Séminaire BOURBAKI Juin 1996
48ème année, 1995-96, n° 815

ALTÉRATIONS DE VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES
[d'après A. J. DE JONG]

par **Pierre BERTHELOT**

1. INTRODUCTION

Deux problèmes de désingularisation jouent un rôle fondamental en Géométrie Algébrique : le problème de la *résolution des singularités* d'une variété singulière, et celui de la *réduction semi-stable* pour une variété propre et lisse sur un corps muni d'une valuation discrète. Les résultats obtenus sur ces questions, souvent limités à la caractéristique nulle, sont des outils extrêmement puissants, notamment dans l'étude de la cohomologie des variétés algébriques. Par contre, leur démonstration passe généralement pour très délicate. Des travaux récents de A. J. de Jong [31] montrent qu'une version un peu affaiblie de ces problèmes amène à une solution remarquablement simple et élégante, sans limitation de caractéristique, et qui fournit néanmoins des résultats suffisants pour beaucoup d'applications.

1.1. Résolution des singularités

Sous la forme générale que lui donne Grothendieck dans [EGA IV, 7.9], le problème de la résolution des singularités s'énonce de la manière suivante :

Problème 1.1.1. — *Si X est un schéma localement nœthérien et réduit, existe-t-il un schéma régulier X', et un morphisme propre et birationnel $f : X' \to X$?*

Un tel morphisme est appelé *désingularisation* de X. Cette question est dominée par le théorème fondamental d'Hironaka [28] :

Théorème 1.1.2. — *Soient k un corps de caractéristique 0, X une variété algébrique sur k. Il existe une désingularisation $f : X' \to X$ où f est un morphisme projectif, induisant un isomorphisme au-dessus de l'ouvert U des points réguliers de X, et tel que $f^{-1}(X \setminus U)$ soit un diviseur à croisements normaux de X'.*

On notera que le résultat d'Hironaka est plus précis que 1.1.1 : la désingularisation qu'il construit ne modifie pas le lieu régulier de X, et le lieu singulier est transformé en un diviseur à croisements normaux. Toujours en caractéristique nulle, des travaux ultérieurs ont amélioré ces résultats, en fournissant notamment une méthode constructive de résolution (voir en particulier Villamayor [59], et Bierstone-Milman [7]). D'autre part, les travaux récents de Spivakovsky [58] laissent maintenant espérer qu'on puisse obtenir pour tout schéma excellent une résolution canonique des singularités (c'est à dire satisfaisant une forme faible de fonctorialité, *cf.* [58, déf. 1.6]), sans hypothèse de caractéristique.

1.2. Altérations et modifications

1.2.1. L'idée de de Jong consiste à affaiblir la notion de désingularisation, en autorisant le corps des fonctions rationnelles sur X' à être une extension finie du corps des fonctions rationnelles sur X, alors qu'il est invariant par désingularisation. Plus précisément, soit X un schéma nœthérien intègre. Une *altération* de X est un schéma intègre X' muni d'un morphisme $\varphi : X' \to X$ propre et surjectif, tel qu'il existe un ouvert non vide $U \subset X$ au-dessus duquel le morphisme $\varphi^{-1}(U) \to U$ est fini. Une altération est dite *génériquement étale* (resp. une *modification*) si l'on peut choisir U tel que le morphisme $\varphi^{-1}(U) \to U$ soit étale (resp. un isomorphisme).

Soit k un corps quelconque. Une *variété algébrique* sur k sera un k-schéma de type fini, séparé et intègre. De Jong montre le théorème suivant [31, th. 3.1] :

Théorème 1.2.2. — *Soient X une variété algébrique sur k, et $Z \subset X$ un fermé de X, distinct de X. Il existe alors une altération $\varphi : X' \to X$ et une immersion ouverte $j : X' \hookrightarrow \overline{X}'$ telles que :*

(i) *$\overline{X}'$ est une variété projective régulière (donc lisse sur k si k est parfait);*

(ii) *Le fermé $\varphi^{-1}(Z) \cup (\overline{X}' \smallsetminus X') \subset \overline{X}'$ est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts de $\overline{X}'$ (cf. 2.2.1).*

Si k est parfait, on peut de plus choisir φ génériquement étale.

On notera que, contrairement à ce que donne la méthode d'Hironaka, l'ouvert de X au-dessus duquel φ est fini est en général plus petit que l'ouvert $\mathrm{Reg}(X)$ des points réguliers : on peut être amené au cours de la construction à faire des éclatements centrés en des sous-variétés rencontrant $\mathrm{Reg}(X)$. La construction n'est pas canonique, mais, si l'on se donne une action d'un groupe fini sur X, de Jong en donne aussi une version équivariante [31, th. 7.3]. Grâce à celle-ci, il est possible de construire (après extension radicielle du corps de base) une modification d'une variété donnée X, qui n'ait que des singularités quotients [31, cor. 7.4]. Signalons aussi qu'en caractéristique 0, Abramovich et de Jong [1] ont pu pousser ces résultats plus loin, et obtenir une version faible du théorème d'Hironaka (là encore, des éclatements rencontrant le lieu lisse peuvent intervenir). Ce dernier résultat a été obtenu indépendamment par Bogomolov et Pantev [8], par des techniques d'esprit assez proche.

La méthode de de Jong est complètement différente de celles qui sont utilisées dans les travaux mentionnés en 1.1. Dans ceux-ci, le principe général mis en œuvre consiste à associer certains invariants aux singularités de X, en fonction desquels on pourra choisir un sous-schéma de X que l'on va éclater, et dont le comportement contrôle la suite d'éclatements nécessaires pour désingulariser X. Ici, la nature des singularités de X ne joue aucun rôle. En un sens, la méthode suivie rappelle la technique des *bons voisinages* utilisée par M. Artin dans la démonstration du théorème de comparaison en cohomologie étale [SGA 4, exp. XI, § 3] : il s'agit de décrire une variété X par une suite de fibrations en courbes sur des variétés de dimension inférieure. Mais, à la différence de la méthode d'Artin, dans laquelle on localise au voisinage d'un point de manière à pouvoir trouver une fibration de ce voisinage en courbes lisses, avec une compactification relative lisse par un lieu à l'infini étale sur la base, la construction de de Jong est de nature globale, et autorise donc certaines singularités. Elle procède par récurrence sur la dimension de X. Dans une première étape, on altère X par des techniques de géométrie projective de manière à pouvoir construire un morphisme projectif $X \to Y$, ayant pour fibres des courbes géométriquement connexes, et dont l'ouvert de lissité est dense dans chaque fibre. On fait ensuite appel à la théorie des espaces de modules pour les courbes stables pour montrer qu'on peut altérer ce morphisme de manière à ce que X devienne une courbe nodale de base une variété lisse Y, qui soit lisse en dehors d'un diviseur à croisements normaux strict de Y. Les singularités de X peuvent alors être décrites de manière simple à partir de la théorie des déformations des singularités quadratiques ordinaires [SGA 7, VI 6], et on peut les résoudre explicitement.

1.3. Réduction semi-stable

Soient S un schéma nœthérien connexe, régulier de dimension 1, K son corps de fonctions rationnelles. Une *S-variété* est un S-schéma intègre, séparé, plat et de type fini sur S. Un S-schéma X est dit *semi-stable* si X est lisse sur S, sauf au-dessus d'un nombre fini de points $s \in S$, au voisinage desquels X est localement pour la topologie étale isomorphe à un schéma de la forme $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \dots t_r - \pi))$, où π est une uniformisante en s (voir aussi 5.2).

Si K' est une extension finie de K, nous noterons S' la normalisation de S dans K', et $X_{K'} = K' \otimes_K X$. Le problème de la réduction semi-stable sur K est le suivant :

Problème 1.3.1. — *Si X est une variété algébrique propre et lisse sur K, existe-t-il une extension finie K' de K, et une S'-variété X' de fibre générique $X_{K'}$, qui soit propre et semi-stable sur S' ?*

Pour les courbes, ce problème est résolu sans hypothèse de caractéristique par le théorème de réduction semi-stable, dû à Deligne-Mumford [13], et à Artin-Winters [3] (voir aussi Bosch-Lütkebohmert [9] pour une démonstration par voie rigide analytique). En caractéristique 0, le théorème de réduction semi-stable a été prouvé en toutes dimensions par Knudsen, Mumford, et Waterman sous la forme suivante [36, II] :

Théorème 1.3.2. — *Soient S une courbe lisse sur un corps k de caractéristique nulle, $s \in S$ un point fermé, $f : X \to S$ un morphisme de variétés algébriques sur k, lisse hors de s. Il existe une courbe lisse S' sur k, un morphisme fini $\pi : S' \to S$ tel que $\pi^{-1}(s) = \{s'\}$, un S'-schéma semi-stable X', et un S'-morphisme projectif $p : X' \to X \times_S S'$, tel que p soit un isomorphisme au-dessus de $S' \smallsetminus \{s'\}$.*

On notera que la démonstration, basée sur la théorie des plongements toroïdaux, utilise le théorème de désingularisation d'Hironaka — de même, du reste, que la démonstration du théorème de réduction semi-stable pour les courbes utilise la résolution des singularités des surfaces arithmétiques —, mais que l'hypothèse d'égale caractéristique 0 sert également pour obtenir un morphisme $X' \to S'$ dont la fibre en s soit sans composantes multiples (*cf.* [36], p. 99). En inégale caractéristique comme en égale caractéristique $p > 0$, l'analogue de ce théorème reste une conjecture en dimension relative > 1.

1.4. Altérations semi-stables

Les méthodes de de Jong s'appliquent aussi dans le cas semi-stable, fournissant un substitut au théorème 1.3.2 sans hypothèse de caractéristique [31, th. 4.5] :

Théorème 1.4.1. — *Soient A un anneau de valuation discrète complet, $S = \operatorname{Spec} A$, X une S-variété, $Z \subset X$ un fermé distinct de X, et contenant la fibre spéciale de X. Il existe un anneau de valuation discrète A' fini sur A, de spectre S', une S'-variété X', une altération de S-variétés $\varphi : X' \to X$, et une immersion ouverte de S'-variétés $j : X' \hookrightarrow \overline{X}'$, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *$\overline{X}'$ est une S'-variété projective à fibre générique géométrique irréductible ;*

(ii) *Le couple $(\overline{X}', \varphi^{-1}(Z) \cup (\overline{X}' \smallsetminus X'))$ est un couple strictement semi-stable (cf.* 5.2.2).

Ce théorème possède aussi une extension au spectre d'un anneau de Dedekind ayant pour corps des fractions un corps global [31, th. 8.2].

Dans la suite de cet exposé, nous traiterons d'abord le problème auquel on se réduira dans les démonstrations ultérieures, celui de la résolution des singularités pour les courbes nodales lisses hors d'un diviseur à croisements normaux. Nous expliquerons ensuite l'essentiel de la démonstration du théorème 1.2.2, qui fournit un exemple typique des méthodes de de Jong, puis les compléments à lui apporter pour obtenir le théorème 1.4.1 ; mentionnons en particulier le théorème 5.1.1, qui permet d'altérer une famille de courbes en une famille nodale. Nous illustrerons enfin la portée de ces résultats en donnant quelques exemples d'applications : positivité des caractéristiques d'Euler-Poincaré (conjecture de Serre), finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, uniformité par rapport à ℓ de l'exposant de quasi-unipotence de la monodromie en cohomologie ℓ-adique, conjecture $\mathrm{C}_{\mathrm{pst}}$ sur les représentations galoisiennes p-adiques.

2. DÉSINGULARISATION DE CERTAINES COURBES NODALES

Soit $f : X \to S$ une fibration en courbes nodales. On traite ici le problème de la désingularisation de X, lorsque S est régulier, et X lisse sur S hors d'un diviseur à croisements normaux stricts de S.

2.1. Courbes nodales

2.1.1. On suppose que S est localement nœthérien. Une *fibration en courbes nodales de base* S (ou simplement une *courbe nodale*[1] sur S) est un morphisme de schémas $f : X \to S$ propre, plat, dont toutes les fibres géométriques sont des courbes connexes ayant au plus des points doubles ordinaires comme singularités. Si S est le spectre d'un corps k, nous dirons qu'une courbe nodale X sur k est *scindée* si toutes ses composantes irréductibles sont lisses et géométriquement irréductibles, et si les points doubles de X sont tous rationnels sur k. Dans le cas général, nous dirons que $X \to S$ est une courbe nodale scindée si la fibre X_s est scindée sur $\kappa(s)$ pour tout $s \in S$.

2.1.2. Supposons que $f : X \to S$ soit une courbe nodale. Si $x \in X$ est un point de non-lissité de f, d'image $s \in S$, l'anneau local complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ possède une description simple en tant qu'algèbre sur l'anneau local complété $\widehat{\mathcal{O}}_{S,s}$. Le corps résiduel $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$, de sorte qu'il existe un unique anneau local complet $\widehat{\mathcal{O}}'_x$, fini et étale sur $\widehat{\mathcal{O}}_{S,s}$, ayant $\kappa(x)$ pour corps résiduel.

[1] Nous nous écartons ici de l'emploi courant du mot « semi-stable », utilisé notamment dans [31], afin d'éviter la confusion possible avec la notion de variété semi-stable utilisée en 1.3 lorsque S est régulier de dimension 1.

L'anneau quotient $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est de la forme $\kappa(x)[[\bar{u},\bar{v}]]/(\bar{q}(\bar{u},\bar{v}))$, où $\bar{q}$ est une forme quadratique non dégénérée à coefficients dans $\kappa(x)$. Si on se donne un relèvement q de $\bar{q}$ à coefficients dans $\widehat{\mathcal{O}}'_x$, on peut alors trouver par approximations successives des relèvements u, v de $\bar{u}$, $\bar{v}$ dans $\mathfrak{m}_x\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ tels qu'il existe $h \in \mathfrak{m}_s\widehat{\mathcal{O}}'_x$ et un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \widehat{\mathcal{O}}'_x[[u,v]]/(q(u,v)-h)$ (voir aussi la théorie des déformations des singularités quadratiques dans [SGA 7, VI 6]). Lorsque la courbe est scindée, ou le corps $\kappa(s)$ algébriquement clos, on a $\widehat{\mathcal{O}}'_x = \widehat{\mathcal{O}}_{S,s}$, et on peut prendre $q(u,v) = uv$.

On définit le lieu singulier de f comme le sous-schéma fermé $\mathrm{Sing}(f) \subset X$ défini par le premier idéal de Fitting de $\Omega^1_{X/S}$ [SGA 7, VI 5]. Il est fini et non ramifié sur S, et, avec la présentation qui précède, sa restriction à Spec $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est le sous-schéma fermé défini par l'idéal (u,v), dont l'anneau est $\widehat{\mathcal{O}}'_x/(h)$.

2.2. Courbes nodales lisses hors d'un diviseur à croisements normaux

2.2.1. Si X est un schéma localement nœthérien, un *diviseur à croisements normaux stricts* de X est un diviseur $D = \bigcup_{i=1}^r D_i$ de X, tel qu'en chaque point $x \in D$ l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ soit régulier, que D soit réduit et chacun des D_i irréductible, et que, pour tout $J \subset \{1,\dots,r\}$, $J \neq \emptyset$, le sous-schéma fermé $\bigcap_{j\in J} D_j$ soit un sous-schéma régulier de X, de codimension égale au cardinal de J.

Nous renvoyons à [EGA IV, 7.8] ou à [40] pour la notion de schéma *excellent*. Par exemple, si A est un anneau local nœthérien complet, ou un anneau de Dedekind tel que $\mathrm{Frac}(A)$ soit de caractéristique 0, Spec A est excellent. Tout schéma localement de type fini sur un schéma excellent est excellent, et le normalisé d'un schéma excellent réduit est fini sur celui-ci. De plus, la normalisation commute à la complétion. Rappelons enfin que l'ensemble des points réguliers d'un schéma excellent réduit est ouvert.

La situation type où nous aurons à résoudre explicitement les singularités est la suivante. On se donne un schéma S excellent et régulier, un diviseur à croisements normaux stricts $D \subset S$, et une courbe nodale $f : X \to S$, qu'on suppose lisse en dehors de D. Le sous-schéma $\Sigma = \mathrm{Sing}(f)$ est donc de codimension ≥ 2 dans X, et X est alors régulier, sauf éventuellement aux points de Σ.

2.2.2. Sous les hypothèses de 2.2.1, on peut préciser la structure des composantes irréductibles de Σ. Soient $x \in \Sigma$, $s = f(x)$, et, pour $1 \leq i \leq r$, soit $t_i \in \mathcal{O}_{S,s}$ une équation locale de la composante D_i de D. La structure locale de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ donnée en 2.1.2 permet d'écrire $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ sous la forme

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \widehat{\mathcal{O}}'_x[[u,v]]/(q(u,v) - t_1^{n_1}\dots t_r^{n_r}).$$

Avec les notations de 2.1.2, on a alors $\widehat{\mathcal{O}}_{\Sigma,x} \simeq \widehat{\mathcal{O}}'_x/(t_1^{n_1}\dots t_r^{n_r})$, de sorte que, au voisinage de x, $\mathcal{O}_\Sigma$ est annulé par $t_1^{n_1}\dots t_r^{n_r}$, et Σ est fini et étale sur le diviseur $n_1D_1+\dots+n_rD_r \subset S$. Il en résulte que, si T est une composante irréductible de Σ telle que $f(T) \subset D_i$, l'entier n_i ne dépend pas du point considéré sur T, et que $f(T) = D_i$.

On voit donc que $\mathrm{Sing}(f)$ est purement de codimension 2 dans X. Sur une composante irréductible T de $\mathrm{Sing}(f)$, telle que $f(T) = D_i$, il y a alors deux possibilités :

a) L'entier n_i est égal à 1. Alors X est régulier en tout point $x \in T$ tel que $f(x) \notin \bigcup_{j\neq i} D_j$;

b) L'entier n_i est ≥ 2. Alors X est singulier en tout point de T, et T est une composante irréductible de $\mathrm{Sing}(X)$.

2.3. Désingularisation en codimension 2

Gardant les mêmes hypothèses, on observe d'abord qu'on peut se ramener au cas où le lieu singulier $\mathrm{Sing}(X)$ est de codimension ≥ 3 dans X, en effectuant une suite d'éclatements centrés dans $\mathrm{Sing}(X)$.

2.3.1. Soit $T \subset \mathrm{Sing}(X)$ une composante irréductible de codimension 2. Soit $D_i = f(T)$, et notons n_T la valeur de l'exposant n_i sur T. Si on suppose que $i = 1$ pour fixer les idées, et si $x \in T$, l'anneau $\widehat{\mathcal{O}}_{T,x}$ s'identifie à $\widehat{\mathcal{O}}'_x/(t_1) \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/(u,v,t_1)$. Soit X' l'éclaté de X le long de T. Alors X' est encore une courbe nodale sur S, lisse hors de D, les invariants $n_{T'}$ associés aux composantes $T' \neq T$ ne changent pas, et $\mathrm{Sing}(X')$ possède au plus une composante irréductible T'' dominant T, pour laquelle on a $n_{T''} = n_T - 2$. On vérifie ces assertions au voisinage de la fibre de X' au-dessus de chaque point $x \in T$. Une localisation étale au voisinage de s permet de supposer que $q(u,v) = uv$. Par extension des scalaires à $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, on se ramène à étudier l'éclaté Y' de $Y = \mathrm{Spec}\,(\widehat{\mathcal{O}}'_x[u,v]/(uv - t_1^{n_1}\dots t_r^{n_r}))$ le long de $T = V(u,v,t_1)$. On dispose de coordonnées projectives u', v' et t'_1, correspondant aux équations u, v et t_1, et définissant trois cartes locales :

(i) Pour $u' \neq 0$, on obtient les relations

$$v = uv', \qquad t_1 = ut'_1, \qquad v' - u^{n_1-2}t_1'^{n_1}t_2^{n_2}\dots t_r^{n_r} = 0.$$

L'anneau correspondant est $\widehat{\mathcal{O}}'_x[u,t'_1]/(ut'_1 - t_1)$, qui est régulier. Par symétrie, la situation est la même pour $v' \neq 0$.

(ii) Pour $t'_1 \neq 0$, les relations sont

$$u = t_1u', \qquad v = t_1v', \qquad u'v' - t_1^{n_1-2}t_2^{n_2}\dots t_r^{n_r} = 0.$$

L'anneau obtenu est $\widehat{\mathcal{O}}'_x[u',v']/(u'v' - t_1^{n_1-2}t_2^{n_2}\dots t_r^{n_r})$. Si $n_1 = 2$ ou $n_1 = 3$, il est régulier hors de $V(t_2\dots t_r)$, et il n'y a pas de composante irréductible de $\mathrm{Sing}(X')$

dominant T. Sinon, la composante T'' obtenue a pour équation $u' = v' = t_1 = 0$, avec $n_{T'} = n_T - 2$.

En itérant de tels éclatements, on obtient donc une modification de X en une courbe nodale du même type, pour laquelle il n'existe plus de composante irréductible de $\mathrm{Sing}(f)$ sur laquelle l'un des n_i soit ≥ 2. Par conséquent, l'anneau $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ en un point singulier x de X est de la forme $\widehat{\mathcal{O}}'_x[[u,v]]/(q(u,v) - t_1 \ldots t_\mu)$, avec $2 \leq \mu \leq r$, et $t_i \in \mathfrak{m}_x$ pour $i \leq \mu$. Un tel point est donc dans l'intersection d'au moins deux composantes irréductibles T_α et T_β de $\mathrm{Sing}(f)$, de projections $D_i \neq D_j$ sur S. Inversement, tout point de $T_\alpha \cap T_\beta$ est effectivement un point singulier de X, de sorte que $\mathrm{Sing}(X)$ est purement de codimension 3 dans X. On voit de plus que toute composante irréductible E_λ de $\mathrm{Sing}(X)$ est finie et étale au-dessus d'une composante irréductible de l'un des $D_i \cap D_j$. En particulier, les E_λ sont des schémas réguliers.

2.4. Cas d'une base lisse sur un corps algébriquement clos

Supposons maintenant que S soit une variété lisse de dimension $d-1$ sur un corps algébriquement clos k. Dans la situation obtenue en 2.3.1, on peut achever la désingularisation de X en éclatant les composantes irréductibles de $\mathrm{Sing}(X)$.

2.4.1. On oublie la structure de courbe nodale de X, et on observe simplement que X possède la propriété suivante : si x est un point fermé de X, soit $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, soit son complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est isomorphe à un anneau de la forme

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq k[[u,v,t_1,\ldots,t_{d-1}]]/(uv - t_1 \ldots t_\mu),$$

avec $2 \leq \mu \leq d-1$; de plus, toute composante irréductible E de $\mathrm{Sing}(X)$ est un schéma régulier. Sous ces conditions, vérifions alors que l'éclaté X' de X le long de E possède les mêmes propriétés, et que $\mathrm{Sing}(X')$ a une composante irréductible de moins que $\mathrm{Sing}(X)$.

Soit $x \in E$ un point fermé. Comme E est régulier, il induit un sous-schéma irréductible de $\mathrm{Spec}\, \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Il s'ensuit que l'idéal de E dans $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est engendré par u, v, et deux éléments $t_i \neq t_j$, avec $1 \leq i, j \leq \mu$, par exemple t_1, t_2. On se ramène à étudier l'éclaté Y' de $Y = \mathrm{Spec}\, k[u,v,t_1,\ldots,t_{d-1}]/(uv - t_1 \ldots t_\mu)$ le long de $F = V(u,v,t_1,t_2)$. On utilise les quatre cartes correspondant aux coordonnées projectives u', v', t'_1, t'_2 associées à u, v, t_1, t_2 :

(i) Pour $u' \neq 0$, on obtient les équations

$$v = uv', \qquad t_1 = ut'_1, \qquad t_2 = ut'_2, \qquad v' - t'_1 t'_2 t_3 \ldots t_\mu = 0.$$

Sur cet ouvert, Y' est lisse avec pour coordonnées locales u, t'_1, t'_2, $\ldots$, t_{d-1}. La situation est identique pour $v' \neq 0$.

(ii) Pour $t'_1 \neq 0$, on obtient les équations

$$u = t_1 u', \qquad v = t_1 v', \qquad t_2 = t_1 t'_2, \qquad u'v' - t'_2 t_3 \dots t_\mu = 0.$$

Si $\mu > 2$, Y' est singulier aux points y tels que $u' = v' = 0$, et que deux au moins des variables $t'_2, t_3, \dots, t_\mu$ s'annulent ; on a alors

$$\widehat{\mathcal{O}}_{Y',y} \simeq k[[u', v', t_1, t'_2 \dots, t_{d-1}]]/(u'v' - t'_2 \dots t_\mu).$$

Pour $i > 2$ (resp. $j > i > 2$), la composante irréductible définie par $u' = v' = t'_2 = t_i = 0$ (resp. $u' = v' = t_i = t_j = 0$) a pour image la composante de Y définie par $u = v = t_2 = t_i = 0$ (resp. $u = v = t_i = t_j = 0$). On a une description identique pour $t'_2 \neq 0$.

Par suite, X' a bien les propriétés voulues. En itérant ce processus, on aboutit à une variété non singulière.

2.4.2. En vue des applications ultérieures, on remarquera que, dans le processus décrit en 2.3.1 et 2.4.1, l'image inverse réduite du diviseur D de S est le support d'un diviseur à croisements normaux de la variété désingularisée X'. Sur les cartes décrites en 2.4.1 (i), qui sont lisses, l'image inverse réduite de D est définie par $u t'_1 t'_2 \dots t_r = 0$, qui est un diviseur à croisements normaux. Sur celles qui sont décrites en 2.4.1 (ii), elle est définie par $t_1 t'_2 \dots t_r = 0$, qui devient un diviseur à croisements normaux lorsqu'on aboutit à $\mu = 1$.

2.5. Cas des courbes nodales scindées

Revenons à la situation générale décrite en 2.2, et supposons maintenant que X soit une courbe nodale scindée sur S. On peut encore résoudre les singularités de X par éclatements de manière à avoir un isomorphisme hors de $\mathrm{Sing}(X)$.

2.5.1. En appliquant 2.3.1, on se ramène comme plus haut au cas où $\mathrm{Sing}(X)$ est de codimension 3 dans X. Cette suite d'éclatements transforme X en une nouvelle courbe nodale scindée. On remarque alors que X est régulier si et seulement si toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(D)$ sont des diviseurs de X. En effet, X étant scindé, l'anneau local complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ en un point singulier de X est de la forme

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{S,s}[[u,v]]/(uv - t_1 \dots t_\mu),$$

avec $2 \leq \mu \leq r$. Comme on l'a vu en 2.2.2, il existe une composante irréductible T_i de $\Sigma = \mathrm{Sing}(f)$ passant par x et se projetant sur D_i, pour tout i tel que $1 \leq i \leq \mu$. Comme X est scindé, il existe au-dessus du point générique η_i de D_i deux composantes irréductibles de $f^{-1}(\eta_i)$ passant par $T_i \cap f^{-1}(\eta_i)$, dont les adhérences fournissent deux composantes irréductibles de $f^{-1}(D_i)$ contenant T_i.

Il est clair qu'elles sont respectivement définies dans $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ par $u = 0$, $t_i = 0$ et $v = 0$, $t_i = 0$, et que ce ne sont pas des diviseurs au voisinage de x si $\mu \geq 2$. Par contre, si x est un point régulier de X, les composantes irréductibles de $f^{-1}(D_i)$ sont nécessairement des diviseurs en x.

2.5.2. On peut alors achever la désingularisation de X en éclatant les composantes irréductibles de $f^{-1}(D)$ qui ne sont pas des diviseurs. En effet, si $f' : X' \to S$ est obtenu en éclatant X le long d'une telle composante, le morphisme $\varphi : X' \to X$ est un isomorphisme hors de $\mathrm{Sing}(X)$, donc induit un isomorphisme entre le complémentaire d'un fermé de codimension ≥ 2 dans X' et le complémentaire d'un fermé de codimension ≥ 3 dans X. Par suite, les composantes irréductibles de $f^{-1}(D)$ et de $f'^{-1}(D)$ sont en correspondance bijective par φ^{-1}, et le nombre de composantes irréductibles de $f'^{-1}(D)$ qui ne sont pas des diviseurs est strictement plus petit que son analogue pour $f^{-1}(D)$. Un calcul local du même type que ceux de 2.3.1 et 2.4.1 permet de vérifier que X' est encore une courbe nodale scindée. Après un nombre fini de tels éclatements, on obtient donc une courbe nodale scindée telle que toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(D)$ soient des diviseurs, et le schéma obtenu est alors régulier.

3. ALTÉRATIONS STABLES DE COURBES POINTÉES

Au cœur des méthodes de de Jong se trouve un résultat (théorème 3.2.2) qui permet de transformer par altérations génériquement étales certaines familles de courbes pointées, lisses au dessus d'un ouvert non vide, en courbes stables au sens de Deligne et Mumford.

3.1. Modules des courbes stables pointées

Rappelons d'abord quelques résultats classiques sur les modules des courbes stables pointées.

3.1.1. Soient g, n deux entiers positifs tels que $n > 2 - 2g$. Rappelons (*cf.* Deligne-Mumford [13] et Knudsen [38]) qu'une *courbe stable de genre g, n-pointée,* au-dessus d'un schéma de base S, est un morphisme de présentation finie $\pi : C \to S$, propre, plat, muni de n sections distinctes $\sigma_i : S \to C$, tel que :

(i) Les fibres géométriques de π sont des courbes connexes et réduites C_s, $s \in S$, avec $\dim H^1(C_s, \mathcal{O}_{C_s}) = g$, et n'ayant pour singularités que des points doubles ordinaires ;

(ii) Les sections σ_i sont à valeurs dans le lieu lisse de f, et distinctes en tout point s ;

(iii) Si E est une composante rationnelle non singulière de C_s, la somme du nombre de points où E rencontre les autres composantes de C_s et du nombre de sections σ_i telles que $\sigma_i(s) \in E$ est au moins 3.

3.1.2. Pour S variable, la catégorie des courbes stables n-pointées de genre g forme un champ $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, qui est algébrique, propre et lisse sur Spec $\mathbb{Z}$ (*cf.* [13, th. 5.2] pour $n = 0$, [38, th. 2.7] dans le cas général), et muni d'un morphisme représentable $\overline{\mathcal{Z}}_{g,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ qui est une « courbe stable n-pointée universelle ». Nous noterons $\mathcal{M}_{g,n}$ l'ouvert de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ paramétrant les courbes stables lisses.

Soit ℓ un entier ≥ 3, et plaçons nous au-dessus de $\mathbb{Z}[1/\ell]$. On note ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$ le champ des courbes stables lisses de genre g, n-pointées, et munies d'une trivialisation du sous-groupe des points de la jacobienne annulés par ℓ. A priori, c'est un champ algébrique, muni d'un morphisme fini et étale ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}[1/\ell]$, et même un espace algébrique au sens d'Artin [2] et Knutson [39], car, sur un corps, les courbes stables munies d'une telle trivialisation n'ont pas d'automorphismes non triviaux. Pour $g \geq 2$, $n = 0$, c'est en fait un schéma quasi-projectif sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$: d'après [39, cor. 6.16], cela résulte de ce qu'il est séparé et quasi-fini sur le schéma de modules grossier des courbes lisses de genre g, quasi-projectif sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$ (Mumford [45, cor. 7.14]; voir aussi [49], [50]). C'est encore le cas si $g = 0$, $n = 3$ ou si $g = 1$, $n = 1$, par un argument spécifique. Pour n quelconque, la quasi-projectivité de ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$ peut s'en déduire en utilisant les isomorphismes de contraction $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{Z}}_{g,n}$ [38], qui montrent que ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n+1}$ s'identifie à un ouvert de la courbe stable universelle sur ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$.

On note ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ le normalisé de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ dans ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$ [13, (4.20)], qui est encore un champ algébrique fini sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. La démonstration de Deligne [12, prop. 3.5] est valable pour n quelconque, et montre que ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}[1/\ell]$ est un espace algébrique au-dessus de $\mathbb{Z}[1/\ell]$. Si $\ell = \ell_1\ell_2$, où ℓ_1 et ℓ_2 sont premiers entre eux et ≥ 3, ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est un espace algébrique au-dessus de $\mathbb{Z}$, car il est égal au normalisé de ${}_{\ell_1}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ au-dessus de $\mathbb{Z}[1/\ell_1]$ et à celui de ${}_{\ell_2}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ au-dessus de $\mathbb{Z}[1/\ell_2]$ (*cf.* [12, cor. 3.7]).

Sur un corps de caractéristique première à ℓ, on peut déduire de la projectivité du schéma de modules grossier des courbes stables de genre g (Mumford [46], sur un corps quelconque — voir aussi Knudsen [38, III] pour n quelconque, mais sur $\mathbb{C}$) que ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est un schéma projectif, mais nous n'aurons pas besoin d'utiliser ce résultat.

3.2. Altération en une famille de courbes stables

Donnons d'abord une définition générale.

3.2.1. Si $f : X \to S$ est un morphisme de type fini entre deux schémas nœthériens intègres, plat au-dessus d'un ouvert non vide V de S, et $\varphi : S' \to S$ une altération de S, l'*altéré strict* de f relativement à φ (ou à S') est le morphisme $f' : X' \to S'$, où X' est l'adhérence schématique de $\varphi^{-1}(V) \times_V f^{-1}(V)$ dans $S' \times_S X$.

Supposons de plus que la fibre générique de f soit non vide, lisse et géométriquement connexe. Alors X' est une altération de X, qu'on appelera *altéré strict* de X relativement à S'. Si S' est génériquement étale (resp. projectif) sur S, alors X' est génériquement étale (resp. projectif) sur X.

Le résultat-clé est alors le théorème suivant [31, 3.17-3.21] :

Théorème 3.2.2. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme propre entre deux schémas intègres excellents, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : S \to X$ des sections distinctes de f. On suppose vérifiées les conditions qui suivent :*

(a) *Les fibres de f sont non vides, géométriquement connexes, équidimensionnelles de dimension* 1 ;

(b) *Le lieu lisse de f est dense dans chaque fibre* ;

(c) *La fibre générique de f est lisse* ;

(d) *Pour tout point géométrique $\bar{s}$ de S, et toute composante irréductible E de $X_{\bar{s}}$, il existe au moins trois points distincts $\sigma_i(\bar{s}) \in E$ situés dans l'ouvert de lissité de f.*

Il existe alors un ouvert non vide $U \subset S$, une altération projective $\psi : S' \to S$ étale au-dessus de U, une courbe stable n-pointée $(g : C \to S', \tau_i : S' \to C)$, et un S'-morphisme $\varphi : C \to X'$, où X' est l'altéré strict de X relativement à S', tel que $\sigma_i \circ \psi = \varphi \circ \tau_i$ pour tout i, et tel que φ soit un isomorphisme au-dessus de $U' = \psi^{-1}(U)$.

Comme les courbes stables sont projectives, le morphisme $C \to X$ est alors une altération projective génériquement étale de X.

3.2.3. Pour prouver le théorème 3.2.2, on commence par construire une altération projective génériquement étale $S' \to S$, munie d'une courbe stable n-pointée $C \to S'$ telle qu'il existe un isomorphisme $u : C_{U'} \xrightarrow{\sim} U' \times_S X$ au-dessus d'un ouvert non vide $U' \subset S'$.

Si η est le point générique de S, on choisit deux entiers ℓ_1, $\ell_2 \geq 3$, premiers entre eux et premiers à la caractéristique de $\kappa(\eta)$; on pose $\ell = \ell_1 \ell_2$. Soit $U \subset S$ l'ouvert (non vide) au-dessus duquel ℓ est inversible, f est lisse, et les sections σ_i sont telles que, pour tout $s \in U$, on ait $\sigma_i(s) \neq \sigma_j(s)$ si $i \neq j$. Notons g le genre des fibres de f au-dessus de U. Comme $n \geq 3$, la restriction $f_U : X_U \to U$ de f à U est une courbe stable lisse de genre g, n-pointée, et définit un 1-morphisme $U \to \mathcal{M}_{g,n}[1/\ell]$ tel que X_U soit l'image inverse de la courbe stable pointée universelle $\mathcal{X}_{g,n}$. D'après 3.1.2, l'espace algébrique ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, fini sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, est donc propre sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Le lemme de Chow s'applique aux espaces algébriques (d'après

Raynaud-Gruson [52, cor. (5.7.14)], précisant Knutson [39, IV, th. 3.1]), et fournit un morphisme projectif d'espaces algébriques $\overline{\mathcal{M}}' \to {}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, qui soit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert quasi-projectif ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n} \subset {}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, et tel que $\overline{\mathcal{M}}'$ soit projectif sur Spec $\mathbb{Z}$. Il en résulte que $\overline{\mathcal{M}}'$ est un schéma projectif, que nous noterons $\overline{M}'$.

Le produit fibré $U \times_{\mathcal{M}_{g,n}} {}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$ est un U-schéma fini et étale, et chacune de ses composantes irréductibles est une altération finie génériquement étale de U. L'adhérence S' d'une telle composante dans $S \times \overline{M}'$ est alors une altération projective génériquement étale de S, et l'altéré strict X' de X relativement à S' est une altération génériquement étale de X, contenant les images inverses des sections σ_i. D'autre part, le morphisme composé $S' \to \overline{M}' \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ fournit par image inverse une courbe stable n-pointée $g : C \to S'$, dont la restriction au-dessus de l'image inverse U' de U s'identifie par construction à $X'_{U'}$. On est donc ramené au cas où l'on a la propriété supplémentaire :

(e) *Il existe une courbe stable n-pointée* $g : (C, \tau_1, \ldots, \tau_n) \to S$, *un ouvert non vide* $U \subset S$, *et un isomorphisme* $u : C_U \xrightarrow{\sim} X_U$ *envoyant* τ_i *sur* σ_i.

Soit T l'adhérence schématique du graphe de u dans $C \times_S X$. En utilisant la platification par éclatements de Raynaud-Gruson [52], on se ramène au cas où l'on a de plus :

(f) *Le schéma T est plat sur S.*

Enfin, on peut remplacer S par son normalisé S', qui est fini et birationnel sur S puisque S est excellent, et X par son altéré strict. Cela permet de supposer :

(g) *Le schéma S est normal.*

3.2.4. Supposons donc que $f : X \to S$ vérifie les conditions (a) - (g). On veut alors prouver que l'isomorphisme u se prolonge en un morphisme de courbes pointées $C \to X$ au-dessus de S.

Fixant un point $s \in S$, on introduit les décompositions en composantes irréductibles des fibres en s :

$$X_s = X_1 \cup \ldots \cup X_r, \quad C_s = C_1 \cup \ldots \cup C_{r'}, \quad T_s = T_1 \cup \ldots \cup T_{r''}.$$

Soient $p_1 : T \to C$, $p_2 : T \to X$ les deux projections. Vérifions d'abord que, pour tout $i \leq r$ (resp. tout $j \leq r'$), il existe un unique indice k_i (resp. k'_j) tel que $p_2(T_{k_i}) = X_i$ (resp. $p_1(T_{k'_j}) = C_j$), et un ouvert $V \subset X$ tel que $V \cap X_i$ soit non vide, et $p_2^{-1}(V) \to V$ un isomorphisme (resp. $V' \subset C$ ...). Comme X_s et T_s sont de dimension 1 (T étant plat sur S), p_2 est fini en dehors d'un ensemble fini $W \subset X_s$. Si x est un point de $X_s \setminus W$, il possède un voisinage ouvert $V \subset X$ au-dessus duquel p_2 est fini. Quitte à exclure un nombre fini de points $x \in X_s$, on peut supposer que f est lisse sur V, ce qui entraîne que V est normal. Comme p_2 est d'autre part birationnel, $p_2^{-1}(V) \to V$ est un isomorphisme, d'où l'assertion. On procède de même sur C.

Montrons maintenant que, pour tout $i \leq r$, et pour $k = k_i$, le morphisme $p_1 : T_k \to C_s$ est non constant. Sinon, soit $c = p_1(T_k)$ son image. On peut trouver 3 indices α, β, γ tels que $x_\alpha = \sigma_\alpha(s)$, $x_\beta = \sigma_\beta(s)$ et $x_\gamma = \sigma_\gamma(s)$ soient des points distincts de X_i, situés dans le lieu de lissité de f. Au voisinage de ces points, X est normal, et la factorisation de Stein de p_2 montre que les schémas $T_\lambda = p_2^{-1}(x_\lambda)$ sont connexes pour $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$. Ils contiennent respectivement les points $t_\lambda = (\tau_\lambda(s), x_\lambda)$, et $T_\lambda \cap T_k \neq \emptyset$, car T_k domine X_i. D'autre part, les points $c_\lambda = p_1(t_\lambda) = \tau_\lambda(s)$ sont distincts, parce que C est une courbe stable pointée. Deux cas pourraient se produire :

1) Le point c n'est pas l'un des 3 points c_λ. Alors les $p_1(T_\lambda)$ sont de dimension 1, puisqu'ils sont connexes et contiennent les points c et c_λ. Or ils sont deux à deux distincts, car les T_λ sont distincts, et il n'existe qu'une seule composante irréductible de T_s au-dessus d'une composante irréductible donnée de C_s. On trouve donc 3 composantes de C_s passant par un même point, ce qui contredit la stabilité de C.

2) Le point c est l'un des 3 points c_λ, par exemple c_α. Comme précédemment, $p_1(T_\beta)$ et $p_2(T_\gamma)$ sont de dimension 1. Ils se coupent en $c = c_\alpha$, donc en l'un des points définissant la structure de courbe stable pointée de C_s, ce qui est encore impossible.

De ces propriétés résulte que le morphisme $p_1 : T \to C$ n'a que des fibres finies. Or il est birationnel, et, comme S est normal, on déduit facilement du critère de Serre [EGA, IV, 5.8] que C est normal. Par suite, c'est un isomorphisme, ce qui fournit le morphisme $C \to X$ prolongeant u, et achève la démonstration du théorème 3.2.2.

4. ALTÉRATIONS DE VARIÉTÉS SUR UN CORPS

Nous expliquons maintenant la démonstration du théorème 1.2.2, dont nous reprenons les notations. La méthode consiste à effectuer une suite d'altérations sur X, en remplaçant à chaque étape X par son altéré X', et Z par son image inverse Z' dans X' (éventuellement agrandie comme en 4.1.3 plus bas), afin de se réduire finalement à la situation étudiée au paragraphe précédent. On procède par récurrence sur $d = \dim X$.

4.1. Réductions préliminaires

4.1.1. On peut supposer k algébriquement clos. Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, il suffit en effet d'appliquer le théorème 1.2.2 à une composante irréductible de $X \times \operatorname{Spec} \bar{k}$ et à l'image inverse de Z, de redescendre la situation à une extension finie k' de k sur laquelle tout est défini, et d'observer que, pour toute composante irréductible X' de $X \times \operatorname{Spec} k'$, le morphisme $X' \to X$ est une altération de k-variétés algébriques, génériquement étale si k est parfait.

4.1.2. On peut supposer que X est une variété projective : on applique le lemme de Chow pour obtenir une modification quasi-projective, puis on remplace X par son adhérence schématique $\overline{X}$ dans un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, et Z par $Z \cup (\overline{X} \smallsetminus X)$.

4.1.3. En éclatant Z, on peut supposer que Z est le support d'un diviseur. On peut ensuite remplacer si nécessaire Z par le support d'un diviseur plus grand, car tout fermé de $\overline{X}'$ contenu dans un diviseur à croisements normaux stricts, et de codimension 1 dans $\overline{X}'$, est encore le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.

4.1.4. Comme le morphisme de normalisation $X' \to X$ est une modification, on peut remplacer X par X' et Z par son image inverse dans X', ce qui permet de supposer X normal.

4.2. Construction d'une fibration en courbes

Soit $d = \dim X$. On veut modifier X de manière à se ramener au cas où X est une famille de courbes sur une base de dimension $d - 1$. On utilisera le lemme suivant, qui résulte de techniques classiques de géométrie projective :

Lemme 4.2.1. — *Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ un sous-schéma fermé réduit, purement de dimension $d < n$. Si $z \in \mathbb{P}^n \smallsetminus X$, on note $\mathbb{P}^{n-1}$ l'espace projectif paramétrant les droites de $\mathbb{P}^n$ passant par z, et $\mathrm{pr}_z : X \to \mathbb{P}^{n-1}$ le morphisme fini associant à $x \in X$ la droite joignant z et x. Si $d < n - 1$* (*resp. $d = n - 1$*), *il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{P}^n$ tel que, pour $z \in U$, le morphisme $\mathrm{pr}_z : X \to \mathrm{pr}_z(X)$ soit birationnel* (*resp. génériquement étale*).

Proposition 4.2.2. — *Soient X une variété projective de dimension d sur k, $Z \subset X$ le support d'un diviseur. On peut trouver un sous-ensemble fini S de points fermés réguliers de $X \smallsetminus Z$, tel que, si $\varphi : X' \to X$ est l'éclatement de S, il existe un morphisme $f : X' \to \mathbb{P}^{d-1}$ possédant les propriétés suivantes :*

(a) *Les fibres de f sont non vides, équidimensionnelles de dimension* 1 ;

(b) *L'ouvert de lissité de f est dense dans chaque fibre* ;

(c) *Si $Z' = \varphi^{-1}(Z)_{\mathrm{red}}$, la restriction de f à Z' est finie, et étale au-dessus d'un ouvert non vide de $\mathbb{P}^{d-1}$.*

Si l'on suppose que X est normal, on peut choisir S et f de sorte qu'on ait de plus :

(d) *L'une des fibres de f est lisse.*

(e) *Les fibres de f sont géométriquement connexes.*

On part d'un plongement de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$, et on applique $N - d$ fois le lemme 4.2.1 à la fois à X et à Z pour obtenir un morphisme fini génériquement étale $\pi : X \to \mathbb{P}^d$ dont la restriction à Z soit birationnelle sur $\pi(Z)$. Le lemme 4.2.1 permet encore de choisir un point $z \in \mathbb{P}^d \setminus \pi(Z)$ dans l'ouvert où π est étale, tel que le morphisme $\mathrm{pr}_z : \pi(Z) \to \mathbb{P}^{d-1}$ soit fini et génériquement étale. Soit $\widetilde{\mathbb{P}}^d = \{(x, \ell) \mid x \in \ell\} \subset \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^{d-1}$ la variété d'incidence, qui n'est autre que l'éclaté de $\mathbb{P}^d$ en z. On définit X' comme le produit $X \times_{\mathbb{P}^d} \widetilde{\mathbb{P}}^d$, qui s'identifie à l'éclaté de X le long de l'ensemble fini $S = \pi^{-1}(z)$, et on note $\varphi : X' \to X$ et $f : X' \to \mathbb{P}^{d-1}$ les morphismes définis par les projections.

La condition (a) résulte de ce que la fibre de f au-dessus d'un point $y \in \mathbb{P}^{d-1}$ correspondant à une droite $\ell \subset \mathbb{P}^d$ passant par z est l'adhérence de $\pi^{-1}(\ell \setminus \{z\})$ dans X', et de ce que π est fini. Chacune des composantes de $\pi^{-1}(\ell)$ s'envoie surjectivement sur ℓ, de sorte que chaque composante de $f^{-1}(y)$ rencontre les fibres exceptionnelles de φ; comme π est étale au-dessus de z, et $\widetilde{\mathbb{P}}^d \to \mathbb{P}^{d-1}$ lisse le long de la fibre exceptionnelle, f est lisse le long de $\varphi^{-1}(S)$, ce qui entraîne (b). La condition (c) est claire. Par construction, π s'identifie à une projection linéaire centrée en une sous-variété linéaire $L \subset \mathbb{P}^N$ de dimension $N - d - 1$, z correspond à une sous-variété linéaire L' de dimension $N - d$ contenant L et transverse à X, f est l'extension à l'éclaté de X le long de $X \cap L'$ de la projection linéaire centrée en L', un point $y \in \mathbb{P}^{d-1}$ correspond à une sous-variété linéaire H de dimension $N - d + 1$ contenant L, et la fibre $f^{-1}(y)$ est isomorphe à $X \cap H$: la condition (d) résulte ainsi du théorème de Bertini [33, th. 6.10]. Enfin, l'étude de la factorisation de Stein montre que les propriétés de f entraînent que ses fibres sont géométriquement connexes.

4.2.3. On applique alors la proposition précédente dans la situation obtenue en 4.1.4. Remplaçant X par X', et Z par $Z' = \varphi^{-1}(Z)$, on peut donc supposer qu'il existe une variété Y de dimension $d - 1$, et un morphisme $f : X \to Y$ vérifiant les conditions (a) - (e) de 4.2.2. La variété obtenue est encore normale, et f est lisse au-dessus d'un ouvert non vide de Y.

4.3. Transformation du diviseur en une famille de sections

La stratégie de de Jong consiste à se ramener à la situation du théorème 3.2.2. Pour cela, on va d'abord agrandir le diviseur donné $Z \subset X$ de manière à ce qu'il rencontre chaque composante irréductible de chaque fibre géométrique de f en au moins trois points où f est lisse, puis on altèrera Y pour transformer Z en réunion de sections de f.

Proposition 4.3.1. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés projectives sur k vérifiant les conditions* (a) *et* (b) *de* 4.2.2. *Il existe un diviseur $H \subset X$ tel que* :

(i) *La restriction de f à H est finie et génériquement étale*;

(ii) *Pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y et toute composante irréductible C de la fibre géométrique $X_{\bar{y}}$ de f en $\bar{y}$, $C \cap H$ contient au moins trois points distincts de l'ouvert de lissité de f.*

On choisit un faisceau très ample $\mathscr{L}$ sur X, et, pour un entier $n \geq 1$ fixé, soit $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}$ le plongement dans un espace projectif défini par $\mathscr{L}^{\otimes n}$. Soient $\mathbb{P}^{\vee}$ l'espace des hyperplans L de $\mathbb{P}$, et $T \subset \mathbb{P}^{\vee} \times Y$ l'ensemble des couples (L, y) tels que L contienne une composante irréductible de $f^{-1}(y)$; T est fermé, car, si $T' \subset \mathbb{P}^{\vee} \times X$ est la restriction au-dessus de X de la sous-variété d'incidence de $\mathbb{P}^{\vee} \times \mathbb{P}$, T est l'ensemble des points au-dessus desquels la fibre du morphisme propre $\mathrm{Id} \times f : T' \to \mathbb{P}^{\vee} \times Y$ est de dimension ≥ 1. Une estimation sur la dimension des fibres de la seconde projection $T \to Y$ fournit l'inégalité

$$\dim T \ \leq \ \dim Y + \dim \mathbb{P}^{\vee} - n.$$

Pour n assez grand, il existe donc un ouvert non vide $V \subset \mathbb{P}^{\vee}$ dont les points correspondent à des hyperplans L dont l'intersection avec chaque fibre de f est finie.

Fixons un point fermé $y \in Y$, et soit $U \subset V$ l'ouvert des hyperplans $L \in V$ tels que $L \cap f^{-1}(y)$ soit contenu dans le lieu lisse de f, et tels que L coupe transversalement $f^{-1}(y)$. L'ouvert U est non vide, et, si $L \in U$, et si $H = X \cap L$, le morphisme $f_{|H}$ est fini. Si $x \in f^{-1}(y) \cap H$, la lissité de f en x et la transversalité de L et $f^{-1}(y)$ entraînent que f est étale en x. Comme $\dim H = \dim Y$, toute composante irréductible de H s'envoie surjectivement sur Y, et la condition (i) est remplie.

Reste à assurer la condition (ii). On commence par l'assurer au voisinage de y. Comme H est étale sur Y aux points de $f^{-1}(y)$, on peut trouver un ouvert W contenant y tel que $H \cap f^{-1}(W)$ soit étale sur W et soit contenu dans le lieu lisse de f. Pour toute composante irréductible C d'une fibre $f^{-1}(y')$ au-dessus d'un point $y' \in W$, l'intersection $C \cap H$ a alors pour cardinal le degré de C, et la condition est remplie dès que $n \geq 3$. On procède ensuite par récurrence nœthérienne. Si on a construit H' vérifiant (i), ainsi que (ii) au-dessus d'un ouvert W' de Y, on choisit un point $y'' \notin W'$, et on lui applique le raisonnement précédent pour trouver un diviseur H'' vérifiant (i), et (ii) au-dessus d'un voisinage ouvert W'' de y''. Le diviseur $H' \cup H''$ a alors les propriétés voulues au-dessus de $W' \cup W''$, d'où la récurrence.

4.3.2. On applique la proposition 4.3.1 dans la situation obtenue en 4.2.3. D'après 4.1.3, on peut remplacer Z par $Z \cup H$, ce qui permet de supposer désormais que Z vérifie :

(f) *Pour toute composante irréductible C d'une fibre géométrique de f, $C \cap Z$ contient au moins* 3 *points situés dans l'ouvert de lissité de f.*

4.3.3. Remarquons maintenant que, si $Y' \to Y$ est une altération projective génériquement étale, et $f' : X' \to X$ l'altéré strict de f relativement à Y', X' est une altération projective génériquement étale de X (voir 3.2.1). On pose $Z' = (Y' \times_Y Z)_{\mathrm{red}}$; Z' est encore le support d'un diviseur de X', et on vérifie sans difficulté que f' vérifie les mêmes propriétés que f.

On utilise cette remarque pour se ramener au cas où Z est réunion de sections de f. Soit en effet $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ la décomposition de Z en composantes irréductibles. On choisit une extension finie galoisienne L de $k(Y)$ telle que chacune des extensions $k(Z_i)$ de $k(Y)$ puisse être plongée dans L, et on introduit la normalisation Y' de Y dans L : le morphisme $Y' \to Y$ est alors une altération finie et génériquement étale. En définissant X' et Z' comme plus haut, on voit que $Z' = Z'_1 \cup \ldots \cup Z'_n$, où chacun des Z'_i est fini et birationnel sur Y'. Mais Y' est normal, de sorte que les morphismes $Z'_i \to Y'$ sont des isomorphismes, et définissent des sections $\sigma_i : Y' \to X'$ telles que $Z' = \bigcup \sigma_i(Y')$. On remplace alors Y par Y' et (X, Z) par (X', Z'), de sorte qu'on peut désormais supposer qu'on a de plus :

(g) *Il existe des sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de f telles que $Z = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i(Y)$.*

On remarquera que l'existence de telles sections est préservée par les altérations construites comme plus haut à partir d'altérations de la base.

4.4. Fin de la démonstration

Le morphisme $f : X \to Y$ vérifie maintenant les conditions (a) - (d) du théorème 3.2.2. Quitte à remplacer Y par une altération projective génériquement étale Y', et X par son altéré strict X' relativement à Y', on peut supposer qu'il existe une courbe stable C sur Y, et un morphisme $u : C \to X$, commutant aux sections données, et qui soit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert U de Y.

On considère le fermé $u^{-1}(Z) \subset C$, qui est purement de codimension 1. Si l'une de ses composantes n'est pas une des sections $\tau_i(Y)$, la condition (g) entraîne que celle-ci se projette en un fermé de codimension 1 dans Y, ne rencontrant pas U. Il existe donc un fermé $D \subset Y \smallsetminus U$, purement de codimension 1, tel que $u^{-1}(Z) \subset Z' = \tau_1(Y) \cup \ldots \cup \tau_n(Y) \cup g^{-1}(D)$. On remplace alors X par C, et Z par $Z' = \tau_1(Y) \cup \ldots \cup \tau_n(Y) \cup g^{-1}(D)$ (grâce à 4.1.3). On est ainsi ramené au cas où X est une courbe stable pointée de base Y, munie de sections τ_i, et Z est de la forme précédente, D étant un fermé de Y en dehors duquel f est lisse.

L'hypothèse de récurrence permet maintenant de trouver une altération génériquement étale $\psi : Y' \to Y$ telle que Y' soit lisse, et $D' = \psi^{-1}(D)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict de Y'. L'altéré strict de X relativement à Y' est alors $Y' \times_Y X$; c'est donc une courbe stable pointée $f' : X' \to Y'$, lisse hors de D'. De même, si on note τ_i' les sections images inverses des τ_i, Z est transformé en $Z' = \bigcup_i \tau_i'(Y') \cup f'^{-1}(D')$. On peut alors appliquer à X' la méthode de désingularisation exposée en 2.3 et 2.4. Comme on l'a remarqué en 2.4.2, Z est alors transformé en un diviseur à croisements normaux. Il est bien connu d'autre part qu'un diviseur à croisements normaux peut être rendu strict par une suite d'éclatements de centre régulier (on éclate les intersections de branches du diviseur), ce qui achève la démonstration.

5. ALTÉRATIONS DANS LE CAS RELATIF

Nous donnons maintenant quelques indications sur la démonstration du théorème 1.4.1. Elle est du même type que celle du théorème 1.2.2, et procède par récurrence sur la dimension relative de X sur A. Pour cela, nous aurons besoin d'une extension du théorème 3.2.2, permettant de transformer par altérations certaines familles de courbes $X \to S$ en courbes nodales scindées, à fibre générique lisse.

5.1. Altérations d'une courbe relative

On considère ici un morphisme propre $f : X \to S$ entre deux schémas intègres nœthériens excellents. Le résultat qu'utilise de Jong dans la démonstration du théorème 1.4.1 est le suivant [31, th. 6.8] (voir aussi [32, th. 2.4] pour un résultat plus précis et plus général) :

Théorème 5.1.1. — *Sous les hypothèses précédentes, supposons que les fibres de f soient non vides, équidimensionnelles de dimension* 1, *et que le lieu lisse de f soit dense dans chaque fibre. Alors* :

(i) *Il existe des altérations $\psi : S' \to S$, $\varphi : X' \to X$, et un morphisme $f' : X' \to S'$, avec $f \circ \varphi = \psi \circ f'$, tels que f' soit une courbe nodale scindée, à fibre générique lisse.*

(ii) *Si $Z \subset X$ est un fermé distinct de X, on peut imposer de plus qu'il existe des sections disjointes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de f', à valeurs dans le lieu lisse de f', et un diviseur $D' \subset S'$ tels que $\varphi^{-1}(Z)_{\mathrm{red}} \subset f'^{-1}(D')_{\mathrm{red}} \cup \sigma_1(S') \cup \ldots \cup \sigma_n(S')$.*

Nous indiquerons simplement les étapes essentielles de la démonstration. La stratégie consiste encore à altérer S et X de manière à ce que, au-dessus d'un ouvert de S, X devienne une courbe stable pointée.

5.1.2. Un point clé de la démonstration est de pouvoir construire après altération suffisamment de sections de f. Montrons d'abord que, pour tout $s \in S$, on peut trouver un voisinage étale U de s, un morphisme fini surjectif $U' \to U$ et des sections $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de $X_{U'} = U' \times_S X$ vérifiant la propriété suivante : pour tout point géométrique $\bar{s}'$ de U' et toute composante irréductible C de $X_{\bar{s}'}$, il existe i, j, $k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma_i(\bar{s}')$, $\sigma_j(\bar{s}')$ et $\sigma_k(\bar{s}')$ soient trois points distincts de C situés dans le lieu lisse de f.

On peut trouver un voisinage étale affine U de s au-dessus duquel X est projectif. On choisit un faisceau $\mathscr{L}$ sur X_U très ample relativement à U, et un entier $n \geq 3$ assez grand pour que toute section de $\mathcal{O}_{X_s} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ s'étende en une section de $\mathscr{L}^{\otimes n}$ sur X_U. Par Bertini, il existe une extension finie séparable k' de $\kappa(s)$ et une section $t \in \Gamma(X_{k'}, \mathcal{O}_{X_{k'}} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ telles que le sous-schéma fermé de $X_{k'}$ défini par t soit fini, étale sur k', et contenu dans le lieu lisse de $X_{k'}$. On choisit alors un morphisme $\psi : U' \to U$, étale et fini au voisinage de s, tel que $\psi^{-1}(s)$ soit réduit à un point s' où l'on ait $\kappa(s') = k'$. Quitte à réduire U, on peut supposer que t se relève en une section de $\mathscr{L}^{\otimes n}$ sur $X_{U'}$, et définit un sous-schéma fermé H du lieu lisse de f, fini et étale sur U'. Comme $\mathscr{L}$ est très ample et $n \geq 3$, H induit un diviseur contenant au moins 3 points distincts sur toute composante irréductible d'une fibre géométrique $X_{\bar{s}'}$, avec $\bar{s}' \in U'$. On achève en contruisant un morphisme fini surjectif $U'' \to U'$ telle que $H_{U''}$ soit réunion de sections de $X_{U''}$ (normaliser U' dans une extension normale finie commune des corps des fonctions rationnelles des composantes de H).

On peut ensuite globaliser de telles constructions faites sur un recouvrement étale de S de manière à obtenir une altération $S' \to S$ et des sections $\sigma_i : S' \to X_{S'}$ possédant la propriété voulue : on choisit un recouvrement étale $(U_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq r}$ de S tel que les U_α soient affines et d'image affine dans S, et que, sur chacun des U_α, on dispose d'un morphisme fini surjectif $U'_\alpha \to U_\alpha$ et de sections $\sigma_{\alpha,i}$ comme plus haut. Dans chaque U'_α, on peut choisir une composante irréductible dont l'image soit dense dans S, et on remplace U'_α par cette composante. Chacun des U'_α est quasi-projectif sur S, de sorte qu'on peut choisir une immersion $u_\alpha : U'_\alpha \hookrightarrow \mathbb{P}^N_S$, et plonger U'_α dans $\mathbb{P}^N_S \times_S X \times_S \dots \times_S X$ par

$$(u_\alpha, \sigma_{\alpha,i}) : U'_\alpha \hookrightarrow \mathbb{P}^N_S \times_S X \times_S \dots \times_S X.$$

Soit alors S'_α l'adhérence de U'_α dans $\mathbb{P}^N_S \times_S X \times_S \dots \times_S X$. Les morphismes $S'_\alpha \to S$ sont des altérations prolongeant les morphismes $U'_\alpha \to S$, telles que les σ_i se prolongent en des sections au-dessus de S'_α. On coiffe alors les S'_α par une composante irréductible de $S'_1 \times_S \dots \times_S S'_r$, et on prend pour famille (σ_i) la réunion des images inverses de toutes les familles $(\sigma_{\alpha,i})$.

5.1.3. On observe ensuite que, si l'on dispose d'une altération $S' \to S$, on en déduit une altération $\varphi : X' \to X$ en prenant pour X' une composante irréductible de $X_{S'}$ dominant X; les hypothèses faites sur f sont encore vérifiées pour $f' : X' \to S'$, et si l'on pose $Z' = \varphi^{-1}(Z)$, il suffit alors de prouver le théorème 5.1.1 pour (X', Z') au-dessus de S'.

Si η est le point générique de S, on commence en choisissant une extension finie L de $\kappa(\eta)$ telle que la normalisation de $(L \otimes X_\eta)_{\mathrm{red}}$ soit réunion de courbes lisses géométriquement irréductibles. On prend pour S' la normalisation de S dans L, et on définit X', Z' comme on vient de le voir. On remplace ensuite X' par sa normalisation, qui est une altération de X, et Z' par son image inverse. On est ainsi ramené au cas où la fibre générique de f est lisse et géométriquement irréductible.

Soit U un ouvert de S au-dessus duquel Z est fini et plat. Procédant comme en 5.1.2, on peut trouver une altération U' de U et des sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de $X_{U'}$ telles que $Z_{U'} = \sigma_1(U') \cup \ldots \cup \sigma_n(U')$, puis l'étendre en une altération $S' \to S$ telle que les σ_i se prolongent en des sections de $X_{S'}$. On définit alors X' et Z' comme plus haut. Le fermé Z' obtenu est contenu dans $f'^{-1}(S' \smallsetminus U') \cup \sigma_1(S') \cup \ldots \cup \sigma_n(S')$. En éclatant $S' \smallsetminus U'$, on se ramène au cas où il existe des sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de X et un diviseur $D \subset S$ tels que $Z \subset f^{-1}(D) \cup \sigma_1(S) \cup \ldots \cup \sigma_n(S)$.

On applique alors 5.1.2 pour obtenir une altération $S' \to S$ sur laquelle il existe des sections σ'_j telles que, pour toute composante irréductible C d'une fibre en un point géométrique $\bar{s}$, C contienne au moins 3 points $\sigma'_j(\bar{s})$ distincts situés dans le lieu lisse de f. Remplaçant S par S', et X par X' comme plus haut, et ajoutant les σ'_j aux σ_i, on se trouve alors sous les hypothèses du théorème 3.2.2. On se ramène ainsi au cas où X est une courbe nodale sur S, génériquement lisse, munie de sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, et où Z est contenu dans $f^{-1}(D) \cup \sigma_1(S) \cup \ldots \cup \sigma_n(S)$, D étant un diviseur de S.

Il reste à voir que l'on peut altérer S de manière à ce que la courbe nodale X soit de plus scindée. On montre pour cela qu'on peut trouver une altération $S' \to S$ au-dessus de laquelle il existe des sections $\sigma''_1, \ldots, \sigma''_m$ de $X_{S'}$ telles que, pour tout point géométrique $\bar{s} \in S'$, et tout point singulier $\bar{x} \in X_{\bar{s}}$, il existe k tel que $\bar{x} = \sigma''_k(\bar{s})$. La démonstration est analogue à celle de 5.1.2. Soit $\Sigma = \mathrm{Sing}(f)$, et fixons un point $s \in S$. Pour n assez grand, on peut trouver $t \in \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ définissant un sous-schéma fermé fini sur $\kappa(s)$ et contenant Σ_s. Quitte à augmenter n, on peut supposer que $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}) \to f_*(\mathcal{O}_\Sigma \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ est surjectif, et relever t en une section du noyau de $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}) \to f_*(\mathcal{O}_\Sigma \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$. Le sous-schéma réduit défini par cette section est fini et plat sur un voisinage étale U de s, et peut comme précédemment être transformé en réunion de sections par une altération de U. On achève alors comme en 5.1.2 pour trouver une altération globale $S' \to S$ ayant les propriétés voulues.

On ajoute les sections σ''_k aux sections σ_i, et on remarque que, génériquement, on obtient une nouvelle courbe stable lisse, $(n+m)$-pointée. On utilise à nouveau les schémas de modules pour construire un S-morphisme $v : C \to X$ entre une courbe stable $(n+m)$-pointée $(C, \tau_1, \dots, \tau_{n+m})$ et $(X, \sigma_1, \dots, \sigma_{n+m})$, qui soit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert non vide $U \subset S$. Comme C et X ont même genre, l'image inverse par u d'un point singulier $\bar{x}$ d'une fibre $X_{\bar{s}}$ est un point ou une chaîne de droites projectives. Mais l'une des sections σ_i passe par $\bar{x}$, et $\tau_i(\bar{s})$ est donc un point lisse de $C_{\bar{s}}$ d'image $\bar{x}$. Par suite, $u^{-1}(\bar{x})$ ne peut être réduit à un point, et est une chaîne de droites projectives. Il en résulte que les composantes irréductibles de $C_{\bar{s}}$ sont lisses. En altérant à nouveau S pour construire comme précédemment des sections passant par tous les points d'intersection des composantes, et par les ouverts de lissité de toutes les composantes, on obtient une courbe nodale scindée.

5.2. Schémas strictement semi-stables

On appelera *trait* le spectre d'un anneau de valuation discrète complet. Précisons d'abord la notion de paire semi-stable utilisée dans l'énoncé du théorème 1.4.1 :

5.2.1. Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un trait, π une uniformisante de A, $K = \operatorname{Frac} A$, X une S-variété. On note η le point générique de S, s son point fermé, X_η la fibre générique de X, X_s sa fibre spéciale, et X_i, $i \in I$, les composantes irréductibles de X_s. Pour tout sous-ensemble non vide $J \subset I$, on note $X_J = \bigcap_{j \in J} X_j$. On dira que X est *strictement semi-stable* sur S si :

(i) X_η est lisse sur $\kappa(\eta)$;

(ii) X_s est un schéma réduit, réunion schématique des X_i ;

(iii) Pour tout $i \in I$, X_i est un diviseur dans X ;

(iv) Pour tout $J \subset I$, $J \neq \emptyset$, X_J est lisse sur $\kappa(s)$, avec $\operatorname{codim}_X(X_J) = \#J$.

Explicitons sous ces hypothèses la structure locale de X le long de X_s. Soient $x \in X_s$, $X_1, \dots, X_r$ les composantes irréductibles de X_s auxquelles appartient x, $t_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ une équation locale de X_i dans X. Grâce à (ii) et (iii), on peut supposer que $t_1 \dots t_r = \pi$. D'après (iv), l'algèbre $\overline{B} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/(t_1, \dots, t_r)$ est formellement lisse sur $\kappa(s)$, et se relève donc en une A-algèbre locale complète formellement lisse B. L'homomorphisme canonique $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/\pi\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \to \overline{B}$ possède une section, qu'on peut relever en $B \to \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. On en déduit un isomorphisme

$$B[[t_1, \dots, t_r]]/(t_1 \dots t_r - \pi) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

On observe en particulier que X est un schéma régulier, et qu'il est lisse au voisinage de x au-dessus de $\operatorname{Spec} A[t_1, \dots, t_r]/(t_1 \dots t_r - \pi)$.

5.2.2. Avec les notations précédentes, soit $Z \subset X$ un fermé contenant la fibre spéciale X_s. On a alors $Z = Z_h \cup X_s$, où Z_h est l'adhérence schématique de la fibre générique de Z. Nous dirons que (X, Z) est une *paire strictement semi-stable* si :

(i) X est strictement semi-stable sur S ;

(ii) Z est un diviseur à croisements normaux stricts dans X ;

(iii) Si $Z_h = \bigcup_{i \in I} Z_i$ est la décomposition de Z_h en composantes irréductibles, alors, pour tout $J \subset I$, $Z_J = \bigcap_{i \in J} Z_i$ est réunion de S-variétés strictement semi-stables sur S.

Comme plus haut, on peut expliciter la structure locale de (X, Z) au voisinage d'un point $x \in X_s$. On reprend les notations précédentes, et on note de plus $Z_1, \ldots, Z_m$ les composantes irréductibles de Z_h auxquelles appartient x. Soit s_j une équation locale de Z_j au voisinage de x. Il résulte de (ii) que, si $J = \{1, \ldots, m\}$, les composantes irréductibles de $Z_{J,s}$ passant par x sont les $X_i \cap Z_J$, avec $1 \leq i \leq r$. Les images $\bar{s}_j$ des s_j font partie d'un système régulier de paramètres de l'algèbre locale complète $\overline{B}$, et la semi-stabilité de Z_J entraîne que la $\kappa(s)$-algèbre $\overline{C} = \overline{B}/(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m)$ est formellement lisse. On la relève en une A-algèbre formellement lisse C, et on obtient alors un isomorphisme de la forme

$$C[[t_1, \ldots, t_r, s_1, \ldots, s_m]]/(t_1 \ldots t_r - \pi) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

Inversement, si pour tout $x \in X_s$ il existe une telle présentation, où $t_1, \ldots, t_r$ (resp. $s_1, \ldots, s_m$) sont des éléments de $\mathcal{O}_{X,x}$ définissant les seules composantes de X_s (resp. Z_h) passant par x, alors (X, Z) est une paire strictement semi-stable.

5.3. Démonstration du théorème 1.4.1

5.3.1. On opère les premières réductions comme en 4.1. Une remarque additionnelle est que, si $S' \to S$ est un morphisme fini de traits, il suffit de montrer le théorème après avoir remplacé S par S', et X par une composante irréductible de $S' \times_S X$. On peut ainsi supposer remplies les conditions suivantes :

(i) X est projectif sur S ;

(ii) Z est le support d'un diviseur D de X ;

(iii) La fibre générique X_η de X est géométriquement intègre.

On peut de plus normaliser X. On se ramène alors au cas où on a en outre :

(iv) L'ouvert de lissité de X sur S est dense dans la fibre spéciale X_s de X.

Cette dernière réduction n'est pas évidente, et résulte du lemme suivant [31, lemme 2.13], dont nous omettrons ici la démonstration (due à Faltings) :

Lemme 5.3.2. — *Soient A un anneau de valuation discrète excellent, $S = \operatorname{Spec} A$, X un S-schéma normal, intègre, plat et de type fini, ξ un point générique de la fibre spéciale X_s de X. Il existe une extension d'anneaux de valuation* *discrète* $A \subset A'$, *telle que* $\mathrm{Frac}(A')$ *soit fini sur* $\mathrm{Frac}(A)$, *et telle que l'algèbre* $\mathcal{O}' = (\mathcal{O}_{X,\xi} \otimes_A A')^{\mathrm{norm}}$, *normalisation de la réduction de* $\mathcal{O}_{X,\xi} \otimes_A A'$, *soit formellement lisse sur* A' (i.e. *les localisés* $\mathcal{O}_i$ *de* $\mathcal{O}'$ *aux idéaux maximaux sont des anneaux de valuation discrète non ramifiés sur* A', *à extension résiduelle séparable*). *De plus, cette propriété reste valable après toute extension* $A' \subset A''$ *telle que* $\mathrm{Frac}(A'')$ *soit fini sur* $\mathrm{Frac}(A')$.

5.3.3. Soit d la dimension relative de X sur S. En appliquant 4.2.1 sur la fibre spéciale de X, et en relevant, on peut effectuer les contructions de 4.2 de manière relative (éventuellement après extension finie étale $S' \to S$). On altère ainsi X de manière à obtenir un morphisme de S-variétés projectives $f : X \to Y$ dont les fibres soient non vides, équidimensionnelles de dimension 1, et le lieu lisse dense dans chaque fibre.

On applique alors le théorème 5.1.1 à f, ce qui ramène au cas où f est une courbe nodale scindée génériquement lisse, et où il existe des sections σ_i à valeurs dans le lieu lisse de f, et un diviseur $D \subset Y$, tels que $Z \subset f^{-1}(D) \cup \sigma_1(Y) \cup \ldots \cup \sigma_n(Y)$. Quitte à agrandir D, on peut supposer que f est lisse au-dessus de $Y \setminus D$. On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence pour altérer (Y, D) en une paire strictement semi-stable. Remplaçant X par son altéré strict, les hypothèses précédentes sur f sont préservées.

La situation à laquelle on s'est ainsi ramené est alors celle qu'on a étudié en 2.5.2. On peut donc trouver une modification $X' \to X$ telle que X' soit régulier, et qui soit un isomorphisme au-dessus du complémentaire de $\mathrm{Sing}(f)$. Les σ_i se relèvent en des sections de X'; si l'on remplace X par X' et Z par l'image inverse Z' de Z dans X', les conditions précédentes restent satisfaites. Pour achever la démonstration, il suffit alors de vérifier que (X, Z) est maintenant automatiquement une paire strictement semi-stable. Pour cela, on utilise la caractérisation locale des paires strictement semi-stables donnée en 5.2.2 : pour tout $x \in X$ d'image $y \in Y$, on explicite sans difficulté la structure de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ à partir de celle de $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ (donnée par 5.2.2) et de 2.1.2, et l'assertion en résulte.

6. QUELQUES APPLICATIONS DES THÉORÈMES DE DE JONG

Les résultats de de Jong ont rapidement eu de nombreuses applications. Loin d'essayer d'en faire une liste complète, nous nous limiterons ici à donner quelques exemples illustrant l'emploi des théorèmes 1.2.2 et 1.4.1 ; on en trouvera d'autres dans l'introduction de [31]. Une situation type, que l'on rencontrera en 6.1 et 6.2, est celle où l'on procède par récurrence sur la dimension d'un schéma, et où il est possible de remplacer ce schéma par un revêtement fini.

6.1. Positivité des caractéristiques d'Euler-Poincaré

Soient A un anneau local régulier de dimension n, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k, M, N deux A-modules de type fini tels que $M \otimes_A N$ soit de longueur finie. Dans son Cours au Collège de France (1957-58, [55]), Serre a défini la multiplicité d'intersection de M et N par

$$\chi_A(M, N) \;=\; \sum_{i \geq 0} (-1)^i \lg_A \mathrm{Tor}_i^A(M, N).$$

Il a montré la formule des dimensions $\dim_A M + \dim_A N \leq \dim A$, et fait les conjectures suivantes :

(a) $\chi_A(M, N) \geq 0$ (positivité) ;

(b) Si $\dim_A M + \dim_A N < \dim A$, $\chi_A(M, N) = 0$ (annulation).

De plus, Serre a prouvé ces conjectures (ainsi que la réciproque de (b)) lorsque A est, soit d'égale caractéristique, soit d'inégale caractéristique et non ramifié (c'est à dire, si la caractéristique résiduelle p n'appartient pas à $\mathfrak{m}^2$). Dans le cas général, la conjecture (b) a été prouvée par Gillet et Soulé ([24], [25]), et par P. Roberts [53]. Malgré de nombreux efforts, la conjecture (a) était restée l'une des conjectures centrales en Algèbre Commutative (voir par exemple l'exposé de Roberts à Kyoto [54]). Elle vient d'être prouvée par Gabber [23], que je remercie pour toutes les explications qu'il m'a données sur sa démonstration, et pour m'avoir autorisé à l'exposer ici (elle fait partie d'un travail en préparation, dans lequel il donnera des résultats plus généraux) :

Théorème 6.1.1 (Gabber). — *Supposons que A soit d'inégale caractéristique, et que $p \in \mathfrak{m}^2$. Alors les conjectures* (a) *et* (b) *sont vraies.*

Grosso modo, l'idée générale qui sous-tend la démonstration de Gabber (inspirée par les techniques d'intersection de cycles de [37, 3]), consiste à remplacer la méthode classique de réduction à la diagonale par une réduction à un énoncé du même type pour des sous-schémas de l'espace projectif sur A. Grâce aux théorèmes de de Jong[2], l'un d'entre eux peut être supposé régulier, ce qui permet de se ramener à une intersection dans la réduction de son fibré normal sur $\mathrm{Spec}\, k$. On montre alors que ce fibré est engendré par ses sections globales, et l'énoncé est réduit à un résultat de positivité analogue à ceux de Fulton [22, ch. 12]. Cette méthode permet de démontrer simultanément les conjectures (a) et (b), en prouvant (b) par récurrence sur l'entier $d = \dim M + \dim N$, puis en prouvant (a) (le cas $d = 0$ résulte du calcul des $\mathrm{Tor}_i^A(k, k)$ par le complexe de Koszul). Par contre, la réciproque de (b), et la positivité des caractéristiques

[2] L'idée d'utiliser ceux-ci au lieu de la résolution des singularités suit ici une suggestion de Soulé.

d'Euler-Poincaré partielles [55, remarque de V, B.6], restent des problèmes ouverts dans le cas général.

6.1.2. Pour démontrer le théorème 6.1.1, on peut supposer A complet, car les $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$, étant de longueur finie, ne changent pas par passage aux complétés. Soient $n = \dim A$, W un anneau de Cohen de k, et B l'anneau de séries formelles $W[[T_1, \ldots, T_n]]$. Alors A possède une présentation de la forme $A \simeq B/(f)$ (où l'on peut choisir f tel que $f \equiv p \bmod \mathfrak{m}^2$). Par extension des scalaires de A à $W(\bar{k})[[T_1, \ldots, T_n]]/(f)$, où $\bar{k}$ est la clôture parfaite de k, on peut aussi supposer que k est parfait.

On va maintenant se ramener au cas où A est essentiellement de type fini sur W, par une variante de la méthode d'approximation pour les modules de dimension projective finie de Peskine et Szpiro [48, I.6]. Pour cela, on considère B comme le complété $\mathfrak{m}$-adique de $B_0 = W[T_1, \ldots, T_n]_{\mathfrak{m}}$, où $\mathfrak{m} = (p, T_1, \ldots, T_n)$, et on cherche à redescendre la situation sur l'hensélisé $\widetilde{B}$ de B_0. On choisit des présentations $K^\bullet$ et $L^\bullet$ de M et N par des complexes bornés de A-modules libres de type fini. Les différentielles de ces complexes sont définies par des matrices R_i, S_i à coefficients dans A, qu'on relève en des matrices R'_i, S'_i à coefficients dans B. Dire que $K^\bullet$ et $L^\bullet$ sont des complexes signifie que ces matrices vérifient des relations de la forme $R'_{i+1}R'_i = fU_i$, $S'_{i+1}S'_i = fV_i$ pour certaines matrices U_i, V_i à coefficients dans B. L'ensemble formé de f et des coefficients de toutes ces matrices est une solution d'un système d'équations algébriques, à valeurs dans le complété de B_0. Si on fixe un entier h, le théorème d'approximation d'Artin permet d'en trouver une solution $(\tilde{f}, \widetilde{R}'_i, \widetilde{U}'_i, \widetilde{S}'_i, \widetilde{V}'_i)$ à valeurs dans $\widetilde{B}$ qui soit congrue mod $\mathfrak{m}^h$ à la solution initiale. Soient $\widetilde{A} = \widetilde{B}/(\tilde{f})$, $\widetilde{K}^\bullet$ et $\widetilde{L}^\bullet$ les complexes de $\widetilde{A}$-modules libres définis par les réductions sur $\widetilde{A}$ des matrices $\widetilde{R}'_i$, $\widetilde{S}'_i$. On notera que $\widetilde{A}$ est régulier dès que $\tilde{f} \equiv f \bmod \mathfrak{m}^2$.

Il faut s'assurer que les complexes $\widetilde{K}^\bullet$ et $\widetilde{L}^\bullet$ sont acycliques en degrés $\neq 0$, définissant donc des $\widetilde{A}$-modules de type fini $\widetilde{M}$ et $\widetilde{N}$, que $\widetilde{M} \otimes_{\widetilde{A}} \widetilde{N}$ est de longueur finie, et que $\chi_A(M, N) = \chi_{\widetilde{A}}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$. On munit pour cela les complexes $K^\bullet$, $L^\bullet$ et $K^\bullet \otimes L^\bullet$ de la filtration $\mathfrak{m}$-adique, et on considère les suites spectrales associées à ces complexes filtrés. On vérifie que, si l'on fixe arbitrairement un entier r_0, on peut trouver h tel que, pour $r \leq r_0$, les termes $E_r^{p,q}$ ne changent pas par approximation modulo $\mathfrak{m}^h$. Cela permet de faire passer les propriétés de dégénérescence et de finitude des suites spectrales relatives à $K^\bullet$, $L^\bullet$ et $K^\bullet \otimes L^\bullet$ aux suites spectrales relatives à $\widetilde{K}^\bullet$, $\widetilde{L}^\bullet$, et $\widetilde{K}^\bullet \otimes \widetilde{L}^\bullet$, et fournit les conclusions voulues.

6.1.3. En redescendant de l'hensélisé à un voisinage étale, on est donc ramené à la situation suivante : W est l'anneau des vecteurs de Witt d'un corps parfait de caractéristique p, et A est l'anneau local en un point régulier d'un schéma plat de type fini sur W. On note $S = \operatorname{Spec} W$, $X = \operatorname{Spec} A$, s le point fermé de X. Les suites de composition usuelles ramènent à prouver la conjecture lorsque M et N sont des quotients de A par des idéaux premiers. On note Y et Z les sous-schéma fermés intègres de X correspondants ; $Y \cap Z$ est concentré en s, et la formule des dimensions montre que $\dim Y + \dim Z \leq n$.

D'après de Jong, il existe une altération projective $\varphi : Z' \to Z$, tel que Z' soit régulier : si Z est concentré en caractéristique p, c'est le spectre de l'anneau local en un point d'une variété algébrique sur k, et on applique le théorème 1.2.2 ; si p est non diviseur de zéro sur Z, Z est le spectre de l'anneau local en un point d'une W-variété, et le théorème 1.4.1 fournit une altération Z' de Z semi-stable sur une extension finie de W : Z' est alors un schéma régulier. On choisit une immersion fermée de Z' dans un espace projectif $P = \mathbb{P}^N_X$ au-dessus de X, et on note $\pi : P \to X$ la projection, Y' l'image inverse de Y dans P. On remarquera que $Y' \cap Z'$ est concentré dans la fibre spéciale $\pi^{-1}(s)$.

Soient T un schéma de type fini sur X, $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ des complexes bornés de $\mathscr{O}_T$-modules, à cohomologie cohérente. Si $\mathscr{E}$ est parfait, et si $\operatorname{Supp}(\mathscr{E}) \cap \operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ est propre sur X et concentré au-dessus de s, on peut généraliser la définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré en posant

$$\chi_T(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \;=\; \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{lg}_A H^i(T, \mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_T} \mathscr{F}).$$

Si $U \subset Z$ est un ouvert non vide au-dessus duquel φ est fini, plat et surjectif, le complexe $\mathbb{R}\varphi_*(\mathscr{O}_{Z'})\big|_U$ est isomorphe à un module libre de type fini $\mathscr{O}_U^m$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, il suffit de prouver que $\chi_X(\mathscr{O}_Y, \mathbb{R}\varphi_*(\mathscr{O}_{Z'})) \geq 0$ (resp. $= 0$ si $\dim Y + \dim Z < n$). La formule de projection entraîne d'autre part que $\chi_X(\mathscr{O}_Y, \mathbb{R}\varphi_*(\mathscr{O}_{Z'})) = \chi_P(\mathscr{O}_{Y'}, \mathscr{O}_{Z'})$.

6.1.4. On veut ensuite se ramener à un calcul sur le fibré normal à Z' dans P.

On note $\mathscr{I}$ l'idéal de Z' dans P, qui est un idéal régulier. Localement, une suite régulière de générateurs de $\mathscr{I}$ définit une résolution de Koszul de $\mathscr{O}_{Z'}$ sur $\mathscr{O}_P$. Suivant la méthode de Serre, on la munit de la filtration $\mathscr{I}$-adique, et on considère la suite spectrale associée au complexe filtré ainsi obtenu [55, IV A.3]. A isomorphisme canonique près, cette suite spectrale ne dépend pas de la suite régulière choisie, et on obtient par recollement une suite spectrale

$$E_1^{p,q} \;=\; \mathscr{T}or_{-p-q}^{\operatorname{gr}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_P)}(\operatorname{gr}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_{Y'}), \mathscr{O}_{Z'})^p \quad\Rightarrow\quad E^n \;=\; \mathscr{T}or_{-n}^{\mathscr{O}_P}(\mathscr{O}_{Y'}, \mathscr{O}_{Z'})$$

(où l'exposant p désigne la composante de degré p).

Soit $E = \operatorname{Spec}(\operatorname{gr}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_P))$ le fibré normal à Z' dans P. La suite spectrale précédente implique que $\chi_P(\mathscr{O}_{Y'}, \mathscr{O}_{Z'}) = \chi_E(\operatorname{gr}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_{Y'}), \mathscr{O}_{Z'})$. Comme $\mathscr{O}_{Y'} \otimes_{\mathscr{O}_P} \mathscr{O}_{Z'}$ est à support dans la fibre spéciale $\pi^{-1}(s)$, le faisceau $\operatorname{gr}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_{Y'})$ est annulé par une puissance de $\mathfrak{m}$. Soient Z'_s, E_s les fibres spéciales de Z' et E. Si on note $\mathscr{G}_i$ les composantes homogènes du gradué associé à $\mathrm{gr}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_{Y'})$ pour la filtration $\mathfrak{m}$-adique, la formule des dimensions entraîne que

$$\sup_i \dim \mathscr{G}_i = \dim Y' \leq r = \operatorname{codim}_P Z' = \dim(E_s/Z_s).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout faisceau cohérent $\mathscr{G}$ sur E_s dont le support est de dimension $\leq r$ (resp. $< r$), on a $\chi_{E_s}(\mathscr{G}, \mathscr{O}_{Z'_s}) \geq 0$ (resp. $\chi_{E_s}(\mathscr{G}, \mathscr{O}_{Z'_s}) = 0$).

6.1.5. Un point essentiel est alors que le faisceau normal $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_{Z'_s}) = \mathscr{N}_{Z'_s/E_s}$ est engendré par ses sections globales sur Z'_s.

Soient $S_1 = \operatorname{Spec} k$, $X_1 = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{m}^2$. Puisque $p \in \mathfrak{m}^2$ et que k est parfait, X_1 est de manière naturelle un k-schéma, isomorphe à $\operatorname{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/I^2)$, avec $I = (T_1, \dots, T_n)$. Considérons la réduction P_1 de P sur X_1 comme un S_1-schéma. Comme P_1 s'identifie au produit $X_1 \times_{S_1} \mathbb{P}^N_k$, le faisceau des formes différentielles $\Omega^1_{P_1}$ se décompose en

$$\Omega^1_{P_1} = \Omega^1_{P_1/S_1} \simeq \Omega^1_{P_1/X_1} \oplus \pi^* \Omega^1_{X_1/S_1}.$$

Le facteur $\mathscr{H}om(\Omega^1_{P_1/X_1}, \mathscr{O}_{P_s})$ est le faisceau tangent de l'espace projectif P_s, fibre spéciale de P, et est donc engendré par ses sections globales, de sorte qu'il en est de même pour $\mathscr{H}om(\Omega^1_{P_1}, \mathscr{O}_{P_s})$. Comme $\Omega^1_{P_1} \otimes_{A/\mathfrak{m}^2} k$ est localement libre sur $\mathscr{O}_{P_s}$, il suffit alors de s'assurer que le morphisme $\mathscr{H}om(\Omega^1_{P_1}, \mathscr{O}_{Z'_s}) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_{Z'_s})$, dual de $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{d} \Omega^1_{P_1} \otimes \mathscr{O}_{Z'_s}$, est surjectif.

Vérifions-le en un point fermé $\xi \in Z'_s$. Comme Z' est un sous-schéma régulier du schéma régulier P, l'homomorphisme $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \otimes \kappa(\xi) \to \mathfrak{m}_{P,\xi}/\mathfrak{m}^2_{P,\xi}$ est injectif. D'autre part, l'homomorphisme $d : \mathfrak{m}_{P,\xi}/\mathfrak{m}^2_{P,\xi} \to \Omega^1_{P_1,\xi} \otimes \kappa(\xi)$ est un isomorphisme : si $u_1, \dots, u_N$ sont des coordonnées locales de P_1 relativement à X_1, s'annulant en ξ, et si $t_1, \dots, t_n$ sont les images des T_i dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, il est clair que $u_1, \dots, u_N, t_1, \dots, t_n$ fournissent une base de $\mathfrak{m}_{P,\xi}/\mathfrak{m}^2_{P,\xi}$, et que leurs différentielles forment une base de $\Omega^1_{P_1,\xi} \otimes \kappa(\xi)$. L'assertion en résulte.

On achève alors en prouvant l'énoncé suivant (comparer avec Fulton, [22, th. 12.1]) :

Proposition 6.1.6. — *Soient Z un schéma propre sur un corps k, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_Z$-module localement libre de rang r, dont le dual $\mathscr{E}^\vee$ est engendré par ses sections globales, $E = \operatorname{Spec} \mathbb{S}(\mathscr{E})$ le fibré vectoriel sur Z défini par $\mathscr{E}$, $\sigma_0 : Z \to E$ la section nulle. Pour tout $\mathscr{O}_E$-module cohérent $\mathscr{G}$ dont le support est de dimension $\leq r$ (resp. $< r$), on a*

$$\chi_Z(\mathbb{L}\sigma_0^* \mathscr{G}) \geq 0 \quad (\textit{resp.}\ \chi_Z(\mathbb{L}\sigma_0^* \mathscr{G}) = 0).$$

En écrivant $\mathscr{E}^\vee$ comme quotient d'un $\mathscr{O}_Z$-module libre, on se ramène au cas où E est l'espace affine $\mathbb{A}^r_Z$ de base Z. Soient $T = \operatorname{Spec} k[t_1, \dots, t_r]$, $Z_T = T \times_{\operatorname{Spec} k} Z$,

$E_T = T \times_{\mathrm{Spec}\,k} E$, et soit $\mathcal{G}_T$ l'image l'image inverse de $\mathcal{G}$ sur E_T. Soient d'autre part σ_i, $i = 1, \dots, r$, les sections de base de E, et $\sigma = \sum_i t_i \sigma_i : Z_T \to E_T$. La section σ ainsi construite est une déformation paramétrée par T de la section σ_0, dont on notera σ_t la fibre au-dessus de $t \in T$.

Le faisceau $\mathcal{G}_T$ est plat sur T. Comme σ est une immersion régulière, $\mathbb{L}\sigma^*(\mathcal{G}_T)$ est de Tor-dimension finie relativement à T. Puisque Z est propre, il en résulte que, si l'on note $f : Z_T \to T$ la projection, le complexe $\mathbb{R}f_*(\mathbb{L}\sigma^*(\mathcal{G}_T))$ est un complexe parfait sur T, dont la fibre en un point $t \in T$ est le complexe $\mathbb{R}\Gamma(Z_t, \mathbb{L}\sigma_t^*(\mathcal{G}_t))$. En particulier, il est de rang constant sur T, égal à $\chi_Z(\mathbb{L}\sigma_0^*\mathcal{G})$. Pour prouver la proposition, on peut donc remplacer la section σ_0 par une section σ_t quelconque.

Soient $W = \mathrm{Supp}\,\mathcal{G}$, $g : E \to \mathbb{A}_k^r$ la projection. Si $\dim W < r$ (resp. $\dim W = r$), il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{A}_k^r$ tel que $W \cap g^{-1}(U) = \emptyset$ (resp. tel que le morphisme $W \cap g^{-1}(U) \to U$ soit quasi-fini). Quitte à faire une extension finie de k, on peut choisir un point rationnel $t \in U$. Lorsque $\dim W < r$, on obtient une section σ_t telle que $\sigma_t(Z) \cap W = \emptyset$. On a donc $\chi_Z(\mathbb{L}\sigma_t^*\mathcal{G}) = 0$. Lorsque $\dim W = r$, on obtient une section telle que $\sigma_t^{-1}(W)$ soit fini. On a alors

$$\chi_Z(\mathbb{L}\sigma_t^*\mathcal{G}) \;=\; \sum_{z \in \sigma_t^{-1}(W)} \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{E,\sigma_t(z)}}(\mathcal{O}_{Z,z}, \mathcal{O}_{W,\sigma_t(z)}) \;\geq\; 0,$$

chacune des caractéristiques d'Euler-Poincaré aux points $z \in \sigma_t^{-1}(W)$ étant positive d'après Serre [55, V B.4.a], parce que $\mathcal{O}_{Z,z}$ est quotient de $\mathcal{O}_{E,\sigma_t(z)}$ par une suite régulière.

6.2. Finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer

Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, W un anneau de Cohen de k, K son corps des fractions. Prolongeant certaines des méthodes de Dwork, Monsky et Washnitzer ont défini une théorie cohomologique associant à tout schéma X affine et lisse sur k des K-espaces vectoriels de cohomologie $H^*_{\mathrm{MW}}(X/K)$ [42]. Bien que légèrement antérieure à l'introduction de la cohomologie cristalline par Grothendieck [26], la théorie de Monsky et Washnitzer est restée beaucoup moins bien comprise. Beaucoup de propriétés de base de cette cohomologie (finitude, formule de Künneth, dualité de Poincaré, etc) n'étaient pas démontrées dans le cas général. En utilisant le théorème 1.2.2 de de Jong, et l'existence d'une théorie cohomologique définie plus généralement pour tout k-schéma de type fini, la *cohomologie rigide*, qui coïncide avec la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine et lisse, et avec la cohomologie cristalline dans le cas propre et lisse, il est maintenant possible de déduire ces propriétés de celles de la cohomologie cristalline [6].

Mentionnons qu'en ce qui concerne la finitude, il existe à côté de cette approche géométrique une approche plus analytique, s'appuyant sur le théorème de l'indice pour l'action des opérateurs différentiels sur certaines algèbres de fonctions analytiques p-adiques. Suggérée par Monsky par analogie avec sa démonstration de la finitude de la cohomologie de de Rham en caractéristique 0 [44] (elle-même inspirée par les travaux de Dwork sur la fonction zêta des hypersurfaces [14]), elle a été développée par Mebkhout au moyen de la théorie des $\mathscr{D}$-modules [41]. Lorsque le corps k est fini, le théorème de l'indice a été démontré récemment par Christol et Mebkhout [10], ce qui fournit donc dans ce cas une autre démonstration de la finitude.

6.2.1. Indiquons brièvement la méthode de construction de la cohomologie rigide (voir [4], [5], [6]). Soit X un schéma séparé de type fini sur k. On choisit une compactification $\overline{X}$ de X sur k, et on suppose ici pour simplifier qu'il existe une immersion fermée $\overline{X} \hookrightarrow P$ de $\overline{X}$ dans un schéma formel P sur W, lisse au voisinage de X. Suivant Raynaud, on associe à P un espace analytique rigide P_K sur K, sa *fibre générique*, muni d'un *morphisme de spécialisation* $\mathrm{sp} : P_K \to P$, qui est un morphisme d'espaces annelés (intuitivement, on associe à un point $x \in P_K$ de coordonnées entières sur K le point fermé $\mathrm{sp}(x) \in |P|$ ayant pour coordonnées les réductions modulo p des coordonnées de x). Pour toute partie localement fermée Y de la fibre spéciale P_k de P, on définit le *tube de Y dans P* comme l'ouvert (pour la topologie d'espace analytique) $]Y[_P = \mathrm{sp}^{-1}(Y) \subset P_K$. Le tube d'un sous-schéma fermé de P joue ici le même rôle que les voisinages infinitésimaux dans la construction de la cohomologie de de Rham algébrique donnée par Hartshorne en caractéristique 0 [27].

Soit $T = \overline{X} \setminus X$. La réunion disjointe $]\overline{X}[_P =]X[_P \amalg]T[_P$ n'est pas un recouvrement admissible en général. On appelle *voisinage strict de $]X[_P$ dans $]\overline{X}[_P$* tout ouvert $V \subset]\overline{X}[_P$ tel que $(V,]T[_P)$ forme un recouvrement admissible de $]\overline{X}[_P$. L'exemple de base est le suivant : X est la droite affine $\mathbb{A}^1_k$, $\overline{X}$ est la droite projective $\mathbb{P}^1_k$, T se réduit au point à l'infini sur $\mathbb{P}^1_k$, P est l'espace projectif formel sur W, P_K est la droite projective analytique rigide sur K, $]\overline{X}[_P = P_K$, $]X[_P$ est le disque unité fermé $D(0, 1^+) \subset P_K$, $]T[_P$ est le disque unité ouvert centré à l'infini dans P_K, et un ouvert $V \subset P_K$ est un voisinage strict de $]X[_P$ si et seulement s'il existe $\lambda > 1$ tel que le disque $D(0, \lambda^+)$ soit contenu dans V.

On définit alors la cohomologie rigide de X en posant

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) = H^*(]\overline{X}[_P, \varinjlim_V j_{V*} j_V^{-1} \Omega^{\bullet}_{]\overline{X}[}),$$

où j_V désigne l'inclusion de V dans $]\overline{X}[_P$. Il y a lieu de s'assurer que les groupes de cohomologie ainsi définis ne dépendent ni de la compactification $\overline{X}$, ni du schéma formel P, et sont fonctoriels en X. La démonstration, pour laquelle nous renvoyons à [6], s'effectue par la méthode du plongement diagonal, grâce à des théorèmes de fibration pour les tubes (*cf.* [5, 1.3]).

On dispose alors des théorèmes de comparaison suivants :

(i) Si X est propre et lisse sur k, il existe un isomorphisme canonique [6, 1.9]

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathrm{cris}}(X/W) \otimes_W K.$$

(ii) Si X est affine et lisse sur k, il existe un isomorphisme canonique [6, 1.10]

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathrm{MW}}(X/K).$$

Soit $Z \subset X$ un sous-schéma fermé. Une variante de la construction précédente permet de définir des espaces de cohomologie rigide à support dans Z, notés $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$. Ceux-ci donnent naissance aux suites exactes de cohomologie habituelles, et il est facile de vérifier qu'ils possèdent les propriétés d'excision usuelles. La construction d'un isomorphisme de Gysin

$$H^*_{Z,\mathrm{rig}}(Y/K) \xrightarrow{\sim} H^{*+2r}_{Z,\mathrm{rig}}(X/K),$$

lorsque $Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée de codimension r entre deux schémas lisses sur k, est nettement plus délicate, et n'est d'ailleurs faite pour l'instant que dans le cas relevable (*cf.* [6, th. 3.8], généralisant le résultat obtenu par Monsky lorsque X est affine, et $Z = Y$ une hypersurface principale [43]). Cela suffit toutefois pour démontrer le théorème qui suit [6, th. 3.1], ce qui entraîne donc la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

Théorème 6.2.2. — *Soient X un k-schéma lisse et séparé, $Z \subset X$ un sous-schéma fermé. Alors les espaces de cohomologie $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$ sont de dimension finie sur K.*

La démonstration est du même type que celle de Hartshorne en caractéristique 0 [27, II, th. 6.1], le théorème de de Jong remplaçant ici la résolution des singularités. On prouve par récurrence sur n les deux assertions suivantes :

$(\mathrm{a})_n$ Pour tout k et tout schéma X lisse et séparé sur k de dimension $\leq n$, $H^*_{\mathrm{rig}}(X/K)$ est de dimension finie ;

$(\mathrm{b})_n$ Pour tout k, tout schéma X lisse et séparé sur k, et tout sous-schéma fermé $Z \subset X$ de dimension $\leq n$, $H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K)$ est de dimension finie.

L'assertion $(\mathrm{a})_0$ est immédiate, et l'assertion $(\mathrm{b})_0$ résulte de l'isomorphisme de Gysin. Pour prouver $(\mathrm{a})_n$, on fait une extension finie de k pour se ramener au cas où X est géométriquement connexe, et trouver, grâce au théorème 1.2.2, une altération génériquement étale $\varphi : X' \to X$, et une immersion ouverte $X' \hookrightarrow \overline{X}'$, où $\overline{X}'$ est projectif et lisse sur k. Par comparaison avec la cohomologie cristalline, les espaces $H^*_{\mathrm{rig}}(\overline{X}'/K)$ sont de dimension finie sur k, et, grâce à $(\mathrm{b})_{n-1}$ et à la suite exacte de cohomologie à support dans un fermé, il en est de même des espaces $H^*_{\mathrm{rig}}(U'/K)$ pour tout ouvert $U' \subset \overline{X}'$. Pour la même raison, il suffit de prouver la finitude de $H^*_{\mathrm{rig}}(U/K)$ pour un ouvert non vide quelconque de X. On se ramène ainsi au cas où X est affine, de sorte que $H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \simeq H^*_{\mathrm{MW}}(X/K)$, et où X possède un revêtement étale X' tel que $H^*_{\mathrm{MW}}(X'/K) \simeq H^*_{\mathrm{rig}}(X'/K)$ soit de dimension finie. Utilisant le morphisme trace construit par Monsky et Washnitzer [42, th. 3.8], on voit alors que l'homomorphisme $H^*_{\mathrm{MW}}(X/K) \to H^*_{\mathrm{MW}}(X'/K)$ est injectif, d'où l'assertion $(a)_n$.

Pour prouver $(b)_n$, une extension finie de k permet de supposer que les composantes irréductibles de Z sont géométriquement intègres. Par excision, et grâce à $(b)_{n-1}$, on se ramène au cas où X est affine, et Z lisse et connexe sur k ; on peut même remplacer X par un ouvert U quelconque tel que $U \cap Z \neq \emptyset$. On peut alors utiliser le théorème de relèvement d'Elkik [15, th. 6] pour relever X en un schéma affine et lisse $\widetilde{X}$ sur W. Procédant à nouveau par excision, on peut supposer que Z est défini dans X par une suite de coordonnées locales, et que le sous-schéma $\widetilde{Z}$ de $\widetilde{X}$ obtenu en choisissant des relèvements de celles-ci est lisse sur W. On est alors dans une situation où l'on dispose d'un isomorphisme de Gysin, et l'assertion $(b)_n$ résulte alors de $(a)_n$.

Remarques 6.2.3. — (i) De Jong a donné une variante de l'argument précédent, remplaçant l'utilisation de l'isomorphisme de Gysin par un dévissage géométrique du même type que ceux du paragraphe 4 : voir l'appendice de [6].

(ii) Un argument du même type permet par exemple de montrer l'isomorphisme de Künneth en cohomologie de Monsky-Washnitzer : si X, Y sont deux schémas lisses et séparés sur k, et si $Z \subset X$, $T \subset Y$ sont deux sous-schéma fermés, on a plus généralement un isomorphisme

$$H^*_{Z,\mathrm{rig}}(X/K) \otimes_K H^*_{T,\mathrm{rig}}(Y/K) \xrightarrow{\ \sim\ } H^*_{Z\times T,\mathrm{rig}}(X \times Y/K).$$

6.3. Monodromie en cohomologie étale

Nous nous limiterons ici à donner deux exemples montrant comment le théorème 1.4.1 peut servir de substitut au théorème de réduction semi-stable pour donner des informations sur l'action du groupe d'inertie sur la cohomologie ℓ-adique d'un schéma de type fini sur un corps local.

Soient A un anneau de valuation discrète hensélien, K son corps des fractions, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $I \subset G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe d'inertie, ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique de K. Si X est un K-schéma de type fini, et $X_{\overline{K}} = \overline{K} \otimes_K X$, les espaces de cohomologie étale $H^i_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$, et de cohomologie étale à supports propres $H^i_{\mathrm{\acute{e}t,c}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$, sont munis d'une action naturelle de G, et fournissent en particulier des représentations ℓ-adiques de I. On sait que, si p est la caractéristique du corps résiduel k de A, les propriétés de cette représentation sont très différentes selon que $\ell \neq p$ ou $\ell = p$.

6.3.1. Supposons d'abord que $\ell \neq p$, et soit i fixé. D'après le théorème de monodromie de Grothendieck [SGA 7, th. 1.2], la représentation ℓ-adique de I fournie par $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est quasi-unipotente : il existe un sous-groupe ouvert $I_1 \subset I$ tel que, pour tout $g \in I_1$, $(g - \mathrm{Id})$ soit nilpotent. Une question naturelle, qui s'inscrit dans le cadre général des problèmes d'indépendance par rapport à ℓ en cohomologie ℓ-adique, est de savoir si I_1 peut être choisi de manière indépendante de ℓ. Comme l'a observé Deligne, les théorèmes de de Jong permettent d'apporter une réponse positive à cette question.

Proposition 6.3.2. — *Avec les hypothèses précédentes, soit H l'un des espaces de cohomologie $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ ou $H^i_{\text{ét,c}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Il existe un sous-groupe ouvert $I_1 \subset I$, indépendant de ℓ, tel que l'action de I_1 sur H soit unipotente.*

Soit $\bar{k}$ le corps résiduel de l'anneau des entiers de $\overline{K}$. Considérons d'abord le cas où X est la fibre générique d'un schéma Y strictement semi-stable sur A. L'action de I peut alors être déterminée à partir de l'étude des faisceaux de cycles évanescents $R^q\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$ sur $Y_{\bar{k}} = \bar{k} \otimes_A Y$. Leur calcul, fait par Grothendieck [SGA 7, I 3.3] et Rapoport-Zink [51, th. 2.21], entraîne que I agit trivialement sur les $R^q\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$ (voir aussi Illusie [30, th. 3.2] ; ce calcul a d'autre part été généralisé par C. Nakayama dans le cadre de la géométrie logarithmique [47]). Lorsque X est propre, la suite spectrale des cycles évanescents

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(Y_{\bar{k}}, R^q\Psi(\mathbb{Q}_\ell)) \quad \Rightarrow \quad H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell),$$

qui est G-équivariante, montre alors que, pour tout $g \in I$, $(g - \mathrm{Id})^{i+1}$ agit trivialement sur $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Supposons que X soit un K-schéma propre et lisse quelconque. Quitte à faire une extension finie de K, ce qui remplace I par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que X est géométriquement connexe. Le théorème 1.4.1 permet de trouver une extension finie K' de K telle qu'il existe un schéma strictement semi-stable Y' sur l'anneau des entiers de K', de fibre générique X', et une K-altération $\varphi : X' \to X$. Le morphisme $\varphi' : X' \to X_{K'}$ qui s'en déduit est encore une altération, donc est génériquement fini et plat, de degré d. Comme c'est un morphisme propre entre schémas lisses de même dimension, on dispose sur $X_{K'}$ du morphisme trace $\mathrm{Tr}_{\varphi'} : \mathbb{R}\varphi'_* \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$, dont le composé avec le morphisme canonique $\mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{R}\varphi'_* \mathbb{Q}_\ell$ est la multiplication par d. Si I' est le groupe d'inertie de K', il en résulte que $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ s'identifie à un facteur direct de $H^i_{\text{ét}}(X'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ en tant que I'-module, de sorte que l'action de I' sur $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente d'après ce qui précède.

Soit maintenant X un K-schéma séparé de type fini. Par récurrence sur $\dim X$, on en déduit alors que l'énoncé est vrai pour les $H^i_{\text{ét,c}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$. On peut en effet supposer X géométriquement intègre, et on applique le théorème 1.2.2 pour trouver une altération $\varphi : X' \to X$, où X' est ouvert dans une K-variété propre et lisse $\overline{X}'$. L'énoncé étant prouvé pour $H^i_{\text{ét}}(\overline{X}'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$, la suite exacte longue de cohomologie à supports propres et l'hypothèse de récurrence impliquent qu'il est vrai pour les $H^i_{\text{ét,c}}(U'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ pour tout ouvert $U' \subset \overline{X}'$. Si $U \subset X$ est un ouvert lisse, on dispose comme plus haut du morphisme $\mathrm{Tr}_{\varphi'} : \mathbb{R}\varphi'_* \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$, et on peut conclure comme avant pour les $H^i_{\text{ét,c}}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$. L'hypothèse de récurrence fournit alors le résultat pour les $H^i_{\text{ét,c}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Si X est lisse et séparé sur K, la dualité de Poincaré entraîne alors l'énoncé pour les $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Pour le prouver dans le cas général, on se ramène au cas affine par la suite spectrale d'un recouvrement, puis on se réduit au cas où X est intègre. On utilise alors le théorème 1.2.2 pour construire à la manière de Deligne [11, 6.2.5] un hyperrecouvrement propre de X :

$$\Big[\cdots \;\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\vdots}}\; X'_n \;\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\vdots}}\; \cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X'_1 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X'_0\Big] \xrightarrow{\ \varphi\ } X,$$

où les X'_i sont lisses, et les flèches $X'_{n+1} \to \operatorname{cosq}({}_nX'_\bullet)_{n+1}$ sont des sommes d'altérations projectives de chaque composante irréductible de $\operatorname{cosq}({}_nX'_\bullet)_{n+1}$ (en notant ${}_nX'_\bullet$ le squelette d'indice n de $X'_\bullet$). Par descente cohomologique, le morphisme naturel $\mathbb{Q}_{\ell,X} \to \mathbb{R}\varphi_* \mathbb{Q}_{\ell,X'_\bullet}$ est un isomorphisme, de sorte que, grâce à la suite spectrale qui en résulte, l'énoncé pour les $H^i_{\text{ét}}(X'_{n,\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ entraîne l'énoncé pour les $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

6.3.3. Considérons maintenant le cas où $\ell = p$. On suppose ici que K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, dont le corps résiduel k est parfait de caractéristique $p > 0$. Si X est un K-schéma de type fini, les espaces $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ fournissent encore des $\mathbb{Q}_p$-représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Pour les classifier, Fontaine a construit certains anneaux, munis d'une action du groupe $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (et de structures supplémentaires), au moyen desquels il a défini diverses sous-catégories de la catégorie des représentations p-adiques de G : on en trouvera une définition précise dans ses exposés au Séminaire de Bures ([19], [20]) — voir aussi l'exposé d'Illusie au Séminaire Bourbaki [29].

A partir des anneaux B_{st} et B_{dR}, Fontaine a introduit les notions de *représentation semi-stable* et *de de Rham*. De plus, une représentation V est dite *potentiellement semi-stable* s'il existe une extension finie K' de K telle que V soit semi-stable en tant que représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$.

Soit X un schéma propre et lisse sur K. Les *conjectures de Fontaine* C_{cris}, C_{st}, C_{pst}, C_{dR}, relient les représentations galoisiennes p-adiques $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ aux espaces de cohomologie de de Rham $H^i_{\text{dR}}(X/K)$, en passant dans le cas de bonne réduction (resp. de réduction semi-stable) par la cohomologie cristalline (resp. log-cristalline) de la fibre spéciale d'un modèle entier lisse (resp. semi-stable) Y de X sur A (*cf.* [29]). Nous en retiendrons seulement ici les conséquences suivantes :

(C_{st}) Si X est la fibre générique d'un schéma Y propre et semi-stable sur l'anneau A des entiers de K (au sens de 1.3), la cohomologie étale p-adique $H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est une représentation semi-stable de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

($\mathrm{C}_{\mathrm{pst}}$) Si X est une variété propre et lisse sur K, $H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est une représentation potentiellement semi-stable.

(C_{dR}) Si X est une variété propre et lisse sur K, $H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est une représentation de de Rham.

La conjecture $\mathrm{C}_{\mathrm{pst}}$ constitue dans le présent contexte l'analogue du théorème de monodromie de Grothendieck [20, 6.2.1]. Elle implique la conjecture C_{dR} [20, 5.6.7].

Lorsque $\dim X_K < (p-1)/2$, la conjecture C_{st} a été prouvée par Kato [34] par une méthode reprenant les techniques de cohomologie syntomique introduites par Fontaine et Messing [21], et déjà utilisées par Kato et Messing pour prouver $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$ sous les mêmes hypothèses [35]. Dans le cas des courbes, Faltings [17] a également donné une démonstration de C_{st}, par une extension des méthodes de [16]. Enfin, les méthodes de Faltings et de Kato ont été prolongées par Tsuji, qui a donné une démonstration de C_{st} en toute généralité ([56], [57]).

D'autre part, d'après Faltings [16], la conjecture C_{dR} s'obtient de manière analogue à la conjecture $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$ à partir de ses résultats sur la théorie de Hodge p-adique (voir aussi les précisions apportées dans [18]).

Grâce au théorème 1.4.1, les résultats de Tsuji entraînent maintenant la conjecture $\mathrm{C}_{\mathrm{pst}}$. Pour le voir, on procède comme en 6.3.2. On se ramène d'abord au cas où X est géométriquement connexe, puis on choisit une extension finie K' de K telle qu'il existe un schéma strictement semi-stable Y sur l'anneau des entiers de K', de fibre générique X', et une altération $\varphi : X' \to X$. Utilisant encore le morphisme trace relatif à $X' \to X_{K'}$, on voit que $H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ s'identifie à un facteur direct de $H^*_{\text{ét}}(X'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ en tant que représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$. Comme toute sous-représentation d'une représentation semi-stable est semi-stable, le théorème de Tsuji appliqué à $H^*_{\text{ét}}(X'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ entraîne que $H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est semi-stable en tant que représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$, d'où $\mathrm{C}_{\mathrm{pst}}$. Comme corollaire, on voit donc que le théorème de Tsuji entraîne C_{dR} pour les schémas propres et lisses sur K, redonnant ainsi une démonstration du résultat de Faltings.

Par contre, une extension de représentations de de Rham (resp. semi-stables) n'est pas nécessairement de de Rham (resp. semi-stable), de sorte que, bien que l'on s'attende à ce que les conjectures $\mathrm{C}_{\mathrm{pst}}$ et C_{dR} soient en fait valables pour tout K-schéma de type fini, on ne peut pas reprendre les méthodes de 6.3.2 pour passer du cas où X est propre et lisse au cas général. Il paraît néanmoins plausible qu'elles puissent résulter, à l'aide des théorèmes de de Jong, d'une généralisation convenable des résultats de Kato et Tsuji.

Remerciements. Je remercie B. Edixhoven, O. Gabber, L. Illusie, A. J. de Jong et L. Moret-Bailly pour leurs remarques sur divers états préliminaires de ce texte.

BIBLIOGRAPHIE

[EGA] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. IHES **24** (1965).

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, t. 3, Lecture Notes in Math. **305**, Springer-Verlag (1973).

[SGA 7] A. Grothendieck, M. Raynaud, D. S. Rim, *Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique*, t. 1, Lecture Notes in Math. **288**, Springer-Verlag (1972).

[1] D. Abramovich, A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and toroidal geometry*, preprint (1996).

[2] M. Artin, *The implicit function theorem in algebraic geometry*, in *Algebraic Geometry*, Proc. Bombay Coll., Tata Institute, Oxford University Press (1969), 13-34.

[3] M. Artin, G. Winters, *Degenerate fibers and reduction of curves*, Topology **10** (1971), 373-383.

[4] P. Berthelot, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p*, Journées d'analyse p-adique (1982), in D. Barsky, Ph. Robba (ed.), *Introduction aux cohomologies p-adiques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23**, p. 7-32 (1986).

[5] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Première partie (version provisoire 1991), Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[6] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, avec un appendice par A. J. de Jong, Prépublication IRMAR, 95-35, Université de Rennes (1995).

[7] E. Bierstone, P. Milman, *A simple constructive proof of canonical resolution of singularities*, in T. Mora, C. Traverso (ed.), *Effective methods in Algebraic Geometry*, Progress in Math. **94**, Birkhäuser (1991), 11-30.

[8] F. Bogomolov, T. Pantev, *Weak Hironaka theorem*, preprint (1996).

[9] S. Bosch, W. Lütkebohmert, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Math. Annalen **270** (1985), 349-379.

[10] G. Christol, Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III*, preprint (1995).

[11] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. I.H.E.S. **44** (1975), 5-77.

[12] P. Deligne, *Le lemme de Gabber*, in L. Szpiro (ed.), *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérique **127** (1985), 131-150.

[13] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), 75-109.

[14] B. Dwork, *On the zeta function of a hypersurface: III*, Annals of Math. **83** (1966), 457-519.

[15] R. Elkik, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Scient. École Norm. Sup. **6** (1973), 553-604.

[16] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, in J. I. Igusa (ed.), *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, John Hopkins Univ. Press (1989), 25-80.

[17] G. Faltings, *Crystalline cohomology of semi-stable curves and p-adic Galois representations*, Journal of Alg. Geom. **1** (1992), 61-82.

[18] G. Faltings, *The de Rham conjecture*, preprint (1993).

[19] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, in *Périodes p-adiques*, Séminaire de Bures 1988, Exp. II, Astérique **223** (1994), 59-111.

[20] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, in *Périodes p-adiques*, Séminaire de Bures 1988, Exp. III, Astérique **223** (1994), 113-184.

[21] J.-M. Fontaine, W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Mathematics **67** (1987), 179-207.

[22] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Math. **2**, 3. Folge, Springer-Verlag (1984).

[23] O. Gabber, *Non negativity of Serre's intersection multiplicities*, exposé à l'IHES, décembre 1995.

[24] H. Gillet, C. Soulé, *K-théorie et nullité des multiplicités d'intersection*, C. R. Acad. Sc. Paris **300** (1985), 71-74.

[25] H. Gillet, C. Soulé, *Intersection theory using Adams operations*, Inventiones Math. **90** (1987), 243-277.

[26] A. Grothendieck, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes* (IHES, Décembre 1966), notes by J. Coates and O. Jussila, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland (1968).

[27] R. Hartshorne, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES **45** (1976), 5-99.

[28] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero : I, II*, Annals of Math. **79** (1964), 109-326.

[29] L. Illusie, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique*, Séminaire Bourbaki 1989-90, Exp. 726, Astérique **189-190** (1990), 325-374.

[30] L. Illusie, *Autour du théorème de monodromie locale*, in *Périodes p-adiques*, Séminaire de Bures 1988, Exp. I, Astérique **223** (1994), 9-57.

[31] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Preprint **916**, University Utrecht (1995), à paraître aux Publ. Math. IHES.

[32] A. J. de Jong, *Families of curves and alterations*, preprint (1996).

[33] J.-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Math. **42**, Birkhäuser (1983).

[34] K. Kato, *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology*, in *Périodes p-adiques*, Séminaire de Bures 1988, Exp. VI, Astérique **223** (1994), 269-293.

[35] K. Kato, W. Messing, *Syntomic cohomology and p-adic étale cohomology*, Tôhoku Math. Journal **44** (1992), 1-9.

[36] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, Lecture Notes in Math. **339**, Springer-Verlag (1973).

[37] S. Kleiman, with the collab. of A. Thorup, *Intersection theory and enumerative geometry : a decade in review*, Proc. of Symp. in Pure Math. **46** (1987), p. 321-370.

[38] F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves, II, III*, Math. Scand. **52** (1983), 161-212.

[39] D. Knutson, *Algebraic spaces*, Lecture Notes in Math. **203**, Springer-Verlag (1971).

[40] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin (1970).

[41] Z. Mebkhout, *A propos du théorème de finitude pour la cohomologie p-adique,* exposé au Sém. de Géométrie Algébrique, Rennes, mai 1994.

[42] P. Monsky, G. Washnitzer, *Formal cohomology: I*, Annals of Math. **88** (1968), 181-217.

[43] P. Monsky, *Formal cohomology: II. The cohomology sequence of a pair*, Annals of Math. **88** (1968), 218-238.

[44] P. Monsky, *Finiteness of de Rham cohomology*, Amer. Journal of Math. **94** (1972), 237-245.

[45] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*, Ergebnisse der Math. **34**, Springer-Verlag (1982).

[46] D. Mumford, *Stability of projective varieties*, L'Ens. Math. 24 (1977), 39-110.

[47] C. Nakayama, *Nearby cycles for log smooth families*, preprint 94-70, Univ. Tokyo (1994).

[48] C. Peskine, L. Szpiro, *Dimension cohomologique finie et cohomologie locale*, Publ. Math. IHES **42** (1973), 47-119.

[49] M. Pikaart, A. J. de Jong, *Moduli of curves with non-abelian level structure*, in R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer (ed.), *The moduli spaces of curves*, Progress in Math. **129**, Birkhäuser (1995), 483-509.

[50] H. Popp, *Moduli theory and classification theory of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math. **620**, Springer-Verlag (1977).

[51] M. Rapoport, T. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimura-varietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Characteristik,* Inventiones Math. **68** (1982), 21-201.

[52] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Inventiones Math. **13** (1971), 1-89.

[53] P. Roberts, *The vanishing of intersection multiplicities of perfect complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. **13** (1985), 127-130.

[54] P. Roberts, *Intersection theory and the homological conjectures*, Proc. Int. Cong. Math., Kyoto 1990, Springer-Verlag (1991), 361-368.

[55] J.-P. Serre, *Algèbre locale, Multiplicités*, Lecture Notes in Math. **11**, Troisième édition, Springer-Verlag (1975).

[56] T. Tsuji, *Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles*, J. reine angew. Math. **472** (1996), 69-138.

[57] T. Tsuji, *On syntomic cohomology of higher degree of a semi-stable family*, preprint 606-01, RIMS, Kyoto (1995).

[58] M. Spivakovsky, *Resolution of singularities*, preprint (1994).

[59] O. Villamayor, *Constructiveness of Hironaka's resolution*, Ann. Scient. École Norm. Sup. **22** (1989), 1-32.

Pierre BERTHELOT

IRMAR

U.R.A. 305 du C.N.R.S.

Université de Rennes 1

Campus de Beaulieu

F-35042 Rennes cedex