Appendice : Cohomologie des $\mathscr{B}_X(Z, s)$-modules cohérents

par Pierre BERTHELOT

Nous donnons ici quelques résultats sur la cohomologie des modules cohérents sur les algèbres $\mathscr{B}_X(Z, s)$, lorsque Z est un diviseur ample dans un schéma X projectif sur une base S. Rappelons que, si $S = \operatorname{Spec} \mathscr{V}$, où $\mathscr{V}$ est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps des fractions K, et si $\mathscr{X}$ est le schéma formel associé à X, les complétées $\mathfrak{m}$-adiques $\widehat{\mathscr{B}}_X(Z, s)$ de ces algèbres fournissent des modèles entiers des algèbres de fonctions analytiques sur certains ouverts affinoïdes de la fibre générique $\mathscr{X}_K$ de $\mathscr{X}$ (au sens rigide analytique), complémentaires de tubes ouverts de rayon < 1 de Z dans $\mathscr{X}_K$ (voir par exemple [3]). Par suite, il résulte a priori des théorèmes d'annulation de Kiehl que, sous ces hypothèses, la cohomologie d'un $\widehat{\mathscr{B}}_X(Z, s)$-module cohérent est de torsion en degrés positifs. Toutefois, cette propriété est trop faible pour s'étendre directement aux modules cohérents sur les anneaux d'opérateurs différentiels complétés considérés ici. Nous la précisons donc par des résultats de finitude et d'annulation des groupes de cohomologie de degré ≥ 1, qui montrent que, du point de vue cohomologique, une variété projective munie du faisceau $\mathscr{B}_X(Z, s)$ associé à un diviseur ample se comporte à torsion bornée près comme l'ouvert affine complémentaire de Z. En particulier, nous verrons que, lorsque $X = \mathbf{P}^N_S$, les algèbres $\mathscr{B}_X(Z, s)$ satisfont les propriétés (b1) et (b2) de 2.1, de sorte qu'on peut appliquer les résultats de cet article aux faisceaux d'opérateurs différentiels à singularités surconvergentes.

1. Soient p un nombre premier, $s \geq 1$ un entier, X un schéma, $Z \subset X$ un diviseur de Cartier effectif. La construction donnée sous des hypothèses plus générales dans [4, 4.2.3] se simplifie ici (avec les notations de [4], on a $X = S$, $\mathscr{I} = 0$), et permet d'associer à Z un faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres $\mathscr{B}_X(Z, s)$ de la manière suivante. Sur un ouvert U sur lequel Z est défini par une équation locale f, on pose $\mathscr{B}(f, s) = \mathscr{O}_X[T]/(f^sT - p)$. Si f' est une autre équation locale de Z, donnée par $f' = af$, où $a \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X^*)$, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathscr{B}(f, s) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}(f', s) = \mathscr{O}_X[T']/(f'^sT' - p),$$

envoyant T sur a^sT', grâce auquel on peut définir $\mathscr{B}_X(Z, s)$ par recollement.

On dispose alors de la description intrinsèque suivante de l'algèbre $\mathscr{B}_X(Z, s)$:

2. Lemme. *Soient $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X, $t \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ une section définissant un diviseur de Cartier $Z \subset X$, et $s \in \mathbb{N}^*$. Si μ désigne la multiplication par $t^{\otimes s}$ sur l'algèbre symétrique $\mathbf{S}(\mathscr{L}^{\otimes s})$, il existe une suite exacte naturelle*

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathbf{S}(\mathscr{L}^{\otimes s}) \xrightarrow{\mu - p} \mathbf{S}(\mathscr{L}^{\otimes s}) \longrightarrow \mathscr{B}_X(Z, s) \longrightarrow 0.$$

Soit $\mathscr{B}'$ le conoyau de $\mu - p$. Si U est un ouvert de X sur lequel $\mathscr{L}$ possède une base e, on peut écrire $t = fe$, et f est une équation locale de Z. L'isomorphisme $\mathcal{O}_X[T] \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\mathscr{L}^{\otimes s})$ envoyant T sur $e^{\otimes s} \in \mathbf{S}_1(\mathscr{L}^{\otimes s})$ passe au quotient, définissant sur U un isomorphisme $\mathscr{B}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}(f, s)$, et, si l'on change la base e, les isomorphismes obtenus se recollent pour définir un isomorphisme $\mathscr{B}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_X(Z, s)$.

Lorsqu'aucune confusion n'en résultera, nous noterons $\mathscr{B}$ pour $\mathscr{B}_X(Z, s)$.

3. Proposition. *Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine nœthérien, X un S-schéma projectif, $Z \subset X$ un diviseur ample. On pose $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(Z)$, et, pour tout $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$, on note $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E} \otimes \mathscr{L}^{\otimes r}$. Pour tout entier $s \geq 1$, et tout $\mathscr{B}_X(Z, s)$-module cohérent $\mathcal{E}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *Il existe un entier r_0 tel que, pour tout $r \geq r_0$, on puisse trouver un entier a_r et un homomorphisme surjectif $\mathscr{B}(-r)^{a_r} \to \mathcal{E}$.*

(ii) *Pour tout $n \geq 1$, $H^n(X, \mathcal{E})$ est un A-module de type fini, de p-torsion ;*

(iii) *Il existe un entier r_0 tel que, pour tout $r \geq r_0$ et tout $n \geq 1$, on ait $H^n(X, \mathcal{E}(r)) = 0$.*

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathscr{B}$-module cohérent, il est quasi-cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module, donc limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_X$-modules cohérents. Comme X est quasi-compact, la première assertion résulte de ce qu'un tel sous-module est quotient d'un module de la forme $(\mathscr{L}^{\otimes(-r)})^{a_r}$ pour tout r assez grand, .

Montrons d'abord (ii) et (iii) lorsque $\mathcal{E}$ est de la forme $\mathscr{B}(r)$. Soient $t \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ une section dont l'annulation définit Z, et μ la multiplication par $t^{\otimes s}$ sur $\mathbf{S}(\mathscr{L}^{\otimes s})$. La suite exacte (1) donne une suite exacte longue

$$(1) \qquad \ldots \xrightarrow{\mu - p} \bigoplus_{k \geq 0} H^n(X, \mathscr{L}^{\otimes ks + r}) \to H^n(X, \mathscr{B}(r)) \to \bigoplus_{k \geq 0} H^{n+1}(X, \mathscr{L}^{\otimes ks + r}) \xrightarrow{\mu - p} \ldots .$$

Puisque X est projectif et $\mathscr{L}$ ample, les termes $H^n = \bigoplus_{k \geq 0} H^n(X, \mathscr{L}^{\otimes ks + r})$ sont des A-modules de type fini pour tout $n \geq 1$. D'autre part, ce sont de manière naturelle des modules gradués sur l'algèbre graduée $R = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes ks})$, nuls en degré assez grand. Comme μ est de degré 1, c'est donc un endomorphisme nilpotent de H^n pour $n \geq 1$. L'assertion (ii) s'en déduit, et l'assertion (iii) résulte de ce que les $H^n(X, \mathscr{L}^{\otimes ks + r})$ sont nuls pour tout $k \geq 0$ et tout $n \geq 1$ si r est assez grand.

Dans le cas général, on écrit $\mathcal{E}$ comme quotient d'un $\mathscr{B}$-module de la forme $\mathscr{B}(-r)^{a_r}$. Comme il existe un entier N tel que $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $n > N$ et tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, la suite exacte longue qui en résulte permet de conclure par récurrence descendante sur n.

Lorsque X est un espace projectif au-dessus de S, on peut préciser ces résultats :

4. Proposition. *Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine nœthérien, $X = \mathbf{P}^N_S$ l'espace projectif de dimension relative $N \geq 1$ sur S, et $Z \subset X$ un diviseur défini par une section $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$, avec $d \geq 1$. Pour tout $s \geq 1$, on a alors :*

(i) *Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, et tout $n > N$, $H^n(X, \mathcal{B}(r)) = 0$.*

(ii) *Pour tout $r \geq 0$, et tout $n \geq 1$, $H^n(X, \mathcal{B}(r)) = 0$.*

(iii) *Pour tout $r < 0$, et tout $n \neq 0, N-1, N$, $H^n(X, \mathcal{B}(r)) = 0$.*

(iv) *Pour tout $r < 0$, $H^N(X, \mathcal{B}(r))$ est un A-module de type fini, annulé par une puissance de p qui ne dépend que de N, d, s et r, et non de la base S. Si $N \neq 1$, il en est de même de $H^{N-1}(X, \mathcal{B}(r))$.*

L'assertion (i) résulte de la quasi-cohérence de $\mathcal{B}$. Les autres assertions résultent comme en 3 de la suite exacte longue (1), et du calcul classique de la cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}_X(r)$ sur l'espace projectif.

Remarque. Il est facile de voir que, même pour $r < 0$, le A-module $\Gamma(X, \mathcal{B}(r))$ n'est pas de type fini en général. D'autre part, en prenant par exemple $r = -N-1$, et en supposant S de caractéristique p, on voit aussi que $H^{N-1}(X, \mathcal{B}(r))$ n'est pas nul en général.

5. Supposons donné un m-PD-idéal cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, qui soit m-PD-nilpotent, et soit X_0 le sous-schéma fermé de X défini par $\mathcal{I}$. Si s est divisible par p^{m+1}, on peut associer plus généralement un faisceau d'algèbres $\mathcal{B}_X(Z_0, s)$ à tout diviseur Z_0 de X_0 : sur un ouvert U sur lequel il existe une section $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ relevant une équation locale de Z_0, on définit $\mathcal{B}_X(Z_0, s)$ comme en 1, et nous renvoyons à [4, 4.2] pour la définition des isomorphismes de recollement.

On peut alors étendre à cette situation les résultats de 3 :

6. Corollaire. *Sous les hypothèses précédentes, soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{B}_X(Z_0, s)$-module cohérent. Alors les conclusions de 3 sont valables pour $\mathcal{E}$.*

On observe d'abord que, si ces propriétés sont vérifiées pour deux $\mathcal{B}_X(Z_0, s)$-modules $\mathcal{E}, \mathcal{F}$, elles le sont pour toute extension de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{E}$. Or l'idéal $\mathcal{I}$, étant m-PD-nilpotent par hypothèse, est a fortiori nilpotent. La filtration $\mathcal{I}$-adique de $\mathcal{O}_X$ est donc finie, et le gradué associé est un faisceau cohérent sur $\mathcal{B}_X(Z_0, s) \otimes \mathcal{O}_{X_0} \simeq \mathcal{B}_{X_0}(Z_0, s)$. L'énoncé résulte ainsi de 3, appliqué sur X_0.

7. Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k, A une $\mathcal{V}$-algèbre complète pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, et topologiquement de type fini, $S = \operatorname{Spec} A$, X un S-schéma projectif, plat sur $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}$ son complété formel p-adique. On note S_i, X_i les réductions de S et X modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$. Soient m un entier tel que $\mathfrak{m}$ possède une m-PD-structure m-PD-nilpotente, et s un multiple de

p^{m+1}. On suppose donné un faisceau ample $\mathscr{L}$ sur X, de réduction $\mathscr{L}_0$ sur X_0, et un diviseur Z_0 de X_0 tel que $\mathcal{O}_{X_0}(Z_0) \simeq \mathscr{L}_0$. On pose

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z_0, s) \;=\; \varprojlim_i \mathscr{B}_{X_i}(Z_0, s).$$

D'après [4, 3.3.4], $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z_0,\, s)$ est un faisceau d'anneaux cohérent. On peut alors étendre aux $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z_0,\, s)$-modules cohérents les résultats qui précèdent :

8. Proposition. *Sous les hypothèses de 7, il existe un entier s_0 tel que, pour tout multiple s de s_0, et tout $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z_0,\, s)$-module cohérent $\mathscr{E}$, les propriétés suivantes soient vérifiées* :

(i) *Il existe un entier r_0 tel que, pour tout $r \geq r_0$, on puisse trouver un entier a_r et un homomorphisme surjectif $(\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z_0,\, s)(-r))^{a_r} \to \mathscr{E}$.*

(ii) *Pour tout $n \geq 1$, les A-modules $H^n(\mathscr{X}, \mathscr{E})$ sont de type fini et de p-torsion.*

(iii) *Il existe un entier r_1 tel que, pour tout $r \geq r_1$ et tout $n \geq 1$, on ait $H^n(\mathscr{X}, \mathscr{E}(r)) = 0$.*

Comme $\mathscr{L}$ est ample, il existe un entier s_1 tel que $H^1(X, \mathfrak{m}\mathscr{L}^{\otimes s}) = 0$ pour tout $s \geq s_1$. Soit s_0 le plus petit commun multiple de s_1 et p^{m+1}. Si $t \in \Gamma(X_0,\, \mathscr{L}_0)$ définit Z_0, on peut alors relever $t^{\otimes s_0}$ en une section $t' \in \Gamma(X,\, \mathscr{L}^{\otimes s_0})$. L'hypothèse de platitude de X sur $\mathscr{V}$ entraîne que le gradué $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}_X$ est plat sur $\mathcal{O}_{X_0}$, et il en résulte que l'annulation de t' définit un diviseur de Cartier $\mathscr{Z}'$ de $\mathscr{X}$ relevant le diviseur $s_0 Z_0$ de X_0. Si s est de la forme $s = s_0 s'$, on obtient donc comme en 2 une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbf{S}(\mathscr{L}^{\otimes s}) \xrightarrow{\mu'-p} \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \otimes \mathbf{S}(\mathscr{L}^{\otimes s}) \longrightarrow \mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}', s') \longrightarrow 0,$$

où μ' est la multiplication par $t'^{\otimes s'}$, de sorte que les résultats de 3 restent valables pour $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}',\, s')$. On remarquera d'autre part que l'algèbre $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}',\, s')$ est telle que

$$\mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}', s')/\mathfrak{m}^{i+1}\mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}', s') \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{B}_{X_i}(s_0 Z_0, s') \;=\; \mathscr{B}_{X_i}(Z_0, s)$$

pour tout i, et donc que $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z_0,\, s) \simeq \widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}',\, s')$.

Supposons donc que $s = s_0 s'$, et montrons d'abord que $\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z_0,\, s)$ vérifie les propriétés (ii) et (iii). Comme X est plat sur $\mathscr{V}$, il résulte de [4, 4.3.3] que $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}',\, s')$ est sans p-torsion. Si π est une uniformisante de $\mathscr{V}$, il existe donc un système projectif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}', s') \arrow[r, "\pi^{i+1}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}', s') \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \mathscr{B}_{X_i}(Z_0, s) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}', s') \arrow[r, "\pi^{i}"] & \mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}', s') \arrow[r] & \mathscr{B}_{X_{i-1}}(Z_0, s) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En tensorisant par $\mathscr{L}^{\otimes r}$ et en passant à la cohomologie, on en déduit une suite exacte longue de systèmes projectifs, dans laquelle le premier système $(H^n(\mathscr{X},\, \mathscr{B}_{\mathscr{X}}(\mathscr{Z}',\, s')(r)))_{i\in\mathbb{N}}$ est essentiellement nul pour $n \geq 1$ grâce à 3 (ii), et le second constant pour tout n. Il en résulte d'abord que le système projectif $(H^n(\mathscr{X},\, \mathscr{B}_{X_i}(Z_0,\, s)(r))_{i\in\mathbb{N}}$ satisfait la condition de Mittag-Leffler pour tout n, de sorte que l'homomorphisme canonique

$$H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)(r)) \longrightarrow \varprojlim_i H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)(r))$$

est un isomorphisme. D'autre part, pour $n \geq 1$, le noyau et le conoyau du morphisme de systèmes projectifs $(H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')(r)))_{i \in \mathbb{N}} \to (H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)(r)))_{i \in \mathbb{N}}$ sont essentiellement nuls, si bien que l'homomorphisme canonique

$$H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')(r)) \longrightarrow \varprojlim_i H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)(r))$$

est également un isomorphisme pour tout $n \geq 1$. Les homomorphismes naturels

$$H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')(r)) \longrightarrow H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)(r))$$

sont donc des isomorphismes pour $n \geq 1$, et les assertions (ii) et (iii) sont résultent de 3.

Dans le cas général, notons d'abord que, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ vérifient les propriétés de l'énoncé, il en est de même de toute extension de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}$ est cohérent, son sous-module de p-torsion est cohérent, annulé par une puissance fixe de p. C'est donc un $\mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)$-module cohérent, pour un i assez grand, et il vérifie l'énoncé grâce au corollaire 6. On est ramené de la sorte au cas où $\mathcal{E}$ est sans torsion.

Soit $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}/\pi^{i+1}\mathcal{E}$. Si l'on fixe r_0 tel que $H^n(X, \mathcal{E}_0(r)) = 0$ pour tout $r \geq r_0$ et tout $n \geq 1$, les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\pi^i} \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_{i-1} \longrightarrow 0$$

montrent qu'il en est de même des $H^n(X, \mathcal{E}_i(r))$ pour tout i, et que les homomorphismes $\Gamma(X, \mathcal{E}_i(r)) \to \Gamma(X, \mathcal{E}_{i-1}(r))$ sont surjectifs. On peut supposer r_0 choisi de telle sorte que, pour tout $r \geq r_0$, il existe un homomorphisme surjectif $(\mathcal{B}_X(Z, s)(-r))^{a_r} \to \mathcal{E}_0$. La nullité de $H^1(X, \mathcal{E}_0(r))$ permet alors de le relever en un système compatible d'homomorphismes $(\mathcal{B}_{X_i}(Z, s)(-r))^{a_r} \to \mathcal{E}_i$, automatiquement surjectifs. Comme $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathcal{E}_i$ d'après le théorème A [4, 3.3.9], on obtient ainsi un homomorphisme $(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, s)(-r))^{a_r} \to \mathcal{E}$, qui est encore surjectif, d'où (i).

Pour prouver les assertions (ii) et (iii), notons d'abord que, grâce au théorème B [4, 3.3.11], il existe un entier N tel que $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $n > N$ et tout $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, s)$-module cohérent $\mathcal{F}$. Par récurrence descendante sur n, l'assertion (i) montre alors que les propriétés (ii) et (iii) pour les $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z, s)(-r)$ entraînent les mêmes propriétés pour tout faisceau cohérent $\mathcal{E}$.

Bibliographie

[1]

[2]

[3] P. Berthelot, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p*, Journées d'analyse p-adique (1982), in *Introduction aux cohomologies p-adiques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23**, p. 7-32 (1986).

[4] P. Berthelot, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$*-modules cohérents I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, à paraître aux Annales Scient. de l'ENS.

[5] P. Berthelot, A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Mathematical Notes **21**, Princeton University Press (1978).

[6] A. Borel, *Algebraic* $\mathscr{D}$*-modules*, Perspectives in Math. **2**, Academic Press (1987).

[7] B. Haastert, *Über Differentialoperatoren und* $\mathscr{D}$*-moduln in positiver Charakteristik*, Manuscr. math. **58**, p. 385-415 (1987).

[8] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math. **156**, Springer-Verlag (1970).

[9] C. Huyghe, *Construction et étude de la transformation de Fourier des* $\mathscr{D}$*-modules arithmétiques*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes (1995).