$F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'} \hookrightarrow F^*F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'} \simeq \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$$

est localement scindé sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$, et $F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-module à droite localement projectif de type fini.

Il est alors clair que, si $\mathscr{E}'$ (resp. $\mathscr{M}'$) est localement projectif de type fini, donc localement facteur direct d'un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$-module libre de type fini, il en est de même de $\mathscr{E} = F^*\mathscr{E}'$ (resp. $\mathscr{M} = F^\flat\mathscr{M}'$) en tant que $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-module. Inversement, l'isomorphisme (2.5.2.1) montre que le $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche (resp. à droite) correspondant à $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$ dans l'équivalence définie par F^* (resp. $F^\flat$) est $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{O}_X^\vee$ (resp. $\mathscr{O}_X \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$), qui est localement libre de type fini sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$. L'assertion (ii) en résulte. L'assertion (iii) en résulte aussi, car, si l'on suppose que $\mathscr{B}_{X'}$ est quasi-cohérente et à sections nœthériennes sur les ouverts affines (ce qui entraîne que $\mathscr{B}_X$ vérifie les mêmes hypothèses), $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$ sont des faisceaux d'anneaux cohérents (*cf.* [5, 3.1.2]), et les foncteurs F^* et $F^\flat$ sont exacts.

Montrons maintenant comment reconstruire le bimodule $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ à partir du bimodule $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$.

2.5.4. LEMME. — *Soit $\mathscr{E}'$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche. Il existe un isomorphisme canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-modules à gauche*

$$\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}(F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}, \mathscr{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\mathscr{E}'. \tag{2.5.4.1}$$

L'isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}}(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}, F^*\mathscr{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\mathscr{E}'$$

est $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-linéaire lorsqu'on munit le terme de gauche de la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-module à gauche définie par la multiplication à droite sur $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$. En utilisant 2.5.2, il s'écrit sous la forme

$$\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}}(F^*F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}, F^*\mathscr{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\mathscr{E}'.$$

Comme l'homomorphisme

$$\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}(F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}, \mathscr{E}') \longrightarrow \mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}}(F^*F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}, F^*\mathscr{E}')$$

est un isomorphisme d'après le théorème de descente 2.3.6, on en déduit l'isomorphisme annoncé.

2.5.5. PROPOSITION. — (i) *Il existe un isomorphisme canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-bimodules*

$$F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}. \tag{2.5.5.1}$$

(ii) *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathscr{T}or^n_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}}(F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}, F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}) = 0.$$

L'assertion (ii) est conséquence de 2.5.3. Pour prouver (i), on part de l'isomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-linéaire à gauche

$$\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}(F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}) \xrightarrow{\ \sim\ } F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \tag{2.5.5.2}$$

fourni par 2.5.4 appliqué à $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ vu comme $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche. Par adjonction, on en déduit l'accouplement (2.5.5.1)

$$F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)},$$

qui est donc $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire à gauche par construction. De plus, la fonctorialité en $\mathscr{E}'$ de l'isomorphisme (2.5.4.1) entraîne que (2.5.5.1) est aussi $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire à droite.

Pour vérifier que c'est un isomorphisme, il suffit de le faire après avoir appliqué F^*

à gauche. On obtient alors un accouplement

$$F_{\mathrm{g}}^{*}F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}\longrightarrow F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)},$$

soit encore, compte tenu de (2.5.2.1),

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}\longrightarrow F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}.$$

Il résulte alors de la construction de (2.5.4.1) que cet accouplement n'est autre que celui que donne la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}$-module de $F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$, donc que c'est un isomorphisme.

Le corollaire suivant montre alors comment construire des foncteurs quasi-inverses de F^* et $F^\flat$ en utilisant les bimodules $F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ et $F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$.

2.5.6. COROLLAIRE. — *Soient $\mathscr{E}'$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, $\mathscr{M}'$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite.*

(i) *Il existe des isomorphismes fonctoriels $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaires à gauche*

$$F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F^*\mathscr{E}'\xrightarrow{\ \sim\ }F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F^*\mathscr{E}'\xrightarrow{\ \sim\ }\mathscr{E}'. \tag{2.5.6.1}$$

(ii) *Il existe des isomorphismes fonctoriels $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaires à droite*

$$F^\flat\mathscr{M}'\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}\xrightarrow{\ \sim\ }F^\flat\mathscr{M}'\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}\xrightarrow{\ \sim\ }\mathscr{M}'. \tag{2.5.6.2}$$

La nullité des $\mathscr{T}or^{n}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}$ résulte encore de 2.5.3. Pour obtenir les isomorphismes annoncés, il suffit de tensoriser l'isomorphisme (2.5.5.1) à droite par $\mathscr{E}'$ (resp. à gauche par $\mathscr{M}'$), et d'utiliser l'associativité du produit tensoriel.

On obtient également pour le foncteur produit tensoriel un théorème de comparaison analogue au théorème 2.3.8 pour le foncteur $\mathscr{H}om$:

2.5.7. COROLLAIRE. — (i) *Un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ (resp. à droite $\mathscr{M}'$) est plat si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ (resp. $F^\flat\mathscr{M}'$) est plat sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}$.*

(ii) *Soient $\mathscr{E}'\in D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$, $\mathscr{M}'\in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)\,\mathrm{d}})$. Si $f:X\to S$ est le morphisme structural, il existe dans $D^-(f^{-1}\mathscr{O}_S)$ un isomorphisme canonique*

$$F^\flat\mathscr{M}'\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F^*\mathscr{E}'\xrightarrow{\ \sim\ }\mathscr{M}'\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}\mathscr{E}'. \tag{2.5.7.1}$$

Soient $\mathscr{E}'$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, $\mathscr{M}'$ un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite. En tensorisant l'isomorphisme (2.5.6.2) avec $\mathscr{E}'$, on obtient un isomorphisme

$$(F^\flat\mathscr{M}'\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}\mathscr{E}'\xrightarrow{\ \sim\ }\mathscr{M}'\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}\mathscr{E}'.$$

Compte tenu de l'isomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}$-linéaire $F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}\mathscr{E}'\xrightarrow{\sim}F^*\mathscr{E}'$, on obtient donc l'isomorphisme

$$F^\flat\mathscr{M}'\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}}F^*\mathscr{E}'\xrightarrow{\ \sim\ }\mathscr{M}'\otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}}\mathscr{E}'.$$

Comme $F^\flat$ est une équivalence de catégories, il s'ensuit que $\mathscr{E}'$ est plat sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ est plat sur $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$. On raisonne de même dans le cas de $\mathscr{M}'$. La dernière assertion en résulte en prenant une résolution plate de $\mathscr{E}'$ ou de $\mathscr{M}'$.

2.6. Relation avec la descente de Cartier

Nous précisons ici comment le théorème classique de Cartier sur la descente par Frobenius des $\mathscr{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle [29, th. (5.1)] peut s'interpréter du point de vue de la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules. Cette interprétation en fournit une démonstration, et permet de considérer le théorème 2.3.6 comme un prolongement du théorème de Cartier.

2.6.1. Nous supposerons dans cette section 2.6 que S est un schéma de caractéristique p. Soient X un S-schéma lisse de dimension relative d, $X' = X^{(1)}$ le S-schéma déduit de X par changement de base par le Frobenius absolu de S. Soient $t_1, \ldots, t_d$ des coordonnées locales sur un ouvert de X, $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \in \mathscr{O}_{X \times_S X}$, $\partial_1, \ldots, \partial_d$ les dérivations correspondantes. Considérons d'abord l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{X\times X} \to \mathscr{P}_{X,(0)}$. Comme l'idéal $\mathscr{I}$ de la diagonale est envoyé par construction dans un PD-idéal, et que X est de caractéristique p, l'idéal $\mathscr{I}^{(p)}$ engendré par les τ_i^p est d'image nulle dans $\mathscr{P}_{X,(0)}$. Or le quotient $\mathscr{O}_{X\times X}/\mathscr{I}^{(p)}$ s'identifie à $\mathscr{O}_{X\times_{X'}X}$, ce qui fournit une factorisation

$$\mathscr{O}_{X\times_S X} \longrightarrow \mathscr{O}_{X\times_{X'}X} \hookrightarrow \mathscr{P}_{X,(0)} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X,(0)}.$$

L'image de $\mathscr{O}_{X\times_{X'}X}$ dans $\mathscr{P}_{X,(0)}$ est la sous-$\mathscr{O}_X$-algèbre finie localement libre ayant pour base locale l'ensemble des $\underline{\tau}^{\underline{k}} = \underline{k}!\,\underline{\tau}^{[\underline{k}]}$, avec $0 \le k_i < p$ pour tout i (de sorte que $\underline{k}!$ est inversible). En particulier, $\mathscr{O}_{X\times_{X'}X} \cap \overline{\mathscr{I}}^{[n+1]} = 0$ pour $n \ge d(p-1)$, et l'homomorphisme $\mathscr{O}_{X\times_{X'}X} \to \mathscr{P}^n_{X,(0)}$ est alors injectif.

D'autre part, soit $\mathscr{K}$ le noyau de l'homomorphisme $\mathscr{D}_X^{(0)} \to \mathscr{D}_X^{(1)}$. D'après [5, 2.2.7], $\mathscr{K}$ est l'idéal bilatère engendré en coordonnées locales par les opérateurs $\partial_1^p, \ldots, \partial_d^p$. Nous noterons $\overline{\mathscr{D}}_X^{(0)}$ le quotient $\mathscr{D}_X^{(0)}/\mathscr{K}$.

2.6.2. Proposition. — *Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module muni d'une connexion intégrable ∇. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La connexion ∇ est à p-courbure nulle ;*

(ii) *La structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche sur $\mathscr{E}$ correspondant à ∇ est induite par restriction des scalaires par une structure de $\overline{\mathscr{D}}_X^{(0)}$-module ;*

(iii) *La PD-stratification de $\mathscr{E}$ correspondant à ∇ est définie par extension des scalaires à partir d'une donnée de descente de X à X', déterminée de manière unique par ∇.*

Rappelons que, si ∇ est une connexion intégrable sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$, la p-courbure de ∇ est l'application $\psi : \mathcal{T}_X \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$ tel que $\psi(\partial) = \nabla(\partial)^p - \nabla(\partial^{(p)})$, où l'on note $\nabla(\partial)$ l'action sur $\mathcal{E}$ d'une dérivation ∂ définie par ∇ (donc la multiplication par ∂ pour la structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$-module correspondante), et $\partial \longmapsto \partial^{(p)}$ l'opération de puissance p-ième sur l'espace des dérivations. C'est une application semi-linéaire par rapport à l'endomorphisme de Frobenius absolu de X [29, (5.2)], si bien que, pour que ∇ soit à p-courbure nulle, il faut et suffit que les opérateurs $\partial_i^p = \nabla(\partial_i)^p$ annulent $\mathcal{E}$, d'où l'équivalence de (i) et (ii).

La PD-stratification correspondant à ∇ est la famille d'isomorphismes

$$\varepsilon_n \,:\, \mathcal{P}^n_{X,(0)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X,(0)}$$

définie localement par

$$\varepsilon_n(1 \otimes x) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}^{\underline{k}} x \otimes \underline{\tau}^{[\underline{k}]}$$

pour toute section x de $\mathcal{E}$. Cette expression montre que ∇ est à p-courbure nulle si et seulement, pour toute section x de $\mathcal{E}$ et pour tout $n \geq d(p-1)$, $\varepsilon_n(x)$ est une section du sous-faisceau $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{X \times_{X'} X} \subset \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}^n_{X,(m)}$. L'équivalence de (i) et (iii) en résulte aussitôt.

2.6.3. COROLLAIRE (Théorème de Cartier). — *Le foncteur $F^*_{X/S}$ induit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$-modules et celle des $\mathcal{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle.*

Comme le morphisme de Frobenius relatif est localement libre de rang fini, cela résulte immédiatement par descente fidèlement plate de l'équivalence entre (i) et (iii).

Remarque. — Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}_X^{(1)}$-module, il est à p-courbure nulle en tant que $\mathcal{D}_X^{(0)}$-module, puisque les ∂_i^p sont d'image nulle dans $\mathcal{D}_X^{(1)}$. On voit donc que, dans cette situation, la structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$-module de $\mathcal{E}$ permet de redescendre $\mathcal{E}$ en un $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{E}'$, grâce au théorème de Cartier, tandis que sa structure de $\mathcal{D}_X^{(1)}$-module permet en outre de munir $\mathcal{E}'$ d'une connexion intégrable, grâce au théorème 2.3.6.

Mentionnons enfin que, pour $m \geq 1$, la condition de nullité de la p-courbure a été généralisée aux $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules par Le Stum et Quiros [31]; ils ont ainsi obtenu un théorème de descente analogue au théorème de Cartier pour les itérés $F^m_{X/S} : X \to X^{(m)}$, fournissant une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à p-courbure nulle et $\mathcal{O}_{X^{(m)}}$-modules. On peut bien entendu interpréter ce résultat comme un théorème de descente fidèlement plate comme nous l'avons fait ici lorsque $m = 0$.

3. Théorèmes de commutation à l'action de Frobenius

Sur $\mathbb{C}$, on dispose en théorie des $\mathscr{D}$-modules de quatre opérations de base dont on peut déduire les autres : image directe f_+, image inverse extraordinaire $f^!$, dual, produit tensoriel externe. Dans la théorie arithmétique, il y a lieu en outre de considérer deux opérations supplémentaires :

- le changement de base, le schéma de base n'étant plus nécessairement le spectre d'un corps ;
- l'extension de l'anneau d'opérateurs différentiels : extension des scalaires d'un faisceau d'opérateurs de la forme $\mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ à un faisceau de la forme $\mathscr{B}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m')}$, avec $m \leq m'$.

Dans ce chapitre, nous montrons que toutes ces opérations commutent au foncteur d'image inverse par Frobenius F^* défini en 2.2.3. Comme F^* est une équivalence de catégories, ces opérations commutent donc également à la descente par Frobenius.

3.0.1. Précisons d'abord quelques hypothèses et notations que nous adopterons systématiquement dans les sections qui suivent, et que nous omettrons donc de répéter explicitement dans les énoncés.

(i) Nous désignerons par S le schéma de base (resp. par $S \to T$ un morphisme de changement de base). Pour chacune des opérations considérées, nous rappelerons au préalable la définition générale. Aucune hypothèse n'est nécessaire sur S lorsque $m = 0$ ou $m = \infty$. Si $m \in \mathbb{N}^*$, nous supposerons que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma.

Lorsque nous considèrerons un S-schéma lisse X, nous supposerons donné sur X un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathscr{B}_X$ muni d'une action compatible de $\mathscr{D}_X^{(m)}$, et nous poserons $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} = \mathscr{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$. Lorsque nous considèrerons un morphisme de schémas $f : X \to Y$, nous supposerons que $\mathscr{B}_X = f^*\mathscr{B}_Y$, muni de l'action de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ définie par image inverse à partir de celle de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$ sur $\mathscr{B}_Y$ (voire, s'il y a lieu, de l'action de $\mathscr{D}_X^{(m+s)}$ obtenue par application de 2.2.3).

(ii) Pour mettre en évidence la « nature cristalline » des opérations telles que $f^!$ et f_+, nous généraliserons leur construction au cas où S est muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, qu'on supposera m-PD-nilpotent, et où les morphismes seront seulement définis modulo $\mathfrak{a}$. Nous noterons $S_0 = V(\mathfrak{a})$, et, d'une manière générale, l'indice 0 désignera la réduction d'un S-schéma modulo $\mathfrak{a}$, ou des données définies au-dessus de S_0. Sous ces hypothèses, les foncteurs image inverse seront les foncteurs f_0^* définis en appliquant 2.1.6. En particulier, nous généraliserons ce qui a été dit plus haut en supposant que, lorsqu'un morphisme $f_0 : X_0 \to Y_0$ est donné, on a $\mathscr{B}_X = f_0^*\mathscr{B}_Y$.

(iii) Pour énoncer les propriétés de commutation à F^*, nous supposerons que p est nilpotent sur S, et que S est muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ tel que $p \in \mathfrak{a}$. Nous supposerons fixé un entier s, et, si X est un S-schéma lisse, nous désignerons par

X' un S-schéma lisse relevant $X_0^{(s)}$.

Ces propriétés peuvent d'abord être énoncées dans une situation « relevée » : nous ne ferons pas d'hypothèse de PD-nilpotence sur $\mathfrak{a}$, les morphismes de schémas considérés seront des morphismes de S-schémas lisses, et les diagrammes seront commutatifs sur S. Nous noterons alors $F : X \to X'$ un S-morphisme relevant le morphisme de Frobenius relatif $F^s_{X_0/S_0}$.

(iv) Enfin, nous donnerons une variante « cristalline » des énoncés précédents : nous supposerons alors que S et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ vérifient à la fois les hypothèses de (ii) et de (iii), donc en particulier que $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent. Dans ce cas, il suffit à nouveau que les morphismes soient donnés entre les réductions sur S_0. Les foncteurs image inverse seront donc encore définis en appliquant 2.1.6, renforcé par 2.2.6 lorsque, comme pour le foncteur $F^*_{X_0/S_0}$, il y aura lieu de prendre en compte l'élévation du niveau par Frobenius.

3.1. Extension de l'anneau d'opérateurs

Avec les hypothèses de 3.0.1, nous montrons ici que, pour $m' \geq m$, le foncteur F^* commute à une extension de l'anneau d'opérateurs différentiels de la forme

$$\mathscr{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{D}^{(m)}_{X'} \longrightarrow \mathscr{C}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{D}^{(m')}_{X'}.$$

La démonstration procède par réduction à la caractéristique p. Pour cela, nous utiliserons une variante non commutative du lemme de Nakayama :

3.1.1. LEMME. — *Soient A un anneau non nécessairement commutatif, $\mathfrak{a} \subset Z(A)$ un nilidéal du centre de A, M un A-module à gauche de type fini. Si $M = \mathfrak{a}M$, alors $M = 0$.*

Soient $x_1, \dots, x_r$ des générateurs de M en nombre minimum, et supposons que $r > 0$. Il existe des éléments $a_i \in \mathfrak{a}A$ tels que $x_r = \sum_{i=1}^r a_i x_i$, d'où $(1 - a_r)x_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i x_i$. On peut écrire a_r comme une somme finie $a_r = \sum_k \alpha_k b_k$, avec $\alpha_k \in \mathfrak{a}$, $b_k \in A$. Soit $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ le sous-idéal de $Z(A)$ engendré par les α_k. Comme $\mathfrak{a}'$ est un idéal de type fini contenu dans le centre de A, c'est un idéal nilpotent, et d'autre part $a_r^n \in \mathfrak{a}'^n A$ pour tout n. Par conséquent, a_r est nilpotent, et M peut être engendré par $r - 1$ éléments, ce qui contredit l'hypothèse.

3.1.2. Sous les hypothèses de 3.0.1 (iii), soient $m' \geq m$, $\mathscr{B}_{X'}$ (resp. $\mathscr{C}_{X'}$) une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre munie d'une action compatible de $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ (resp. $\mathscr{D}^{(m')}_{X'}$), $\mathscr{B}_{X'} \to \mathscr{C}_{X'}$ un homomorphisme $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-linéaire de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres. On pose $\mathscr{B}_X = F^*\mathscr{B}_{X'}$, $\mathscr{C}_X = F^*\mathscr{C}_{X'}$, et on munit ces algèbres des actions respectives de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$ et $\mathscr{D}^{(m'+s)}_X$ définies grâce à 2.2.3. On peut alors considérer les faisceaux d'opérateurs différentiels à coefficients dans ces algèbres, définis par

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'} = \mathscr{B}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{D}^{(m)}_{X'}, \qquad \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X = \mathscr{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}^{(m+s)}_X,$$

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} = \mathscr{C}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{D}_{X'}^{(m')}, \qquad \widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)} = \mathscr{C}_{X} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathscr{D}_{X}^{(m'+s)}.$$

3.1.3. PROPOSITION. — *Avec les notations précédentes, soit $\mathscr{E}' \in D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$. Il existe dans $D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)})$ un isomorphisme canonique*

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}'). \tag{3.1.3.1}$$

Montrons d'abord que, pour tout $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{E}'$, il existe un isomorphisme canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)}$modules à gauche

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}'). \tag{3.1.3.2}$$

En appliquant F^* à l'homomorphisme d'extension des scalaires $\mathscr{E}' \to \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}'$, on obtient un homomorphisme

$$F^*\mathscr{E}' \longrightarrow F^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}')$$

semi-linéaire par rapport à l'homomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)} \to \widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)}$. Par extension des scalaires, on obtient l'homomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)}$-linéaire voulu.

Pour montrer que cet homomorphisme est un isomorphisme, on observe qu'on peut se ramener au cas où $\mathscr{E}' = \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$. En effet, cet homomorphisme est fonctoriel en $\mathscr{E}'$, de sorte que l'homomorphisme

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}} F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \longrightarrow F^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')}) \tag{3.1.3.3}$$

obtenu pour $\mathscr{E}' = \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ est $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire à droite. Il est clair d'après sa construction que l'homomorphisme qu'on en déduit par tensorisation sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$ avec un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ n'est autre que (3.1.3.2).

D'après 2.5.3, la source et le but de (3.1.3.3) sont tous deux localement projectifs de type fini sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)}$. Comme p est nilpotent sur S, l'idéal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_S$ engendre un nilidéal dans le centre de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m'+s)}$, et le lemme précédent entraîne qu'il suffit de prouver que (3.1.3.3) est un isomorphisme lorsque $\mathfrak{a} = 0$. On est ainsi ramené au cas où S est de caractéristique p, et F le morphisme de Frobenius relatif $F^s_{X/S} : X \to X'$.

L'assertion étant locale, on peut supposer qu'on dispose de coordonnées $t_1, \ldots, t_d$ sur X relativement à S. Pour tout entier m'', soit $(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m'')}})$ la base correspondante de $\mathscr{D}_{X}^{(m'')}$. D'après (2.2.4.3), l'homomorphisme canonique $\pi_{m,s} : \widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)} \to F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$, envoie $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+s)}}$ sur $1 \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}/p^s \rangle_{(m)}}$ si chacun des k_i est divisible par p^s, et sur 0 sinon. Rappelons (*cf.* [5, (2.2.5.1)]) que, si m'', $k \in \mathbb{N}$, et si $k = \sum_{j=0}^{m''-1} a_j p^j + a p^{m''}$, avec $0 \le a_j < p$ pour tout $j \le m'' - 1$, alors

$$\partial^{\langle k \rangle_{(m'')}} = u_{m'',k} \prod_{j=0}^{m''-1} (\partial^{[p^j]})^{a_j} (\partial^{[p^{m''}]})^{a},$$

avec $u_{m'',k} \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$ et $\partial^{[p^j]} := \partial^{\langle p^j \rangle_{(m'')}}$ pour $j \le m''$. Si k n'est pas divisible par p^s, avec $s \le m''$, il existe un entier $j < s$ tel que $a_j \neq 0$, et $\partial^{\langle k \rangle_{(m'')}}$ est multiple de $\partial^{[p^j]}$. Par suite, le noyau de $\pi_{m,s}$ est l'idéal à gauche de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X}^{(m+s)}$ engendré par les $\partial_i^{[p^j]}$ pour $1 \le i \le d$, et $0 \le j < s$.

Comme, pour tout $j < s \leq m+s$, les homomorphismes de transition $\mathscr{D}_X^{(m+s)} \to \mathscr{D}_X^{(m'+s)}$ envoient les $\partial_i^{[p^j]} := \partial^{\langle p^j \rangle_{(m+s)}}$ sur les $\partial_i^{[p^j]} := \partial^{\langle p^j \rangle_{(m'+s)}}$, on obtient

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \simeq \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)} / \sum_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 0 \leq j < s}} \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)} \partial_i^{[p^j]} = \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)} / \mathrm{Ker}(\pi_{m',s}) \simeq F^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')}),$$

d'où l'isomorphisme (3.1.3.2).

Grâce à 2.5.7 (i), on obtient alors l'isomorphisme (3.1.3.1) en appliquant (3.1.3.2) à une résolution plate de $\mathscr{E}'$.

3.1.4. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de* 3.0.1 (iv), *on pose* $\mathscr{B}_X = F_{X_0/S_0}^* \mathscr{B}_{X'}$, $\mathscr{C}_X = F_{X_0/S_0}^* \mathscr{C}_{X'}$. *Pour tout* $\mathscr{E}' \in D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$, *il existe dans* $D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)})$ *un isomorphisme canonique*

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F_{X_0/S_0}^{s\,*} \mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_{X_0/S_0}^{s\,*} (\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}'). \tag{3.1.4.1}$$

Soient $F, F' : U \to X'$ deux relèvements de F_{X_0/S_0} sur un ouvert U de X. Pour tout $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module $\mathscr{E}'$, on dispose des isomorphismes $\tau_{F,F'}^{(m+s)} : F'^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}'$, et

$$\tau_{F,F'}^{(m'+s)} : F'^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} F^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}').$$

Le carré

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F'^*\mathscr{E}' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes \tau_{F,F'}^{(m+s)}"', "\wr"] & F'^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}') \arrow[d, "\tau_{F,F'}^{(m'+s)}", "\wr"'] \\
\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F^*\mathscr{E}' \arrow[r, "\sim"] & F^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}').
\end{tikzcd}$$

formé à partir des isomorphismes (3.1.3.2) relatifs à F et F' est commutatif, car il suffit de le montrer avant de tensoriser la colonne de gauche par $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)}$. Cela résulte alors de la fonctorialité de $\tau_{F,F'}^{(m+s)}$ appliquée à l'homomorphisme $\mathscr{E}' \to \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}'$, et de ce que, si $\mathscr{F}'$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')}$-module, les isomorphismes $\tau_{F,F'}^{(m+s)}$ et $\tau_{F,F'}^{(m'+s)}$ relatifs à $\mathscr{F}'$ sont égaux.

Il en résulte que les isomorphismes (3.1.3.2) définis par des relèvements locaux de Frobenius se recollent, et on obtient ainsi pour tout $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$-module un isomorphisme global

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m'+s)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F_{X_0/S_0}^{s\,*} \mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_{X_0/S_0}^{s\,*} (\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m')} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}').$$

En prenant des résolutions plates sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}$, cet isomorphisme s'étend ensuite aux catégories dérivées.

3.2. Changement de base et image inverse extraordinaire

Nous rappelons d'abord la définition du foncteur de changement de base, et du foncteur $f^!$ pour les $\mathscr{D}$-modules. Leur compatibilité au foncteur F^* est ensuite une conséquence facile des propriétés de transitivité établies dans la section 2.2.

3.2.1. Considérons le foncteur de changement de base. Avec les hypothèses de 3.0.1 (i), soient $S \to T$ un morphisme de schémas, Y un T-schéma lisse, $X = S \times_T Y$, $f : X \to Y$ la projection. L'homomorphisme canonique (2.1.3.1)

$$\mathscr{D}_X^{(m)} \longrightarrow f^*\mathscr{D}_Y^{(m)}$$

est alors un isomorphisme (*cf.* [5, 2.2.2]). On en déduit un homomorphisme

$$f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)} \longrightarrow f^*\mathscr{D}_Y^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{D}_X^{(m)},$$

qui est un homomorphisme de faisceaux d'anneaux, grâce à la fonctorialité en Y/T des homomorphismes $\delta_{(m)}^{n,n'}$ qui définissent la structure d'anneau de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$. Pour tout $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{F}$, on en déduit un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules

$$\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)}} f^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\ \sim\ } f^*\mathscr{F}$$

permettant de définir simplement par extension des scalaires le $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module $f^*\mathscr{F}$ déduit de $\mathscr{F}$ par le changement de base $S \to T$.

Si $\mathscr{B}_Y$ est une $\mathcal{O}_Y$-algèbre munie d'une action compatible de $\mathscr{D}_Y^{(m)}$, et $\mathscr{B}_X = f^*\mathscr{B}_Y$, on dispose encore d'un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \to \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$, donnant pour tout $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-module $\mathscr{F}$ un isomorphisme

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} \otimes_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}} f^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\ \sim\ } f^*\mathscr{F} \tag{3.2.1.1}$$

qui permet de définir par extension des scalaires le $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-module déduit de $\mathscr{F}$ par changement de base

De même, l'extension du foncteur de changement de base aux catégories dérivées s'interprète comme extension des scalaires grâce à l'isomorphisme

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}} f^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{L}f^*\mathscr{F}, \tag{3.2.1.2}$$

défini pour $\mathscr{F} \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)})$, et obtenu en appliquant l'isomorphisme précédent à une résolution plate de $\mathscr{F}$.

3.2.2. PROPOSITION. — *Supposons que S et T soient munis de m-PD-idéaux quasi-cohérents $(\mathfrak{a}_S, \mathfrak{b}_S, \alpha_S)$ et $(\mathfrak{a}_T, \mathfrak{b}_T, \alpha_T)$ vérifiant les hypothèses de* 3.0.1 (iii), *et tels que $S \to T$ soit un m-PD-morphisme. Soient $X' = S \times_T Y'$, $f' : X' \to Y'$ la projection, $\mathscr{B}_{Y'}$ une $\mathcal{O}_{Y'}$-algèbre munie d'une action compatible de $\mathscr{D}_{Y'}^{(m)}$, $\mathscr{B}_{X'} = f'^*\mathscr{B}_{Y'}$.*

(i) *Si $F_Y : Y \to Y'$ est un relèvement de $F^s_{Y_0/T_0}$, soient $F_X : X \to X'$ le morphisme déduit de F_Y par changement de base, $\mathscr{B}_Y = F_Y^*\mathscr{B}_{Y'}$, $\mathscr{B}_X = f^*\mathscr{B}_Y \simeq F_X^*\mathscr{B}_{X'}$ Pour tout $\mathscr{F}' \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)})$, il existe un isomorphisme canonique de $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)})$*

$$\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} f^{-1}F_Y^*\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_X^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f'^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}} f'^{-1}\mathscr{F}'). \tag{3.2.2.1}$$

(ii) *Si* $\mathfrak{a}_S$ *et* $\mathfrak{a}_T$ *sont m-PD-nilpotents, soient* $\mathscr{B}_Y = F^{s\,*}_{Y_0/T_0}\mathscr{B}_{Y'}$, $\mathscr{B}_X = f^*\mathscr{B}_Y \simeq F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathscr{B}_{X'}$. *Pour tout* $\mathscr{F}' \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'})$, *il existe un isomorphisme canonique de* $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X)$

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y} f^{-1}F^{s\,*}_{Y_0/T_0}\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^{s\,*}_{X_0/S_0}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f'^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'}} f'^{-1}\mathscr{F}'). \tag{3.2.2.2}$$

Il suffit de prouver les versions non dérivées de ces isomorphismes lorsque $\mathscr{F}'$ se réduit à un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'}$-module, car, d'après 2.5.7, on peut calculer les foncteurs dérivés en jeu en remplaçant $\mathscr{F}'$ par une résolution plate sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'}$. Utilisant l'isomorphisme (3.2.1.1), on voit qu'il s'agit de définir un isomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-linéaire $f^*F^*_Y\mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F^*_X f'^*\mathscr{F}'$ (resp. $f^*F^{s\,*}_{Y_0/T_0}\mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F^{s\,*}_{X_0/S_0}f'^*\mathscr{F}'$). Dans le premier cas, on a $f' \circ F_X = F_Y \circ f$, et, grâce à 2.2.3 (iii), il suffit d'utiliser l'isomorphisme de transitivité des images inverses. Dans le deuxième cas, on utilise sa généralisation donnée par (2.2.6.1).

3.2.3. Revenons à la situation générale de 3.0.1 (i) , et précisons dans ce cadre la définition du foncteur image inverse extraordinaire.

(i) Soient $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas lisses, de dimensions relatives d_X et d_Y sur S, $d_{X/Y} = d_X - d_Y$, $\mathscr{B}_Y$ une $\mathcal{O}_Y$-algèbre munie d'une action compatible de $\mathscr{D}^{(m)}_Y$, $\mathscr{B}_X = f^*\mathscr{B}_Y$. Rappelons que, d'après 2.1.4, on dispose sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X\to Y} := f^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y$ d'une structure canonique de $(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_X, f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y)$-bimodule.

Suivant les conventions de [12], nous définirons le foncteur image inverse extraordinaire $f^! : D^-(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y) \to D^-(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_X)$ par

$$f^!\mathscr{F} = \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X\to Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y)} f^{-1}\mathscr{F}[d_{X/Y}]. \tag{3.2.3.1}$$

Ce foncteur dépend de m en général, et il sera parfois utile de le préciser dans les notations : nous emploierons alors la notation $f^{!^{(m)}}\mathscr{F}$.

Soient $\mathscr{F} \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y)$, et $\mathscr{P}$ une résolution de $\mathscr{F}$ plate sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y$. On a donc des isomorphismes de complexes de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_X$-modules

$$\begin{aligned} f^!\mathscr{F} &= \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y)} f^{-1}\mathscr{P}[d_{X/Y}] \\ &\simeq \mathscr{B}_X \otimes_{f^{-1}(\mathscr{B}_Y)} f^{-1}\mathscr{P}[d_{X/Y}] \\ &\simeq \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}\mathscr{P}[d_{X/Y}], \end{aligned} \tag{3.2.3.2}$$

grâce auxquels on peut aussi calculer $f^!\mathscr{F}$ en prenant des résolutions $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y$-linéaires de $\mathscr{F}$ qui soient plates sur $\mathscr{B}_Y$, ou sur $\mathcal{O}_Y$.

(ii) Plaçons nous maintenant sous les hypothèses de 3.0.1 (ii), et soient $f_0 : X_0 \to Y_0$ un morphisme de S_0-schémas lisses, X, Y deux S-schémas lisses relevant X_0 et Y_0. D'après 2.1.6, on peut encore définir par recollement un $(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_X, f_0^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y)$-bimodule canonique noté $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X\to Y} = f_0^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y$. On peut donc généraliser la définition de $f^!$ en posant dans ce cas, pour $\mathscr{F} \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y)$,

$$f_0^!\mathscr{F} := \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X\to Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f_0^{-1}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_Y)} f_0^{-1}\mathscr{F}[d_{X/Y}]. \tag{3.2.3.3}$$

On observera qu'on dispose encore du foncteur f_0^* de la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-modules à gauche dans celle des $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-modules à gauche, défini par recollement grâce aux isomorphismes $\tau_{f,f'}$ à partir des foncteurs f^* associés aux relèvements locaux f de f_0. On dispose aussi du foncteur dérivé correspondant $\mathbb{L}f_0^*$, calculable en prenant des résolutions $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-linéaires à termes plats sur $\mathcal{O}_Y$ (ou sur $\mathscr{B}_Y$) et en recollant leurs images inverses locales par les isomorphismes $\tau_{f,f'}$. Pour tout $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{F}$, on dispose de même d'un isomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-linéaire

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{X\to Y}^{(m)} \otimes_{f_0^{-1}(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)})} f_0^{-1}\mathscr{F} \simeq f_0^*\mathscr{F},$$

défini par recollement à partir des isomorphismes (3.2.3.2) locaux, et donnant naissance à l'isomorphisme

$$f_0^!\mathscr{F} \simeq \mathbb{L}f_0^*\mathscr{F}[d_{X,Y}]. \tag{3.2.3.4}$$

Par contre, on prendra garde qu'en général le foncteur $\mathbb{L}f_0^*$ ne s'exprime sous la forme d'un produit tensoriel comme dans les isomorphismes (3.2.3.2) que lorsqu'on dispose d'un relèvement global de f_0 en $f : X \to Y$, sinon $\mathcal{O}_X$ n'est pas muni d'une structure naturelle de $f_0^{-1}\mathcal{O}_Y$-module à droite.

3.2.4. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 3.0.1 (iii), *soient $f_0 : X_0 \to Y_0$ un morphisme de S_0-schémas lisses, X, Y, X', Y' des S-schémas lisses relevant X_0, Y_0, $X_0^{(s)}$ et $Y_0^{(s)}$.*

(i) *Supposons donnés des S-morphismes $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$, $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ relevant f_0, $f_0^{(s)}$, $F^s_{X_0/S_0}$, et $F^s_{Y_0/S_0}$. Si $F_Y \circ f = f' \circ F_X$, il existe pour tout $\mathscr{F}' \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)})$ un isomorphisme canonique de $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)})$*

$$f^{!(m+s)}F_Y^*\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_X^*(f'^{!(m)}\mathscr{F}'). \tag{3.2.4.1}$$

(ii) *Supposons $\mathfrak{a}$ m-PD-nilpotent. Il existe pour tout $\mathscr{F}' \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)})$ un isomorphisme canonique de $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)})$*

$$f_0^{!(m+s)}F^{s\,*}_{Y_0/S_0}\mathscr{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^{s\,*}_{X_0/S_0}(f_0^{(s)\,!(m)}\mathscr{F}'). \tag{3.2.4.2}$$

Notons d'abord que $d_{X'/Y'} = d_{X/Y}$. Soit $\mathscr{P}'$ une résolution de $\mathscr{F}'$ plate sur $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}$. Grâce à 2.5.7 (i), on est ramené dans le premier cas à construire un isomorphisme canonique $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-linéaire

$$f^*F_Y^*\mathscr{P}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_X^*f'^*\mathscr{P}'. \tag{3.2.4.3}$$

Cet isomorphisme, valable sans hypothèse sur $\mathscr{P}'$, s'obtient alors en appliquant 2.2.3 (iii).

Dans le cas (ii), il faut de même construire un isomorphisme canonique $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}$-linéaire

$$f_0^*F^{s\,*}_{Y_0/S_0}\mathscr{P}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^{s\,*}_{X_0/S_0}f_0^{(s)\,*}\mathscr{P}', \tag{3.2.4.4}$$

et cet isomorphisme est alors fourni par 2.2.6 (iii).

Remarque. — En appliquant l'assertion (ii) dans le cas particulier où X et Y sont deux relèvements de X_0, et $f_0 = \mathrm{Id}_{X_0}$, on voit en particulier que les équivalences de 2.1.7 sont compatibles aux foncteurs F^*.

3.3. Produits tensoriels interne et externe

La compatibilité du foncteur F^* au produit tensoriel externe est analogue à ce que nous venons de voir pour les images inverses.

Observons d'abord que le produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$ est compatible à F^*:

3.3.1. LEMME. — *On se place sous les hypothèses de* 3.0.1 (iii).

(i) *Si $F : X \to X'$ est un relèvement de $F^s_{X_0/S_0}$, et si $\mathcal{E}', \mathcal{F}' \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$, il existe dans $D^-(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X)$ un isomorphisme canonique*

$$F^*\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{F}'). \tag{3.3.1.1}$$

(ii) *Si $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, et si $\mathcal{E}', \mathcal{F}' \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$, il existe dans $D^-(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X)$ un isomorphisme canonique*

$$F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathcal{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^{s\,*}_{X_0/S_0}(\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{F}'). \tag{3.3.1.2}$$

Soit $\mathcal{P}'$ une résolution de $\mathcal{F}'$ plate sur $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$. Comme $\mathcal{P}'$ est à termes plats sur $\mathcal{O}_{X'}$, la source et le but de (3.3.1.1) sont les complexes de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-modules donnés respectivement par $F^*\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{P}'$ et $F^*(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{P}')$. Il suffit donc de vérifier que l'isomorphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire canonique entre ces deux complexes est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-linéaire. On peut supposer que $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ sont réduits à un seul module, et on est ramené à vérifier que cet isomorphisme est horizontal pour les $(m+s)$-PD-stratifications de $F^*\mathcal{E}' \otimes F^*\mathcal{F}'$ et $F^*(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{F}')$. Si (ε'_n), (η'_n) sont les m-PD-stratifications de $\mathcal{E}', \mathcal{F}'$, celle de $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{F}'$ est alors $(\varepsilon'_n \otimes \eta'_n)$, et, avec les notations de 2.2.2, l'assertion résulte de ce que les images inverses par les morphismes $\Phi : \Delta^n_{X,(m+s)} \to \Delta^n_{X',(m)}$ commutent au produit tensoriel.

Dans le cas (ii), l'assertion résulte du cas (i) une fois observé que les isomorphismes de recollement $\tau_{F,F'}$ commutent eux aussi au produit tensoriel, puisqu'ils se déduisent des m-PD-stratifications en appliquant un foncteur image inverse.

3.3.2. Précisons maintenant la construction du produit tensoriel externe, sous les hypothèses générales de 3.0.1 (i). Soient X, Y deux S-schémas lisses, $Z = X \times_S Y$, et notons $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ les deux projections. Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_Y$-module à gauche. Les images inverses $f^*\mathcal{E}$, $g^*\mathcal{F}$ possèdent une structure naturelle de $\mathcal{D}^{(m)}_Z$-module à gauche, et, d'après [5, 2.3.3], il en est de même de leur produit tensoriel $f^*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Z} g^*\mathcal{F}$. Par définition, c'est le produit tensoriel externe de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, qu'on notera

$$\mathcal{E} \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F} := f^*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Z} g^*\mathcal{F}.$$

Lorsque S est le spectre d'un corps, c'est un bifoncteur exact en chacune des variables $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. En général, ce n'est plus le cas. Néanmoins, si $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module plat, ou plus généralement plat sur $\mathcal{O}_X$, le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto f^*\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_Z} g^*\mathcal{F}$ est exact. Il en résulte qu'on peut dériver le produit tensoriel externe en un bifoncteur

$$\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F} \,:\, D^-(\mathcal{D}_X^{(m)}) \times D^-(\mathcal{D}_Y^{(m)}) \longrightarrow D^-(\mathcal{D}_Z^{(m)}),$$

calculable en prenant une résolution plate de l'un des deux arguments.

Si $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est une $\mathcal{O}_X$-algèbre (resp. $\mathcal{O}_Y$-algèbre) munie d'une action compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ (resp. $\mathcal{D}_Y^{(m)}$), $\mathcal{C} := \mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}$ est une $\mathcal{O}_Z$-algèbre munie d'une action compatible de $\mathcal{D}_Z^{(m)}$. En notant comme précédemment $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_Y^{(m)} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y^{(m)}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_Z^{(m)} = \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_Z^{(m)}$, on voit immédiatement que le produit tensoriel externe se généralise en un bifoncteur $D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}) \times D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_Y^{(m)}) \to D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_Z^{(m)})$.

3.3.3. PROPOSITION. — *Avec les notations précédentes, et sous les hypothèses de* 3.0.1 (iii), *soient X, Y des S-schémas lisses de réductions X_0, Y_0, et X', Y' des S-schémas lisses relevant $X_0^{(s)}$ et $Y_0^{(s)}$. Notons $Z = X \times_S Y$, $Z_0 = X_0 \times_{S_0} Y_0$, $Z' = X' \times_{S'} Y'$.*

(i) *Supposons donnés des relèvements $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ de $F^s_{X_0/S_0}$, $F^s_{Y_0/S_0}$, et posons $F_Z = F_X \times F_Y : Z \to Z'$. Si $\mathcal{E}' \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$, $\mathcal{F}' \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{Y'}^{(m)})$, il existe dans $D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_Z^{(m+s)})$ un isomorphisme canonique*

$$F_X^*\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S} F_Y^*\mathcal{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_Z^*(\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}'). \tag{3.3.3.1}$$

(ii) *Si $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, et si $\mathcal{E} \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$, $\mathcal{F} \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{Y'}^{(m)})$, il existe dans $D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_Z^{(m+s)})$ un isomorphisme canonique*

$$F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S} F^{s\,*}_{Y_0/S_0}\mathcal{F}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^{s\,*}_{Z_0/S_0}(\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}'). \tag{3.3.3.2}$$

Soient $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$, $f' : Z' \to X'$, $g' : Z' \to Y'$ les projections, et $\mathcal{P}'$, $\mathcal{Q}'$ des résolutions plates de $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$. Dans le cas (i), il suffit de définir un isomorphisme $\widetilde{\mathcal{D}}_Z^{(m+s)}$-linéaire

$$f^*F_X^*\mathcal{P}' \otimes_{\mathcal{O}_Z} g^*F_Y^*\mathcal{Q}' \xrightarrow{\ \sim\ } F_Z^*(f'^*\mathcal{P}' \otimes_{\mathcal{O}_{Z'}} g'^*\mathcal{Q}'),$$

et on prend le composé des isomorphismes définis par 2.2.3 (iii) et 3.3.1 (i) :

$$f^*F_X^*\mathcal{P}' \otimes_{\mathcal{O}_Z} g^*F_Y^*\mathcal{Q}' \xrightarrow{\sim} F_Z^*f'^*\mathcal{P}' \otimes_{\mathcal{O}_Z} F_Z^*g'^*\mathcal{Q}' \xrightarrow{\sim} F_Z^*(f'^*\mathcal{P}' \otimes_{\mathcal{O}_{Z'}} g'^*\mathcal{Q}').$$

Le cas (ii) se traite de la même manière.

3.4. Image directe

Après avoir précisé la construction du foncteur image directe f_+, nous établissons maintenant la commutation de f_+ à F^*.

3.4.1. Rappelons la construction du bimodule canonique définissant les images directes. Soient $m \in \overline{\mathbb{N}}$, S un schéma (resp. $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma si $m \in \mathbb{N}^*$).

a) Sous les hypothèses de 3.0.1 (i), soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schéma lisses. On peut associer à f un $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$-bimodule de deux manières :

(i) En tensorisant $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$ à droite par ω_Y^{-1}, on obtient un $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-bimodule à gauche, auquel on applique f^* par la structure tordue. On obtient ainsi un $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$-bimodule à gauche, qu'on transforme en $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$-bimodule par tensorisation à droite par ω_X. On note

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)} = f_{\mathrm{d}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X$$

le bimodule ainsi obtenu.

(ii) On peut aussi appliquer f^* à la structure gauche de $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes \omega_Y^{-1}$, ce qui donne un $(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}, f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)})$-bimodule à gauche. On le transforme alors en $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$-bimodule en tensorisant à gauche par ω_X, d'où

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)}{}' = \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1}).$$

En fait, les bimodules $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)}{}'$ sont canoniquement isomorphes. En effet, on dispose d'après 1.3.4 d'un isomorphisme de transposition

$$\beta_Y : \widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1} \xrightarrow{\ \sim\ } \widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1}$$

échangeant les deux structures de $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-module à gauche de $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y{}^{-1}$ (déduit de (1.3.4.3) par tensorisation avec $\mathscr{B}_Y$). En lui appliquant f^* à droite sur la source (et donc à gauche sur le but), on obtient un isomorphisme de $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$-bimodules à gauche

$$f_{\mathrm{d}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1}) \xrightarrow{\ \sim\ } f_{\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1}).$$

En le tensorisant avec ω_X, on obtient l'isomorphisme de $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$-bimodules

$$\beta_{X,Y} : \widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)}{}'.$$

Nous utiliserons cet isomorphisme pour identifier ces deux bimodules, que nous noterons indifféremment $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)}$.

b) Sous les hypothèses de 3.0.1 (ii), soient X et Y deux S-schémas lisses de réductions X_0 et Y_0 sur S_0, $f_0 : X_0 \to Y_0$ un S_0-morphisme. Puisque, d'après 2.1.6, on dispose par recollement d'un foncteur bien défini f_0^* de la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)}$-modules à gauche dans celle des $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-modules à gauche, le bimodule $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)}$ garde un sens si l'on pose

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)} = f_{0,\mathrm{d}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \simeq \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0,\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1}).$$

Le lemme suivant précise quels sont les bimodules sur X' qui correspondent par descente par Frobenius aux bimodules $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{X\to Y}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{Y\leftarrow X}$.

3.4.2. LEMME. — (i) *Avec les notations précédentes, et sous les hypothèses de* 3.0.1 (iii), *soient* $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ *et* $f' : X' \to Y'$ *des relèvements de* $F^s_{X_0/S_0}$, $F^s_{Y_0/S_0}$ *et* $f_0^{(s)}$ *tels que* $F_Y \circ f = f' \circ F_X$. *Il existe alors des isomorphismes canoniques de* $(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X, f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y)$-*bimodules et de* $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y, \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X)$-*bimodules*

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{X\to Y} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*_X F^\flat_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'\to Y'} := F^*_X(f'^*_{\mathrm{g}}(F^\flat_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'})), \tag{3.4.2.1}$$

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{Y\leftarrow X} \xrightarrow{\ \sim\ } F^\flat_X F^*_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'\leftarrow X'} := F^\flat_{X,\mathrm{d}}(f'^*_{\mathrm{d}}(F^*_{Y,\mathrm{g}}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \omega^{-1}_{Y'})) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}). \tag{3.4.2.2}$$

(ii) *Supposons que* $\mathfrak{a}$ *soit m-PD-nilpotent. Il existe alors des isomorphismes canoniques de* $(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X, f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y)$-*bimodules et de* $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y, \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X)$-*bimodules*

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{X\to Y} \xrightarrow{\ \sim\ } F^{s\,*}_{X_0/S_0} F^{s\,\flat}_{Y_0/S_0} \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'\to Y'} := F^{s\,*}_{X_0/S_0}(f^{(s)\,*}_{0,\mathrm{g}}(F^{s\,\flat}_{Y_0/S_0} \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'})), \tag{3.4.2.3}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{Y\leftarrow X} &\xrightarrow{\ \sim\ } F^{s\,\flat}_{X_0/S_0} F^{s\,*}_{Y_0/S_0} \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'\leftarrow X'} \\ &:= F^{s\,\flat}_{X_0/S_0,\mathrm{d}}(f^{(s)\,*}_{0,\mathrm{d}}(F^{s\,*}_{Y_0/S_0,\mathrm{g}}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \omega^{-1}_{Y'})) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}).\end{aligned} \tag{3.4.2.4}$$

On observera que, dans cet énoncé, on commet un abus de notation en écrivant $F^\flat_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'\to Y'}$, ou $F^*_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'\leftarrow X'}$, dans la mesure où $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X'\to Y'}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'\leftarrow X'}$ sont des faisceaux sur X' et non sur Y'; on peut le justifier en remarquant que le foncteur f'^*, appliqué pour l'une des structures de $\mathcal{O}_{Y'}$-module, commute en un sens évident aux foncteurs $\mathscr{H}om$ et $\otimes$ qu'on applique à l'autre structure pour définir $F^\flat_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'}$ et $F^*_Y(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \omega^{-1}_{Y'})$.

D'après 2.5.2, il existe un isomorphisme canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y$-bimodules

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y \xrightarrow{\ \sim\ } F^*_Y F^\flat_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'}. \tag{3.4.2.6}$$

En lui appliquant f^* pour la structure gauche, et en utilisant l'isomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X$-linéaire $f^*F^*_Y F^\flat_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*_X f'^* F^\flat_Y \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'}$ fourni par (3.2.4.3), on obtient (3.4.2.1).

En tensorisant maintenant (3.4.2.6) à droite par ω^{-1}_Y, et en composant l'isomorphisme obtenu avec celui qu'on déduit de (2.4.4.1), on obtient un isomorphisme de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y$-bimodules à gauche

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^{-1}_Y \xrightarrow{\ \sim\ } F^*_{Y,\mathrm{g}}(F^*_{Y,\mathrm{d}}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \omega^{-1}_{Y'})) \xrightarrow{\ \sim\ } F^*_{Y,\mathrm{d}}(F^*_{Y,\mathrm{g}}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \omega^{-1}_{Y'})).$$

En lui appliquant f^* pour la structure droite, et en utilisant l'isomorphisme $f^*F^*_Y \simeq F^*_X f'^*$, on obtient un isomorphisme de $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y, \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_X)$-bimodules à gauche

$$f^*(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^{-1}_Y) \xrightarrow{\ \sim\ } F^*_{X,\mathrm{d}} f'^*_{\mathrm{d}}(F^*_{Y,\mathrm{g}}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \omega^{-1}_{Y'})).$$

Pour obtenir (3.4.2.2), on tensorise celui-ci à droite par ω_X, et on le compose avec l'isomorphisme (2.4.3.1) relatif au $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $f'^*_{\mathrm{d}}(F^*_{Y,\mathrm{g}}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \omega^{-1}_{Y'}))$.

Lorsque $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, les foncteurs et les isomorphismes mis en jeu dans les constructions précédentes pour des relèvements locaux de Frobenius se recollent, ce qui fournit globalement sur X les isomorphismes (3.4.2.3) et (3.4.2.4).

3.4.3. Supposons maintenant que S soit un schéma nœthérien de dimension de Krull finie, et que $f : X \to Y$ soit un S-morphisme quasi-séparé et quasi-compact. Le foncteur f_* est alors de dimension cohomologique finie sur la catégorie des faisceaux abéliens sur X. Sous ces hypothèses, on dispose donc, pour tout faisceau d'anneaux $\mathscr{D}$ sur X, d'un foncteur dérivé $\mathbb{R}f_* : D^-(\mathscr{D}) \to D^-(f_*\mathscr{D})$. On définit alors un foncteur $f_+ : D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}) \to D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)})$ en posant, pour $\mathscr{E} \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$

$$f_+(\mathscr{E}) = \mathbb{R}f_*(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}} \mathscr{E}). \tag{3.4.3.1}$$

Ce foncteur dépend de m ; si nécessaire, nous le préciserons par la notation $f_{+^{(m)}}$.

Sous les hypothèses de 3.4.1 b), on définit le foncteur f_{0+} de la même manière.

Remarque. — Supposons que S soit un schéma quelconque, que la dimension relative de X par rapport à S soit constante, et que l'on soit dans l'une des situations suivantes :

(i) $m = 0$;

(ii) p est localement nilpotent sur S.

Nous montrerons dans [7] que, dans ces deux cas, $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)}$ est de Tor-dimension finie sur $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$. Le produit tensoriel dérivé $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}} \mathscr{E}$ peut alors être défini pour $\mathscr{E} \in D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$, si bien que la formule (3.4.3.1) garde un sens pour $\mathscr{E} \in D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$, et définit un foncteur $f_+ : D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}) \to D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m)})$ sans hypothèse nœthérienne sur S. Néanmoins, pour les théorèmes de changements de base permettant de passer à la limite projective sur des quotients d'anneaux de valuation discrète, il est plus naturel de travailler avec des complexes appartenant à $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$, de sorte qu'en pratique les hypothèses faites plus haut seront les plus utiles.

3.4.4. THÉORÈME. — *Supposons que les hypothèses de* 3.0.1 (iii) *et de* 3.4.3 *soient satisfaites, et soient X, Y deux S-schémas lisses, $f_0 : X_0 \to Y_0$ un S_0-morphisme entre leurs réductions modulo $\mathfrak{a}$, X', Y' des relèvements lisses sur S de $X_0^{(s)}$, $Y_0^{(s)}$.*

(i) *Soient $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$, $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ des relèvements de f_0, $f_0^{(s)}$, $F^s_{X_0/S_0}$, $F^s_{Y_0/S_0}$. Si $F_Y \circ f = f' \circ F_X$, il existe pour tout $\mathscr{E}' \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$ un isomorphisme canonique de $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)})$*

$$f_{+^{(m+s)}}(F_X^*\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} F_Y^* f'_{+^{(m)}}(\mathscr{E}'). \tag{3.4.4.1}$$

(ii) *Supposons que $\mathfrak{a}$ soit m-PD-nilpotent. Pour tout $\mathscr{E}' \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$, il existe un isomorphisme canonique de $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)})$*

$$f_{0+^{(m+s)}}(F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} F^{s\,*}_{Y_0/S_0} f^{(s)}_{0+^{(m)}}(\mathscr{E}'). \tag{3.4.4.2}$$

Plaçons nous d'abord sous les hypothèses de (i). Le foncteur exact F_Y^* induit une équivalence de catégories $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}) \xrightarrow{\approx} D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)})$, et, d'après 2.5.6 (i), un foncteur quasi-inverse est fourni par $\mathscr{E} \longmapsto F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} \mathscr{E}$. Pour définir l'isomorphisme (3.4.4.1), il suffit donc de définir un isomorphisme

$$F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} f_{+^{(m+s)}}(F_X^*\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} f'_{+^{(m)}}(\mathscr{E}')$$

dans $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)})$. Par définition, $f_{+^{(m+s)}}(F_X^*\mathscr{E}') = \mathbb{R}f_*(\mathscr{F})$, en posant

$$\mathscr{F} = \widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m+s)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F_X^*\mathscr{E}' \in D^-(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}).$$

Comme, d'après 2.5.3, $F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}$-module à gauche localement projectif de type fini, le morphisme canonique

$$F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} \mathbb{R}f_*(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathbb{R}f_*(f^{-1}(F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} \mathscr{F})$$

est un isomorphisme de $D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)})$. Comme $f = f'$ en tant qu'application continue entre espaces topologiques, on est ainsi ramené à définir un isomorphisme

$$f^{-1}(F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} (\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m+s)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F_X^*\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{D}}_{Y'\leftarrow X'}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}' \tag{3.4.4.3}$$

dans $D^-(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)})$.

Grâce à (3.4.2.2), on dispose d'un isomorphisme canonique de bimodules

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m+s)} \xrightarrow{\sim} F_{X,\mathrm{d}}^{\flat}(f_{\mathrm{d}}'^{*}(F_{Y,\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{Y'}^{-1})) \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \omega_{X'}).$$

En appliquant l'isomorphisme d'invariance du produit tensoriel (2.5.7.1), on obtient alors dans $D^-(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)})$ l'isomorphisme

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{Y\leftarrow X}^{(m+s)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)}} F_X^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} (f_{\mathrm{d}}'^{*}(F_{Y,\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{Y'}^{-1})) \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \omega_{X'}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}'.$$

Le terme de gauche de (3.4.4.3) s'identifie ainsi à

$$f^{-1}(F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} (f_{\mathrm{d}}'^{*}(F_{Y,\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{Y'}^{-1})) \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \omega_{X'}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}'$$

$$\simeq (f^{-1}(F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}) \otimes_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} f^{-1}(F_{Y,\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{Y'}^{-1})) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{X'}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)}} \mathscr{E}'.$$

Or on dispose de l'isomorphisme de $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}$-bimodules (2.5.5.1)

$$F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} F_{Y,\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)},$$

qu'on peut tensoriser à droite par $\omega_{Y'}^{-1}$ pour en déduire un isomorphisme de $\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}$-bimodules à gauche

$$F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} F_{Y,\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{Y'}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{Y'}^{-1}.$$

En lui appliquant f^{-1}, et en tensorisant à droite par $\omega_{X'}$, on obtient un isomorphisme de $(f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}, \widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$-bimodules

$$f^{-1}(F_Y^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)}) \otimes_{f^{-1}\widetilde{\mathscr{D}}_Y^{(m+s)}} f^{-1}(F_{Y,\mathrm{g}}^*(\widetilde{\mathscr{D}}_{Y'}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{Y'}^{-1})) \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_{Y'}} \omega_{X'} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{D}}_{Y'\leftarrow X'}^{(m)}.$$

Il suffit alors de le tensoriser par $\mathscr{E}'$ pour obtenir l'isomorphisme (3.4.4.3).

Si on suppose que $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, on peut construire l'isomorphisme (3.4.4.2) en suivant la même méthode : le lecteur s'assurera que, sous cette hypothèse, chacun des isomorphismes utilisés dans la construction précédente reste bien défini sans supposer les morphismes relevables (compte tenu de ce que $f = f' = f_0$ en tant que morphismes d'espaces topologiques).

3.5. Foncteur dual

Nous complétons cet examen des compatiblités entre le foncteur F^* et les opérations de la théorie des $\mathscr{D}$-modules en mentionnant le cas du foncteur dual, dû à A. Virrion (*cf.* [40], [41], [42]).

3.5.1. Rappelons d'abord la définition du foncteur dual. On se place sous les hypothèses de 3.0.1 (i), et on suppose X de dimension relative constante d sur S. Si $\mathscr{E} \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$, on définit le complexe dual de $\mathscr{E}$ comme étant

$$\mathbb{D}(\mathscr{E}) = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}}(\mathscr{E}, \widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}[d]). \tag{3.5.1.1}$$

Avec cette généralité, le complexe $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ appartient à $D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$, mais cette définition est surtout intéressante si $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$, auquel cas $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ est aussi dans $D_{\mathrm{parf}}(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)})$ [42, I (3.3)]. On remarquera que, grâce à l'involution β_X définie en (1.3.4.3), on peut indifférem-ment utiliser la structure gauche de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-module de $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ pour définir la linéarité dans le foncteur $\mathscr{H}om$, et la structure tordue pour définir la structure $\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m)}$-linéaire à gauche de $\mathbb{D}(\mathscr{E})$, ou bien l'inverse. Si nécessaire, nous préciserons le schéma X et le niveau m intervenant dans la définition de $\mathbb{D}$ par une notation telle que $\mathbb{D}_X^{(m)}$.

3.5.2. THÉORÈME [42, II (3.2)]. — *On suppose vérifiées les hypothèses de* 3.0.1 (iii).

(i) *Soit $F : X \to X'$ un relèvement de $F^s_{X_0/S_0}$. Pour tout $\mathscr{E}' \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$, il existe un isomorphisme canonique de $D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)})$*

$$\mathbb{D}_X^{(m+s)} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} F^*\mathbb{D}_{X'}^{(m)}(\mathscr{E}'). \tag{3.5.2.1}$$

(ii) *Si $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, il existe pour tout $\mathscr{E}' \in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}_{X'}^{(m)})$ un isomorphisme canonique de $D^+(\widetilde{\mathscr{D}}_X^{(m+s)})$*

$$\mathbb{D}_X^{(m+s)} F^{s\,*}_{X_0/S_0}\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} F^{s\,*}_{X_0/S_0}\,\mathbb{D}_{X'}^{(m)}(\mathscr{E}'). \tag{3.5.2.2}$$

Nous renvoyons à [42] pour la démonstration dans le cas (i). Celle de (ii) est analogue, les isomorphismes employés restant définis sans hypothèse de relevabilité sur $F^s_{X_0/S_0}$ lorsque $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent.

4. F-$\mathscr{D}^\dagger$-modules

Dans ce chapitre, on fixe un anneau de valuation discrète complet $\mathcal{V}$ d'inégales caractéristiques, et on note K son corps des fractions, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel, supposé de caractéristique p. Tous les schémas formels considérés sur $\mathcal{V}$ sont supposés munis de la topologie $\mathfrak{m}$-adique, et localement de type fini sur $\mathcal{V}$. L'indice $\mathbb{Q}$ désigne la tensorisation d'un faisceau abélien par $\mathbb{Q}$.

Soient $\mathscr{S}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel, $\mathscr{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel lisse. Nous étendrons d'abord le théorème de descente par Frobenius aux modules sur les anneaux d'opérateurs complétés $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ (relatifs à $\mathscr{S}$), et sur leur limite $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^\dagger$ lorsque $m \to \infty$. Nous donnerons ensuite deux applications importantes de ces résultats : d'une part, nous montrerons que l'action de Frobenius sur la cohomologie de de Rham d'un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module est un isomorphisme ; d'autre part, lorsque $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}\mathcal{V}$, ces résultats nous permettront de calculer la dimension homologique des faisceaux d'anneaux $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$, et de borner celle des faisceaux $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ et $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^\dagger$.

Nous introduirons ensuite la notion de F-$\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^\dagger$-module, i.e. de $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^\dagger$-module muni d'une action de Frobenius. Dans la dernière section, nous expliquerons comment on peut considérer cette notion comme la généralisation naturelle dans le cadre de la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules des notions de F-isocristal convergent et surconvergent.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous n'étendrons pas ici les théorèmes prouvés dans le chapitre précédent sur la compatibilité de F^* aux opérations de base sur les $\mathscr{D}$-modules au cas des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules ou des $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^\dagger$-modules, renvoyant pour cela à [7], où nous donnerons une construction systématique de ces opérations prenant en compte les conditions de complétion nécessaires. Nous expliciterons néanmoins ici dans le cas des modules cohérents la commutation de F^* à l'extension du faisceau d'opérateurs d'opérateurs (*cf.* 3.1). C'est en effet cette propriété qui va nous permettre de ramener l'étude des F-$\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^\dagger$-modules cohérents à celle des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(0)}$-modules cohérents munis d'une action de Frobenius en un sens convenable, grâce au théorème d'équivalence 4.5.4. Nous en déduirons alors le corollaire remarquable suivant : bien que, comme nous le verrons en 4.2.3, l'anneau $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ ne soit pas un faisceau d'anneaux nœthériens, la catégorie des F-$\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^\dagger$-modules cohérents est une catégorie nœthérienne.

4.1. Descente des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules

Rappelons que, si e est l'indice de ramification absolu de $\mathcal{V}$, on peut munir l'idéal $\mathfrak{m}$ d'une m-PD-structure si et seulement si $p^m \geq e/(p-1)$. Une telle structure est alors donnée par un idéal $\mathfrak{m}^k$, où k est un entier tel que $e/(p-1) \leq k \leq \inf(e+1,\ p^m)$ (*cf.* [5, 1.3.1]). De plus, d'après la proposition A.4 de l'appendice, cette structure est topologiquement m-PD-nilpotente si et seulement si $e/(p-1) < p^m$.

Pour ne pas être limités dans certaines applications par des hypothèses sur l'indice de ramification, nous serons ainsi amenés à considérer non seulement des relèvements du Frobenius relatif de la réduction modulo $\mathfrak{m}$ d'un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{X}$, mais, plus généralement, des relèvements du Frobenius relatif de la réduction de $\mathcal{X}$ modulo un sous-idéal de $\mathfrak{m}$ contenant p. On supposera donc fixés dans la suite un tel idéal $\mathfrak{a}$, et un idéal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ qui soit un PD-idéal et munisse $\mathfrak{a}$ d'une m-PD-structure : si $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^h$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}^k$, $\mathfrak{b}$ munit $\mathfrak{a}$ d'une m-PD-structure si et seulement si $e/(p-1) \leq k \leq \inf(e+h,\ p^m h)$, et cette structure est topologiquement m-PD-nilpotente si et seulement si $e/(p-1) < p^m h$ (*cf.* A.4).

4.1.1. Pour tout $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{S}$, nous noterons S_i la réduction de $\mathcal{S}$ modulo $\mathfrak{a}^{i+1}$. Comme $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + p\mathcal{V}$ est principal, la PD-structure de $\mathfrak{b}_1$ s'étend à $\mathcal{O}_{S_i}$. L'idéal $\mathfrak{b}\mathcal{O}_{S_i}$ munit donc $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{S_i}$ d'une m-PD-structure, ce qui nous permettra d'utiliser sur S_i les résultats des chapitres précédents.

Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{S}$-schéma lisse, nous noterons $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$, ou simplement $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ lorsqu'aucune confusion n'est possible, le faisceau

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}} := \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}/\mathfrak{a}^{i+1}\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \simeq \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X_i/S_i}.$$

Comme dans les chapitres précédents, nous travaillerons plus généralement avec des faisceaux d'opérateurs différentiels à coefficients dans une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ munie d'une action compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$: si $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ est une telle algèbre, de réduction $\mathcal{B}_{X_i}$ sur X_i, nous noterons

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}} = \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} := \varprojlim_i (\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})/\mathfrak{a}^{i+1}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}) \simeq \varprojlim_i \mathcal{B}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i/S_i}$$

le faisceau d'anneaux séparé complété $\mathfrak{m}$-adique du faisceau d'anneaux $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$.

Soit s un entier. Si $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ est un morphisme de $\mathcal{S}$-schémas formels lisses relevant $F^s_{X_0/S_0}$, et si $\mathcal{E}'$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$-module, nous noterons comme sur les schémas usuels $F^*\mathcal{E}' = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{E}'$, $F^\flat\mathcal{E}' = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \mathcal{E}')$. Nous supposerons donnée une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$-algèbre $\mathcal{B}_{\mathcal{X}'}$ munie d'une action de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$, et nous poserons $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = F^*\mathcal{B}_{\mathcal{X}'}$. Alors chacune des algèbres $F^*\mathcal{B}_{X'_i}$ est munie d'une action naturelle de $\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}$, de sorte que, par passage à la limite, on dispose encore d'une structure d'anneau sur $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}} = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X_i} \otimes \mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}$.

Exemple. — Reprenons la situation considérée en 2.2.8 (ii) : on suppose donnés un diviseur $Z \subset X_0$, d'image inverse $Z' \subset X_0^{(s)}$, et un entier r tel que $p^{m+1} \mid r$. Grâce à 2.2.9, on dispose pour tout i d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}$-linéaire $F^*\mathcal{B}_{X'_i}(Z',\ r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{X_i}(Z,\ p^s r)$. D'après leur construction, ces isomorphismes sont compatibles pour i variable, de sorte que, si l'on pose $\mathcal{B}_{\mathcal{X}'} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}(Z', r) = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X'_i}(Z', r)$, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, p^s r) = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X_i}(Z, p^s r)$, on en déduit un isomorphisme d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}$-linéaire

$$F^*\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}(Z', r) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, p^s r). \tag{4.1.1.1}$$

Les résultats qui suivent s'apliquent donc au couple d'anneaux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X'_i}(Z',\ r) \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}} = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X_i}(Z, p^s r) \otimes \mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}$.

4.1.2. PROPOSITION. — *Soient $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel, $\mathcal{X}$ un $\mathcal{S}$-schéma formel lisse, $X_0 \to S_0$ sa réduction modulo $\mathfrak{a}$, $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ un morphisme de $\mathcal{S}$-schémas formels lisses relevant $F^s_{X_0/S_0}$. Alors :*

(i) *$F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$, $F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$ et $F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$ sont respectivement munis de structures canoniques de $(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'})$-bimodule, de $(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}, \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}})$-bimodule, et de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}$-bimodule ; de plus, l'homomorphisme canonique*

$$F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} \longrightarrow F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} \qquad (\textit{resp. } F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} \longrightarrow F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'})$$

est $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}$-linéaire à gauche (resp. à droite), et identifie localement $F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$ (resp. $F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$) à un facteur direct de $F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$ sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}$.

(ii) *Il existe un isomorphisme canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}$-bimodules*

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\ \sim\ } F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}. \tag{4.1.2.1}$$

(iii) *Il existe un isomorphisme canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$-bimodules*

$$F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}} F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} \xrightarrow{\ \sim\ } \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}. \tag{4.1.2.2}$$

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert affine de $\mathcal{X}$ tel qu'il existe sur U_0 un système de coordonnées locales relativements à S_0, et si les sections $t_j \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ relèvent un tel système, alors, pour tout i, $\mathcal{O}_{U_i}$ est libre de type fini sur $\mathcal{O}_{U_i'}$, de base les $\underline{t}^{\underline{a}}$ avec $0 \le a_j < p^s$. Il en résulte que les homomorphismes

$$F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} \longrightarrow \varprojlim_i F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'}, \quad F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} \longrightarrow \varprojlim_i F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'},$$

$$F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} \longrightarrow \varprojlim_i F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'},$$

sont des isomorphismes. Par passage à la limite, on en déduit donc les structures de bimodule annoncées sur $F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$, $F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$ et $F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$, et le fait que les homomorphismes de (i) soient $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}$-linéaires. Pour en construire localement un scindage (resp. une rétraction) $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}$-linéaire, il suffit d'observer que la donnée des t_j définit une famille compatible de scindages $\mathcal{O}_{X_i'} \to \mathcal{O}_{X_i}$ (resp. rétractions $\mathcal{O}_{X_i} \to \mathcal{O}_{X_i'}$) $\mathcal{O}_{X_i'}$-linéaires, d'où, par tensorisation avec $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'}$ et application de F^* (resp. $F^\flat$), une famille compatible de scindages $F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'} \to F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'}$ (resp. rétractions $F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'} \to F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'}$) $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{X_i}$-linéaires.

Pour tout i, on dispose de l'isomorphisme de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{X_i}$-bimodules (2.5.2.1)

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{X_i} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'}.$$

Il résulte de la construction de ces isomorphismes qu'ils sont compatibles pour i variable, ce qui fournit l'isomorphisme (4.1.2.1) par passage à la limite. De même, on dispose pour tout i de l'isomorphisme de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'}$-bimodules (2.5.5.1)

$$F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{X_i}} F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'} \xrightarrow{\ \sim\ } \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{X_i'},$$

et ces isomorphismes sont compatibles pour i variable. Comme les $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathcal{X}}$-modules

$F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$ et $F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$ sont localement facteurs directs de $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$, l'homomorphisme canonique

$$(\varprojlim_i F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}} (\varprojlim_i F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)}) \longrightarrow \varprojlim_i (F^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i}^{(m+s)}} F^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)})$$

est un isomorphisme, et l'isomorphisme (4.1.2.2) en résulte.

Remarque. — Soit $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, de dimension relative $d > 0$. Il résulte de l'énoncé précédent que, si $\mathscr{U}$ est un ouvert affine de $\mathscr{X}$ possédant un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, et si $m \geq 1$, l'anneau $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$ contient des diviseurs de zéro. En effet, soit $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses relevant la puissance m-ième du Frobenius relatif de la réduction de X modulo p. Les sections $\underline{t}^{\underline{\alpha}}$, avec $0 \leq \alpha_j < p^m$, forment alors une base de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}$. Si l'on note $(\theta_{\underline{\alpha}})_{0 \leq \alpha_i < p^m}$ la base duale de $F^{\flat}\mathscr{O}_{\mathscr{X}'} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}'})$, l'isomorphisme (4.1.2.1) s'explicite comme un isomorphisme de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules à gauche

$$\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } \bigoplus_{\underline{\alpha}} F^{*}\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(0)} \cdot \underline{\theta}_{\underline{\alpha}}.$$

Si $1 = \sum_{\underline{\alpha}} e_{\underline{\alpha}}$ est la décomposition de $1 \in \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$, on a nécessairement $e_{\underline{\alpha}} \neq 0$ pour tout $\underline{\alpha}$. D'autre part, on en déduit la relation $e_{\underline{\beta}} = e_{\underline{\beta}} \cdot 1 = \sum_{\underline{\alpha}} e_{\underline{\beta}} e_{\underline{\alpha}}$, avec $e_{\underline{\beta}} e_{\underline{\alpha}} \in F^{*}\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)} \cdot \underline{\theta}_{\underline{\alpha}}$, d'où $e_{\underline{\beta}} e_{\underline{\alpha}} = 0$ si $\underline{\beta} \neq \underline{\alpha}$, $e_{\underline{\beta}}^2 = e_{\underline{\beta}}$.

Pour $m = 0$, $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)})$ est par contre un anneau sans diviseurs de 0 lorsque $\mathscr{U}$ est connexe. En effet, il est sans p-torsion, et séparé pour la topologie p-adique. Notant ici X_0 la réduction de X modulo $\mathfrak{m}$, il suffit alors de vérifier que $\Gamma(U_0, \mathscr{D}_{X_0}^{(0)})$ est sans diviseurs de zéro, ce qui résulte par exemple de ce que, pour la filtration par l'ordre, $\operatorname{gr}\Gamma(U_0, \mathscr{D}_{X_0}^{(0)})$ est une algèbre de polyômes à coefficients dans l'anneau régulier $\Gamma(U_0, \mathscr{O}_{X_0})$.

Signalons que, pour $m \geq 1$, la famille d'idempotents considérée ici a été explicitée par Garnier [24, 2.5], grâce à la construction d'un opérateur différentiel d'ordre infini H dont l'action sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ fournit la trace relativement à $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}$, divisée par p^{ds}.

4.1.3. THÉORÈME. — *Supposons les hypothèses de* 4.1.2 *satisfaites.*

(i) *Pour tout $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ (resp. $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$-module à droite $\mathscr{M}'$), $F^{*}\mathscr{E}'$ (resp. $F^{\flat}\mathscr{M}'$) est muni d'une structure fonctorielle de $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-module à gauche (resp. à droite).*

(ii) *Le foncteur F^{*} (resp. $F^{\flat}$) induit une équivalence entre la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$-modules à gauche (resp. à droite) et celle des $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-modules à gauche (resp. à droite).*

(iii) *Le foncteur qui associe à un $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-module à gauche $\mathscr{E}$ (resp. à un $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-module à droite $\mathscr{M}$) le $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$-module à gauche $F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}} \mathscr{E}$ (resp. le $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$-module à droite $\mathscr{M} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}} F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$) est quasi-inverse de F^{*} (resp. de $F^{\flat}$).*

En appliquant F^{*} à l'isomorphisme canonique $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}} \mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}'$, on obtient un isomorphisme

$$F^{*}\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}} \mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} F^{*}\mathscr{E}'. \tag{4.1.3.1}$$

Grâce à 4.1.2 (i), cet isomorphisme permet de munir $F^*\mathscr{E}'$ d'une structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-module à gauche, fonctorielle en $\mathscr{E}'$, d'où (i). En tensorisant l'isomorphisme (4.1.2.2) à droite par $\mathscr{E}'$, on voit que le foncteur $\mathscr{E} \longmapsto F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}} \mathscr{E}$ est quasi-inverse à gauche de F^*. De même, en tensorisant l'isomorphisme (4.1.2.1) à droite par un $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-module à gauche $\mathscr{E}$, on voit que ce foncteur est quasi-inverse à droite de F^*.

Les assertions relatives aux modules à droite se prouvent de la même manière.

4.1.4. *Remarques.* — (i) Supposons que $\mathscr{E}'$ soit séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, de sorte qu'il en est de même pour $F^*\mathscr{E}'$. Pour tout i, $F^*(\mathscr{E}'/\mathfrak{a}^{i+1}\mathscr{E}')$ est muni d'une structure canonique de $\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i}^{(m+s)}$-module. Par passage à la limite, on obtient donc une structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-module sur $F^*\mathscr{E}'$. Cette structure coïncide avec celle qu'on définit dans l'énoncé précédent au moyen de l'isomorphisme (4.1.3.1), car il suffit de le vérifier modulo $\mathfrak{a}^{i+1}$ pour tout i, et d'appliquer à l'isomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)}$-linéaire

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)}} (\mathscr{E}'/\mathfrak{a}^{i+1}\mathscr{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{E}'/\mathfrak{a}^{i+1}\mathscr{E}'$$

le fait que F^* est un foncteur à valeurs dans la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i}^{(m+s)}$-modules.

(ii) Si $\mathscr{E}'$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$-module à gauche, la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-module à gauche construite sur $F^*\mathscr{E}'$ est indépendante du choix fait pour l'idéal $\mathfrak{b}$ définissant la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$. En effet, il suffit par construction de le vérifier lorsque $\mathscr{E}'$ est l'un des $\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)}$. Or, si $\mathfrak{b}'$ est un autre idéal de $\mathscr{V}$ munissant $\mathfrak{a}$ d'une m-PD-structure, il existe une relation d'inclusion entre $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$, par exemple $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$, et $\mathfrak{b}'$ est nécessairement un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}$ puisque $\mathscr{V}$ est sans p-torsion. Il en résulte que les opérations de puissances divisées partielles sur les $\mathscr{P}_{X_i,(m)}(\nu)$ sont indépendantes du choix fait pour $\mathfrak{b}$. Par suite la factorisation Φ_ν^* de F_ν^* construite en 2.2.2 ne dépend pas non plus de ce choix, ce qui entraîne l'assertion.

(iii) Si l'on suppose donné un $\mathscr{S}$-morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses $G : \mathscr{X}' \to \mathscr{X}''$ relevant $F^{s'}_{X_0^{(s)}/S_0}$, alors, pour tout $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}''}^{(m)}$-module $\mathscr{E}''$, l'isomorphisme canonique $F^*\circ G^*\mathscr{E}'' \xrightarrow{\ \sim\ } (G\circ F)^*\mathscr{E}$ est $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s+s')}$-linéaire : il suffit encore de le vérifier lorsque $\mathscr{E}'' = \widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}''}^{(m)}$, et cela résulte alors de 2.2.3 (iii) par passage à la limite.

(iv) Si l'on suppose que $\mathfrak{a}$ est topologiquement m-PD-nilpotent, et si F et F' sont deux relèvements du Frobenius relatif $F^s_{X_0/S_0}$, les isomorphismes de recollement $\tau_{F,F'} : F'^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{X_i'}^{(m)}$ définis en 2.1.6 et 2.2.5 sont compatibles pour i variable, et fournissent par passage à la limite un isomorphisme canonique de $(\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}, \widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)})$-bimodules $\tau_{F,F'} : F'^*\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$. Il en résulte que le $(\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}, \widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)})$-bimodule $F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$ reste bien défini à isomorphisme canonique près sans supposer donné un relèvement global de $F^s_{X_0/S_0}$. On peut alors définir un foncteur $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ de la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$-modules à gauche dans celle des $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$-modules à gauche en posant

$$F^{s\,*}_{X_0/S_0} = (F^*\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{(m)}} \mathscr{E}',$$

et les conclusions du théorème restent valables.

(v) Les conclusions du théorème entraînent formellement les conclusions analogues pour les $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-modules (rappelons que, pour tout $\mathscr{X}$, on note $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q}$).

Observons qu'on peut étendre au cas formel l'énoncé de commutation 3.1.3 entre F^* et l'extension de l'anneau d'opérateurs différentiels :

4.1.5. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 4.1.2, *soient* $m' \geq m$, $\mathscr{C}_{\mathscr{X}'}$ *une* $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}$*-algèbre munie d'une action compatible de* $\mathscr{D}^{(m')}_{\mathscr{X}'}$, $\mathscr{B}_{\mathscr{X}'} \to \mathscr{C}_{\mathscr{X}'}$ *un homomorphisme d'algèbres* $\mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$*-linéaire. Posons* $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'} = \mathscr{C}_{\mathscr{X}'} \hat{\otimes} \mathscr{D}^{(m')}_{\mathscr{X}'}$, $\mathscr{C}_{\mathscr{X}} = F^*\mathscr{C}_{\mathscr{X}'}$, $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}} = \mathscr{C}_{\mathscr{X}} \hat{\otimes} \mathscr{D}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}}$. *Pour tout* $\mathscr{E}' \in D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$, *il existe dans* $D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}})$ *un isomorphisme canonique*

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E}'). \tag{4.1.5.1}$$

D'après la définition des structures de $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-module (resp. $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}}$-module) au moyen de (4.1.3.1), l'isomorphisme à prouver peut encore s'écrire

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} (F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E}') \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'}} (\widetilde{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E}').$$

Par associativité du produit tensoriel, on est ainsi ramené à définir un isomorphisme de $(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}}, \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$-bimodules

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'}. \tag{4.1.5.2}$$

Comme $F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-module localement projectif de type fini, le produit tensoriel de gauche est complet, et il suffit de passer à la limite projective à partir des isomorphismes (3.1.3.3) sur les X_i.

Remarques. — (i) Le lecteur prendra garde que, si l'on ne fait aucune hypothèse de finitude sur le complexe $\mathscr{E}'$, les produits tensoriels qui interviennent dans cet énoncé ne sont pas complets en général. Nous renvoyons à [7] pour les énoncés mettant en jeu des produits tensoriels dérivés complétés. Lorsque $\mathscr{B}_{\mathscr{X}'}$ vérifie les conditions de [5, 3.3.3], de sorte que $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$ sont des faisceaux d'anneaux cohérents, et que $\mathscr{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$, les produits tensoriels algébriques considérés ici coïncident avec les produits tensoriels complétés que nous utiliserons dans [7].

(ii) Lorsque $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, l'énoncé reste valable pour le foncteur $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ en l'absence d'un relèvement global de Frobenius.

4.2. Descente des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules

Par passage à la limite pour m variable, nous déduisons maintenant des résultats précédents des énoncés analogues pour les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules.

4.2.1. Avec les notations de 4.1.1, soit $(\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m)})_{m\geq m_0}$ un système inductif de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-algèbres complètes pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Supposons que, pour tout m, l'algèbre $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ soit munie d'une action compatible de $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$, et que l'homomorphisme $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m)} \to \mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m+1)}$ soit semi-linéaire par rapport à l'homomorphisme $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)} \to \mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m+1)}$. Nous noterons encore $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)} = \mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ le faisceau d'opérateurs différentiels obtenu par complétion p-adique de $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$, et nous poserons

$$\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{\dagger} = \varinjlim_{m} \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}^{(m)}, \qquad \widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger} = \varinjlim_{m} \widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)} = \varinjlim_{m} (\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}).$$

Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ un idéal contenant p. Fixons un PD-idéal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ (par exemple, $\mathfrak{b} = (p)$). Il existe alors un entier m_0 tel que, pour $m \geq m_0$, $\mathfrak{b}$ munisse $\mathfrak{a}$ d'une m-PD-structure. On observera que, quitte à remplacer m_0 par $m_0 + 1$ si nécessaire, on peut supposer que cette structure est m-PD-nilpotente (*cf.* A.4). Pour tout i, nous noterons encore S_i la réduction modulo $\mathfrak{a}^{i+1}$ d'un $\mathscr{V}$-schéma formel $\mathscr{S}$.

Soient s un entier, $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un morphisme de $\mathscr{S}$-schémas formels lisses relevant $F^s_{X_0/S_0}$, F^*, $F^\flat$ les foncteurs correspondants (*cf.* 4.1.1). Nous supposerons donné sur $\mathscr{X}'$ un système inductif d'algèbres $(\mathscr{B}_{\mathscr{X}'}^{(m)})_{m\geq m_0}$ comme précédemment, et nous poserons $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m+s)} = F^*\mathscr{B}_{\mathscr{X}'}^{(m)}$. D'après la remarque de 2.2.3, les homomorphismes $F^*\mathscr{B}_{\mathscr{X}'}^{(m)} \to F^*\mathscr{B}_{\mathscr{X}'}^{(m+1)}$ sont semi-linéaires par rapport à l'homomorphisme $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)} \to \mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m+1)}$. Les $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}^{(m+s)}$ forment donc un système inductif de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-algèbres du type précédent. Nous noterons $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger}$ les faisceaux d'opérateurs différentiels correspondants.

Exemple. — Les faisceaux de fonctions à singularités surconvergentes le long d'un diviseur fournissent un exemple type de la situation considérée ici. Reprenons en effet les hypothèses de l'exemple de 4.1.1, et, pour tout m, posons $\mathscr{B}_{\mathscr{X}'}^{(m)} = \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}'}(Z', p^{m+1})$, de sorte que, avec les notations de [5, 4.2.4 et 4.2.5], on obtient $\mathscr{B}_{\mathscr{X}'}^{\dagger} = \mathscr{O}_{\mathscr{X}'}({}^\dagger Z')$, $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger} = \mathscr{D}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}({}^\dagger Z')$. On déduit d'autre part des isomorphismes (4.1.1.1) l'isomorphisme

$$F^*\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}({}^\dagger Z') \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathscr{X}}({}^\dagger Z), \tag{4.2.1.1}$$

de sorte que l'on obtient également $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger} = \mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{\dagger}({}^\dagger Z)$.

4.2.2. PROPOSITION. — *On suppose satisfaites les hypothèses de* 4.2.1.

(i) $F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}$, $F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}$ *et* $F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}$ *sont respectivement munis de structures canoniques de* $(\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger}, \widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger})$, $(\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}, \widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger})$ *et* $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger}$*-bimodules. De plus, l'homomorphisme canonique*

$$F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger} \longrightarrow F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger} \qquad (\textit{resp.}\ F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger} \longrightarrow F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger})$$

est $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger}$*-linéaire à gauche* (*resp. à droite*), *et identifie localement* $F_{\mathrm{g}}^*\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}$ (*resp.* $F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}$) *à un facteur direct de* $F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}$.

(ii) *Il existe un isomorphisme canonique de* $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger}$*-bimodules*

$$\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{\dagger} \xrightarrow{\ \sim\ } F_{\mathrm{g}}^*F_{\mathrm{d}}^\flat\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}. \tag{4.2.2.1}$$

(iii) *Il existe un isomorphisme canonique de* $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}'}^{\dagger}$*-bimodules*

(4.2.2.2) $$F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}}} F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}'} \xrightarrow{\ \sim\ } \widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}'}.$$

Par passage à la limite inductive, on déduit de 4.1.2 (i) les structures de bimodule annoncées. Comme les scindages locaux $F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \to F_{\mathrm{g}}^{*}F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ (resp. les rétractions locales $F_{\mathrm{g}}^{*}F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \to F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$) construits en 4.1.2 sont déduits du scindage $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}}^{\vee}$ (resp. de la rétraction $\mathscr{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}'}$) défini par un système de coordonnées locales, ils sont compatibles pour m variable, de sorte qu'ils fournissent par passage à la limite un scindage $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-linéaire $F_{\mathrm{g}}^{*}\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}'} \to F_{\mathrm{g}}^{*}F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}'}$ (resp. une rétraction $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-linéaire $F_{\mathrm{g}}^{*}F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}'} \to F_{\mathrm{d}}^{\flat}\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}'}$).

On obtient de même les isomorphismes (4.2.2.1) et (4.2.2.2) par passage à la limite inductive à partir de (4.1.2.1) et (4.1.2.2).

Remarque. — Il résulte de la remarque (ii) de 4.1.4 que les structures de bimodules et les isomorphismes construits ici ne dépendent pas du choix auxiliaire du PD-idéal $\mathfrak{b}$ que nous avons utilisé pour appliquer les résultats de la section 4.1.

4.2.3. COROLLAIRE. — *Soit $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel affine et lisse de dimension relative $d \geq 1$. Les anneaux $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$ et $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \simeq \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) \otimes \mathbb{Q}$ ne sont pas nœthériens.*

L'assertion relative à $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$ résulte simplement de ce que sa réduction modulo $\mathfrak{a}$ est l'anneau des opérateurs différentiels usuels $\Gamma(X_0, \mathscr{D}_{X_0})$, qui n'est pas nœthérien.

Pour montrer l'assertion relative à $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, on peut supposer que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = (p)$. Choisissons pour tout $m \geq m_0$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse $\mathscr{X}^{(m)}$ relevant $X_0^{(m)}$, et un $\mathscr{V}$-morphisme $F_m : \mathscr{X}^{(m-1)} \to \mathscr{X}^{(m)}$ relevant $F_{X_0^{(m-1)}/S_0} : X_0^{(m-1)} \to X_0^{(m)}$. Soit $\theta_m : \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{(m-1)}} \to F_m^{*}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{(m)}}$ l'homomorphisme canonique, qui envoie 1 sur $1 \otimes 1$. Posons

$$F^{(m)} = F_m \circ F_{m-1} \circ \ldots \circ F_1 : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{X}^{(m)},$$

$$\theta^{(m)} = F^{(m-1)*}(\theta_m) \circ F^{(m-2)*}(\theta_{m-1}) \circ \ldots \circ \theta_1 : \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \longrightarrow F^{(m)*}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{(m)}},$$

et soient $\mathscr{A}_m = \mathrm{Ker}(\theta^{(m)} \otimes \mathrm{Id} : \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \to F^{(m)*}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{(m)},\mathbb{Q}})$, $A_m = \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{A}_m)$. Les A_m forment une suite croissante d'idéaux à gauche de $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, et il suffit de vérifier qu'elle n'est pas stationnaire.

D'après 4.2.2, θ_m est surjectif pour tout m, et son noyau s'identifie à

$$F_m^{*}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{(m)}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{(m)}}} \mathrm{Ker}(\mathscr{O}^{\vee}_{\mathscr{X}^{(m-1)}} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}^{(m)}})),$$

l'exposant $^{\vee}$ désignant le dual $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{(m)}}$-linéaire. Comme $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{(m-1)}}$ est localement libre de rang $p^d > 1$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{(m)}}$, et $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{(m)}}$ sans p-torsion, $\mathrm{Ker}(\theta_m \otimes \mathrm{Id})$ est non nul. Puisque les F_i sont fidèlement plats, les homomorphismes $F^{(m-i-1)*}(\theta_{m-i}) \otimes \mathrm{Id}$ sont également surjectifs et de noyau non nul, de sorte que les $\mathscr{A}_m$ forment une suite strictement croissante d'idéaux à gauche de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Comme ils sont cohérents (et même localement projectifs de type fini) sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, l'assertion résulte alors du théorème A [5, 3.6.4].

4.2.4. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses de* 4.2.1, *le foncteur* F^* (*resp.* $F^\flat$) *définit une équivalence de la catégorie des* $\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}$*-modules à gauche* (*resp. à droite*) *avec celle des* $\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}}$*-modules à gauche* (*resp. à droite*). *Le foncteur* $\mathscr{E} \longmapsto F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$ (*resp.* $\mathscr{M} \longmapsto \mathscr{M} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}}} F^*\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}$) *est quasi-inverse de* F^* (*resp.* $F^\flat$).

Soit $\mathscr{E}'$ un $\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}$-module à gauche. Compte tenu de 4.2.2, la structure de $\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}}$-module à gauche de $F^*\mathscr{E}'$ est fournie par l'isomorphisme canonique

$$F^*\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\mathscr{E}'.$$

Le fait que le foncteur $\mathscr{E} \longmapsto F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$ soit quasi-inverse de F^* se déduit encore des isomorphismes (4.2.2.1) et (4.2.2.2) en procédant comme en 4.1.3.

Remarques. — (i) Comme on l'a observé en 4.2.1, la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotente pour $m \geq m_0 + 1$. Il s'ensuit que, si F et F' sont deux relèvements de Frobenius, les isomorphismes $\tau_{F,F'} : F'^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \xrightarrow{\sim} F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ sont définis dès que $m \geq m_0 + 1$. On obtient donc, sans hypothèses sur $\mathscr{V}$ ni sur $\mathfrak{a}$, un isomorphisme canonique de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}'})$-bimodules $\tau_{F,F'} : F'^*\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'} \xrightarrow{\sim} F^*\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}$. En recollant par ces isomorphismes les bimodules $F^*\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}$ définis par des relèvements locaux de Frobenius, on obtient donc un bimodule qu'on notera encore $F^*\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}$, bien défini même s'il n'existe pas de relèvement global du Frobenius relatif. En utilisant le bimodule $F^*\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}$ ainsi obtenu, on peut procéder comme en 4.1.4 (iv) et généraliser la construction du foncteur F^* de la catégorie des $\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'}$-modules dans celle des $\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules sans supposer l'existence d'un relèvement global F ; le théorème précédent reste alors valable. On notera que le foncteur $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$ ainsi obtenu est encore indépendant du choix du PD-idéal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.

(ii) Le théorème implique formellement l'énoncé analogue obtenu en remplaçant $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}'}$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$ par $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.

Notons enfin que le foncteur F^* (resp. $F^{s\,*}_{X_0/S_0}$) commute à l'extension du faisceau d'opérateurs différentiels au sens suivant :

4.2.5. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 4.2.1, *soit* $\mathscr{E}' \in D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$. *Il existe dans* $D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}})$ *un isomorphisme canonique*

$$\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\widetilde{\mathscr{D}}^\dagger_{\mathscr{X}'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E}'). \tag{4.2.5.1}$$

Utilisant l'associativité du produit tensoriel, on se ramène encore à prouver l'énoncé dans le cas où $\mathscr{E}' = \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$. Il résulte alors de (4.1.5.2) par passage à la limite inductive lorsque $m' \to \infty$.

4.3. Action de Frobenius sur la cohomologie de de Rham

Nous explicitons maintenant quelques conséquences des théorèmes de descente qui précèdent, en montrant notamment que les flèches de fonctorialité induites par Frobenius sur la cohomologie de de Rham d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module ou d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module sont des isomorphismes. Ce résultat généralise le théorème classique sur l'action de Frobenius en cohomologie cristalline [9, 1.3].

Dans cette section et dans la suivante, nous aurons à utiliser le complexe de Spencer, qui sert en caractéristique 0 à fournir une résolution de $\mathcal{O}_X$ localement libre de rang fini sur $\mathcal{D}_X$. Nous préciserons donc d'abord dans quelle mesure il peut encore être employé à cet effet sur les anneaux d'opérateurs différentiels considérés ici.

4.3.1. PROPOSITION. — *Soient $X \to S$ un morphisme lisse entre deux schémas quelconques (resp. entre deux $\mathcal{V}$-schémas formels), d la dimension relative de X sur S, $\mathcal{T}_X = (\Omega^1_X)^{\check{}}$ le faisceau tangent de X relativement à S.*

(i) *Il existe un homomorphisme canonique $\mathcal{T}_X \to \mathcal{D}^{(0)}_X$, induisant un isomorphisme*

$$\mathbb{S}(\mathcal{T}_X) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{gr}\,\mathcal{D}^{(0)}_X \tag{4.3.1.1}$$

entre l'algèbre symétrique de $\mathcal{T}_X$ et le gradué associé à $\mathcal{D}^{(0)}_X$ pour la filtration par l'ordre.

(ii) *L'application $\mathcal{D}^{(0)}_X \to \mathcal{O}_X$ envoyant un opérateur P sur $P{\cdot}1$ fait du complexe de Spencer*

$$\mathcal{D}^{(0)}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^{d} \mathcal{T}_X \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{D}^{(0)}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{D}^{(0)}_X,$$

une résolution $\mathcal{D}^{(0)}_X$-linéaire de $\mathcal{O}_X$.

On sait (voir par exemple [1, ch. II, prop. 2.1.5]) que l'homomorphisme canonique $\mathcal{D}^{(0)}_X \to \mathcal{D}_X$ induit entre les opérateurs d'ordre ≤ 1 un isomorphisme $\mathcal{D}^{(0)}_{X,1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{X,1}$. On en déduit l'existence d'un homomorphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire $\mathcal{T}_X \to \mathcal{D}^{(0)}_X$ factorisant l'homomorphisme usuel $\mathcal{T}_X \to \mathcal{D}_X$, et induisant un isomorphisme $\mathcal{T}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_1\mathcal{D}^{(0)}_X$. Pour vérifier que l'homomorphisme $\mathbb{S}(\mathcal{T}_X) \to \mathrm{gr}\,\mathcal{D}^{(0)}_X$ qui en résulte est un isomorphisme, on peut se placer sur un ouvert où X possède des coordonnées locales, et cela résulte de la description de la structure d'anneau de $\mathcal{D}^{(0)}_X$ donnée dans [1, ch. II, cor. 4.2.6], ou [5, 2.2.4].

Rappelons que la différentielle du complexe de Spencer est donnée par

$$\begin{aligned} P \otimes (u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) \longmapsto & \sum_i (-1)^{i-1} P u_i \otimes (u_1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}_i \wedge \ldots \wedge u_k) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} P \otimes ([u_i, u_j] \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}_i \wedge \ldots \wedge \hat{u}_j \wedge \ldots \wedge u_k). \end{aligned}$$

Comme dans le cas classique [28, 1.6], on voit qu'il donne une résolution de $\mathcal{O}_X$ en munissant le terme $\mathcal{D}^{(0)}_X \otimes \wedge^k \mathcal{T}_X$ de la filtration produit tensoriel de la filtration par l'ordre sur $\mathcal{D}^{(0)}_X$, et de la filtration de $\wedge^k \mathcal{T}_X$ égale à 0 en degrés $< k$, et à $\wedge^k \mathcal{T}_X$ en degrés $\geq k$, puis en passant au gradué associé, ce qui ramène au complexe de Koszul d'une algèbre de polynômes.

Remarque. — En général, la flèche $\mathbb{S}(\mathscr{T}_X) \to \mathrm{gr}\mathscr{D}_X^{(m)}$ n'est pas un isomorphisme pour $m \geq 1$, et, de même, le complexe de Spencer sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ n'est pas une résolution de $\mathscr{O}_X$: on s'en convaincra immédiatement à partir des relations de [5, 2.2.4].

4.3.2. COROLLAIRE. — *Soient $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, $\mathscr{S}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel, $\mathscr{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel lisse. Alors le complexe de Spencer $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}}$ est une résolution $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$-linéaire de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$.*

En notant $X_i \to S_i$ la réduction modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ de $\mathscr{X} \to \mathscr{S}$, le complexe $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ est la limite projective des complexes $\mathscr{D}_{X_i}^{(0)} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{X_i} \to \mathscr{O}_{X_i}$. Or chacun de ces complexes est acyclique d'après la proposition, et ils forment un système projectif de complexes à termes quasi-cohérents, et à morphismes de transition surjectifs, donc acycliques pour le foncteur $\varprojlim$. Par passage à la limite, on obtient donc encore un complexe acyclique.

Comme dans le cas algébrique, le complexe de Spencer $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}}$ n'est pas en général une résolution de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ si $m > 0$. Par contre, l'énoncé suivant montre que l'on obtient une résolution après tensorisation par $\mathbb{Q}$.

4.3.3. PROPOSITION (*cf.* [3, (3.2.2)]). — *Soient $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, $\mathscr{S}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel, $\mathscr{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel lisse. Pour tout m, le complexe de Spencer $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}}$ est une résolution $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-linéaire de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. De même, le complexe $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}}$ est une résolution $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-linéaire de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.*

Pour tout m, l'homomorphisme canonique $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(0)} \to \mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ donne un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{Q}$. D'autre part, comme $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ est à sections nœthériennes sur les ouverts affines, $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ est plat sur $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ (*cf.* [5, 3.2.3]). Par conséquent, $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ est plat sur $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(0)}$. Le complexe de Spencer usuel étant une résolution de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ sur $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(0)}$, le complexe $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}}$ est une résolution de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Le calcul en coordonnées locales ramène alors à vérifier que l'homomorphisme canonique

$$\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)} / \sum_i \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \partial_i \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$$

est un isomorphisme, ce qui résulte de [3, (3.2.1)].

L'assertion relative à $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}}$ résulte alors de la précédente par passage à la limite.

4.3.4. Revenons maintenant aux conséquences des théorèmes de descente. A partir de 4.1.2 et 4.1.3, on peut reprendre les raisonnements de 2.3.8, 2.5.3 et 2.5.7, et en déduire que les énoncés analogues sont valables sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$, ainsi que sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. De même, grâce à 4.2.2 et 4.2.4, on peut étendre ces propriétés à $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}'}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$, ainsi qu'à $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Pour abréger, nous les énoncerons simplement sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ et $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$:

(i) Les $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-modules $F^*\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ et $F^\flat\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ sont localement projectifs de type fini (respectivement à gauche et à droite). Un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ (resp. à droite $\mathscr{M}'$) est localement projectif de type fini si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ (resp. $F^\flat\mathscr{M}'$) est localement projectif de type fini sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$.

(ii) Si $\mathscr{B}_{\mathscr{X}'}$ est telle que, pour tout i, $\mathscr{B}_{X'_i}$ soit une $\mathscr{O}_{X'_i}$-algèbre quasi-cohérente à sections nœthériennes sur les ouverts affines, un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ (resp. à droite $\mathscr{M}'$) est cohérent si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ (resp. $F^\flat\mathscr{M}'$) est un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent.

(iii) Un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ (resp. à droite $\mathscr{M}'$) est plat si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ (resp. $F^\flat\mathscr{M}'$) est plat sur $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$.

(iv) Soient $\mathscr{E}'\in D^-({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$, $\mathscr{M}'\in D^-(\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{X}'})$. Si $f:\mathscr{X}\to\mathscr{S}$ est le morphisme structural, il existe dans $D^-(f^{-1}\mathscr{O}_{\mathscr{S}})$ un isomorphisme canonique

$$F^\flat\mathscr{M}'\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}}F^*\mathscr{E}'\xrightarrow{\ \sim\ }\mathscr{M}'\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}}\mathscr{E}'.\tag{4.3.4.1}$$

(v) Si $\mathscr{E}'\in D^+({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$ et $\mathscr{F}'\in D({}^{\mathrm{g}}\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$, le foncteur F^* induit des isomorphismes

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}}(\mathscr{F}',\mathscr{E}')\xrightarrow{\ \sim\ }\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}}(F^*\mathscr{F}',F^*\mathscr{E}'),\tag{4.3.4.2}$$

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}}(\mathscr{F}',\mathscr{E}')\xrightarrow{\ \sim\ }\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}}(F^*\mathscr{F}',F^*\mathscr{E}').\tag{4.3.4.3}$$

En particulier, lorsque $m=0$, ces isomorphismes fournissent des isomorphismes

$$\Omega^\bullet_{\mathscr{X}'}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}}\mathscr{E}'\xrightarrow{\ \sim\ }\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widehat{\mathscr{D}}^{(s)}_{\mathscr{X}}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}},F^*\mathscr{E}'),\tag{4.3.4.4}$$

$$\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(\mathscr{X}',\mathscr{E}')\xrightarrow{\ \sim\ }\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(s)}_{\mathscr{X}}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}},F^*\mathscr{E}').\tag{4.3.4.5}$$

Comme toujours, l'hypothèse d'existence d'un relèvement global de Frobenius peut être supprimée si la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$ est nilpotente.

Lorsque l'on tensorise par $\mathbb{Q}$, l'isomorphisme (4.3.4.2) entraîne que l'action de Frobenius sur la cohomologie de de Rham d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-module est un isomorphisme :

4.3.5. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses de* 4.1.2, *soit* $\mathscr{E}'\in D^+({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$ *(resp.* $D^+({}^{\mathrm{g}}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$*). Alors le morphisme induit par fonctorialité par* F *entre les complexes de de Rham*

$$\Omega^\bullet_{\mathscr{X}'}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}}\mathscr{E}'\longrightarrow\Omega^\bullet_{\mathscr{X}}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}}F^*\mathscr{E}'\tag{4.3.5.1}$$

est un quasi-isomorphisme. Lorsque $\mathscr{E}'\in D^+({}^{\mathrm{g}}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$*, ou lorsque* $\mathscr{E}'\in D^+({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$ *et que* $\mathfrak{a}$ *est m-PD-nilpotent, ce quasi-isomorphisme reste bien défini dans* $D^+(f^{-1}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$ *sans supposer qu'il existe un relèvement global de Frobenius (en notant* $f:\mathscr{X}\to\mathscr{S}$*).*

Comme $F^*\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}=\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, on déduit de (4.3.4.2) l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}},\mathscr{E}')\xrightarrow{\ \sim\ }\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}},F^*\mathscr{E}').$$

D'après 4.3.3, on peut calculer ces foncteurs dérivés en prenant d'une part la résolution de Spencer de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$, d'autre part la résolution de Spencer de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. On obtient ainsi des isomorphismes

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}'} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}, \mathscr{E}'),$$

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}, F^*\mathscr{E}'),$$

d'où par composition un isomorphisme dans la catégorie dérivée

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}'} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E}' \xrightarrow{\ \sim\ } \Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} F^*\mathscr{E}', \tag{4.3.5.2}$$

qui reste bien défini globalement sans hypothèse sur l'existence de F lorsque $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, car c'est le cas pour l'isomorphisme (4.3.4.2).

Il reste à s'assurer que cet isomorphisme est bien celui que définit F par fonctorialité entre les complexes de de Rham. Par construction, (4.3.5.2) est le quasi-isomorphisme

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}'} \otimes \mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om^{\bullet}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \otimes \wedge^{\bullet}\mathscr{T}_{\mathscr{X}'}, \mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om^{\bullet}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(F^*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \otimes \wedge^{\bullet}\mathscr{T}_{\mathscr{X}'}), F^*\mathscr{E}').$$

Pour le comparer à (4.3.5.1), on construit un morphisme de complexes

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes \wedge^{\bullet}\mathscr{T}_{\mathscr{X}} \longrightarrow F^*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \otimes \wedge^{\bullet}\mathscr{T}_{\mathscr{X}'})$$

de la manière suivante. Pour tout k, on dispose d'un homomorphisme canonique

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \wedge^k\mathscr{T}_{\mathscr{X}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} F^*\wedge^k\mathscr{T}_{\mathscr{X}'}.$$

Grâce l'isomorphisme (4.1.2.1), on obtient ensuite les homomorphismes

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} F^*\wedge^k\mathscr{T}_{\mathscr{X}'} &\xrightarrow{\sim} F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{O}^{\vee}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} F^*\wedge^k\mathscr{T}_{\mathscr{X}'}\\
&\xrightarrow{\sim} F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{O}^{\vee}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}} \wedge^k\mathscr{T}_{\mathscr{X}'}\\
&\xrightarrow{\mathrm{ev}_1} F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}} \wedge^k\mathscr{T}_{\mathscr{X}'},
\end{aligned}$$

le dernier étant défini par l'évaluation en 1 sur $\mathscr{O}^{\vee}_{\mathscr{X}} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}'})$. Pour vérifier qu'on obtient bien un morphisme de complexes, on peut procéder par réduction modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout i, puis passer aux duaux $\mathscr{O}_{X_i}$-linéaires en utilisant la filtration par l'ordre : en revenant à la construction donnée en 2.5.2, on voit alors facilement d'une part que le dual de l'homomorphisme ainsi construit est défini par les homomorphismes $\mathscr{P}^n_{X'_i,(m)} \otimes \Omega^k_{X'_i} \to \mathscr{P}^n_{X_i,(m+s)} \otimes \Omega^k_{X_i}$ induits par F, et d'autre part que les différentielles de ces complexes correspondent par dualité aux linéarisations des différentielles des complexes de de Rham (au sens de [26, 6.2] et [1, ch. IV, 3.1]). L'assertion en découle, d'où l'énoncé relatif à $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. L'énoncé relatif à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ se prouve de la même manière.

4.4. Dimension homologique

Soient X un k-schéma lisse, $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse de dimension relative d. Le théorème de descente par Frobenius va nous permettre ici de ramener l'étude de la dimension homologique des faisceaux d'anneaux $\mathscr{D}_X^{(m)}$ et $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ à celle de $\mathscr{D}_X^{(0)}$ et $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$. Nous en déduirons que, si $\mathscr{X}$ est affine, la dimension homologique des anneaux $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$ est égale à $2d+1$, et que celle des anneaux $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$ et $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger})$ est respectivement majorée par $2d$ et $2d+1$.

4.4.1. LEMME. — *Soient S un schéma quelconque, et X un S-schéma lisse purement de dimension relative d sur S.*

(i) *Le morphisme $\omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(0)} \to \omega_X$ défini par la structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à droite de ω_X fait du complexe de de Rham $\Omega_X^\bullet \otimes \mathscr{D}_X^{(0)}$ de $\mathscr{D}_X^{(0)}$ (vu comme $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche) une résolution $\mathscr{D}_X^{(0)}$-linéaire à droite de ω_X placé en degré d.*

(ii) *Pour $i \neq d$, $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X^{(0)}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{D}_X^{(0)}) = 0$, et il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules à droite*

$$\mathscr{E}xt^d_{\mathscr{D}_X^{(0)}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{D}_X^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \omega_X. \tag{4.4.1.1}$$

Pour prouver (i), on procède comme pour l'énoncé analogue 4.3.1 relatif au complexe de Spencer : on filtre le complexe $\Omega_X^\bullet \otimes \mathscr{D}_X^{(0)}$ en utilisant la filtration par l'ordre, et, en passant au gradué associé, on se ramène au complexe de Koszul de $\omega_X \otimes (\mathrm{gr}\,\mathscr{D}_X^{(0)})$ par rapport à la suite régulière formée par les classes d'une base locale de dérivations (*cf.* [28, 1.6]). L'assertion (ii) en résulte en utilisant la résolution de Spencer de $\mathscr{O}_X$ pour calculer $\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^{(0)}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{D}_X^{(0)})$; le complexe $\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}_X^{(0)}}(\mathscr{D}_X^{(0)} \otimes \wedge^\bullet \mathscr{T}_X, \mathscr{D}_X^{(0)})$ s'identifie alors au complexe de de Rham $\Omega_X^\bullet \otimes \mathscr{D}_X^{(0)}$.

4.4.2. COROLLAIRE. — *Soient $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, $\mathscr{S}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel, $\mathscr{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel lisse purement de dimension relative d sur $\mathscr{S}$.*

(i) *Si l'on munit $\omega_{\mathscr{X}}$ de la structure de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$-module à droite définie par passage à la limite à partir de* 1.2.6, *le complexe de de Rham $\Omega_{\mathscr{X}}^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$ est une résolution $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$-linéaire à droite de $\omega_{\mathscr{X}}$ placé en degré d.*

(ii) *Pour $i \neq d$, $\mathscr{E}xt^i_{\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}) = 0$, et il existe un isomorphisme canonique de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$-modules à droite*

$$\mathscr{E}xt^d_{\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathscr{X}}. \tag{4.4.2.1}$$

L'assertion (i) résulte de l'énoncé précédent par passage à la limite comme en 4.3.2, et l'assertion (ii) s'en déduit aussitôt.

4.4.3. PROPOSITION. — *Soient R un anneau nœthérien régulier de caractéristique p, $f : X = \operatorname{Spec} A \to S = \operatorname{Spec} R$ un morphisme affine et lisse, dont les fibres sont de dimension d, $r = \sup_{s \in f(X)} \dim \mathscr{O}_{S,s}$. Pour tout $m \geq 0$, l'anneau $D_X^{(m)} = \Gamma(X, \mathscr{D}_X^{(m)})$ est de dimension* *homologique égale à* $2d + r$.

Soient $X' = X^{(m)}$ l'image inverse de X par le m-ième itéré du morphisme de Frobenius absolu de S, $F = F^m_{X/S} : X \to X'$ le morphisme de Frobenius relatif correspondant. Comme un $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{E}'$ est quasi-cohérent si et seulement si $F^*\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, F^* induit d'après 2.3.6 une équivalence de catégories entre la catégorie des $D^{(0)}_{X'}$-modules à gauche et celle des $D^{(m)}_X$-modules à gauche. Les dimensions homologiques de $D^{(0)}_{X'}$ et $D^{(m)}_X$ sont donc égales, de sorte qu'il suffit de montrer l'énoncé lorsque $m = 0$.

Dans ce cas, le gradué associé à la filtration par l'ordre sur $D^{(0)}_X$ s'identifie à l'algèbre symétrique du A-module projectif de type fini $\Gamma(X, \mathcal{T}_X)$, où $\mathcal{T}_X$ est le faisceau tangent sur X relativement à S. Comme A est régulier de dimension $d+r$, et $\mathcal{T}_X$ localement libre de rang d, $\operatorname{gr} D^{(0)}_X$ est un anneau régulier de dimension $2d + r$. D'autre part, un argument classique basé sur l'utilisation de résolutions filtrées libres (voir par exemple [10], [28], [39], ou le Séminaire Malgrange [32, exp. IV], ou encore [34]) montre qu'on a l'inégalité

$$\dim D^{(0)}_X \;\le\; \dim \operatorname{gr} D^{(0)}_X \;=\; 2d + r.$$

Pour achever la démonstration, il suffit alors de donner un exemple de $D^{(0)}_X$-module E tel que $\operatorname{Ext}^{2d+r}_{D^{(0)}_X}(E, D^{(0)}_X) \neq 0$. Soient $y \in f(X)$ un point tel que $\dim \mathcal{O}_{S,y} = r$, $s_1, \ldots, s_r \in \mathfrak{m}_{S,y} \subset \mathcal{O}_{S,y}$ une suite régulière de générateurs . On peut alors trouver un point fermé $x \in X$, d'image y dans S et de codimension d dans sa fibre, tel qu'il existe dans $\mathfrak{m}_{X,x}$ un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ en x relativement à S. Les sections $s_1, \ldots, s_r, t_1^p, \ldots, t_d^p$ appartiennent au centre de $\mathscr{D}^{(0)}_{X,x}$, de sorte que le $\mathcal{O}_X$-module à support ponctuel $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{X,x}/(s_1, \ldots, s_r, t_1^p, \ldots, t_d^p)$ a une structure naturelle de $\mathscr{D}^{(0)}_X$-module. En utilisant l'isomorphisme $\mathcal{E}xt^d_{\mathscr{D}^{(0)}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{D}^{(0)}_X) \simeq \omega_X$, et le fait que la suite $s_1, \ldots, s_r, t_1^p, \ldots, t_d^p$ est une suite régulière sur $\omega_{X,x}$, on vérifie facilement que $\mathcal{E}xt^{2d+r}_{\mathscr{D}^{(0)}_X}(\mathcal{E}, \mathscr{D}^{(0)}_X) \neq 0$, de sorte que $E = \Gamma(X, \mathcal{E})$ fournit l'exemple cherché.

Remarque. — Pour $m \geq 1$ et $d \geq 1$, les classes δ_i des dérivations ∂_i associées à un système de coordonnées locales vérifient la relation $\delta_i^p = 0$ dans $\operatorname{gr} \mathscr{D}^{(m)}_X$ (la filtration étant toujours la filtration par l'ordre). Par suite, $\operatorname{gr} D^{(m)}_X$ n'est pas un anneau régulier, et n'est pas de dimension homologique finie.

4.4.4. PROPOSITION. — *Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, $\mathscr{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel affine et lisse, de dimension relative d sur $\mathcal{V}$. Pour tout $m \geq 0$, l'anneau $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}} = \Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ est de dimension homologique égale à* $2d + 1$.

Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{V}$, k son corps résiduel. L'anneau $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ est un anneau nœthérien [5, 3.2.2], séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. En passant au gradué associé à la filtration $\mathfrak{m}$-adique, il en résulte que

$$\dim \widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)} \leq \dim \mathrm{gr}\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$$

(voir par exemple [34, D, Cor. 7.11]). Soient X la fibre spéciale de $\mathscr{X}$, et posons $D_X^{(m)} = \Gamma(X, \mathscr{D}_X^{(m)}) \simeq \mathrm{gr}^0 \widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$. Comme $\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ est sans p-torsion, on définit un isomorphisme de k-algèbres graduées

$$D_X^{(m)} \otimes_k k[t] \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{gr}\, \widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$$

en envoyant t sur la classe dans $\mathrm{gr}^1 \widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ d'une uniformisante π de $\mathscr{V}$. Si $T = \mathrm{Spec}\ k[t]$, et $Y = X \times T$, l'homomorphisme naturel

$$D_X^{(m)} \otimes_k k[t] \longrightarrow \Gamma(Y, \mathscr{D}_{Y/T}^{(m)})$$

est un isomorphisme, de sorte que, d'après 4.4.3, $\dim \mathrm{gr}\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)} = 2d + 1$.

On obtient donc ainsi la majoration

$$\dim \widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)} \leq 2d + 1.$$

Pour montrer qu'il existe sur $\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ un module de dimension projective $2d + 1$, on peut, comme dans la démonstration de 4.4.3, utiliser la descente par Frobenius pour se ramener au cas où $m = 0$. En effet, soient $S_0 = \mathrm{Spec}(\mathscr{V}/p\mathscr{V})$, X_0 la réduction de $\mathscr{X}$ modulo p, et $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses relevant $F^m_{X_0/S_0}$. Grâce au théorème 4.1.3, il suffit alors de montrer que $\widehat{D}_{\mathscr{X}'}^{(0)}$ est de dimension homologique $2d + 1$. Supposons donc que $m = 0$. On choisit alors un point fermé $x \in X$ de codimension d, tel qu'il existe une suite régulière de paramètres $t_1, \ldots, t_d \in \mathfrak{m}_{X,x}$ qui soit un système de coordonnées locales, et on pose $E = \mathscr{O}_{X,x}/(t_1^p, \ldots, t_d^p)$, vu comme $\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(0)}$-module. Soit $\mathscr{E}$ le $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$-module à support ponctuel correspondant. A partir de l'isomorphisme (4.4.2.1) et de la suite exacte longue définie par la multiplication par π sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, on obtient un isomorphisme de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$-modules à droite

$$\mathscr{E}xt^{d+1}_{\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}}(\mathscr{O}_X, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}) \xrightarrow{\ \sim\ } \omega_X.$$

Comme le complexe de Koszul de la suite $(t_1^p, \ldots, t_d^p)$ sur $\mathscr{O}_X$ est une résolution $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}$-linéaire de $\mathscr{E}$, on en déduit que $\mathscr{E}xt^{2d+1}_{\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}}(\mathscr{E}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(0)}) \neq 0$.

4.4.5. PROPOSITION. — *Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel affine et lisse de dimension relative d, $\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)} = \Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})$, E un $\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-module de type fini sans p-torsion. Alors E possède une résolution projective de type fini sur $\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ de longueur $\leq 2d$.*

Comme $\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ est sans p-torsion, il en est de même de tout $\widehat{D}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-module projectif. Soient $P^\bullet$ une résolution projective de type fini de E, et $N = Z^{-2d+1}(P^\bullet)$. Le complexe

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P^{-2d+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P^0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

est alors un complexe acyclique, à termes sans p-torsion. Par réduction modulo $\mathfrak{m}$, on obtient donc un complexe acyclique dans lequel les termes $P^i/\mathfrak{m}P^i$ sont projectifs de type fini sur $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}/\mathfrak{m}\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}} \simeq \Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)}_X) = D^{(m)}_X$. D'après 4.4.3, $E/\mathfrak{m}E$ est de dimension projective $\leq 2d$, de sorte que $N/\mathfrak{m}N$ est un $D^{(m)}_X$-module projectif de type fini.

Il suffit donc de prouver que, si N est un $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module de type fini sans p-torsion, et tel que $N/\mathfrak{m}N$ soit projectif sur $D^{(m)}_X$, alors N est projectif sur $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$. Soient $u : L \to N$ un morphisme surjectif, où L est un $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module libre de type fini, et $M = \mathrm{Ker}(u)$. Puisque N est sans p-torsion, $M/\mathfrak{m}M$ est le noyau de la réduction de u modulo $\mathfrak{m}$. La projectivité de $N/\mathfrak{m}N$ entraîne qu'il existe un isomorphisme $D^{(m)}_X$-linéaire $N/\mathfrak{m}N \oplus M/\mathfrak{m}M \xrightarrow{\sim} L/\mathfrak{m}L$. On est alors ramené à prouver que si N vérifie les conditions précédentes, et si de plus $N/\mathfrak{m}N$ est libre sur $D^{(m)}_X$, alors N est libre sur $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$. Soient $e_1, \dots, e_n$ des éléments de N relevant une base de $N/\mathfrak{m}N$, et $u : L = (\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}})^n \to N$ l'homomorphisme défini par les e_i. Comme N est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, u est surjectif. Son noyau M a pour réduction modulo $\mathfrak{m}$ le noyau de la réduction de u, qui est nul. Or, $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ étant nœthérien, M est également séparé et complet. Par suite, $M = 0$, et N est libre.

4.4.6. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses précédentes, soit $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbb{Q} \simeq \Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Alors $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est de dimension homologique finie d', avec $d \leq d' \leq 2d$.*

La minoration $d \leq d'$ résulte de ce que $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est de dimension projective d sur $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, comme le montre le calcul des Ext^i par la résolution de Spencer.

D'après [EGA 0_{IV} (17.2.3)] (qui reste valable dans le cas non commutatif), il suffit, pour obtenir la majoration $d' \leq 2d$, de vérifier que, pour tout $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module E de type fini (ou même monogène), et tout $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module M, on a

$$\mathrm{Ext}^i_{\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(E, M) = 0$$

pour $i > 2d$. En utilisant une présentation de E sur $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, on peut trouver un $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module de type fini $\mathring{E}$ tel que $E \simeq \mathring{E}_{\mathbb{Q}}$, et, quitte à diviser $\mathring{E}$ par son sous-module de p-torsion, on peut supposer que $\mathring{E}$ est sans p-torsion. La proposition précédente entraîne que $\mathring{E}$ possède une résolution projective sur $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ de longueur au plus $2d$. Par suite, il en est de même pour E sur $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, d'où l'assertion.

Remarque. — Il paraît vraisemblable que la majoration fournie par l'énoncé 4.4.5 ne soit pas optimale, et qu'un $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module de type fini sans p-torsion soit en fait de dimension projective au plus égale à d. Dans ce cas, la dimension homologique de $\widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ serait égale à d.

4.4.7. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses précédentes, soit $D^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \widehat{D}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \simeq \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.*

(i) *Tout $D^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est de dimension projective au plus égale à $2d$.*

(ii) *L'anneau $D^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est de dimension homologique finie d'', avec $d \leq d'' \leq 2d + 1$.*

Soit E un $D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Il existe alors un entier m et un $\widehat{D}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $E^{(m)}$ tels que $E \simeq D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{D}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} E^{(m)}$. D'après 4.4.6, $E^{(m)}$ possède une résolution projective de longueur $\leq 2d$ sur $\widehat{D}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$. Comme $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ est plat sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ [5, 3.5.4], il s'ensuit par extension des scalaires que E possède une résolution projective de longueur $\leq d$.

La relation $d \leq d''$ résulte encore de ce que $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ est de dimension projective d sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$. Pour prouver que $d'' \leq 2d+1$, il suffit de prouver que

$$\mathrm{Ext}^{i}_{D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(E,M)=0$$

pour tout $D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module monogène E, tout $D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module M et tout $i > 2d+1$. Soit $E \simeq D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}/I$ une présentation de E, et, pour tout m, posons $I_m = D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(I \cap \widehat{D}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$, $E_m = D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}/I_m$. On a alors $I = \bigcup_m I_m$, $E \simeq \varinjlim_m E_m$, et, pour tout M, un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(E,M) \xrightarrow{\ \sim\ } \varprojlim_{m} \mathrm{Hom}_{D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(E_m,M),$$

d'où résulte une suite spectrale

$$E_2^{i,j} = R^i \varprojlim_{m} \mathrm{Ext}^{j}_{D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(E_m,M) \quad \Rightarrow \quad E^n = \mathrm{Ext}^{n}_{D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(E,M).$$

Or, pour tout m, I_m est un idéal à gauche de type fini de $D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, puisque $\widehat{D}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ est nœthérien. Par conséquent, E_m est cohérent sur $D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, et les $\mathrm{Ext}^{j}_{D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(E_m,M)$ sont nuls pour $j > 2d$ d'après (i). Comme les dérivés $R^i\varprojlim_m$ sont nuls pour $i > 1$, l'assertion (ii) en découle.

Grâce au théorème A pour les différents types de modules considérés [5, 3.3.9, 3.4.6 et 3.6.4], les énoncés précédents entraînent immédiatement le corollaire :

4.4.8. COROLLAIRE. — *Soit $\mathcal{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse de dimension relative d.*

(i) *Tout $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module cohérent possède localement une résolution localement projective de type fini de longueur $\leq 2d+1$.*

(ii) *Tout $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module cohérent sans p-torsion possède localement une résolution localement projective de type fini de longueur $\leq 2d$.*

(iii) *Tout $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent possède localement une résolution localement projective de type fini de longueur $\leq 2d$.*

(iv) *Tout $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent possède localement une résolution localement projective de type fini de longueur $\leq 2d$.*

(v) *Les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ sont respectivement égales à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$.*

4.5. Descente des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules

Nous introduisons ici la notion de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module, qui formalise la donnée d'une action de Frobenius sur un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module. Comme nous le verrons dans la section suivante, cette notion constitue une généralisation naturelle, dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, de la notion de F-isocristal. Nous montrons dans cette section comment les théorèmes de descente par Frobenius permettent de l'interpréter en termes de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules. Une première conséquence intéressante de cette interprétation est la nœthérianité de la catégorie des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

4.5.1. Soient k un corps parfait de caractéristique p, $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, dont le corps des fractions K est de caractéristique 0, $s \geq 1$ un entier, $\sigma : \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$ un automorphisme relevant la puissance s-ième de l'automorphisme de Frobenius de k. Dans ce qui suit, nous considèrerons s et σ comme fixés.

Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma lisse, nous noterons $\mathcal{X}' = \mathcal{X}^{\sigma}$ le $\mathcal{V}$-schéma formel déduit de $\mathcal{X}$ par le changement de base défini par σ. Rappelons que, d'après 4.2.4, on dispose d'une équivalence de catégories naturelle F^* entre la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}$-modules et celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules, définie par recollement des foncteurs F^* fournis par des relèvements locaux de $F^s_{X/k}$, où X est la réduction de $\mathcal{X}$ modulo $\mathfrak{m}$. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module, nous commettrons ici l'abus de notation consistant à désigner par $F^*\mathcal{E}$ le $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $F^*\mathcal{E}^{\sigma}$, où $\mathcal{E}^{\sigma}$ est le $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}$-module déduit de $\mathcal{E}$ par le changement de base σ.

On peut itérer le foncteur F^* de la manière suivante. Pour tout $n \geq 0$, soit $\mathcal{X}^{(n)}$ le $\mathcal{V}$-schéma formel déduit de $\mathcal{X}$ par le changement de base σ^n. Si $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ est un relèvement de $F^s_{X/k}$, soit $F^{(i)} : \mathcal{X}^{(i)} \to \mathcal{X}^{(i+1)}$ le morphisme déduit de F par changement de base. Pour tout $n \geq 0$, on pose $F^n = F^{(n-1)} \circ \ldots \circ F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{(n)}$. Le foncteur F^{n*} est une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}^{(n)},\mathbb{Q}}$-modules et celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules. Pour tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$, nous noterons $F^{n*}\mathcal{E}$ le $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $F^{n*}\mathcal{E}^{\sigma^n}$. Par transitivité des images inverses, le foncteur F^{n*} est canoniquement isomorphe au foncteur $(F^*)^n = F^* \circ \ldots \circ F^*$ obtenu en itérant n fois le foncteur F^*. Il est indépendant à isomorphisme canonique près du choix du relèvement F de $F^s_{X/k}$.

Définition. — Avec les notations précédentes, on appelle F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-*module* (ou F^s-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-*module* s'il y a risque de confusion) la donnée d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$ et d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$. Un morphisme de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules $u : (\mathcal{E}, \Phi) \to (\mathcal{F}, \Psi)$ est un morphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $u : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tel que $\Psi \circ u = F^*(u) \circ \Phi$. Nous dirons qu'un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $(\mathcal{E}, \Phi)$ est cohérent si $\mathcal{E}$ est cohérent en tant que $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module. Nous noterons $F\mathcal{D}^{\dagger}(\mathcal{X})$ (resp. $F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$) la catégorie des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules (rsp. cohérents).

Si K_0 est le sous corps de K formé des éléments invariants par σ, la platitude de F entraîne que les catégories $F\mathcal{D}^{\dagger}(\mathcal{X})$ et $F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$ sont des catégories abéliennes K_0-linéaires, la formation des noyaux et conoyaux commutant à l'oubli de Φ.

Si $(\mathcal{E}, \Phi)$ est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module, on dispose pour tout n d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi^n : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^{n*}\mathcal{E}$, défini comme le composé

$$\Phi^n = F^{n-1*}(\Phi) \circ \ldots \circ \Phi.$$

Exemples. — (i) Comme $F^*\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, y compris en tant que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module, l'identité de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ définit sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ une structure canonique de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module.

(ii) Soit $Z \subset X$ un diviseur. Il résulte de l'isomorphisme (4.2.1.1) que le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ des fonctions sur $\mathcal{X}$ à singularités surconvergentes le long de Z possède une structure canonique de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module.

(iii) Nous verrons dans la section 4.6 comment la catégorie des F-isocristaux convergents (resp. surconvergents le long d'un diviseur $Z \subset X$) peut être identifiée à une sous-catégorie de la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules (resp. des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-modules).

(iv) Nous montrerons dans [7] que la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents est stable par image directe par un morphisme propre.

Remarque. — Le lecteur familier avec le point de vue des F-isocristaux s'interrogera probablement sur le choix du sens de la flèche dans la définition de la notion de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module : il pourrait sembler plus naturel de se donner un isomorphisme $F^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. Bien que la distinction puisse paraître formelle, puisqu'il s'agit d'isomorphismes, les différences de variance entre cristaux et $\mathcal{D}$-modules rendent plus naturel le choix fait ici. Sans développer ce point davantage dans le présent article, nous nous contenterons d'observer qu'on peut généraliser la structure de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module en imposant seulement la donnée d'un homomorphisme $\mathcal{E} \to F^*\mathcal{E}$; le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ lui-même est alors muni naturellement d'une telle structure, définie par l'homomorphisme canonique $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \to F^*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ étudié plus haut, qui est surjectif, mais non injectif.

4.5.2. On se propose maintenant d'interpréter la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents au moyen de structures définies sur les anneaux d'opérateurs différentiels de niveau fini. Pour cela, fixons un entier m tel que $\mathfrak{m}$ possède une m-PD-structure. Supposons de plus que l'on soit dans l'une des deux situations suivantes :

(i) $\mathfrak{m}$ est m-PD-nilpotent;

(ii) On a fixé un relèvement $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ de $F^s_{X/k}$.

Lorsque $\mathcal{V}$ est absolument non ramifié, le choix le plus intéressant est de prendre $m = 0$. On observera que l'hypothèse (i) est alors satisfaite dès que $p > 2$, ce qui permet d'éviter de faire l'hypothèse (ii).

Sous ces conditions, on dispose pour tout $m' \geq m$ du foncteur F^* de la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}$-modules dans celle des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules. Poursuivant l'abus de notation fait en 4.5.1, nous noterons encore $F^*\mathcal{E}$ le $\widehat{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $F^*\mathcal{E}^\sigma$, où $\mathcal{E}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module, et $\mathcal{E}^\sigma$ le $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathcal{X}',\mathbb{Q}}$-module qui s'en déduit par le changement de base σ.

On peut itérer comme plus haut le foncteur F^*. Le foncteur F^{n*} est alors une équivalence entre la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(n)},\mathbb{Q}}$-modules et celle des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+ns)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules. Pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$, nous noterons $F^{n*}\mathcal{E}$ le $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+ns)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $F^{n*}\mathcal{E}^{\sigma^n}$. Par transitivité des images inverses, ce foncteur est canoniquement isomorphe au foncteur $(F^*)^n = F^* \circ \ldots \circ F^*$ obtenu en composant n fois les foncteurs F^* de niveau adéquat. Lorsque $\mathfrak{m}$ est m-PD-nilpotent, il est indépendant à isomorphisme canonique près du choix du relèvement F de

$F^s_{X/k}$.

Nous considèrerons les couples $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)})$, formés d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E}^{(m)}$, et d'un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire

$$\Phi^{(m+s)} : \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}^{(m)}.$$

Ils forment une catégorie $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$, en prenant pour morphismes $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)}) \to (\mathscr{F}^{(m)}, \Psi^{(m+s)})$ dans $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$ les morphismes $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaires $u^{(m)} : \mathscr{E}^{(m)} \to \mathscr{F}^{(m)}$ tels que $\Psi^{(m+s)} \circ (\mathrm{Id} \otimes u^{(m)}) = F^*(u^{(m)}) \circ \Phi^{(m+s)}$. Compte tenu de la platitude de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, c'est aussi une catégorie abélienne K_0-linéaire sur laquelle le foncteur d'oubli de $\Phi^{(m+s)}$ est exact.

On définit un foncteur de $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$ dans $F\mathscr{D}^{\dagger}(\mathscr{X})$ en associant de la manière suivante un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $(\mathscr{E}, \Phi)$ à un couple $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)})$:

a) On pose $\mathscr{E} = \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)}$;

b) On définit Φ comme l'isomorphisme composé

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)} &\xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} (\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)})\\ &\xrightarrow[\sim]{\mathrm{Id}\otimes\Phi^{(m+s)}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathscr{E}^{(m)}\\ &\xrightarrow{\ \sim\ } F^*(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)}),\end{aligned}$$

dans lequel le dernier isomorphisme est fourni par (4.2.5.1). Nous dirons simplement que $(\mathscr{E}, \Phi)$ est déduit de $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)})$ par extension des scalaires.

4.5.3. Nous aurons aussi à utiliser un foncteur similaire de $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$ dans $F\mathscr{D}^{(m')}(\mathscr{X})$. Pour tout $m' \geq m$, et tout $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E}^{(m)}$, nous noterons $\mathscr{E}^{(m')}$ le $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)}$; de même, nous noterons $u^{(m')} : \mathscr{E}^{(m')} \to \mathscr{F}^{(m')}$ le morphisme déduit d'un morphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $u^{(m)} : \mathscr{E}^{(m)} \to \mathscr{F}^{(m)}$ par extension des scalaires.

Soient $m' \geq m$, et $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)})$ un objet de $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$. Pour associer à $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)})$ un objet de $F\mathscr{D}^{(m')}(\mathscr{X})$, il peut y avoir a priori plusieurs façons de procéder ; en fait, elles s'identifient canoniquement les unes aux autres :

a) On munit $\mathscr{E}^{(m')}$ d'un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi^{(m'+s)} : \mathscr{E}^{(m'+s)} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}^{(m')}$, défini comme le composé

$$\Phi^{(m'+s)} : \mathscr{E}^{(m'+s)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m+s)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathscr{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}^{(m')},$$

où le dernier isomorphisme est fourni par (4.1.5.1).

Si $m'' \geq m'$, les propriétés de transitivité évidentes des isomorphismes (4.1.5.1) fournissent le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathscr{D}}^{(m''+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m'+s)} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Phi^{(m'+s)}"', "\wr"] & \mathscr{E}^{(m''+s)} \arrow[d, "\Phi^{(m''+s)}", "\wr"'] \\
\widehat{\mathscr{D}}^{(m''+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathscr{E}^{(m')} \arrow[r, "\sim"] & F^*\mathscr{E}^{(m'')}
\end{tikzcd} \tag{4.5.3.1}$$

b) Pour tout $n \geq 0$, on peut aussi munir $F^{n*}\mathscr{E}^{(m)}$ d'une structure naturelle d'objet de $F\mathscr{D}^{(m+ns)}(\mathscr{X})$, en lui associant l'isomorphisme composé

$$\Phi_n^{(m+(n+1)s)} \ : \ \widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^{n*}\mathscr{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} F^{n*}\mathscr{E}^{(m+s)} \xrightarrow{\sim} F^{n+1*}\mathscr{E}^{(m)},$$

où le premier isomorphisme est fourni par (4.1.5.1), et le second est $F^{n*}(\Phi^{(m+s)})$.

c) En utilisant a), on peut définir pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme

$$\Phi^{n,(m'+ns)} \ : \ \mathscr{E}^{(m'+ns)} \xrightarrow{\sim} F^{n*}\mathscr{E}^{(m')}$$

en procédant par récurrence : on pose $\Phi^{0,(m')} = \mathrm{Id}$, et

$$\Phi^{n,(m'+ns)} = F^*(\Phi^{n-1,(m'+(n-1)s)}) \circ \Phi^{(m'+ns)}. \tag{4.5.3.2}$$

d) Si l'on munit $\mathscr{E}^{(m'+ns)}$ et $\mathscr{E}^{(m')}$ des isomorphismes $\Phi^{(m'+(n+1)s)}$ et $\Phi^{(m'+s)}$ définis en a), et $F^{n*}\mathscr{E}^{(m')}$ de l'isomorphisme $\Phi_n^{(m'+(n+1)s)}$ qu'on en déduit par b), l'isomorphisme $\Phi^{n,(m'+ns)}$ est un isomorphisme de $F\mathscr{D}^{(m'+ns)}(\mathscr{X})$. Pour le vérifier, il suffit grâce à (4.5.3.1) de le faire lorsque $m' = m$. Il s'agit alors de prouver la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m+ns)} \arrow[r, "\Phi^{(m+(n+1)s)}", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Phi^{n,(m+ns)}"', "\wr"] & F^*\mathscr{E}^{(m+ns)} \arrow[d, "F^*(\Phi^{n,(m+ns)})", "\wr"'] \\
\widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^{n*}\mathscr{E}^{(m)} \arrow[r, "\Phi_n^{(m+(n+1)s)}", "\sim"'] & F^{n+1*}\mathscr{E}^{(m)}
\end{tikzcd},$$

ce qui s'énonce encore, compte tenu de (4.5.3.2),

$$\Phi^{n+1,(m+(n+1)s)} = \Phi_n^{(m+(n+1)s)} \circ (\mathrm{Id}\otimes\Phi^{n,(m+ns)}). \tag{4.5.3.3}$$

On procède par récurrence sur n. Dans la définition de $\Phi^{n+1,(m+(n+1)s)}$, on peut alors remplacer $F^*(\Phi^{n,(m+ns)})$ par $F^*(\Phi_{n-1}^{(m+ns)}) \circ F^*(\mathrm{Id} \otimes \Phi^{n-1,(m+(n-1)s)})$. On se ramène ainsi à vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}^{(m+(n+1)s)} \arrow[r, "\Phi^{(m+(n+1)s)}", "\sim"'] \arrow[d, equal] & F^*\mathscr{E}^{(m+ns)} \arrow[r, "F^*(\mathrm{Id}\otimes\Phi^{n-1,(m+(n-1)s)})", "\sim"'] & F^*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n-1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^{n-1*}\mathscr{E}^{(m)}) \arrow[d, "\wr"] \\
\widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m+ns)} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\Phi^{n,(m+ns)}", "\sim"'] & \widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^{n*}\mathscr{E}^{(m)} \arrow[r, "\sim"] & F^*(F^{n-1*}\mathscr{E}^{(m+s)})
\end{tikzcd},$$

qui résulte sans difficulté de (4.5.3.1) et des propriétés de transitivité et de fonctorialité des isomorphismes (4.1.5.1) en explicitant la définition de $\Phi^{n,(m+ns)}$ via (4.5.3.2).

4.5.4. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses précédentes, le foncteur construit en 4.5.2 induit une équivalence entre la catégorie $F\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{X})$ des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents et la catégorie $F\mathscr{D}^{(m)}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{X})$ des couples $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)})$, où $\mathscr{E}^{(m)}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, et*

$$\Phi^{(m+s)} : \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)} \xrightarrow{\ \sim\ } F^{*}\mathscr{E}^{(m)}$$

un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire.

Supposons d'abord donnés deux couples $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)})$ et $(\mathscr{F}^{(m)}, \Psi^{(m+s)})$, définissant des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules $(\mathscr{E}, \Phi)$ et $(\mathscr{F}, \Psi)$ par la construction de 4.5.2. Soit $u^{(m)} : \mathscr{E}^{(m)} \to \mathscr{F}^{(m)}$ un morphisme de $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$ induisant le morphisme nul de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. Comme $\mathscr{E}^{(m)}$ et $\mathscr{F}^{(m)}$ sont de présentation finie, il existe localement sur $\mathscr{X}$ un entier $n \geq 0$ tel que $u^{(m+ns)} = 0$. La compatibilité de $u^{(m)}$ aux isomorphismes $\Phi^{(m+s)}$ et $\Psi^{(m+s)}$ fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{E}^{(m+ns)} & \xrightarrow[\sim]{\Phi^{(m+ns)}} & F^{n*}\mathscr{E}^{(m)} \\
{\scriptstyle u^{(m+ns)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^{n*}(u^{(m)})} \\
\mathscr{F}^{(m+ns)} & \xrightarrow[\sim]{\Psi^{(m+ns)}} & F^{n*}\mathscr{F}^{(m)}
\end{array}$$

d'où l'on déduit que $F^{n*}(u^{(m)}) = 0$. Comme F^{n*} est localement défini par extension des scalaires par un morphisme $\mathscr{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ libre de rang fini, il en résulte que $u^{(m)} = 0$. Le foncteur est donc fidèle.

Montrons maintenant qu'il est pleinement fidèle. Puisqu'il est fidèle, c'est une assertion locale sur $\mathscr{X}$, qu'on peut donc supposer affine. Soit $u : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ un morphisme de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules. Comme $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont de présentation finie, il existe un entier $n \geq 0$ et un morphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $v^{(m+ns)} : \mathscr{E}^{(m+ns)} \to \mathscr{F}^{(m+ns)}$ tel que $u = \mathrm{Id} \otimes v^{(m+ns)}$. Comme u est un morphisme de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules, les deux morphismes $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaires

$$\mathscr{E}^{(m+(n+1)s)} \xrightarrow{v^{(m+(n+1)s)}} \mathscr{F}^{(m+(n+1)s)} \xrightarrow[\sim]{\Psi^{(m+(n+1)s)}} F^{*}\mathscr{F}^{(m+ns)},$$

$$\mathscr{E}^{(m+(n+1)s)} \xrightarrow[\sim]{\Phi^{(m+(n+1)s)}} F^{*}\mathscr{E}^{(m+ns)} \xrightarrow{F^{*}(v^{(m+ns)})} F^{*}\mathscr{F}^{(m+ns)},$$

donnent le même morphisme par tensorisation avec $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Il existe donc $n' \geq n$ tel que ces deux morphismes donnent le même morphisme après tensorisation par $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n'+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Quitte à remplacer n par n', on obtient ainsi un morphisme $v^{(m+ns)}$ de $F\mathscr{D}^{(m+ns)}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{X})$ donnant u après tensorisation par $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.

Comme σ est un automorphisme, le théorème de descente 4.1.3 fournit alors un morphisme de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules $u^{(m)} : \mathscr{E}^{(m)} \to \mathscr{F}^{(m)}$ tel que $F^{n*}(u^{(m)})$ s'identifie à $v^{(m+ns)}$ via les isomorphismes $\Phi^{n,(m+ns)} : \mathscr{E}^{(m+ns)} \xrightarrow{\sim} F^{n*}\mathscr{E}^{(m)}$, $\Psi^{n,(m+ns)} : \mathscr{F}^{(m+ns)} \xrightarrow{\sim} F^{n*}\mathscr{F}^{(m)}$. Le morphisme $u^{(m)}$ ainsi obtenu est un morphisme de $F\mathscr{D}^{(m)}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{X})$: pour vérifier que $\Psi^{(m+s)} \circ u^{(m+s)} = F^{*}(u^{(m)}) \circ \Phi^{(m+s)}$, il suffit en effet de le faire après avoir appliqué F^{n*}. On considère alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{E}^{(m+(n+1)s)} & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Id}\otimes\Phi^{n,(m+ns)}} & \widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\otimes F^{n*}\mathscr{E}^{(m)} & \xrightarrow[\sim]{(4.1.5.1)} & F^{n*}\mathscr{E}^{(m+s)} & \xrightarrow[\sim]{F^{n*}(\Phi^{(m+s)})} & F^{n+1*}\mathscr{E}^{(m)} \\
\wr\downarrow v^{(m+(n+1)s)} & & {\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes F^{n*}(u^{(m)})}\downarrow\wr & & {\scriptstyle F^{n*}(u^{(m+s)})}\downarrow\wr & & {\scriptstyle F^{n+1*}(u^{(m)})}\downarrow\wr \\
\mathscr{F}^{(m+(n+1)s)} & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Id}\otimes\Psi^{n,(m+ns)}} & \widehat{\mathscr{D}}^{(m+(n+1)s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\otimes F^{n*}\mathscr{F}^{(m)} & \xrightarrow[\sim]{(4.1.5.1)} & F^{n*}\mathscr{F}^{(m+s)} & \xrightarrow[\sim]{F^{n*}(\Psi^{(m+s)})} & F^{n+1*}\mathscr{F}^{(m)}.
\end{array}$$

Le carré de gauche commute par définition de $u^{(m)}$, et celui du milieu par fonctorialité des isomorphismes (4.1.5.1); il suffit donc de vérifier la commutativité du rectangle extérieur du diagramme. D'après (4.5.3.3), les isomorphismes du haut et du bas sont respectivement égaux à $\Phi^{n+1,(m+(n+1)s)}$ et $\Psi^{n+1,(m+(n+1)s)}$. On est ainsi ramené à vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{E}^{(m+(n+1)s)} & \xrightarrow[\sim]{\Phi^{(m+(n+1)s)}} & F^{*}\mathscr{E}^{(m+ns)} & \xrightarrow[\sim]{F^{*}(\Phi^{n,(m+ns)})} & F^{n+1*}\mathscr{E}^{(m)} \\
{\scriptstyle v^{(m+(n+1)s)}}\downarrow\wr & & {\scriptstyle F^{*}(v^{(m+ns)})}\downarrow\wr & & {\scriptstyle F^{n+1*}(u^{(m)})}\downarrow\wr \\
\mathscr{F}^{(m+(n+1)s)} & \xrightarrow[\sim]{\Psi^{(m+(n+1)s)}} & F^{*}\mathscr{F}^{(m+ns)} & \xrightarrow[\sim]{F^{*}(\Psi^{n,(m+ns)})} & F^{n+1*}\mathscr{F}^{(m)}.
\end{array}$$

Or le carré de gauche commute parce que $v^{(m+ns)}$ est un morphisme de $F\mathscr{D}^{(m+ns)}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{X})$, et celui de droite par défiinition de $u^{(m)}$. Ce dernier est donc bien un morphisme de $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$.

Reste à voir que le morphisme $\mathrm{Id}\otimes u^{(m)}$ déduit de $u^{(m)}$ par tensorisation avec $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est égal à u. Mais, puisque $u^{(m)}$ est un morphisme de $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$, il s'ensuit que $\Psi^{n,(m+ns)}\circ u^{(m+ns)} = F^{n*}(u^{(m)})\circ\Phi^{n,(m+ns)} = \Psi^{n,(m+ns)}\circ v^{(m+ns)}$, donc que $u^{(m+ns)} = v^{(m+ns)}$, d'où l'assertion.

Montrons enfin que le foncteur est essentiellement surjectif. Grâce à la pleine fidélité, c'est encore une question locale sur $\mathscr{X}$. Supposons donc $\mathscr{X}$ affine, et soit $(\mathscr{E},\Phi)$ un objet de $F\mathscr{D}^{(m)}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{X})$. Puisque $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, il existe un entier $n\geq 0$, un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{F}^{(m+ns)}$ et un isomorphisme $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}\mathscr{F}^{(m+ns)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$. Grâce à l'isomorphisme (4.2.5.1), et à la cohérence de $F^{*}\mathscr{E}$, on peut supposer, quitte à augmenter n, que l'isomorphisme $\Phi : \mathscr{E}\xrightarrow{\sim} F^{*}\mathscr{E}$ provient par extension des scalaires d'un isomorphisme $\Psi^{(m+(n+1)s)} : \mathscr{F}^{(m+(n+1)s)}\xrightarrow{\sim} F^{*}\mathscr{F}^{(m+ns)}$. Le théorème de descente fournit alors un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}^{(m)}$ et un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+ns)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\mathscr{F}^{(m+ns)}\xrightarrow{\sim} F^{n*}\mathscr{E}^{(m)}$. De plus, grâce à (4.1.5.1), $\mathscr{F}^{(m+(n+1)s)}$ se descend alors par F^{n} en $\mathscr{E}^{(m+s)}$, et le théorème de descente permet aussi de descendre $\Psi^{(m+(n+1)s)}$ en un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi^{(m+s)} : \mathscr{E}^{(m+s)}\xrightarrow{\sim} F^{*}\mathscr{E}^{(m)}$. L'isomorphisme $\mathscr{F}^{(m+ns)}\xrightarrow{\sim} F^{n*}\mathscr{E}^{(m)}$ est alors un isomorphisme $(\mathscr{F}^{(m+ns)},\Psi^{(m+(n+1)s)})\xrightarrow{\sim}(F^{n*}\mathscr{E}^{(m)},\Phi^{(m+(n+1)s)}_{n})$ de $F\mathscr{D}^{(m+ns)}(\mathscr{X})$. D'après 4.5.3 d), on dispose par ailleurs de l'isomorphisme

$$\Phi^{n,(m+ns)} : (\mathscr{E}^{(m+ns)},\Phi^{(m+(n+1)s)}) \xrightarrow{\ \sim\ } (F^{n*}\mathscr{E}^{(m)},\Phi^{(m+(n+1)s)}_{n})$$

dans $F\mathscr{D}^{(m+ns)}(\mathscr{X})$. On obtient donc dans $F\mathscr{D}^{(m+ns)}(\mathscr{X})$ un isomorphisme

$$(\mathscr{F}^{(m+ns)},\Psi^{(m+(n+1)s)}) \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathscr{E}^{(m+ns)},\Phi^{(m+(n+1)s)}),$$

d'où l'on déduit par extension des scalaires un isomorphisme de $F\mathscr{D}^{\dagger}(\mathscr{X})$ entre $(\mathscr{E},\Phi)$ et le F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module défini par $(\mathscr{E}^{(m)},\Phi^{(m+s)})$.

Remarque. — Il résulte donc de l'énoncé que, pour $m' \geq m$, le foncteur d'extension des scalaires est une équivalence entre les catégories $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$ et $F\mathscr{D}^{(m')}(\mathscr{X})$. Pour tout $n \geq 0$, il en est de même du foncteur F^{n*} entre $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$ et $F\mathscr{D}^{(m+ns)}(\mathscr{X})$, ce foncteur étant par ailleurs isomorphe au foncteur d'extension des scalaires grâce à l'isomorphisme $\Phi^{n,(m+ns)}$.

4.5.5. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses précédentes, supposons de plus $\mathscr{X}$ quasi-compact. La catégorie des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents est alors une catégorie nœthérienne.*

L'hypothèse de quasi-compacité permet de supposer que $\mathscr{X}$ est affine. Comme la formation des noyaux commute à l'oubli de Φ (resp. $\Phi^{(m+s)}$) sur $F\mathscr{D}^{\dagger}(\mathscr{X})$ (resp. $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$), un morphisme de $F\mathscr{D}^{\dagger}(\mathscr{X})$ (resp. $F\mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{X})$) est un monomorphisme si et seulement si le morphisme de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (resp. $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules) sous-jacent est un monomorphisme. Grâce au théorème A et à l'énoncé précédent, l'assertion résulte alors de ce que l'anneau $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est un anneau nœthérien [5, 3.3.4].

4.5.6. Sous certaines hypothèses, les résultats de cette section s'étendent aisément au cas de faisceaux d'opérateurs différentiels à coefficients dans une $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-algèbre sur laquelle ils opèrent. On suppose pour cela qu'on dispose des données suivantes :

a) un système inductif de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-algèbres $(\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}})_{m \geq m_0}$, tel que chaque $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ soit complète pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique;

b) pour tout m, une structure de $\mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module (donc, par continuité, de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module) sur $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, compatible à sa structure de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module, et telle que l'homomorphisme $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{B}^{(m+1)}_{\mathscr{X}}$ soit $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-linéaire;

c) une famille d'isomorphismes $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-linéaires

$$F^*\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}, \tag{4.5.6.1}$$

compatibles pour m variable.

On pose alors, comme en 4.2.1, $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} = \mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}} = \varinjlim_m \widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$. Les isomorphismes (4.5.6.1) fournissent des isomorphismes de faisceaux d'anneaux

$$(F^*\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$$

compatibles pour m variable, d'où l'isomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$\varinjlim_{m} ((F^*\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}}.$$

Si $\mathscr{E}$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module, la proposition 4.2.2 appliquée à $\mathscr{E}^{\sigma}$ permet de munir $F^*\mathscr{E}$ d'une structure de module sur l'anneau $\varinjlim_m ((F^*\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Grâce à l'isomorphisme précédent, on obtient donc sur $F^*\mathscr{E}$ une structure naturelle de $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module. Généralisant 4.5.1, on peut alors définir la notion de *F-$\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module* comme constituée par la donnée d'un $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E}$ et d'un isomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$. Le théorème 4.5.4 reste alors valable pour les F-$\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules de présentation finie, fournissant une équivalence avec la catégorie des couples $(\mathscr{E}^{(m)}, \Phi^{(m+s)})$, où $\mathscr{E}^{(m)}$ est un $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module de présentation finie, et $\Phi^{(m+s)} : \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}^{(m)}$ un isomorphisme $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire.

De même, si l'on suppose que les homomorphismes $\widetilde{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \to \widetilde{\mathscr{D}}^{(m+1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ sont plats, et que les faisceaux d'algèbres $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}}/\mathfrak{m}^i\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ sont quasi-cohérents, à section nœthériennes sur les ouverts affines, le corollaire 4.5.5 reste valable.

On observera que toutes ces hypothèses sont satisfaites lorsqu'on se donne un diviseur $Z \subset X$, et qu'on prend $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{X}} = \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z, p^{m+1})$, de sorte que $\widetilde{\mathscr{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$. Les énoncés 4.5.4 et 4.5.5 s'appliquent donc aux F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules.

4.6. Relations avec les F-isocristaux

Soit $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, de fibre spéciale X. Dans [3] et [5], nous avons montré comment la catégorie des isocristaux convergents sur X (resp. surconvergents le long d'un diviseur $Z \subset X$) peut s'interpréter en termes de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (resp. $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules). Nous étendons ici cette interprétation à la structure de F-isocristal, en la reliant à celle de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module. Nous supposons encore fixé un entier $s \geq 1$, et nous considèrerons plus généralement la catégorie des F^s-isocristaux; pour simplifier, nous les appelerons simplement F-isocristaux dans ce qui suit.

Nous noterons $\mathscr{X}_K$ la fibre générique de $\mathscr{X}$ (au sens des espaces analytiques rigides), et sp : $(\mathscr{X}_K, \mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}) \to (\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ le morphisme de spécialisation correspondant (qui est un morphisme de sites annelés).

Nous traiterons d'abord le cas des F-isocristaux convergents, pour lesquels l'énoncé est plus simple. Les résultats qui suivent nous permettront d'identifier la catégorie des F-isocristaux convergents sur X à une sous-catégorie pleine de la catégorie $F\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{X})$ des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

4.6.1. Rappelons que la donnée du relèvement $\mathscr{X}$ de X permet de décrire la catégorie des isocristaux convergents sur X comme équivalente à la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-modules cohérents E munis d'une connexion ∇ intégrable et convergente, *i.e.* telle que la série de Taylor définissant la stratification associée soit convergente sur le tube de la diagonale de X dans $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$. Le $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E} = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E$ possède alors une structure naturelle de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module, définie de la manière suivante [3, (3.1.1)] : si $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ est un ouvert affine, la finitude de $\Gamma(\mathscr{U}_K, E)$ sur $\Gamma(\mathscr{U}_K, \mathscr{O}_{\mathscr{X}_K})$ fournit sur $\Gamma(\mathscr{U}_K, E)$ une topologie naturelle d'espace de Banach ; si $\mathscr{U}$ est muni de coordonnées locales définissant des dérivations ∂_i, la condition de convergence signifie que, pour tout $\eta < 1$, $\|\underline{\partial}^{[\underline{k}]}e_{\underline{k}}\|\,\eta^{|\underline{k}|} \to 0$ pour $k \to \infty$, la norme étant l'une quelconque des normes de Banach sur $\Gamma(\mathscr{U}_K, E)$; la donnée de la connexion détermine l'action de $\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, et cette action se prolonge alors par continuité en une action de $\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ grâce à la condition de convergence de la connexion.

D'après [5, 4.1.4], le foncteur sp_* définit ainsi une équivalence entre la catégorie des isocristaux convergents sur X et celle des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérents (qui sont alors automatiquement $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérents).

4.6.2. LEMME. — *Soient $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses relevant $F^s_{X/k}$, et E' un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'_K}$-module cohérent, muni d'une connexion intégrable et convergente. Il existe un isomorphisme canonique $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire*

$$F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F^*_K E'. \tag{4.6.2.1}$$

Observons d'abord que, pour tout morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels $f : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$, et tout $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'_K}$-module cohérent E', il existe un isomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire

$$f^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}f^*_K E'. \tag{4.6.2.2}$$

En effet, les théorèmes de Kiehl [30] et la construction du morphisme $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'}$ entraînent que le $\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-module $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'$ est cohérent, et le morphisme canonique $\mathrm{sp}^*_{\mathscr{X}'}\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \to E'$ un isomorphisme. Compte tenu de la fonctorialité du morphisme de spécialisation, on en déduit l'isomorphisme

$$\mathrm{sp}^*_{\mathscr{X}}f^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } f^*_K\mathrm{sp}^*_{\mathscr{X}'}\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } f^*_K E'.$$

Comme le $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E} = f^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'$ est cohérent, on voit de même que le morphisme $\mathscr{E} \to \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}\mathrm{sp}^*_{\mathscr{X}}\mathscr{E}$ est un isomorphisme, ce qui donne l'isomorphisme cherché :

$$f^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}\mathrm{sp}^*_{\mathscr{X}}f^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}f^*_K E'.$$

Supposons maintenant que $\mathscr{X}'$ soit lisse, et que E' soit muni d'une connexion intégrable et convergente. D'après 4.6.1, le $\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-module $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'$ est alors muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-module. Sous les hypothèses de l'énoncé, la méthode de 4.2.4 permet de munir $F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'$ d'une structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module. D'autre part, l'image inverse d'une connexion convergente est encore convergente, de sorte que $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F^*_K E'$ possède également une structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module.

La $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéarité de l'isomorphisme (4.6.2.1) est une propriété locale sur $\mathscr{X}$, ce qui permet de supposer que $\mathscr{X}$ est affine et possède un système de coordonnées locales $t_1,\dots,t_d$, définissant des dérivations $\partial_1,\dots,\partial_d$. On vérifie d'abord facilement que (4.6.2.1) commute à l'action des dérivations ∂_i : il suffit de considérer le morphisme $F_1 : P^1_{\mathscr{X}} \to P^1_{\mathscr{X}'}$ induit par $F \times F$ entre les voisinages infinitésimaux du premier ordre de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$, et d'appliquer à la stratification définissant la connexion de E' la fonctorialité de l'isomorphisme (4.6.2.2) correspondant à F_1. L'action de $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ sur $\Gamma(\mathscr{X}, \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F^*_K E')$ est déterminée par continuité à partir de celle des ∂_i grâce à la topologie de Banach de $\Gamma(\mathscr{X}, \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F^*_K E')$, définie par sa structure de $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module. D'autre part, nous avons défini la structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module de $F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'$ par réduction au cas de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$, grâce à l'identification

$$F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } (F^*\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'.$$

Un opérateur $P \in \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ appartient au sous-anneau $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ pour m assez grand, et son action sur $F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'$ peut aussi être décrite par l'identification

$$F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } (F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'.$$

Comme $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'$ est aussi cohérent sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$, il s'ensuit que $(F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E'$ est cohérent sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Par suite, $\Gamma(\mathscr{X}, (F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E')$ est un module de type fini sur l'algèbre de Banach nœthérienne $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, ce qui permet de le munir d'une topologie de module de Banach. De plus, pour tout $e' \in \Gamma(\mathscr{X}', \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E')$, l'application $\Gamma(\mathscr{X}, F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \to \Gamma(\mathscr{X}, (F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_*E')$ définie par la tensorisation avec e' est continue pour les topologies de $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-modules [13, 3.7.3]. Il en résulte que l'action de $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ sur $\Gamma(\mathscr{X}, F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E')$ est déterminée par celle des ∂_i, par continuité pour cette topologie. Or, d'après le lemme 4.1.2 de [5], les topologies de $\Gamma(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module et de $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module sur $\Gamma(\mathscr{X}, F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E')$ coïncident. Par conséquent, la compatibilité de (4.6.2.1) à l'action des ∂_i entraîne que c'est un isomorphisme $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-linéaire pour tout m, d'où le lemme.

4.6.3. PROPOSITION. — *Le foncteur* sp_* *induit une équivalence entre la catégorie des F-isocristaux convergents sur X et celle des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérents.*

Soient $\mathscr{X}' = \mathscr{X}^\sigma$ le $\mathcal{V}$-schéma formel déduit de $\mathscr{X}$ par changement de base par σ, et F_X l'endomorphisme de Frobenius absolu de X. Supposons d'abord donné un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ relevant $F^s_{X/k}$. La donnée de F permet de décrire le foncteur image inverse F^{s*}_X sur la catégorie des isocristaux convergents comme étant le composé de l'extension des scalaires par σ et du foncteur image inverse usuel F^*_K pour les modules à connexion intégrable (ces deux opérations préservant la condition de convergence). Si E est un isocristal convergent sur X, la donnée d'une structure de F-isocristal convergent sur E est la donnée d'un isomorphisme horizontal $\phi : F^*_K E^\sigma \xrightarrow{\sim} E$. Puisque $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}$ est une équivalence de catégorie entre isocristaux convergents sur X et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérents, on voit grâce au lemme 4.6.2 que la donnée de ϕ équivaut à celle du morphisme $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire défini par $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(\phi^{-1})$

$$\Phi\ :\ \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F^*_K E^\sigma \xrightarrow{\sim} F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^\sigma \xrightarrow{\sim} F^*(\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E)^\sigma,$$

soit encore à la donnée d'une structure de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module sur $\mathcal{E} = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E$.

Soient F, F' deux relèvements de $F^s_{X/k}$. Par la construction précédente, on obtient alors deux isomorphismes $\Phi : \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E \xrightarrow{\sim} F^*(\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E)^\sigma$ et $\Phi' : \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E \xrightarrow{\sim} F'^*(\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E)^\sigma$. Comme nous l'avons observé dans la remarque (i) de 4.2.4, on dispose d'autre part d'un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules $\tau_{F,F'}\ :\ F'^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^\sigma \xrightarrow{\sim} F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^\sigma$. Pour prouver que la structure de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{E}$ est indépendante du choix de F, il faut prouver l'égalité $\tau_{F,F'} \circ \Phi' = \Phi$. Les morphismes Φ et Φ' sont définis par les lignes du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F'^{*}_{K}E^{\sigma} & \xrightarrow{\sim} & F'^{*}\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma} & \xrightarrow{\sim} & F'^{*}(\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E)^{\sigma} \\
\Vert & & \wr\downarrow \mathrm{sp}_{*}(\varepsilon_{F,F'}) & & \wr\downarrow \tau_{F,F'} & & \wr\downarrow \tau_{F,F'} \\
\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F^{*}_{K}E^{\sigma} & \xrightarrow{\sim} & F^{*}\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma} & \xrightarrow{\sim} & F^{*}(\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E)^{\sigma}
\end{array},$$

dans lequel l'isomorphisme $\varepsilon_{F,F'} : F'^{*}_{K}E^{\sigma} \xrightarrow{\sim} F^{*}_{K}E^{\sigma}$ est défini grâce à la convergence de la stratification de E^{σ}. Le fait que le carré de gauche commute est conséquence de la fonctorialité de la catégorie des isocristaux convergents par rapport aux morphismes définis sur la fibre spéciale : l'isomorphisme $\varepsilon_{F,F'}$ est l'isomorphisme canonique qui identifie les deux réalisations du foncteur $F^{s*}_{X/k}$ fournies par F^{*}_{K} et F'^{*}_{K}, isomorphisme grâce auquel la notion de F-isocristal convergent possède un sens intrinsèque. Le carré de droite étant trivialement commutatif, on est ramené à prouver la commutativité de celui du centre.

C'est une assertion locale, ce qui permet de supposer que $\mathscr{X}$ est affine et que $\mathscr{X}'$ possède un système de coordonnées locales $t'_1, \ldots, t'_d$, définissant des dérivations $\partial'_1, \ldots, \partial'_d$. Soient $e \in \Gamma(\mathscr{X}'_K,\ E^{\sigma})$, et $F'^{*}_{K}(e) \in \Gamma(\mathscr{X}_K,\ F'^{*}_{K}E^{\sigma}) = \Gamma(\mathscr{X}, \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F'^{*}_{K}E^{\sigma})$. L'élément $\varepsilon_{F,F'}(F'^{*}_{K}(e)) \in \Gamma(\mathscr{X}_K, F^{*}_{K}E^{\sigma})$ est défini par

$$\varepsilon_{F,F'}(F'^{*}_{K}(e)) = \sum_{\underline{k}} (F'^{*}_{K}(\underline{t}') - F^{*}_{K}(\underline{t}'))^{[\underline{k}]} F^{*}_{K}(\underline{\partial}'^{\underline{k}}e),$$

série qui converge pour la topologie naturelle d'espace de Banach de $\Gamma(\mathscr{X}_K,\ F^{*}_{K}E^{\sigma})$ (définie par sa structure de $\Gamma(\mathscr{X}_K,\ \mathcal{O}_{\mathscr{X}_K})$-module de type fini). D'autre part, nous avons défini en 4.2.4 l'isomorphisme $\tau_{F,F'}$ par réduction au cas de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$, grâce aux identifications

$$F'^{*}\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma} \xrightarrow{\sim} (F'^{*}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma}$$

(resp. F^{*}), et à l'isomorphisme $\tau_{F,F'}$ relatif à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$. Ce dernier est obtenu par passage à la limite inductive pour m variable à partir des isomorphismes

$$\tau^{(m+s)}_{F,F'} : F'^{*}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} F^{*}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}},$$

définis pour m assez grand. On a alors

$$\tau_{F,F'}(F'^{*}_{K}(e)) = \Big(\sum_{\underline{k}} (F'^{*}(\underline{t}') - F^{*}(\underline{t}'))^{\{\underline{k}\}} F^{*}(\underline{\partial}'^{\langle\underline{k}\rangle})\Big) \otimes e;$$

dans cette expression, la série est convergente pour la topologie naturelle d'espace de Banach sur $\Gamma(\mathscr{X}, F^{*}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$, définie par sa structure de module de type fini sur l'algèbre de Banach nœthérienne $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Comme $\Gamma(\mathscr{X}, (F^{*}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma})$ est également un $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini, il possède lui aussi une topologie naturelle de module de Banach, et l'homomorphisme $\Gamma(\mathscr{X}, F^{*}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \to \Gamma(\mathscr{X}, (F^{*}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma})$ défini par la tensorisation par e est continu pour ces topologies. Il en résulte que

$$\tau_{F,F'}(F'^{*}_{K}(e)) = \sum_{\underline{k}} \big((F'^{*}(\underline{t}') - F^{*}(\underline{t}'))^{\{\underline{k}\}} F^{*}(\underline{\partial}'^{\langle\underline{k}\rangle}) \otimes e\big)$$

$$= \sum_{\underline{k}} ((F'^*(\underline{t}') - F^*(\underline{t}'))^{\{\underline{k}\}} F^*(1 \otimes \underline{\partial}'^{\langle \underline{k} \rangle} e)),$$

où la somme converge ici pour la topologie de Banach de $\Gamma(\mathscr{X}, (F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^\sigma)$, définie par sa structure de $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module. Or, d'après [5, 4.1.2], les topologies sur $\Gamma(\mathscr{X}, (F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \otimes \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^\sigma) \simeq \Gamma(\mathscr{X}_K, F_K^*E^\sigma)$ définies par les structures de $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module et de $\Gamma(\mathscr{X}_K, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module coïncident. Avec l'identification (4.6.2.1), il s'ensuit que $\tau_{F,F'} = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(\varepsilon_{F,F'})$, d'où la commutativité voulue.

Nous avons donc ainsi obtenu l'équivalence de catégories annoncée lorsque $F^s_{X/k}$ se relève sur $\mathscr{V}$, et montré que celle-ci ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de ce relèvement. Par recollement, on en déduit alors l'énoncé dans le cas général.

4.6.4. *Remarque.* — Dans le cas des isocristaux convergents, le théorème 4.5.4 s'explicite de manière tautologique. En effet, si $\mathscr{E}$ est un isocristal convergent, l'homomorphisme canonique $\mathscr{E} \to \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}$ est un isomorphisme pour tout m [3, (3.1.4)]. Il en résulte que, quels que soient $m \leq m'$, l'homomorphisme

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}, \tag{4.6.4.1}$$

défini par l'action de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ sur $\mathscr{E}$, est un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire, inverse de l'isomorphisme d'extension des scalaires. Si $\Phi : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$ munit $\mathscr{E}$ d'une structure de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module, l'objet de $F\mathscr{D}^{(m)}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{X})$ qui lui correspond par 4.5.4 est alors simplement constitué de $\mathscr{E}$ lui-même, qui est cohérent sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ d'après [3, (3.1.4)], muni de l'isomorphisme

$$\Phi^{(m+s)} : \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{E} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\mathscr{E}.$$

En effet, la structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module de $\mathscr{E}$ fournit un homomorphisme $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, qui est un isomorphisme par passage à la limite à partir de (4.6.4.1). On vérifie immédiatement que cet isomorphisme identifie la structure de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}$ déduite de $\Phi^{(m+s)}$ par extension des scalaires à la structure Φ donnée sur $\mathscr{E}$.

4.6.5. Voyons maintenant comment les résultats précédents se généralisent aux F-isocristaux surconvergents. On suppose donc donné un diviseur Z dans X, et on note respectivement Y et $\mathscr{Y}$ les complémentaires de Z dans X et dans $\mathscr{X}$. On reprend les notations de [5], ainsi que de 2.2.8 (ii), 4.1.1 et 4.2.1, et, pour tout entier $m \geq 0$, on pose

$$\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z) = \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z, p^{m+1}), \quad \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) = \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z) \otimes \mathbb{Q},$$

$$\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z), \quad \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z) \,\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}.$$

Soient j l'inclusion de Y dans X, et $]Y[\ = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}}^{-1}(Y) \subset \mathscr{X}_K$ le tube de Y dans $\mathscr{X}$. Si f est un relèvement dans $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ d'une équation locale de Z dans X, nous noterons U_r l'ouvert de $\mathscr{X}_K$ défini localement par la condition $|f(x)| \geq p^{-1/p^{r+1}}$: si r est assez grand, il ne dépend pas du choix de f, et les ouverts U_r ainsi définis localement se recollent, de sorte que cet ouvert est bien défini. Pour r variable, les U_r forment un système fondamental de voisinages stricts de $]Y[$ dans $\mathscr{X}_K$ (*cf.* [2] ou [4]). On note j_r l'inclusion de U_r dans $\mathscr{X}_K$, et, pour tout faisceau abélien M sur $\mathscr{X}_K$, on pose

$$j^\dagger M = \varinjlim_r j_{r*} j_r^* M.$$

Par construction, on a $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*} j_{r*} \mathscr{O}_{U_r} = \widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z)$, d'où, compte tenu de la quasi-compacité du morphisme $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}}$, $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*} j^\dagger \mathscr{O}_{\mathscr{X}_K} = \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$. D'après [5, 4.4.2], le foncteur sp_* induit une équivalence entre la catégorie des $j_{r*}\mathscr{O}_{U_r}$-modules (resp. $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-modules) cohérents, et celle des $\widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z)$-modules (resp. $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-modules) cohérents.

Sous les présentes hypothèses, la catégorie des isocristaux sur Y surconvergents le long de Z est équivalente à la catégorie des $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-modules localement libres de rang fini E, munis d'une connexion ∇ intégrable et surconvergente le long de Z, *i.e.* telle que la série de Taylor définissant la stratification correspondante soit induite par un isomorphisme de $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K\times\mathscr{X}_K}$-modules sur le tube de X dans $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$. En explicitant la condition de surconvergence en coordonnées locales, on voit alors que, pour tout isocristal E sur Y, surconvergent le long de Z, le $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-module $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E$ est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-module [5, 4.4.3].

4.6.6. LEMME. — *Soient $Z' \subset X^{(s)}$ le diviseur déduit de Z par changement de base par le Frobenius absolu F_k^s, $j' : Y^{(s)} \hookrightarrow X^{(s)}$, $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses relevant $F^s_{X/k}$, $\mathscr{Y}' = \mathscr{X}' \setminus Z'$. Si E' est un $j'^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}'_K}$-module cohérent muni d'une connexion intégrable et surconvergente le long de Z', il existe un isomorphisme canonique $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire*

$$F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F_K^*E'. \tag{4.6.6.1}$$

Considérons d'abord plus généralement un morphisme de schémas formels $f : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ et un diviseur $Z' \subset X'$ tel que $Z'' = X \times_{X'} Z'$ soit un diviseur de X. La compatibilité des algèbres $\mathscr{B}_{X'_i}(Z', p^{r+1})$ aux images inverses (voir 2.2.8 (ii), b)) permet de considérer f comme un morphisme d'espaces annelés $(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z'')) \to (\mathscr{X}', \widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z'))$, et aussi, par passage à la limite inductive, comme un morphisme $(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'')) \to (\mathscr{X}', \mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'))$. Considérons alors les morphismes $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}}$ et $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'}$ comme des morphismes d'espaces annelés

$$\mathrm{sp}_{\mathscr{X}} : (\mathscr{X}_K, j''_{r*}\mathscr{O}_{U''_r}) \to (\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z'')), \quad \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'} : (\mathscr{X}'_K, j'_{r*}o_{U'_r}) \to (\mathscr{X}', \widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z'))$$

$$(\text{resp.}\quad (\mathscr{X}_K, j''^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}) \to (\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'')), \quad (\mathscr{X}'_K, j'^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}'_K}) \to (\mathscr{X}', \mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'))),$$

où $j'_r : U'_r \subset \mathscr{X}'_K$, $j''_r : U''_r \subset \mathscr{X}_K$ sont les immersions ouvertes définies à partir de Z' et Z'' comme j_r l'a été plus haut à partir de Z. Comme les foncteurs $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}$ et $\mathrm{sp}^*_{\mathscr{X}}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre les catégories des $j''_{r*}\mathscr{O}_{U''_r}$-modules cohérents et des $\widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z'')$-modules cohérents (resp. $j''^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-modules cohérents et $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'')$-modules cohérents), et de même sur $\mathscr{X}'$, l'argument du lemme 4.6.2 s'étend tel quel, et fournit pour tout $j'_{r*}\mathscr{O}_{U'_r}$-module cohérent E' (resp. $j'^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}'_K}$-module cohérent) un isomorphisme $\widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z'')$-linéaire (resp. $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'')$-linéaire)

$$f^*\,\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}f_K^*E', \tag{4.6.6.2}$$

les foncteurs f^* et f_K^* étant pris pour les morphismes d'espaces annelés considérés ici.

Si l'on revient au cas du morphisme $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ considéré dans l'énoncé, et d'un $j'^\dagger\mathcal{O}_{\mathscr{X}'_K}$-module E' cohérent muni d'une connexion intégrable surconvergente le long de Z', on a alors $Z'' = p^sZ$, $j'' = j$, $U''_r = U_{r+s}$, $\widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z'') = \widehat{\mathscr{B}}^{(r+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z)$ (d'après (4.1.1.1)), $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'') = \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$. On voit encore en passant par les stratifications associées à la connexion que cet isomorphisme est $(\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{D}_{\mathscr{X}})$-linéaire. Pour prouver qu'il est $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire, on utilise [5, 4.4.5] pour passer par continuité de l'action de $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{D}_{\mathscr{X}}$ à celle de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ de la manière suivante. Il existe un entier r'_0 et un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}'_K}$-module localement libre de rang fini E'_0 sur $U'_{r'_0}$, muni d'une connexion intégrable surconvergente, tel que $E' \simeq j'^\dagger E'_0$ en tant que module à connexion. Si $\mathscr{E}'_0 = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}j'_{r'_0*}E'_0$, $\mathscr{E}'_0$ est alors un $\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_0)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z')$-module cohérent, et il existe pour $r \geq r'_0$ des isomorphismes

$$\widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \otimes \mathscr{E}'_0 \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}j_{r*}j_r^*E'_0,$$

$$\varinjlim_{r\geq r'_0} \widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \otimes \mathscr{E}'_0 \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E', \tag{4.6.6.3}$$

respectivement $\widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z')$ et $\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$-linéaire ; de plus, il existe une suite d'entiers r'_m, avec $r'_m \geq \max(m, r'_{m-1})$, et une structure de $(\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$-module sur $\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \otimes \mathscr{E}'_0$, telles que les homomorphismes

$$\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \otimes \mathscr{E}'_0 \longrightarrow \widehat{\mathscr{B}}^{(r'_{m+1})}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \otimes \mathscr{E}'_0$$

soient $(\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$-linéaires, et l'isomorphisme (4.6.6.3) $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$-linéaire. Comme $F^*\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \simeq \widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z)$, $F^*(\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \otimes \mathscr{E}'_0)$ est muni d'une structure naturelle de $\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module. De même, $E_0 = F_K^*E'_0$ est un module localement libre de type fini à connexion intégrable et surconvergente sur $U_{r'_0+s}$, tel que $F_K^*E' \simeq j^\dagger(E_0)$; de plus, si $\mathscr{E}_0 = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(E_0)$, $\mathscr{E}_0$ satisfait de manière naturelle la condition analogue à celle de $\mathscr{E}'_0$ pour la suite d'entiers r_{m+s}, avec $m \geq 0$, telle que $r_{m+s} = r'_m + s$. Pour prouver que (4.6.6.1) est $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-linéaire, il suffit alors de prouver que, pour tout m, l'isomorphisme

$$F^*(\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \otimes \mathscr{E}'_0) \xrightarrow{\ \sim\ } \widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \otimes \mathscr{E}_0$$

défini également par (4.6.6.1) est $(\widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-linéaire. Or, pour tout ouvert affine $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$, l'action de $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ sur le terme de droite prolonge par continuité celle de $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \otimes \mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ grâce à la topologie de Banach définie sur $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes \mathscr{E}_0)$ par sa structure de module de type fini sur l'algèbre de Banach nœthérienne $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z))$. Sur le terme de gauche, on voit comme dans la démonstration de 4.6.2 que l'action de $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ prolonge par continuité celle de $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \otimes \mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ grâce à la topologie de Banach définie sur $\Gamma(\mathscr{U}, F^*(\widehat{\mathscr{B}}^{(r'_m)}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(Z') \otimes \mathscr{E}'_0))$ par sa structure de module de type fini sur l'algèbre de Banach nœthérienne

$\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{B}}^{(r_{m+s})}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Comme ces deux topologies coïncident d'après [5, 4.1.2], le lemme en résulte.

4.6.7. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 4.6.5, *soient E un isocristal sur Y, surconvergent le long de Z. La donnée d'une structure de F-isocristal (surconvergent le long de Z) sur E équivaut à celle d'une structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module sur $\mathscr{E} = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E$.*

Soient Z' l'image inverse de Z dans $X^{(s)}$, $j' : Y^{(s)} \hookrightarrow X^{(s)}$, F_X le Frobenius absolu de X, $\mathscr{X}' = \mathscr{X}^{\sigma}$. Supposons d'abord qu'il existe un $\mathscr{V}$-morphisme $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ relevant $F^s_{X/k}$. Le foncteur F^*_X sur la catégorie des F-isocristaux sur Y surconvergents le long de Z est alors obtenu par composition de l'extension des scalaires par σ, et du foncteur image inverse F^*_K de la catégorie des $j'^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}'_K}$-modules à connexion intégrable et surconvergente dans celle des $j^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-modules à connexion intégrable et surconvergente. Or, d'après [5, 4.4.5], le foncteur $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}$ est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux sur Y surconvergents le long de Z dans la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules. La donnée d'une structure de F-isocristal sur un tel isocristal E est par définition la donnée d'un isomorphisme $\phi : F^*_K E^{\sigma} \xrightarrow{\sim} E$. Elle équivaut donc à la donnée de l'isomorphisme $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(\phi^{-1}) : \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(F^*_K E^{\sigma})$. Comme, d'après 4.6.6, on dispose d'un isomorphisme canonique $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaire $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(F^*_K E^{\sigma}) \xrightarrow{\sim} F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma}$, on voit que la donnée de ϕ équivaut à celle d'une structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module sur $\mathscr{E} = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(E)$.

Pour en déduire l'énoncé dans le cas général, on procède comme dans la démonstration de 4.6.3. Il faut encore vérifier que, si l'on se donne deux relèvements locaux F, F' de $F^s_{X/k}$, les isomorphismes canoniques $\varepsilon_{F,F'} : F'^*_K E^{\sigma} \xrightarrow{\sim} F^*_K E^{\sigma}$ qui permettent de définir par recollement la structure de F-isocristal de E correspondent, au moyen des identifications

$$\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}F^*_K E^{\sigma} \xrightarrow{\sim} F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma} \xrightarrow{\sim} (F^*\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z')) \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z')} \mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma}, \tag{4.6.7.1}$$

(resp. F') aux isomorphismes $\tau_{F,F'} : F'^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma} \xrightarrow{\sim} F^*\mathrm{sp}_{\mathscr{X}'*}E^{\sigma}$ qui permettent de définir la structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module de $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}E$. Comme ces identifications sont $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-linéaires, de sorte que les isomorphismes $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(\varepsilon_{F,F'})$ et $\tau_{F,F'}$ sont localement définis comme en 4.6.3 par des séries de Taylor dont les termes généraux se correspondent, il suffit de vérifier que ces séries convergent pour des topologies qui se correspondent dans les identifications. Si $\mathscr{U}$ est un ouvert affine de $\mathscr{X}$, on ne dispose plus comme en 4.6.3 de topologies de Banach sur les modules de sections pour lesquelles ces séries convergent, mais on peut se ramener à une limite de situations analogues en choisissant un voisinage strict U_{r_0} du tube de Y dans $\mathscr{X}_K$, et un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-module E_0 localement libre de rang fini sur U_{r_0}, muni d'une connexion intégrable surconvergente, tel que $E \simeq j^{\dagger}E_0$ en tant que $j^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-module à connexion. Si l'on pose $\mathscr{E}_{r_0} = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}j_{r_0*}E_0$, $\mathscr{E}_r = \mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}j_{r*}j^*_r E_0 \simeq \widehat{\mathscr{B}}^{(r)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \otimes \mathscr{E}_{r_0}$, alors il existe comme dans la démonstration de 4.6.6 une suite croissante d'entiers $r_m \geq m$ telle que le $\widehat{\mathscr{B}}^{(r_m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z)$-module de type fini $\mathscr{E}_{r_m}$ soit aussi muni d'une structure de $(\widehat{\mathscr{B}}^{(r_m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini, et les flèches $\mathscr{E}_{r_m} \to \mathscr{E}_{r_{m+1}}$

soient $(\widehat{\mathscr{B}}^{(r_m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z) \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$- linéaires. Les identifications (4.6.7.1) et les isomorphismes $\varepsilon_{F,F'}$ et $\tau_{F,F'}$ proviennent alors d'identifications et d'isomorphismes analogues pour chaque m par passage à la limite pour $m \to \infty$. Pour m fixé, on peut raisonner comme en 4.6.3 pour vérifier que les séries de Taylor définissant $\mathrm{sp}_{\mathscr{X}*}(\varepsilon_{F,F'})$ et $\tau_{F,F'}$ convergent vers des éléments de $\Gamma(\mathscr{U}_K, j_{r_m+s*} j^*_{r_m+s} F^*_K E_0)$ et $\Gamma(\mathscr{U}, F^*\mathscr{E}_{r_m})$ qui se correspondent via (4.6.7.1), et l'assertion en résulte ensuite par passage à la limite.

Appendice : Filtration m-PD-adique

Soient R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ un m-PD-idéal de R, A une R-algèbre, $I \subset A$ un idéal muni d'une m-PD-structure (J, γ) compatible à $(\mathfrak{b}, \alpha)$. Cette m-PD-structure permet de munir A d'une filtration par des sous-idéaux $I^{\{n\}}$ de I, appelée filtration m-PD-adique, dont une définition est donnée dans [5, 1.3.7]. Sous les hypothèses où cette définition est utilisée dans [5] (essentiellement celles de [5, 1.5.3]), elle fournit bien le résultat voulu. Sous des hypothèses plus générales, il s'avère qu'elle ne possède pas toujours les propriétés de nilpotence que l'on souhaite. En particulier, si $p = 2$, l'exemple de [5, 1.3.7] n'est pas correct. En effet, supposons que $A = \mathbb{Z}_2$, $I = 2A$, et que $J \subset I$ définisse une m-PD-structure sur I pour un certain $m \geq 0$. Alors $2 \in (J + pA) \cap I$, de sorte qu'avec la définition de [5], on obtient que $2^{[n]} \in I^{\{n\}}$ pour tout n, d'après [5, 1.3.8 (i)]. Or $2^{[n]}$ ne tend pas vers 0 pour $n \to \infty$, si bien que, quel que soit m, la filtration ainsi définie n'est pas topologiquement nilpotente.

Nous allons donc introduire ici une définition légèrement modifiée, fournissant une filtration plus fine que celle de [5]. Avec cette définition, l'exemple de [5, 1.3.7] devient valable, ainsi que toutes les autres propriétés démontrées dans [5] — à l'exception de la première assertion de [5, 1.3.8 (i)], que l'on veut précisément invalider. En particulier, les deux définitions fournissent la même filtration sous les hypothèses de [5, 1.5.3], de sorte que, dans le cas lisse, cette modification ne change pas les faisceaux de parties principales à puissances divisées partielles [5, 2.1], ni les faisceaux d'opérateurs différentiels correspondants.

A.1. Notons β la PD-structure de $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$ prolongeant α et la PD-structure canonique de (p), et $\bar{\beta}$ l'extension de β à $\mathfrak{b}_1 A$. L'idéal $J_1 = J + \mathfrak{b}_1 A$ est muni d'une PD-structure canonique prolongeant γ et $\bar{\beta}$, et, pour $y \in J_1$, et $a \in \mathbb{N}$, nous noterons $y^{[a]}$ les puissances divisées correspondantes. Pour $x \in I$, nous noterons comme d'habitude $x^{\{n\}}$ les puissances divisées partielles de x. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des filtrations décroissantes $(F^n A)_{n \geq 0}$ de A qui vérifient les propriétés suivantes :

(i) $F^0 A = A$, $F^1 A = I$, et, quels que soient n, $n' \geq 0$, $F^n A \cdot F^{n'} A \subset F^{n+n'} A$.

(ii) Quels que soient $n \geq 1$, $x \in F^n A$ et $k \geq 0$, $x^{\{k\}} \in F^{kn} A$.

(iii) Quel que soit $n \geq 0$, $J_1 \cap F^n A$ est un sous-PD-idéal de J_1.

L'idéal $J \cap F^n A = J \cap (J_1 \cap F^n A)$ est alors un sous-PD-idéal de J_1, et, pour tout

$n \geq 1$, il définit sur F^nA une m-PD-structure. Elle est compatible à $(\mathfrak{b}, \alpha)$, car d'une part $\mathfrak{b}_1A \cap F^nA = \mathfrak{b}_1A \cap (J_1 \cap F^nA)$ est un sous-PD-idéal de J_1, donc de $\mathfrak{b}_1A$, d'autre part les PD-structures de $\mathfrak{b}_1$ et $J \cap F^nA$ sont compatibles, puisque celles de $\mathfrak{b}_1$ et J le sont par hypothèse.

A.2. PROPOSITION. — *Dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des filtrations vérifiant les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *de* A.1, *il existe une filtration $(I^{\{n\}})_{n\geq 0}$ plus fine que les autres.*

Observons que le PD-idéal J_1 est stable à la fois par les opérations de puissances divisées $y^{[a]}$ et par les opérations de puissances divisées partielles $y^{\{b\}}$. On introduit la notation suivante: si $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_t)$, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_t)$ sont deux suites d'entiers ≥ 1, on pose

$$y^{[\underline{a};\underline{b}\}} = ((\ldots(((y^{[a_1]})^{\{b_1\}})^{[a_2]})^{\{b_2\}}\ldots)^{[a_t]})^{\{b_t\}}.$$

On a donc en particulier $y^{[a]} = y^{[a;1\}}$, $y^{\{b\}} = y^{[1;b\}}$. Si $\underline{a}'$, $\underline{b}'$, $\underline{a}''$, $\underline{b}''$ sont des suites d'entiers comme plus haut, et si l'on pose $\underline{a} = (a'_1, \ldots, a'_{t'}, a''_1, \ldots, a''_{t''})$, $\underline{b} = (b'_1, \ldots, b'_{t'}, b''_1, \ldots, b''_{t''})$, on a $(y^{[\underline{a}';\underline{b}'\}})^{[\underline{a}'';\underline{b}''\}} = y^{[\underline{a};\underline{b}\}}$. On remarquera que, quels que soient $x \in A$, $y \in J_1$, on a

$$(xy)^{[\underline{a};\underline{b}\}} = x^{a_1b_1\cdots a_tb_t}y^{[\underline{a};\underline{b}\}}.$$

Comme dans [5], on note I_n l'idéal de A engendré par les produits de la forme $x_1^{\{n_1\}}\ldots x_r^{\{n_r\}}$, avec $x_i \in I$ pour tout i, et $\sum n_i \geq n$. On définit alors $I^{\{n\}}$ comme l'idéal de A engendré par les produits de la forme

$$x_1^{\{n_1\}}\ldots x_r^{\{n_r\}}y_1^{[\underline{a}_1;\underline{b}_1\}}\ldots y_s^{[\underline{a}_s;\underline{b}_s\}}, \tag{A.2.1}$$

où $x_i \in I$, $y_j \in J_1 \cap I_{d_j}$ pour certains entiers d_j, $\underline{a}_j = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,t_j})$, $\underline{b}_j = (b_{j,1}, \ldots, b_{j,t_j})$, avec $t_j \geq 1$, $a_{j,k} \geq 1$, $b_{j,k} \geq 1$, et

$$\sum_{i=1}^{r} n_i + \sum_{j=1}^{s} d_j b_{j,1}\ldots b_{j,t_j} \geq n.$$

Comme $J_1 \cap I$ est un sous-PD-idéal de J_1 grâce à [5, (1.3.2.2)], les $I^{\{n\}}$ forment bien une filtration d'anneau de A telle que $I^{\{1\}} = I$, donc vérifiant (i). Les propriétés des puissances divisées partielles montrent que, pour vérifier (ii), il suffit de le faire pour un générateur de la forme (A.2.1), et cela résulte encore de ces propriétés. Pour vérifier (iii), on observe qu'un élément $z \in J_1 \cap I^{\{n\}}$ peut s'écrire comme somme d'un élément $z' \in I_n$ et d'une combinaison linéaire d'éléments z''_α qui sont de la forme (A.2.1) avec $s \geq 1$. Les éléments z''_α étant dans $J_1 \cap I^{\{n\}}$, l'élément z' est dans $J_1 \cap I_n$, et, par définition, $z'^{[h]} = z'^{[h;1\}}$ appartient à $I^{\{n\}}$ pour tout $h \geq 1$. D'autre part, si z''_α est de la forme $z''_\alpha = u_\alpha y_\alpha^{[\underline{a};\underline{b}\}}$, on voit que $z''^{[h]}_\alpha = (u_\alpha)^h y_\alpha^{[\underline{a},h;\underline{b},1\}}$ est aussi dans $I^{\{n\}}$ pour tout $h \geq 1$. Il en résulte que $J_1 \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de J_1. A fortiori, $J \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de J, qui munit alors $I^{\{n\}}$ d'une m-PD-structure, et $\mathfrak{b}_1A \cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de $\mathfrak{b}_1A$, ce qui entraîne que cette structure est compatible à $(\mathfrak{b}, \alpha)$.

Si (F^nA) est une filtration de $\mathcal{F}$, alors $x^{\{n\}} \in F^nA$ pour tout $x \in I$ et tout n, d'après (i) et (ii). Il résulte alors de (i) que $I_d \subset F^dA$ pour tout $d \geq 0$. Si $y \in J_1 \cap F^dA$, la condition (iii) entraîne que $y^{[a]} \in J_1 \cap F^dA$ pour tout $a \geq 1$, et la condition (ii) entraîne que $(y^{[a]})^{\{b\}} \in J_1 \cap F^{db}A$ pour tout $b \geq 1$. Appliquant encore (i), on voit que $I^{\{n\}} \subset F^nA$ pour tout n.

Nous adopterons désormais les définitions suivantes :

A.3. *Définition.* — Sous les hypothèses de A.1, la *filtration m-PD-adique* de A est la filtration par les idéaux $I^{\{n\}}$ dont l'existence est assurée par la proposition A.2. Il est clair qu'elle est fonctorielle par rapport à (A, I, J, γ). Cette filtration dépend du choix de m, et, si nécessaire, nous le préciserons par la notation $I^{\{n\}_{(m)}}$.

Nous dirons désormais que I est *m-PD-nilpotent* si, avec la définition de A.2, il existe un entier n tel que $I^{\{n\}} = 0$; lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous dirons plus simplement que I est *PD-nilpotent* (*cf.* la remarque (vi) plus bas). De même, lorsque I' est un idéal quelconque d'une R-algèbre A', les enveloppes à puissances divisées partielles nilpotentes $P^n_{(m),\alpha}(I')$ seront désormais définies comme étant les quotients de $P_{(m),\alpha}(I')$ par la filtration m-PD-adique au sens de la présente définition.

Remarques. — (i) On observera qu'on ne modifie pas l'idéal $I^{\{n\}}$ en restreignant la famille de générateurs considérés en (A.2.1) de la manière suivante :

(A.3.1) Si $n > 0$, on peut supposer $n_i \geq 1$, $d_j \geq 1$.

(A.3.2) On peut supposer $b_{j,k} \geq p^{m+1}$ pour tout j et tout $k < t_j$. En effet, si $z \in J_1$, et si $b < p^{m+1}$, on a $z^{\{b\}} = uz^b$, avec $u \in \mathbb{Z}^*_{(p)}$. Il s'ensuit que, si $y \in J_1 \cap I_d$, et si la suite $\underline{b}$ est telle que $b_k < p^{m+1}$, on peut écrire $y^{[\underline{a};\underline{b}\}}$ sous la forme

$$y^{[\underline{a};\underline{b}\}} = c((y^{[\underline{a}';\underline{b}'\}})^{[a_k;1\}})^{(b_k-1)a_{k+1}b_{k+1}\cdots a_tb_t}(y^{[\underline{a}';\underline{b}'\}})^{[\underline{a}'';\underline{b}''\}},$$

avec $c \in \mathbb{Z}_{(p)}$, $\underline{a}' = (a_1, \ldots, a_{k-1})$, $\underline{b}' = (b_1, \ldots, b_{k-1})$, $\underline{a}'' = (a_ka_{k+1}, \ldots, a_t)$, $\underline{b}'' = (b_{k+1}, \ldots, b_t)$. L'assertion en résulte.

(ii) La filtration ainsi définie coïncide encore avec la filtration PD-adique pour $m = 0$, et avec la filtration I-adique en caractéristique 0.

(iii) Notons $I^{\{n\}'}$ la filtration définie en [5, 1.3.7]. Il résulte de [5, 1.3.8] que cette filtration est dans $\mathcal{F}$. A fortiori, on a $I_n \subset I^{\{n\}} \subset I^{\{n\}'}$ pour tout n. On observera qu'on peut avoir $I^{\{n\}} \neq I^{\{n\}'}$, comme le montrent la remarque initiale et la proposition A.4 plus bas.

(iv) Supposons que A soit l'algèbre $R\langle t_1, \ldots, t_d\rangle_{(m)}$ des polynômes à puissances divisées de niveau m en d variables [5, 1.5.1], et I son m-PD-idéal canonique, engendré par les $t_i^{\{n\}}$, pour $1 \leq i \leq d$, $n \geq 1$. Alors on a $I_n = I^{\{n\}} = I^{\{n\}'}$, et $I^{\{n\}}$ est donc le R-module libre de base les produits $t_1^{\{n_1\}} \ldots t_d^{\{n_d\}}$, avec $\sum n_i \geq n$: en effet, on a dans ce cas $I^{\{n\}'} = I_n$, d'après [5, 1.5.1]. L'assertion (ii) de [5, 1.5.1] reste donc valable avec la définition de la filtration m-PD-adique donnée ici.

(v) Pour $m' \geq m$, considérons (J, γ) comme définissant une m'-PD-structure sur I. Si $I^{\{n\}_{(m)}}$ et $I^{\{n\}_{(m')}}$ sont respectivement les filtrations m-PD-adique et m'-PD-adique, on a $I^{\{n\}_{(m')}} \subset I^{\{n\}_{(m)}}$ pour tout n.

(vi) On prendra garde que la condition de m-PD-nilpotence sur I n'implique pas que J

soit PD-nilpotent au sens classique, c'est à dire qu'il existe un entier n' tel que $J^{[n']} = 0$: un exemple en est fourni par l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, pour $n \geq 2$, dans lequel l'idéal maximal $\mathfrak{m} = 2\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ possède une PD-structure canonique non PD-nilpotente; par contre, si l'on considère $\mathfrak{m}$ comme définissant une 1-PD-structure sur lui-même, celle-ci est 1-PD-nilpotente d'après l'exemple qui suit.

Précisons en effet la filtration obtenue dans le cas d'un anneau de valuation discrète.

A.4. PROPOSITION. — *Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, e son indice de ramification, π une uniformisante de $\mathcal{V}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^h$ un idéal de $\mathcal{V}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}^k$ un sous-idéal de $\mathfrak{a}$, m un entier. On suppose que k et m sont tels que $\mathfrak{b}$ soit un PD-idéal de $\mathcal{V}$ et définisse une m-PD-structure sur $\mathfrak{a}$.*

(i) *La filtration m-PD-adique de $\mathfrak{a}$ est donnée par*

$$\mathfrak{a}^{\{n\}} = \mathfrak{a}_n = ((\pi^h)^{\{n'\}})_{n' \geq n}.$$

Elle est indépendante du choix de $\mathfrak{b}$, et elle est m-PD-nilpotente si et seulement si

$$p^m h > e/(p-1).$$

(ii) *Soient A une $\mathcal{V}$-algèbre, $I = \mathfrak{a}A$, $J = \mathfrak{b}A$. Alors J, muni de la PD-structure prolongeant celle de $\mathfrak{b}$, définit une m-PD-structure sur I, et la filtration m-PD-adique correspondante est donnée par $I^{\{n\}} = \mathfrak{a}^{\{n\}}A$.*

En particulier, on voit que $\mathfrak{m}$ possède une m-PD-structure topologiquement m-PD-nilpotente si et seulement si $p^m > e/(p-1)$, de sorte que, avec la définition adoptée ici, l'exemple de [5, 1.3.7] est valable.

Compte tenu des relations entre les opérations de puissances divisées partielles, la définition de $\mathfrak{a}_n$ entraîne que cet idéal est engendré par les éléments $(\pi^h)^{\{n'\}}$, avec $n' \geq n$. De même, il est clair que $I_n = \mathfrak{a}_n A$, que les I_n vérifient les conditions (i) et (ii) de A.1, et que la filtration par les I_n est plus fine que toute filtration vérifiant les conditions (i) à (iii) de A.1. Comme la filtration m-PD-adique est la plus fine de celles qui vérifient ces conditions, il suffit de s'assurer que, si $J_1 = J + pA$, alors $J_1 \cap \mathfrak{a}_n A$ est un sous-PD-idéal de J_1. Or on a d'une part $J_1 = \pi^{k'}A$, avec $k' = \min(e, k)$, d'autre part $\mathfrak{a}_n = (\pi^{c_n})$ pour un certain entier c_n, de sorte que $J_1 \cap \mathfrak{a}_n A = \pi^{c'}A$, avec $c' = \max(c_n, k')$. Si $c_n \leq k'$, $J_1 \cap \mathfrak{a}_n A = J_1$, et l'assertion est claire. Sinon, un élément $x \in J_1 \cap \mathfrak{a}_n A$ s'écrit $x = \pi^{c'}y$, et, pour $i \geq 1$, $x^{[i]} = (\pi^{c'})^{[i]}y^i$; l'assertion résulte alors de ce que $(\pi^{c'})^{[i]} \in (\pi^{c'})$.

Comme $\mathcal{V}$ est sans p-torsion, la PD-structure d'un idéal de $\mathcal{V}$ est unique lorsqu'elle existe. Il s'ensuit que, sur $\mathfrak{a}$, les opérations $x \longmapsto x^{\{n\}}$ sont idépendantes du PD-idéal $\mathfrak{b}$ définissant la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$. Ce qui précède entraîne qu'il en est alors de même pour la filtration $I^{\{n\}}$. Enfin, puisque $\mathfrak{a}^{\{n\}} = ((\pi^h)^{\{n'\}})_{n' \geq n}$, la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$ est topologiquement m-PD-nilpotente si et seulement si $(\pi^h)^{\{n\}}$ tend vers 0 pour $n \to \infty$. Or, si $n = p^m q + r$, avec $0 \leq r < p^m$, on a $(\pi^h)^{\{n\}} = \pi^{rh}(\pi^{p^m h})^{[q]}$, et $(\pi^{p^m h})^{[q]} \to 0$ pour $q \to \infty$ si et seulement si $p^m h > e/(p-1)$.

Montrons maintenant qu'avec la présente définition, la proposition [5, 1.3.8] reste vraie (à l'exception de la première assertion de (i)). Compte tenu de ce que les $I^{\{n\}}$ vérifient les conditions (i) à (iii) de A.1, il reste à vérifier :

A.5. PROPOSITION. — *Avec les notations et les hypothèses de* A.3, *la filtration m-PD-adique de A vérifie les propriétés suivantes* :

(i) *Soient* $n \geq 1$, $\bar{A} = A/I^{\{n\}}$, $\pi : A \to \bar{A}$ *l'homomorphisme canonique,* $\bar{I} = I\bar{A}$, $\bar{J} = J\bar{A}$, $\bar{\gamma}$ *la PD-structure quotient sur* $\bar{J}$. *Alors* $(\bar{J}, \bar{\gamma})$ *définit sur* $\bar{I}$ *une m-PD-structure compatible à* $(\mathfrak{b}, \alpha)$, π *est un morphisme strict pour les filtrations m-PD-adiques, et* π *est universel pour les m-PD-morphismes de* (A, I, J, γ) *dans une R-algèbre* A' *munie d'un m-PD-idéal* (I', J', γ') *compatible à* $(\mathfrak{b}, \alpha)$ *et tel que* $I'^{\{n\}} = 0$.

(ii) *Soient* $A \to A'$ *un homomorphisme plat,* $I' = IA'$, *muni de la m-PD-structure* $(J' = JA', \gamma')$ *étendant celle de* I (cf. [5, 1.3.2 (i)]). *La filtration m-PD-adique de* A' *est donnée par* $I'^{\{n\}} = I^{\{n\}}A'$.

La condition (iii) de A.1 entraîne que la PD-structure γ passe au quotient sur $\bar{J}$, et que la PD-structure $\bar{\gamma}$ obtenue est strictement compatible à $(\mathfrak{b}, \alpha)$. Elle munit donc $\bar{I}$ d'une m-PD-structure compatible à $(\mathfrak{b}, \alpha)$, pour laquelle on a $\pi(I_d) = \bar{I}_d$ pour tout d. En particulier, $\bar{I}_n = 0$. Pour prouver que π est strict, il suffit de montrer que, si $y \in \bar{J}_1 \cap \bar{I}_d$, alors $y^{[\underline{a};\underline{b}]} \in \pi(I^{\{db_1 \cdots b_t\}})$ pour tout $\underline{a}$ et tout $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_t)$. On peut supposer que $d < n$, et écrire $y = \pi(y') = \pi(z)$, avec $y' \in I_d$, $z \in J_1$, et $y' - z \in I^{\{n\}} \subset I^{\{d\}}$. Par suite, $z \in J_1 \cap I^{\{d\}}$; il résulte alors de (i) et (ii) que $z^{[\underline{a},\underline{b}]} \in I^{\{db_1 \cdots b_t\}}$, d'où l'assertion. Puisque π est strict, on a $\bar{I}^{\{n\}} = 0$, et le quotient $A/I^{\{n\}}$ possède la propriété universelle voulue.

La dernière assertion se voit comme en [5, 1.3.8].

Remarque. — Sous les hypothèses de [5, 1.5.3], les enveloppes à puissances divisées partielles nilpotentes ne changent pas si l'on remplace dans leur définition la filtration de [5, 1.3.7] par celle que nous considérons à présent. En effet, compte tenu de (iv) plus haut, l'argument de platitude de [5, 1.5.3] ramène au cas d'une algèbre de polynômes, qui résulte de la remarque faite en A.3, (iv).

A.6. PROPOSITION. — (i) *Pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *la filtration m-PD-adique définie sur* $A_i = A/p^{i+1}A$ *par l'image* $\bar{I}$ *de* I, *munie de la m-PD-structure quotient, est l'image de la filtration m-PD-adique de A. En particulier, la filtration m-PD-adique de A est topologiquement m-PD-nilpotente si et seulement si, pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *la filtration m-PD-adique de* A_i *est m-PD-nilpotente.*

(ii) *Supposons que p soit nilpotent dans A. Alors la filtration m-PD-adique de A est m-PD-nilpotente si et seulement s'il existe un entier n tel que* $I_n = 0$.

Soient $\pi : A \to A_i$, $\bar{J}_1$ l'image de J_1 dans A_i. Si $y \in \bar{J}_1 \cap \bar{I}_d$, on peut écrire $y = \pi(y') = \pi(z)$, avec $y' \in I_d$, $z \in J_1$, et $y' - z \in p^{i+1}A \subset J_1$. Par suite, $y' \in J_1 \cap I_d$, et l'assertion (i) est claire.

Comme $I_n \subset I^{\{n\}}$, la condition de (ii) est nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, on peut supposer $m \geq 1$. Fixons un entier n tel que $I_n = 0$, et considérons l'ensemble $\mathbb{E}$ des familles d'entiers de la forme

$$\Delta = (r, \underline{n} = (n_1, \ldots, n_r), s, \underline{d} = (d_1, \ldots, d_s), \underline{t} = (t_1, \ldots, t_s), \underline{\underline{b}} = (b_{j,k})_{1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq t_j}),$$

où $r, s \geq 0$, n_i, d_j, t_j, $b_{j,t_j} \geq 1$, et $b_{j,k} \geq p^{m+1}$ pour tout (j, k) avec $k < t_j$. Soit $\mathbb{E}_0 \subset \mathbb{E}$ le sous-ensemble des familles Δ telles qu'il existe des éléments $x_i \in I$, $y_j \in J_1 \cap I_{d_j}$, et des suites $\underline{\underline{a}} = (a_{j,k})_{1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq t_j}$, avec $a_{j,k} \geq 1$ pour tous j, k, tels que l'élément (A.2.1) correspondant soit non nul. Alors $\mathbb{E}_0$ est un ensemble fini. En effet, on observe d'abord que l'on a $r < n$, $s < n$, puisque chaque élément $x_i^{\{n_i\}}$, $y_j^{[\underline{a}_j ; \underline{b}_j]}$ appartient à I. De même, on a $n_i < n$, $d_j < n$, $b_{j,k} < n$ pour tous i, j, k. Il suffit donc de montrer que les t_j sont uniformément bornés. Si l'on pose $b_{j,1} = p^m q_{j,1} + r_{j,1}$, avec $0 \leq r_{j,1} < p^m$, on a $(y_j^{[a_{j,1}]})^{\{b_{j,1}\}} = (b_{j,1}!/q_{j,1}!)(y_j^{[a_{j,1}]})^{[b_{j,1}]}$. Or, si $t_j > 1$, on a $b_{j,1} \geq p^{m+1} \geq p$, et $b_{j,1}!/q_{j,1}!$ est divisible par p. Par suite, $(y_j^{[a_{j,1}]})^{\{b_{j,1}\}}$ est de la forme pz, avec $z \in J_1$, ce qui entraîne que $y_j^{[\underline{a};\underline{b}]}$ est divisible par $p^{a_{j,2}b_{j,2} \cdots a_{j,t}b_{j,t}}$, où $t = t_j$. Comme $a_{j,k} \geq 1$, $b_{j,t_j} \geq 1$ pour tous j, k, et $b_{j,k} \geq p^{m+1} \geq p^2$ pour tout $k < t_j$, il en résulte que $p^{2(t_j - 2)} < c$, où c est tel que $p^c = 0$ dans A.

Soit alors n_0 le maximum des valeurs de $n(\Delta) = \sum_i n_i + \sum_j d_j b_{j,1} \ldots b_{j,t_j}$ pour $\Delta \in \mathbb{E}_0$, et soit $n' > n_0$. Comme, d'après (A.3.1) et (A.3.2), l'idéal $I^{\{n'\}}$ possède un système de générateurs qui correspondent tous à une famille $\Delta \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{E}_0$, ces générateurs sont tous nuls, et I est m-PD-nilpotent.

A.7. COROLLAIRE. — (i) *Soit $A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux tel que γ s'étende strictement à A'* (*relativement à* $(\mathfrak{b}_1, \beta)$ [5, 1.2.2]). *Si I est m-PD-nilpotent, et si p est nilpotent dans A', alors $I' = IA'$, muni de la m-PD-structure définie par JA'* (*qui est compatible à* $(\mathfrak{b}, \alpha)$), *est m-PD-nilpotent.*

(ii) *Soient (I', J', γ'), (I'', J'', γ'') deux m-PD-idéaux de A, tels que γ' et γ'' soient strictement compatibles* (*relativement à* $(\mathfrak{b}_1, \beta)$ [5, 1.2.2]). *Si I' et I'' sont m-PD-nilpotents, et si p est nilpotent dans A, alors $I = I' + I''$, muni de la m-PD-structure définie par $J = J' + J''$* (*qui est compatible à* $(\mathfrak{b}, \alpha)$), *est m-PD-nilpotent.*

Compte tenu de A.6, la première assertion résulte de ce que $I'_n = I_n A'$, et la seconde de ce que $I_n = \sum_{n'+n''=n} I'_{n'} I''_{n''}$.

A.8. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* A.1, *soient $A = R\langle t_1, \ldots, t_d \rangle_{(m)}$ l'algèbre de polynômes à puissances divisées de niveau m à coefficients dans R, $I = \langle t_1, \ldots, t_d \rangle$ son m-PD-idéal canonique, $J \subset I$ le sous-PD-idéal canonique, $I' = I + \mathfrak{a}A$, $J' = J + \mathfrak{b}A$. On fixe un entier n_0, et on note $\bar{A} = A/I^{\{n_0+1\}}$, $\bar{I}'$ et $\bar{J}'$ les image de I' et J' dans $\bar{A}$. On munit J' et $\bar{J}'$ de l'unique PD-structure prolongeant celles de J et de* $\mathfrak{b}$, *ce qui munit I' et $\bar{I}'$ de m-PD-*

structures. Les filtrations m-PD-adiques de I' et $\bar{I}'$ sont alors données par

(A.8.1) $$I'^{\{n\}} = \{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{t}^{\{\underline{k}\}} \mid \forall\, \underline{k},\, a_{\underline{k}} \in \mathfrak{a}^{\{n-|\underline{k}|\}} \},$$

(A.8.2) $$\bar{I}'^{\{n\}} = \{ \sum_{|\underline{k}| \leq n_0} a_{\underline{k}} \underline{t}^{\{\underline{k}\}} \mid \forall\, \underline{k},\, a_{\underline{k}} \in \mathfrak{a}^{\{n-|\underline{k}|\}} \}.$$

Soit $\mathrm{Fil}^n A$ la filtration de A définie par le second membre de (A.8.1). Par fonctorialité et multiplicativité, il est clair que $\mathrm{Fil}^n A \subset I'^{\{n\}}$ pour tout n. La caractérisation des $I'^{\{n\}}$ donnée en A.2 entraîne alors qu'il suffit de vérifier que la filtration $\mathrm{Fil}^n A$ satisfait les conditions (i) - (iii) de A.1. La condition (i) est évidente. Comme $\mathrm{Fil}^n A$ est un idéal gradué, les propriétés d'additivité et d'homogénéité des opérations $x^{\{n\}}$ ramènent la vérification de la condition (ii) au cas d'un élément de la forme $a_{\underline{k}} \underline{t}^{\{\underline{k}\}}$, qui est clair. Pour vérifier (iii), posons $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + pR$, $J'_1 = J' + \mathfrak{b}_1 A$. Il faut alors s'assurer que, pour tout $n \geq 1$, $J'_1 \cap \mathrm{Fil}^n A$ est un sous-PD-idéal de J'_1. Comme J'_1 et $\mathrm{Fil}^n A$ sont gradués, on se ramène encore à montrer que les puissances divisées de tout élément de $J'_1 \cap \mathrm{Fil}^n A$ de la forme $a_{\underline{k}} \underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ sont dans $\mathrm{Fil}^n A$, ce qui résulte des propriétés analogues de $\mathfrak{a}^{\{n-|\underline{k}|\}}$ et des $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$.

L'assertion relative à $\bar{A}$ se montre de la même manière.

A.9. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de* A.8, *$\bar{I}'$ est m-PD-nilpotent si et seulement si $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent.*

Cela résulte aussitôt de A.8.

Bibliographie

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32** (1960-67).

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer-Verlag (1972).

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lecture Notes in Math. **225**, Springer-Verlag (1971).

[1] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. **407**, Springer-Verlag (1974).

[2] P. Berthelot, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p*, Journées d'analyse p-adique (1982), in *Introduction aux cohomologies p-adiques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23**, p. 7-32 (1986).

[3] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*, Proc. Conf. *p-adic Analysis* (Trento 1989), Lecture Notes in Math. **1454**, p. 78-124, Springer-Verlag (1990).

[4] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, première partie, Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[5] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **29**, p. 185-272 (1996).

[6] P. Berthelot, *Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes*, C. R. Acad. Sc. Paris **323**, p. 35-40 (1996).

[7] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques III. Images directes et inverses*, en cours de rédaction.

[8] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques IV. Variété caractéristique*, en préparation.

[9] P. Berthelot, A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology I*, Invent. Math. **72**, p. 159-199 (1983).

[10] J.-E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland (1979).

[11] J.-E. Björk, *Analytic $\mathscr{D}$-modules and applications*, Mathematics and its applications **247**, Kluwer (1993).

[12] A. Borel et al., *Algebraic D-modules*, Perspectives in Math. **2**, Academic Press (1987).

[13] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der math. Wissenschaften **261**, Springer-Verlag (1984).

[14] P. Cartier, *Une nouvelle opération sur les formes différentielles*, C. R. Acad. Sc. Paris **244**, p. 426-428 (1957).

[15] P. Cartier, *Dérivations et diviseurs en géométrie algébrique*, Thèse Fac. Sc. Paris, Gauthier-Villars (1959).

[16] G. Christol, *Systèmes différentiels linéaires p-adiques, structure de Frobenius faible*, Bull. Soc, Math. France **109**, p. 83-122 (1981).

[17] G. Christol, *Modules différentiels et équations différentielles p-adiques*, Queen's Papers in Pure and Applied Math. **66**, Queen's University (1983).

[18] G. Christol, B. Dwork, *Modules différentiels sur les couronnes*, Ann. Inst. Fourier **44**, p. 663-701 (1994).

[19] G. Christol, Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II*, Annals of Math. **146**, p. 345-410 (1997).

[20] B. Conrad, *Base change and Grothendieck duality I & II*, preprints (1998).

[21] P. Deligne, *Intégration sur un cycle évanescent*, Invent. Math. **76**, p. 129-143 (1983).

[22] B. Dwork, *On p-adic differential equations I. The Frobenius structure of differential equations*, Table Ronde Anal. non archim., Paris (1972), Bull. Soc. Math. France, Mémoire **39-40**, p. 27-37 (1974).

[23] L. Garnier, *Quelques propriétés des $\mathscr{D}^\dagger$-modules holonomes sur les courbes*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes (1993).

[24] L. Garnier, *Descente par Frobenius explicite pour les $\mathscr{D}^\dagger$-modules*, preprint, à paraître au Journal of Algebra.

[25] L. Garnier, *Descente des isocristaux et $\mathscr{D}^\dagger$-modules,* Prépublication Lab. Maths. Pures Bordeaux **49** (1997), à paraître aux Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

[26] A. Grothendieck, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes*, notes by J. Coates and O. Jussila, *in Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland (1968).

[27] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag (1966).

[28] M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial differential equations* (Master's thesis, Tokyo University, 1970), trad. par A. D'Agnolo et J.-P. Schneiders, Mémoires Soc. Math. France **63** (1995).

[29] N. M. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turittin*, Publ. Math. IHES **35**, p. 175-232 (1971).

[30] R. Kiehl, *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Invent. Math. **2**, p. 256-273 (1967).

[31] B. Le Stum, A. Quiros, *Transverse crystals of finite level,* Ann. Inst. Fourier **47**, p. 69-100 (1997).

[32] B. Malgrange, *Caractérisation homologique de la dimension*, in Séminaire *Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels*, Grenoble (1975-76).

[33] Z. Mebkhout, L. Narvaez-Macarro, *Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques*, Proc. Conf. *p-adic Analysis* (Trento 1989), Lecture Notes in Math. **1454**, p. 267-308, Springer-Verlag (1990).

[34] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, North-Holland (1982).

[35] T. Oda, *Introduction to Algebraic Analysis on Complex Manifolds*, in *Algebraic and Analytic Varieties*, Advanced Studies in Pure Math. **1**, p. 29-48 (1983).

[36] A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology II - Convergent isocrystals*, Duke Math. Journal **51**, p. 765-850 (1984).

[37] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS **24**, p. 849-995, Kyoto Univ. (1988).

[38] M. Saito, *Induced $\mathcal{D}$-modules and differential complexes*, Bull. Soc. Math. France **117**, p. 361-387 (1989).

[39] P. Schapira, *Microdifferential Systems in the Complex Domain*, Grundlehren der math. Wissenshaft **269**, Springer-Verlag (1985).

[40] A. Virrion, *Théorème de bidualité et caractérisation des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes*, C. R. Acad. Sc. Paris **319**, série A, p. 1283-1286 (1994).

[41] A. Virrion, *Théorèmes de dualité locale et globale dans la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes (1995).

[42] A. Virrion, *Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, Prépublication IRMAR 98-12, Université de Rennes (1998).

Pierre BERTHELOT
IRMAR
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France

e-mail : Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr
web : http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo