Géométrie algébrique/Algebraic geometry

Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes

Pierre BERTHELOT

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex, France.

Résumé. Soient $\mathscr{X}$ un schéma formel lisse sur un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ le complété faible du faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathscr{X}$, Z un diviseur de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$. Nous montrons que le faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ des fonctions à singularités surconvergentes le long de Z est cohérent sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.

Differential coherence of overconvergent function algebras

Abstract. *Let $\mathscr{X}$ be a smooth formal scheme over a mixed characteristic discrete valuation ring, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ the weak completion of the sheaf of differential operators on $\mathscr{X}$, Z a divisor of the special fiber of $\mathscr{X}$. We prove that the sheaf $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ of functions with overconvergent singularities along Z is coherent over $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.*

Abridged English Version

1. Overconvergent local cohomology

Let $\mathcal{V}$ be a complete discrete valuation ring of mixed characteristic $(0, p)$, k its residue field, $\mathfrak{m}$ its maximal ideal, $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}/\mathfrak{m}^{i+1}$. We fix an integer $m \geq 0$ such that the PD-ideal $(p) \subset \mathfrak{m}$ defines a topologically PD-nilpotent partial divided power structure of level m on $\mathfrak{m}$. Let Y be a smooth $\mathcal{V}_i$-scheme, $X \subset Y$ a closed subscheme. We denote by $\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I})$ the level m divided power envelope of the ideal $\mathscr{I}$ of X in Y, with compatibility with the m-PD-structure of $\mathfrak{m}$, and m-PD-nilpotency of order n [2, 2.1.1]. For any $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{E}$, we define

$$\underline{\Gamma}^{(m)}_X(\mathcal{E}) = \varinjlim_n \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I}), \mathcal{E}),$$

and we denote by $\mathscr{H}^{(m),q}_X$ the corresponding right derived functors. Thanks to the m-PD-nilpotency condition, these sheaves do not change if we replace X by its reduction mod $\mathfrak{m}$.

We now assume that X is a smooth closed subscheme of the reduction Y_0 of Y mod $\mathfrak{m}$. Then $\mathscr{H}^{(m),q}_X(\mathcal{O}_Y) = 0$ for $q \neq d = \operatorname{codim}_{Y_0}(X)$, $\mathscr{H}^{(m),d}_X(\mathcal{O}_Y)$ is flat over $\mathcal{V}_i$, and it commutes with reduction mod $\mathfrak{m}^{i'+1}$ for $i' \leq i$.

The sheaf $\mathscr{D}^{(m)}_Y$ of differential operators of level m acts on the left on the sheaf $\mathscr{H}^{(m),d}_X(\mathcal{O}_Y)$. If we assume that $u : X' \hookrightarrow Y$ is a closed immersion of smooth $\mathcal{V}_i$-schemes lifting $X \hookrightarrow Y_0$, then there exists a canonical isomorphism of $\mathscr{D}^{(m)}_Y$-modules $u^{(m)}_+(\mathcal{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{(m),d}_X(\mathcal{O}_Y)$, where $u^{(m)}_+$ denotes the direct image functor for complexes of $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules [4]. Using local liftings in the general case, it follows that $\mathscr{H}^{(m),d}_X(\mathcal{O}_Y)$ is coherent over $\mathscr{D}^{(m)}_Y$; if $t_1, \ldots, t_N$ are local coordinates on Y such that $t_1, \dots, t_d$ lift local equations for X in Y_0, we get a presentation

$$\mathscr{D}_Y^{(m)} / \Big(\sum_{\alpha \le d} \mathscr{D}_Y^{(m)} t_\alpha + \sum_{\substack{\alpha > d \\ \beta \le m}} \mathscr{D}_Y^{(m)} \partial_\alpha^{[p^\beta]} \Big) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_Y).$$

Let $\mathscr{Y}$ be a smooth formal $\mathscr{V}$-scheme, Y_i its reduction mod $\mathfrak{m}^{i+1}$, $X \hookrightarrow Y_0$ as above. We next define a coherent $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}}^{(m)}$-module $\mathscr{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y}})$ as $\varprojlim_i \mathscr{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{Y_i})$; if the subscript $\mathbb{Q}$ denotes tensorization with $\mathbb{Q}$, we get a coherent $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module denoted $\mathscr{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, with the simpler local presentation

$$\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{(m)} / \Big(\sum_{\alpha \le d} \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{(m)} t_\alpha + \sum_{\alpha > d} \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{(m)} \partial_\alpha \Big) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}).$$

We now let m vary, and define a coherent $\mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module $\mathscr{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) = \varinjlim_m \mathscr{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$. When there exists a closed immersion of smooth formal schemes $u : \mathscr{X} \hookrightarrow \mathscr{Y}$ lifting $X \hookrightarrow Y_0$, we again have an isomorphism $\mathscr{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} u_+^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, where $u_+^{\dagger}$ is the direct image functor for complexes of $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-modules.

2. Autoduality of local cohomology

We assume $\mathscr{Y}$ and X are as above. Locally, we can find a lifting $u : \mathscr{X} \hookrightarrow \mathscr{Y}$ of X, where $\mathscr{X}$ is a smooth closed formal subscheme of $\mathscr{Y}$. Let $\mathbb{D}_{\mathscr{Y}}^{\dagger}$, $\mathbb{D}_{\mathscr{X}}^{\dagger}$ denote the dualizing functors over $\mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}$, $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$. The relative duality theorem [8] for u allows to associate to $\mathscr{X}$ a canonical isomorphism

$$\mathbb{D}_{\mathscr{Y}}^{\dagger}(\mathscr{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathscr{Y}}^{\dagger}(\ u_+^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} u_+^{\dagger}(\mathbb{D}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} u_+^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}).$$

We prove that this isomorphism does not depend upon the choice of $\mathscr{X}$. This allows to define globally a canonical isomorphism $\mathbb{D}_{\mathscr{Y}}^{\dagger}(\mathscr{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ by gluing the local isomorphisms associated to local liftings of X.

3. The coherence theorem

THEOREM 3.1. — *Let $\mathscr{X}$ be a smooth formal $\mathscr{V}$-scheme, with special fiber X. If $Z \subset X$ is a divisor, the sheaf $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ of functions with overconvergent singularities along Z* [2, 4.2.4] *is coherent as a $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module.*

When Z is a divisor with normal crossings, the result is known by [1, (4.3.2)]. In general, we use de Jong's theorem on alterations of algebraic varieties [5, th. 3.1] to find a projective morphism $f : X' \to X$, where X' is smooth, f is étale and finite over a dense open subset of X, and $Z' = Z \times_X X'$ is such that Z'_{red} is a divisor with normal crossings. We choose a projective embedding $u : X' \hookrightarrow Y = \mathbb{P}_X^d$. We lift $g : Y \to X$ as $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ being the formal projective space of relative dimension d over $\mathscr{X}$. We define $\mathscr{E} = \mathscr{H}_{X'}^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, $\mathscr{H} = \mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^\dagger T) \otimes_{\mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}} \mathscr{E}$, where $T = g^{-1}(Z)$, and $\mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^\dagger T)$ is the sheaf of differential operators with overconvergent singularities along T as in [2, 4.2.5].

We first check that $\mathscr{H}$ is coherent as a $\mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module : locally, there exists a smooth lifting $u' : \mathscr{X}' \hookrightarrow \mathscr{Y}$ of X', and $\mathscr{H}$ can be identified with $u'^{\dagger}_{+}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'))$, which is coherent as u' is proper and Z'_{red} is a divisor with normal crossings in X'. Since g also is proper, it follows that $g_+^{\dagger}(\mathscr{H})$ has $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-coherent cohomology [4]. Therefore, it suffices to show that $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ is a direct factor of $g_+^{\dagger}(\mathscr{H})$.

We also have a direct image functor $\tilde{g}_+^{\dagger} : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^\dagger T)) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^\dagger Z))$; moreover, $\tilde{g}_+^{\dagger}$ and $g_+^{\dagger}$ commute with scalar restriction from $\mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^\dagger T)$ to $\mathscr{D}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}$, and from $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}({}^\dagger Z)$ to $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$. We define a morphism $\tau : g_+^{\dagger}(\mathscr{H}) \to \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ as the composite of the canonical morphism $g_+^{\dagger}\mathscr{H} \to g_+^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))[d]$, and of the morphism $g_+^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))[d] \to \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ deduced from the trace morphism of [6]. Applying the dualizing functor $\widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ for complexes of $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules, the relative duality theorem [6] and the autoduality isomorphism of the previous paragraph, we get a morphism $\tau' : \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z) \to g_{+}^{\dagger}(\mathscr{H})$. We then end the proof by checking that $\tau \circ \tau'$ is multiplication by the generic rank of X' over X; this can be done on the open subset on which X' is finite and étale over X, where we may assume that X' lifts to an étale cover $\mathscr{X}'$ of $\mathscr{X}$, and then conclude using standard properties of the trace.

Soient $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel k, de corps des fractions K, $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, X sa fibre spéciale, $Z \subset X$ un diviseur. On renvoie à [2] pour la définition des faisceaux d'opérateurs différentiels de niveau fini $\mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Si m est assez grand, et si $f \in \mathcal{O}_{\mathscr{X}}$ relève une équation locale de Z dans X, l'algèbre $\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z) = \mathcal{O}_{\mathscr{X}}\{T\}/(f^{p^{m+1}}T - p)$ est munie d'une action naturelle du faisceau $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, et ne dépend, à isomorphisme canonique près, que de $\mathscr{X}$ et Z (voir [2, 4.2.2]. L'algèbre des fonctions à singularités surconvergentes le long de Z est par définition $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z) \otimes \mathbb{Q}$; elle est munie d'une action du faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ compatible à sa structure de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-algèbre. Nous nous proposons de montrer que cette action fait de $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent.

On sait que, lorsque $\mathscr{X}$ est de plus propre sur $\mathscr{V}$, la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ s'identifie canoniquement à la cohomologie rigide du complémentaire U de Z dans X [1]. Ainsi que nous le montrerons ailleurs [4], la cohomologie de de Rham d'un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est un K-espace vectoriel de dimension finie lorsque $\mathscr{X}$ est propre. Le résultat obtenu ici entraîne donc la finitude de la cohomologie rigide de U, ce qui fournit une variante à la démonstration donnée dans [3].

1. Cohomologie locale surconvergente

1.1. On fixe un entier m assez grand pour que l'idéal $p\mathscr{V}$, muni de ses puissances divisées canoniques, définisse une m-PD-structure topologiquement m-PD-nilpotente sur $\mathfrak{m}$. Soient $i \geq 0$, $\mathscr{V}_i = \mathscr{V}/\mathfrak{m}^{i+1}$, Y un $\mathscr{V}_i$-schéma lisse, Y_0 sa réduction modulo $\mathfrak{m}$, $X \subset Y$ un sous-schéma fermé, $\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I})$ la PD-enveloppe de niveau m de l'idéal $\mathscr{I}$ de X dans Y, compatible à la m-PD-structure de $\mathfrak{m}$, et PD-nilpotente à l'ordre n [2]. Pour tout $\mathcal{O}_Y$-module $\mathscr{E}$, on pose

$$\underline{\Gamma}^{(m)}_X(\mathscr{E}) = \varinjlim_n \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I}), \mathscr{E}),$$

et on note $\mathscr{H}^{(m),q}_X$ les dérivés droits de $\underline{\Gamma}^{(m)}_X$. On dispose d'un morphisme naturel de foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_X \to \mathrm{Id}$.

La nilpotence de la m-PD-structure de $\mathfrak{m}$ entraîne que les foncteurs $\mathscr{H}^{(m),q}_X$ ne changent pas si l'on remplace X par sa réduction modulo $\mathfrak{m}$.

PROPOSITION 1.2. — *Supposons que X soit un k-schéma lisse, de codimension d dans Y_0, et que $\mathscr{E}$ soit plat sur $\mathcal{O}_Y$. Alors les $\mathscr{H}^{(m),q}_X(\mathscr{E})$ sont nuls pour $q \neq d$, plats sur $\mathscr{V}_i$, et leur formation commute à la réduction modulo $\mathfrak{m}^{i'}$ pour $i' \leq i$.*

L'assertion étant locale, on remplace X par un relèvement en un sous-schéma lisse $X' \subset Y$. En utilisant les résultats de [2] sur la filtration m-PD-adique, on se ramène alors aux propriétés classiques des $\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{X'}, \mathscr{E})$.

1.3. Le faisceau $\mathscr{D}^{(m)}_Y$ des opérateurs différentiels de niveau m agit à gauche sur le pro-objet $(\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I}))_{n\geq 0}$, de sorte que, lorsque $\mathscr{E}$ est muni d'une structure de $\mathscr{D}^{(m)}_Y$-module à gauche, le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_X^{(m)}(\mathcal{E})$ est muni par la formule habituelle d'une structure naturelle de complexe de $\mathcal{D}_Y^{(m)}$-modules à gauche. Plaçons nous désormais sous les hypothèses de 1.2. S'il existe un relèvement $u : X' \hookrightarrow Y$ de l'immersion $X \hookrightarrow Y_0$ donnée, on dispose comme en caractéristique 0 de foncteurs image inverse $u^{(m)!} : D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y^{(m)}) \to D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X'}^{(m)})$ et image directe $u_+^{(m)} : D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X'}^{(m)}) \to D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y^{(m)})$ (*cf.* [4]), et, pour tout $\mathcal{D}_Y^{(m)}$-module $\mathcal{E}$, d'un isomorphisme

$$u_+^{(m)}(\mathcal{H}^0 u^{(m)!}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{X'/Y}) \otimes_{\mathcal{D}_{X'}^{(m)}} (\omega_{X'/Y}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} {}_{\mathcal{I}'}\mathcal{E}),$$

où ${}_{\mathcal{I}'}\mathcal{E}$ est le sous-faisceau des sections de $\mathcal{E}$ annulées par l'idéal $\mathcal{I}'$ de X' dans Y. On en déduit un homomorphisme canonique $u_+(\mathcal{H}^0 u^{(m)!}(\mathcal{E})) \to \underline{\Gamma}_X^{(m)}(\mathcal{E})$. Par un calcul en coordonnées locales, et un argument classique de passage aux foncteurs dérivés, on obtient alors :

PROPOSITION 1.4. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe pour tout $\mathcal{D}_Y^{(m)}$-module $\mathcal{E}$ un isomorphisme canonique $u_+^{(m)}(u^{(m)!}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_X^{(m)}(\mathcal{E})$.*

COROLLAIRE 1.5. — *Sous les hypothèses de 1.2, le $\mathcal{D}_Y^{(m)}$-module $\mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_Y)$ est cohérent. Si $t_1,\dots,t_N$ sont des coordonnées locales relatives sur Y, telles que $t_1,\dots,t_d$ relèvent des équations de X dans Y_0, il existe une présentation*

$$\mathcal{D}_Y^{(m)} / \Big(\sum_{\alpha \le d} \mathcal{D}_Y^{(m)} t_\alpha + \sum_{\substack{\alpha > d \\ \beta \le m}} \mathcal{D}_Y^{(m)} \partial_\alpha^{[p^\beta]} \Big) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_Y). \tag{1.5.1}$$

1.6. Soient maintenant $\mathcal{Y}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, de réduction Y_i modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$, et $X \subset Y_0$ un sous-schéma fermé, lisse sur k, de codimension d. D'après 1.2 et 1.5, les $\mathcal{D}_{Y_i}^{(m)}$-modules $\mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{Y_i})$ sont cohérents et commutent à la réduction modulo $\mathfrak{m}^{i'}$ pour $i' \le i$. On définit donc un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module (resp. $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module) cohérent en posant

$$\mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) = \varprojlim_i \mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{Y_i}) \qquad (\text{resp. } \mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}) = \mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \otimes \mathbb{Q}).$$

La présentation locale (1.5.1) reste valable pour $\mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$; pour $\mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$, on obtient la présentation plus simple

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{(m)} / \Big(\sum_{\alpha \le d} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{(m)} t_\alpha + \sum_{\alpha > d} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{(m)} \partial_\alpha \Big) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}). \tag{1.6.1}$$

Pour $m' \ge m$, on dispose d'un homomorphisme naturel $\mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{Y_i}) \to \mathcal{H}_X^{(m'),d}(\mathcal{O}_{Y_i})$, qui définit par passage à la limite et semi-linéarité un homomorphisme

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{(m')} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{(m)}} \mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathcal{H}_X^{(m'),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}).$$

Il résulte de (1.6.1) que c'est un isomorphisme. Si on pose $\mathcal{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}) = \varinjlim_m \mathcal{H}_X^{(m),d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$, le $\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module ainsi obtenu est donc cohérent.

Lorsque X est relevable en un schéma formel lisse $\mathcal{X}$, plongé dans $\mathcal{Y}$ par une immersion fermée $u : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$, on voit par passage à la limite à partir de 1.4 qu'il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} u_+^{\dagger}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$, où $u_+^{\dagger} : D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}) \to D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger})$ désigne le foncteur image directe.

2. Autodualité de la cohomologie locale

2.1. Les hypothèses sont celles de 1.6. On note $\mathbb{D}_{\mathcal{Y}}^{\dagger}(\mathcal{E})$ le dual d'un complexe $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger})$, qui est encore un complexe de $D_{\mathrm{parf}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger})$ (voir [6] ou [7]). Il résulte de la présentation (1.6.1) que $\mathcal{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$ est dans $D_{\mathrm{parf}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger})$. On se propose de construire un isomorphisme canonique

$$\mathbb{D}_{\mathcal{Y}}^{\dagger}(\mathcal{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_X^{\dagger d}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}). \tag{2.1.1}$$

2.2. Localement, X se relève en un schéma formel $\mathcal{X}' \subset \mathcal{Y}$, lisse sur $\mathcal{V}$, plongé dans $\mathcal{Y}$ par une immersion fermée $u' : \mathscr{X}' \hookrightarrow \mathscr{Y}$. La résolution de Spencer de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ [1, (3.2.2)] montre que $\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ est parfait sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$, et donne naissance à un isomorphisme canonique $\mathbb{D}^\dagger_{\mathscr{X}'}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$. En appliquant le théorème de bidualité relative (*cf.* [6] ou [8]) à $\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ et à l'immersion fermée u', on voit grâce à 1.4 que la donnée de $\mathscr{X}'$ fournit un isomorphisme

(2.2.1)
$$\mathbb{D}^\dagger_{\mathscr{Y}}(\mathscr{H}^{\dagger d}_X(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^\dagger_{\mathscr{Y}}(\, u'^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} u'^\dagger_+(\mathbb{D}^\dagger_{\mathscr{X}'}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} u'^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{\dagger d}_X(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}).$$

Pour construire (2.1.1), il suffit donc de montrer que cet isomorphisme est indépendant du choix de $\mathscr{X}'$ et de recoller les isomorphismes locaux ainsi obtenus.

2.3. Soient $\mathscr{X}''$ un second relèvement local de X, et soient θ', θ'' les isomorphismes (2.2.1) définis par $\mathscr{X}'$ et $\mathscr{X}''$. On peut localiser, et supposer qu'il existe un $\mathcal{V}$-automorphisme $\varepsilon_{\mathscr{Y}}$ de $\mathscr{Y}$ se réduisant à l'identité sur Y_0, et induisant un isomorphisme $\varepsilon_{\mathscr{X}} : \mathscr{X}'' \xrightarrow{\sim} \mathscr{X}'$. On observe que $\varepsilon_{\mathscr{Y}+} = \varepsilon_{\mathscr{Y}*}$, et qu'on dispose d'un isomorphisme canonique $\varepsilon_{\mathscr{Y}+}(u''^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}'',\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} u''^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}'',\mathbb{Q}})$, inverse de celui qu'on déduit par adjonction de l'isomorphisme de Taylor défini par la structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$-module de $u''^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}'',\mathbb{Q}})$. Par des arguments de fonctorialité, on montre que, si l'on note $\mathscr{H} = \mathscr{H}^{\dagger d}_X(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, on peut insérer verticalement θ' et θ'' dans un carré commutatif dont l'un des côtés horizontaux est l'isomorphisme

(2.3.1) $$\mathscr{H} \xrightarrow{\sim} u'^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} u'^\dagger_+(\varepsilon_{\mathscr{X}+}(\mathcal{O}_{\mathscr{X}'',\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \varepsilon_{\mathscr{Y}+}(u''^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}'',\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} u''^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}'',\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H},$$

et l'autre est déduit de l'inverse de (2.3.1) en appliquant $\mathbb{D}^\dagger_{\mathscr{Y}}$. On vérifie alors par un calcul direct en coordonnées locales que (2.3.1) est l'identité de $\mathscr{H}$.

3. Le théorème de cohérence

THÉORÈME 3.1. — *Soient $\mathscr{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse de fibre spéciale X. Pour tout diviseur $Z \subset X$, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ des fonctions à singularités surconvergentes le long de Z est cohérent en tant que $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module.*

Lorsque Z est un diviseur à croisements normaux dans X, le résultat est connu d'après [1, (4.3.2)]. La démonstration va consister à déduire le cas général de ce cas particulier.

3.2. On peut supposer X irréductible. D'après le théorème de de Jong sur les altérations de variétés algébriques [5, th. 3.1], il existe un morphisme projectif $f : X' \to X$, fini et étale au-dessus d'un ouvert non vide de X, tel que X' soit lisse sur k et que, si $Z' = X' \times_X Z$, Z'_{red} soit un diviseur à croisements normaux de X'. On choisit un plongement projectif $u : X' \hookrightarrow Y = \mathbb{P}^d_X$. On note $g : Y \to X$ le morphisme structural, $T = g^{-1}(Z) \subset Y$ le diviseur image inverse de Z, et on relève g en $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$, où $\mathscr{Y}$ est l'espace projectif formel de dimension d au-dessus de $\mathscr{X}$.

On observe que $\mathrm{codim}_Y(X') = d$, et on pose $\mathcal{E} = \mathscr{H}^{\dagger d}_{X'}(\mathcal{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, $\mathscr{H} = \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$, où $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)$ est défini comme en [2, 4.2.5]; $\mathscr{H}$ est dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$.

PROPOSITION 3.3. — *Le faisceau $\mathscr{H}$ est cohérent sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$.*

Localement sur $\mathscr{Y}$, on peut supposer l'immersion u relevée en $u' : \mathscr{X}' \hookrightarrow \mathscr{Y}$, où $\mathscr{X}'$ est lisse sur $\mathcal{V}$. Il existe alors un isomorphisme canonique $\mathscr{H} \simeq u'^\dagger_+(\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'))$: si $u'_i : X'_i \hookrightarrow Y_i$ est la réduction de u' modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$, on a pour tout m un isomorphisme $u'^*_i(\mathscr{B}^{(m)}_{Y_i}(T)) \simeq \mathscr{B}^{(m)}_{X'_i}(Z')$ (où $\mathscr{B}^{(m)}$ est défini comme $\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}$ plus haut, *cf.* [2, 4.2.4]), et on en déduit les isomorphismes

$$\mathscr{B}^{(m)}_{Y_i}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}} \mathscr{H}^{(m),d}_{X'_i}(\mathcal{O}_{Y_i}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}^{(m)}_{Y_i}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}} u'^{(m)}_{i+}(\mathcal{O}_{X'_i}) \xrightarrow{\sim} u'^{(m)}_{i+}(\mathscr{B}^{(m)}_{X'_i}(Z'));$$

l'assertion en résulte par passage à la limite projective sur i, puis inductive sur m. Comme $\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z') = \mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z'_{\mathrm{red}})$, et que Z'_{red} est un diviseur à croisements normaux, $\mathcal{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$ est un

$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-module cohérent, et l'énoncé résulte de la finitude des images directes par un morphisme propre [4].

3.4. Comme g est propre, le théorème de finitude des images directes entraîne que $g^{\dagger}_{+}(\mathscr{H})$ est dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Pour achever la démonstration du théorème 3.1, il suffit donc de montrer que $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ est facteur direct de $g^{\dagger}_{+}(\mathscr{H})$ dans $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.

Munissons $\mathscr{Y}$ et $\mathscr{X}$ des faisceaux d'algèbres $\mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)$ et $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$. D'après [4], on dispose du foncteur image directe $\tilde{g}^{\dagger}_{+} : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z))$, et on vérifie que les foncteurs $\tilde{g}^{\dagger}_{+}$ et $g^{\dagger}_{+}$ commutent aux restrictions des scalaires de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ à $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, et de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z))$ à $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Comme $g^{*}(\mathscr{B}^{(m)}_{X_i}(Z)) \simeq \mathscr{B}^{(m)}_{Y_i}(T)$ pour tout i et tout m, la construction du morphisme trace donnée en [6, 5.5 et 5.7] fournit par passage de droite à gauche un morphisme canonique $\tilde{g}^{\dagger}_{+}(\mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))[d] \to \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z))$. Dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, on dispose d'autre part du morphisme $\mathscr{H} \to \mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)[d]$ déduit des morphismes naturels $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{X'} \to \mathrm{Id}$ par translation et extension des scalaires. Par composition, on obtient donc un morphisme $\tau : \tilde{g}^{\dagger}_{+}(\mathscr{H}) \to \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z))$.

Notons $\widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}_{\mathscr{Y}}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ les duaux dans les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z))$. On obtient un morphisme en sens inverse

$$\tau' : \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\tilde{g}^{\dagger}_{+}(\mathscr{H})) \xrightarrow{\ \sim\ } \tilde{g}^{\dagger}_{+}(\widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}_{\mathscr{Y}}(\mathscr{H})) \xrightarrow{\ \sim\ } \tilde{g}^{\dagger}_{+}(\mathscr{H})$$

en dualisant τ, en appliquant le théorème de dualité relative [6, (5.7.2)] et l'isomorphisme $\widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}_{\mathscr{Y}}(\mathscr{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}$ déduit par extension des scalaires de (2.1.1). Pour terminer, il suffit de vérifier que le composé $\tau \circ \tau'$ est égal à la multiplication par le rang générique de X' sur X. Pour cela, on peut se restreindre à un ouvert affine non vide de $\mathscr{X}$ au-dessus duquel X' est fini étale sur X. On peut alors relever X' en un revêtement fini $f' : \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$, et prolonger u en une immersion fermée $u' : \mathscr{X}' \hookrightarrow \mathscr{Y}$. En utilisant la transitivité du morphisme trace [6], on se ramène à l'assertion concernant le composé analogue obtenu en remplaçant $\mathscr{Y}$ par $\mathscr{X}'$ et $\mathscr{H}$ par $\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z')$. Le morphisme $\tau \circ \tau'$ s'identifie alors au morphisme naturel défini par la trace

$$\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z) \longrightarrow f'_{*}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z')) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$$

et l'assertion résulte de ce que $f'_{*}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z'))$ est une $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-algèbre finie localement libre.

Remerciements. Je remercie A. J. de Jong et A. Virrion pour les discussions très stimulantes que nous avons eues sur cette question.

Références bibliographiques

[1] **Berthelot P., 1990.** Cohomologie rigide et théorie des $\mathscr{D}$-modules, Proc. Conf. *p-adic Analysis* (Trento 1989), Lecture Notes in Math., 1454, p. 78-124, Springer-Verlag.

[2] **Berthelot P., 1993.** $\mathscr{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini, *Prépublication IRMAR*, 93-17, à paraître aux *Annales Scient. Éc. Norm. Sup.* , 29.

[3] **Berthelot P., 1995.** Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, *Prépublication IRMAR*, 95-35, Université de Rennes 1.

[4] **Berthelot P.** $\mathscr{D}$-modules arithmétiques II, III, en préparation.

[5] **De Jong A. J., 1995.** Smoothness, semi-stability and alterations, *Preprint*, 916, University Utrecht.

[6] **Virrion A., 1995.** Théorèmes de dualité locale et globale dans la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules, *Thèse*, Université de Rennes 1.

[7] **Virrion A., 1994.** Théorème de bidualité et caractérisation des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 319, série I, p. 1283-1286.

[8] **Virrion A., 1995.** Théorème de dualité relative pour les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 321, série I, p. 751-754.